

LIEGENDE ZYLINDRISCHE BEHÄLTER UND ROHRE AUF SATTELAGERN ENDLICHER BREITE

von

Raquel Inés Del Gaizo



Bericht Nr. 80 - 1

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Prof. Dr.-Ing. F W. Bornscheuer

Stuttgart 1980

Dieser Bericht wurde unter dem Titel "Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite" als Dissertation von Frau Raquel Inés Del Gaizo der Fakultät 2, Bauingenieur- und Vermessungswesen, der Universität Stuttgart am 19. 12. 79 vorgelegt. Die mündliche Doktorprüfung fand am 19. Juni 1980 statt.

Berichter waren:

Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. -Ing. R. Schardt

Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

Dünnwandige liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern bilden den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Es werden neue Ansätze für die Längsverteilung der Kontaktkräfte am Sattel vorgeschlagen. Die Schale kann sich dabei örtlich von den Sätteln abheben. Außerdem werden elastisch nachgiebige Sättel berücksichtigt, deren Form von der des Kreises mit dem Außenradius der Schale abweichen kann. Bei unterschiedlichen Füllhöhen zeigt es sich, daß die Beanspruchungen nicht proportional zur Reaktionskraft des Sattels sind. Für einen Behälter mit vorgegebenem Volumen erweist sich bei der Wahl der Abmessungen eine "gedrungene" Form als optimal. Günstig entworfene Sättel müssen eine Mindestbreite besitzen und verhältnismäßig große Öffnungswinkel aufweisen. Ferner hat die geeignete Anordnung der Sattellager eine große Bedeutung. Es ist besser, die Sättel möglichst nahe an die Behälterböden zu schieben, da diese eine wesentliche Versteifung der Behälter bewirken. Die Annahme, daß sich dünnwandige Behälter ähnlich zu Balken verhalten, kann zu falschen Ergebnissen führen. Man sollte deshalb auf solchen Vergleichen beruhende Näherungsformeln nicht verallgemeinern.

Summary

The present research deals with thin horizontal cylindrical vessels and pipes on saddle supports. New hypotheses are proposed here, concerning the interface pressure distribution in the saddle region in longitudinal direction. The shell can separate from the supports within the contact region. Furthermore, attention is given to flexible supports with forms which differ from the circle of the cylinder. Different levels of fill are studied, being the stresses in those cases not proportional to the saddle reactions. It is shown here, that an optimum design of a cylindrical vessel with a given volume, is reached by choosing a compact form rather than a longer one. The saddles require a minimum width,

and a relatively big angle of opening. The importance of the position of the saddle axis is also shown in this analysis. It is convenient, in the case of a vessel, to place the supports near the heads, since those stiffen the vessel considerably. The assumption that a thin vessel behaves as a beam can yield wrong results. Therefore, approximate formulae should not be generalized.

Resumen

El presente trabajo analiza recipientes cilíndricos y tuberías horizontales, apoyados sobre silletas. Se proponen aquí nuevas hipótesis para la distribución de la carga transmitida por la silleta, en dirección longitudinal. Se considera que la cáscara puede separarse de los apoyos dentro de la zona de contacto. Asimismo, se analiza el problema de apoyos flexibles, cuya forma puede diferir de la circular del cilindro. En el estudio se tienen en cuenta distintas alturas del nivel de líquido. En este caso, las tensiones no son proporcionales a las reacciones de apoyo. Se demuestra aquí, que para diseñar favorablemente un recipiente de un volumen dado, conviene elegir una forma compacta, en vez de una alargada. Los apoyos requieren un ancho mínimo y un ángulo de abertura relativamente grande. Se muestra la importancia de la posición que ocupa el eje de la silleta. En el caso de recipientes, es recomendable colocar los apoyos lo más cerca posible de los fondos, porque éstos rigidizan el sistema considerablemente. Del cálculo aproximado de un recipiente como si fuera una viga, pueden obtenerse resultados que no corresponden a la realidad. Por eso no deben generalizarse fórmulas aproximadas.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Literaturverzeichnis	9
Bezeichnungen	17
1. Einleitung	25
2. Berechnungsgrundlagen liegender Kreiszyylinder- schalen	31
2.1 Schalentheorie	31
2.2 Lösungsansätze	34
3. Ansätze in Umfangsrichtung bei der Berechnung der Sattellager	41
3.1 Allgemeines	41
3.2 Aufteilung der Sattelpressungen in Einzelkräfte	43
3.3 Ermittlung der Sattelkräfte	46
4. Berechnung in Längsrichtung mit dem Übertra- gungsverfahren	52
4.1 Ermittlung der Übertragungsmatrix	52
4.2 Durchführung der Übertragung	54
4.3 Abschließende Berechnung des Behälters auf Sattellagern	58
4.4 Betrachtungen zur numerischen Konvergenz	59
5. Ansätze in Längsrichtung bei der Berechnung von Sätteln endlicher Breite	64
5.1 Ansatz mit konstanter Sattelpressung in Längsrichtung	64
5.2 Ansatz einer Doppelschneide in Längs- richtung	67

5.3	Neu vorgeschlagene kombinierte Ansätze in Längsrichtung	69
6.	Berücksichtigung des örtlichen Abhebens am Sattel	73
7.	Zusätzliche Betrachtungen am Sattel	78
7.1	Unterschiedliche Sattelformen	78
7.2	Elastische Nachgiebigkeit des Sattels	79
7.3	Ansatz tangentialer Sattelkräfte	81
8.	Beispielrechnung für einen Behälter auf Schneidenlagern	84
9.	Vergleiche mit Untersuchungsergebnissen anderer Autoren an Rohren und Behältern	94
9.1	Vergleich der Sattelkräfte mit Berech- nungen von Brandes und Versuchen von Zwiesele	94
9.2	Vergleich der Dehnungen und Spannungen im Behälter mit Versuchen von Zwiesele	99
9.3	Vergleich mit neueren Versuchen von Decock und Sys und Berechnungen von Beeckman und Van Leeuwen	102
10.	Einfluß von Teilfüllungen	109
11.	Untersuchung der Behälterparameter	117
11.1	Allgemeines	117
11.2	Variation der Schalendicke t	118
11.3	Variation der Schalenradien r	123
11.4	Variation der Behälterlänge l	127
11.5	Gemeinsame Variation von r und l bei konstantem Behältervolumen	130

11.6	Schlußfolgerungen	132
12.	Vergleich der Schalenbeanspruchungen mit einem Balken	134
13.	Untersuchung der Sattelparameter	138
13.1	Allgemeines	138
13.2	Einfluß des Sattelwinkels φ	138
13.3	Einfluß der Sattelbreite	141
13.4	Einfluß der Sattelstellung	147
13.5	Schlußfolgerungen	152
14.	Zusammenfassung	154

Literaturverzeichnis

- [1] Zick, L.P.: Stresses in Large Horizontal Cylindrical Pressure Vessels on Two Saddle Supports. Welding Research Supplement 30 (1951), S.435/445.
- [2] British Standard 5500: Specification for unfired fusion welded pressure vessels (1976).
früher:
British Standard 1515: Part I: Carbon and ferritic alloy steels (1965).
Part II: Austenitic stainless steels (1968).
- [3] S.N.C.T.T.I.: Code de construction des appareils à pression - Règles de calcul (1969).
C7: Sollicitations autres que la pression, auxquelles sont soumis les appareils.
- [4] Decock, J.,
Sys, A.: Etude expérimentale de problèmes industriels. Mesures de contraintes sur deux réservoirs horizontaux reposant sur deux appuis. C.R.I.F.-MT 72 (1971).
- [5] Zwieseles, R.: Spannungsuntersuchungen an kreiszylindrischen Behältern auf Sattellagern. Dissertation, Universität Stuttgart (TH), 1967.

- [6] Brandes, K.: Die Lagerung des kreiszy-
lindrischen Rohres auf einer
kreisförmigen starren Schnei-
de.
Dissertation, TU Berlin, 1968.
- [7] Ruiz Rubio, C: Proyecto y construcción de
recipientes a presión.
Urmo, S.A. de Ediciones,
Bilbao, 1976, Primera
edición en español.
- [8] Flügge, W.: Stresses in Shells
Springer-Verlag, New York,
1973, Second edition.
- [9] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen.
Springer-Verlag, Berlin, 1957,
2. Auflage.
- [10] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und
ihre Anwendung in der Technik.
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [11] Křupka, V.: Horizontal steel vessels and
tubes with saddle supports.
Symposium Pipes and Tanks.
Theory and Practice (IASS),
Weimar, 1968.
- [12] Křupka, V.: Diskussion zu Lukasiwicz, S.:
Optimum Design of Shells
Loaded by Concentrated Forces.
Second Symposium - Theory of
Thin Shells - (IUTAM), Copen-
hagen, 1967.
Springer-Verlag, Berlin, 1969.
Editor: Niordson, F.I.

- [13] Křupka, V.: An Analysis for Lug or Saddle-Supported Cylindrical Pressure Vessels.
First International Conference on Pressure Vessel Technology, Delft, 1969.
- [14] Křupka, V.: Výpočet válcových tenkostěnných kovových nádob a potrubí. (Berechnung zylindrischer, dünnwandiger Stahlbehälter und Rohrleitungen - in tschechischer Sprache)
SNTL, Praha, 1967.
- [15] Schardt, R.,
Steingaß, J.: Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung dünnwandiger geschlossener Kreiszyklinderschalen.
Der Stahlbau 39 (1970) H.3, S.65/73 und H.5, S.146/150.
- [16] Make'ew, E.M.,
Fediì, S.P.: Kontaktaufgabe für einen zylindrischen Behälter, der auf elastischen Sattellagern ruht. (in russischer Sprache)
Prikładnaja Mechanika, Band XII (1976) Nr.8, S.16/22.
- [17] Mizoguchi, K.,
Hatsuda, T.: Strength of a Horizontal Reservoir Supported Partially by two Saddles in its Cylindrical Part.
Bulletin of JSME, Vol.18 (1975) Nr.123, S.932/939.

- [18] Wilson, J.D.,
Tooth, A.S.:
The Support of Unstiffened
Cylindrical Vessels.
Second International Conference on Pressure Vessel
Technology, San Antonio,
Texas, 1973.
- [19] Duthie, G.,
Tooth, A.S.:
The Analysis of Horizontal
Cylindrical Vessels Supported
by Saddles Welded to the Vessel.
A Comparison of Theory and Experiment.
Third International Conference
on Pressure Vessel Technology,
Tokyo, 1977.
- [20] Girkmann, K.:
Flächentragwerke.
Springer-Verlag, Wien, 1963,
6. Auflage.
- [21] Belluzzi, O.:
Scienza delle costruzioni.
Volume terzo.
Zanichelli editore, Bologna,
1960.
- [22] Haas, A.M.:
Láminas de hormigón.
Instituto Eduardo Torroja de la
Construcción y del Cemento,
Madrid, 1971.
- [23] Wunderlich, W.:
Differentialsystem und Über-
tragungsmatrizen der Biege-
theorie allgemeiner Rotations-
schalen.
Dissertation, TH Hannover, 1966.

- [24] Brownell, L.E.,
Young, E.H.: Process Equipment Design.
John Wiley & Sons, New York,
1959.
- [25] Mizoguchi, K.,
Hatsuda, T.: Strength of a Horizontal
Reservoir Supported Partially
by Equidistant Saddles.
Bulletin of JSME, Vol 14
(1971) Nr.74, S.745/752.
- [26] Alessi, R.
Ceccoli, C.
Chiarugi, A.: Tubi appoggiati su selle
distanziate, con le sezioni
estreme irrigidite da anelli.
Giornale del genio civile
(1974) Fasc.7^o-8^o-9^o,
S.315/330 und (1976)
Fasc.4^o-5^o-6^o, S.165/180.
- [27] Marguerre, K.,
Uhrig, R.: Berechnung vielgliedriger
Gelenkketten.
I. Das Übertragungsverfahren
und seine Grenzen.
ZAMM 44 (1964) H.1/2, S.1/21.
- [28] Beeckman, R.,
Decock, J.,
Sys, A.: A simplified design of hori-
zontal vessels on two saddle
supports.
C.R.I.F.- MT 61 (1970).
- [29] Beeckman, R.,
Van Leeuwen, D.: Programmes de calcul par
ordinateur développés par la
section chaudronnerie
C.R.I.F. - MT 113 (1976).

- [30] Mang, F.: Großrohre und Stahlbehälter. Festigkeits- und Konstruktionsprobleme. Verlag für angewandte Wissenschaften GmbH, Baden-Baden, 1971.
und
Festigkeitsprobleme bei örtlich gestützten Rohren und Behältern. Rohre, Rohrleitungsbau, Rohrleitungstransport (1970) H.4, S.207/213 und H.5, S.267/279.
- [31] Krupka, V.: Eine neue Methode der statischen Beurteilung von Behältern auf Sattellagern. Seminar Einfluß lokaler Spannungen bei Stahlrohrleitungen, Behältern und Druckgefäßen, Brno, 1973.
- [32] Krupka, V.: Thin cylindrical shell subjected to a line-load applied around a circumference. Symposium on tower-shaped steel and reinforced concrete structures (IASS), Bratislava, 1966.
- [33] Mang, F.: Berechnung und Konstruktion ringversteifter Druckrohrleitungen. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [34] Novozhilov, V.V.: The theory of thin shells. P.Noordhoff Ltd., Groningen, 1959.

- [35] Gerbeaux, H.: Spannungszustand eines liegenden zylindrischen Behälters auf Stützen.
Technische Mitteilungen GWK-Verband, Düsseldorf, Jan.1959.
Übersetzung aus "Chaudronnerie - Tôlerie", Nov.1958, S.11/31.
- [36] Gol'denveizer, A.L.: Theory of elastic thin shells.
Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [37] Timoshenko, S.P.,
Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells.
Mc Graw-Hill Book Company, Inc.,
New York, 1959, Second edition.
- [38] Vinet, R.,
Doré, R.: Stresses and deformations in a cylindrical shell lying on a continuous rigid support.
Transactions of the ASME,
Journal of Applied Mechanics
(1970), S.969/973.
- [39] Donnell, L.H.: Beams, Plates and Shells.
McGraw-Hill Book Company, Inc.,
New York, 1976.
- [40] Brandes, K.: Die Lagerung des Kreiszyylinderrohres auf einem starren Linienlager.
Der Stahlbau 40 (1971) H.10,
S.298/310.

- [41] Wunderlich, W.: Zur Berechnung von Rotations-
schalen mit Übertragungsmatri-
zen.
Ingenieur-Archiv 36 (1967)
H.4, S.262/279.
- [42] Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technischen
Anwendungen.
Springer-Verlag, Berlin, 1964,
4. Auflage.
- [43] Uhrig, R.: Elastostatik und Elastokinetik
in Matrizenschreibweise.
Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [44] Pestel, E.C.,
Leckie, F.A.: Matrix methods in elastomecha-
nics.
Mc Graw-Hill Book Company,
Inc., New York, 1963.

Bezeichnungen

Werkstoffkennwerte:

E Elastizitätsmodul

μ Querdehnzahl

Koordinaten:

x, φ, z Zylinderkoordinaten (Bild 1)

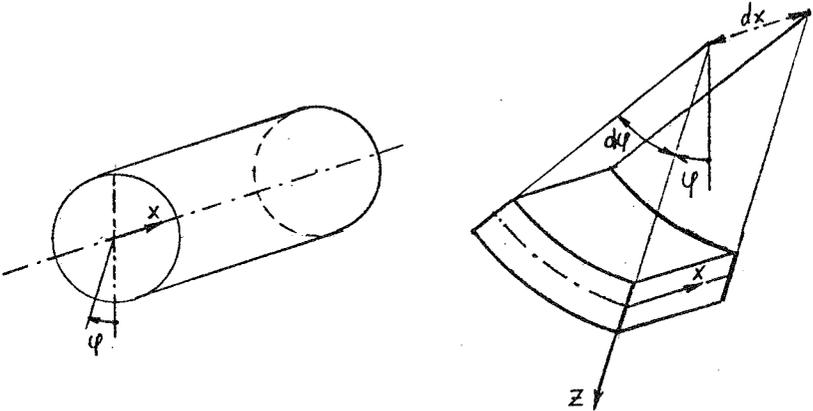


Bild 1: Koordinaten

Geometrische Größen: (nach Bild 2)

- | | |
|-------------|--|
| l | Zylinderlänge |
| r | Schalenradius |
| r_s | Sattelradius |
| t | Wanddicke |
| ϑ | Halber Umschließungswinkel des Sattels |
| a | Abstand der Sattelachse vom Boden |
| b | Sattelbreite |
| c | Abstand des Sattelanfangs vom Boden |

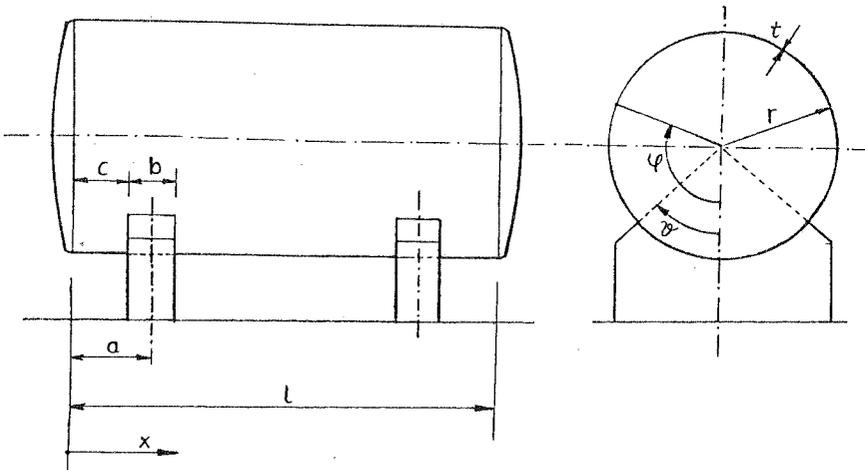


Bild 2: Definition von geometrischen Größen

Verschiebungen:

- | | |
|-----------|---|
| u, v, w | Verschiebungen eines Punktes in Richtung der Zylinderkoordinaten (Bild 3) |
| δ | Verschiebungsanteile in Kapitel 3 und 7 |
| D | Hilfsvektor in Kapitel 3 und 7 |
| γ | Vektor der Verschiebungen |

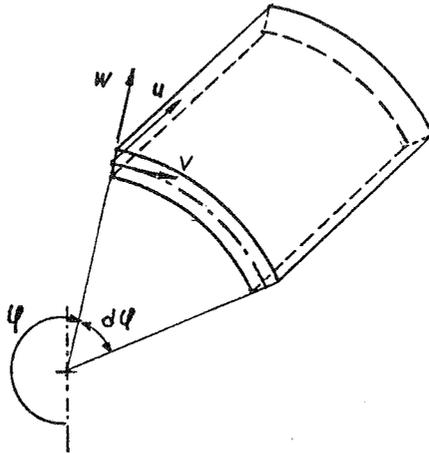


Bild 3: Verschiebungen

Verzerrungen und Spannungen:

ϵ, δ	Dehnungen und Verzerrungen der Schale
σ, τ	Normal- und Schubspannungen der Schale

Schnittgrößen: (Bild 4)

N_x, N_φ	Normalkräfte
$N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$	Schubkräfte
M_x, M_φ	Biegemomente
$M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$	Drillmomente
Q_x, Q_φ	Querkräfte
$\bar{Q}_x, \bar{N}_{x\varphi}$	Ersatzgrößen nach Kapitel 4.
\mathbf{x}	Vektor der Verschiebungen und Kräfte nach Kapitel 4.

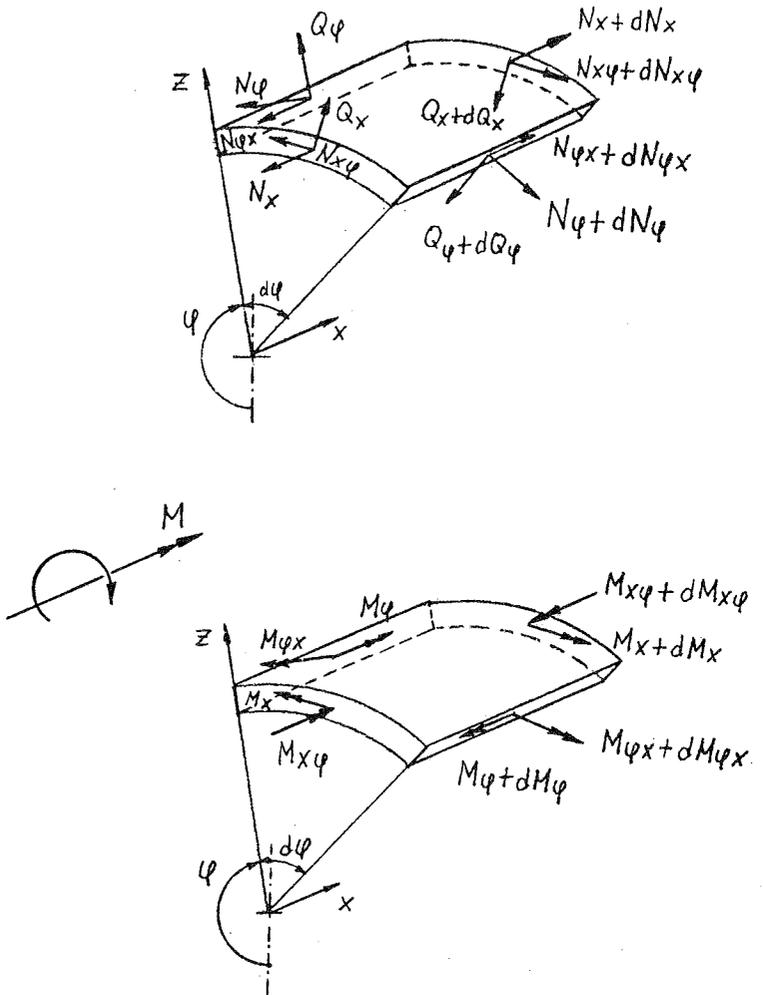


Bild 4: Schnittgrößen

Lastgrößen:

X, Y, Z

Äußere Kräfte (Bild 5)

F_i

Sattelkräfte nach Kapitel 3

F

Vektor der Unbekannten in Kapitel 3
und 7

Q

Lagerkraft

P

Vektor der äußeren Belastung

p

Sattelpressung

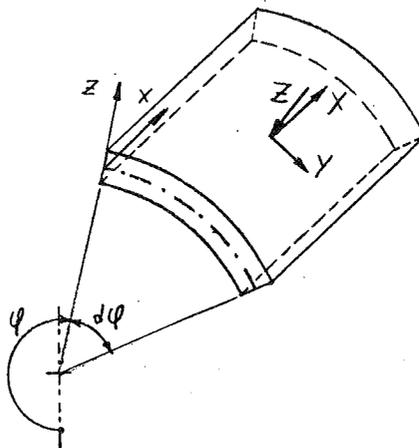


Bild 5: Äußere Kräfte

Steifigkeiten:

$$D = \frac{E t}{(1 - \mu^2)} \quad \text{Dehnsteifigkeit}$$

$$K = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{Biegesteifigkeit}$$

$$k = \frac{K}{D r^2} = \frac{t^2}{12 r^2} \quad \text{Hilfsgröße}$$

Sonstige Hilfsgrößen:

α	Halbe Verteilungsbreite der Sattelfkraft F_i
E	Einheitsmatrix
A, G	Koeffizientenmatrizen in Kapitel 2 und 4
M	Koeffizientenmatrix in Kapitel 3 und 7
U, V	Übertragungsmatrizen in Kapitel 4
B	Transformationsmatrix in Kapitel 4

Zusatzzeichen:

oben:

$()' = \frac{d}{dx} ()$	Ableitung einer Größe nach x
T	die Matrix liegt in transponierter Form vor

unten:

m	Zeichen für das m-te Reihenglied
i, j	Angabe für Ort und Ursache
N, M	Größe infolge Normalkraft oder Moment
a	Angabe für Spannungen an der Außenseite des Behälters (Abschnitt 9.3)
A, E	Angabe für Anfang bzw. Ende eines Abschnittes

P

Partikuläranteil

Weitere Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole werden im Text erläutert.

1. Einleitung

Behälter aller Art werden in der Industrie viel benötigt. Ein großer Teil von ihnen liegt horizontal und wird wie die Rohre in einzelnen Querschnitten auf Sätteln oder an Ringen gelagert. Auch Einzelstützen kommen vor. Sie sind aber nur für kleine Behälter und geringe Lasten geeignet. Bei sehr großen Abmessungen sind Ringe unvermeidlich. In bestimmten Fällen werden sie auch durch Berechnungsvorschriften zur Aussteifung der Querschnitte gefordert. Häufig ist die Lagerung auf Sätteln ohne Ringsteifen. Sie ist konstruktiv einfacher und wirtschaftlicher. Üblicherweise ordnet man bei Behältern nicht mehr als zwei Lager an. Damit vermeidet man zusätzliche Beanspruchungen aus ungleichmäßiger Auflagerung, Stützensenkungen und sonstigen Verformungen. In der vorliegenden Arbeit werden liegende Behälter über zwei Sattellagern und Rohre untersucht. Es werden verschiedene Teilfüllungen berücksichtigt.

Viele Berechnungsmethoden beruhen auf der Arbeit von Z i c k [1], der zuerst liegende Behälter auf Sattellagern systematisch untersucht hat. Er hat Messungen an verschiedenen großen Behältern durchgeführt und daraus eine Näherungsberechnung abgeleitet. Er entwickelt Formeln zur Ermittlung von Spannungen, die empirisch gefundene Konstanten enthalten. Diese passen die theoretischen Ergebnisse den Versuchsergebnissen an. Da nach seinen Messungen außerhalb der Sattelbereiche praktisch keine Umfangsbiegemomente M_{φ} vorhanden waren, betrachtet Zick den Behälter wie einen Balken. Am Sattel verformt sich der obere Teil des Behälters in Umfangsrichtung und wirkt deshalb nicht voll mit. Das verringert den wirksamen Querschnitt zur Aufnahme der Längsbeanspruchungen. In einiger Entfernung vom Sattel wirkt der ganze Kreisquerschnitt mit. Die Berechnung hat er deshalb an einem Balken mit veränderlichem Querschnitt durchgeführt. Angaben zu der Größe der mitwirkenden Bereiche hat Zick aus Versuchen abgeleitet. Damit war es ihm möglich, näherungs-

weise Bemessungsformeln anzugeben, um den Behälter in Längsrichtung zu dimensionieren. In Umfangsrichtung betrachtet er den Behälter am Sattel als Ring, der durch die mehr oder weniger entfernten Böden versteift wird. Er gibt einen cosinusförmigen Verlauf der radialen Sattelpressung an. Den Einfluß der Böden erfaßt Zick durch empirisch gefundene Koeffizienten. Durch Diagramme wird die Berechnung erleichtert.

B r o w n e l l und Y o u n g [24] erklären ausführlich die Ansätze von Zick und bringen einige zusätzliche Vorschläge für Formeln und Diagramme. Die Vorschläge von Zick wurden in mehrere internationale Vorschriften übernommen, wie z.B. die British Standard [2] und die Französische Norm SNCTTI-C7 [3]. R u i z R u b i o [7] bringt eine Zusammenfassung zu der British Standard 1515 und der Arbeit von Zick.

Für verhältnismäßig dickwandige Behälter, wie sie z.B. aus Gründen des Korrosionsschutzes gebaut werden, reichen diese Regeln meistens aus. Bei dünnwandigen Schalen ergeben sich nach British Standard 1515 [2] und SNCTTI-C7 [3] am Sattelhorn immer sehr hohe Biegespannungen in Umfangsrichtung und erfordern nach dieser Bemessungsweise Ringe zur Verstärkung. D e c o c k und S y s [4] erwähnen jedoch Behälter, die im Gebrauch sind und nicht diesen Regeln entsprechen, aber trotzdem keine Schäden zeigen. Sie haben in [4] neuere Versuche durchgeführt. Diese zeigten die Grenzen der Näherungsmethode. Nach Decock und Sys bewirken die Formeln von [2] und [3] eine teilweise übertriebene Überdimensionierung. Sie sind nicht auf sehr dünnwandige Behälter anwendbar. Bei Wanddicken unter 6 mm werden die Spannungen äußerst groß. Messungen in [4] ergaben dagegen bis zu zehnmal kleinere Werte als die Formel. Decock und Sys erinnern daran, daß die Bemessungsformeln von Zick, die die Grundlage für die Normen sind, auf Versuchen an dickwandigen Behältern beruhen und auf dünnwandige extrapoliert wurden. Besser als die Umfangsbiegespannung wird von Zick die Längsspannung σ_x bestimmt. Hier ergaben sich nur geringe Abweichungen zu

Versuchswerten.

Die Ergebnisse von Decock und Sys wurden von B e e c k - m a n n und V a n L e e u w e n [29] mit Hilfe von Finiten Elementen nachgerechnet und bestätigt. Auch B e e c k m a n n, D e c o c k und S y s [28] untersuchten kritisch die Umfangsbiegespannungen am Sattel nach der British Standard 1515 [2] und wiesen nach, daß z.B. die Sattelpfanne in der Formel von Zick eine vernachlässigbar kleine Rolle spielt. Danach würde sich für dünne Schalen auch bei breiten Sätteln kaum eine Abminderung der Spannungen in Umfangsrichtung ergeben. Alle diese Untersuchungen lassen Zweifel an der allgemeinen Gültigkeit der Formel für die Umfangsbiegespannung nach der British Standard zu.

Ausgehend von Zick versucht M a n g [30], die Berechnung der Beanspruchungen der Behälter in Umfangsrichtung zu verbessern. Er betrachtet den Behälter im Sattelpfannenbereich als einen Ring, der örtlich durch Sattelkräfte beansprucht wird. Der Ring selbst ist in tangentialer Richtung durch die Schubkräfte aus dem Behälter belastet. Mang vergleicht unterschiedliche Ansätze für die Verteilung der Sattelkräfte in ihrer Wirkung auf die Ringbiegemomente und vergleicht diese mit Meßwerten aus Versuchen. Er analysiert ausführlich eine "ideelle mitwirkende Schalenbreite" für M_{φ} am Sattel, die beim Abtragen der Querbeanspruchungen hilft. Diese Breite ist eigentlich über den Umfang veränderlich, doch genügt es für die Praxis, einen Mittelwert als konstante Breite anzusetzen. Eine entsprechende Möglichkeit zeigt Mang für die Berechnung der Membrankraft N_{φ} in Umfangsrichtung am Sattel. In Längsrichtung übernimmt Mang die Ansätze von Zick.

In einer ausführlichen Arbeit untersuchte Z w i e s e l e [5] die auftretenden Kontaktdrücke zwischen Behälter und Sattel. Dabei benötigte er komplizierte Meßvorrichtungen und Versuchsaufbauten, wie z.B. einen Sattel, der in Einzelsegmente aufgeteilt war. Dadurch konnte er Druckmessungen durchführen und auf diese Weise die Verteilung der Kräfte näherungsweise ermitteln. Er hat auch versucht, die Kontaktkräfte durch

Reibungsmessungen zu bestimmen, erhielt aber nur qualitative Ergebnisse, da die Reibungskoeffizienten stark streuten. Auf der Basis dieser Versuche entwickelte Zwiesele ein Berechnungsverfahren, das einen Näherungsansatz für die unbekanntes Kontaktkräfte am Sattel voraussetzt. Als Näherung bringt er einen etwa cosinus-förmigen Grundverlauf mit zwei zusätzlichen Einzelkräften an den Sattelhörnern. Einen ähnlichen Verlauf zeigt Bild 1.1. Er findet die Größe der Pressungen und Kräfte durch Probieren, bis die Verformungen von Schale und Sattel näherungsweise übereinstimmen. Im Vergleich dazu hat Zick in [1] einen cosinus-förmigen Verlauf angegeben, der am Sattelhorn auf Null ausläuft. Außerdem setzt er keine Einzelkräfte an den Sattelhörnern an.

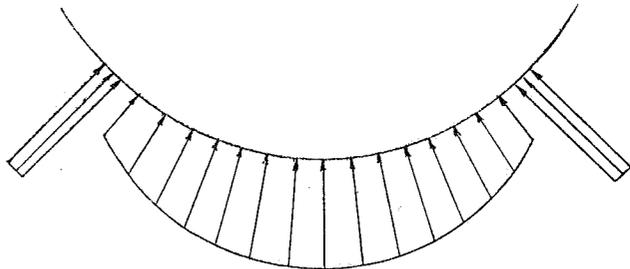


Bild 1.1: Näherungsverlauf der Kontaktkräfte

Brandes [6], [40] fand einen anderen Weg bei der Untersuchung langer Rohre auf Schneidenlagern. Dies sind Sattellager sehr geringer Breite. Brandes wählte eine Spannungsfunktion ϕ , die das Gleichgewicht befriedigt. Diese führte er in die Differentialgleichungen ein und erhielt eine Differentialgleichung 8. Ordnung für ϕ . Als Ansatz für die Sattelkräfte wählte er ein Polynom. Zur numerischen Lösung und Ermittlung der noch unbekanntes Koeffizienten benutzte er die Kollokationsmethode. Als einen verbesserten Ansatz fand Brandes eine Kraftverteilung am Sattel mit zusätzlichen End-

kräften. Der Verlauf sieht ähnlich wie in Bild 1.1 aus, besitzt jedoch keine Lücke neben dem Sattelende und die Spitzenkräfte sind in Einzellasten konzentriert.

Bei der Berechnung liegender Behälter werden von den Autoren verschiedene Schalentheorien als Grundlagen benutzt. Diese Schalentheorien unterscheiden sich zum Teil in einzelnen Annahmen oder Koeffizienten. Zu den am häufigsten benutzten Schalentheorien gehören die von Flügge [8], [9] und Wlassow [10]. Neben der ausführlichen Theorie von Wlassow ist es vor allem seine vereinfachte Halbbiegetheorie. Novozhilov [34] gibt dazu eine Zusammenfassung und schlägt noch eine Modifikation der Theorie vor. Daneben sind noch die Theorien von Timoshenko [37], Gol'denveizer [36] und Donnell [39] zu erwähnen.

In Erweiterung der Technischen Biegelehre gelangen Schardt und Steingaß [15] zu einer Theorie, die das Tragverhalten geschlossener Kreiszyinderschalen erfaßt. Sie hat eine Ähnlichkeit mit der Halbbiegetheorie von Wlassow [10], wie sie auch von Krupka [14] angewendet wird, erfaßt dazu aber zusätzliche Anteile der Widerstände der Schale gegen Belastung. Damit erhalten Schardt und Steingaß Differentialgleichungen, die formal analog zum elastisch gebetteten Balken unter Querlast mit axialer Zugkraft aufgebaut sind.

Auf Grund von Wlassow entwickelt Krupka [14], [32] ein Berechnungsverfahren für Kreiszyinderschalen. Dieses benutzt er speziell für die Untersuchung der Sattellagerung liegender Behälter. In [11], [12] verzichtet Krupka auf geschätzte Ansätze für die Kontaktpressungen. Er setzt unbekannte radiale Einzelkräfte am Sattel an, für die er Bestimmungsgleichungen aufstellt. Diese Gleichungen enthalten die Verformungsbedingungen am Sattel und lassen sich wie beim Kraftgrößenverfahren bestimmen, das man bei Stabwerken kennt. Damit ist es für Krupka möglich, Lösungen zu finden, die für die Praxis eine Berechnung der Verformungen und Beanspruchungen langer Behälter erlauben.

Ähnlich wie Krupka behandeln W i l s o n und T o o t h [18] das Problem. Ihre Grundlage ist die Schalentheorie von Flügge. Auch sie setzen im Sattelpbereich Einzelkräfte an. Zur Lösung benutzen sie Doppel-Fourierreihen. In Behälterlängsrichtung sind die Sattelpressungen immer konstant angesetzt. D u t h i e und T o o t h [19] gehen ebenfalls von der Schalentheorie nach Flügge aus. Ihre Ansätze entsprechen denen von Wilson und Tooth. Sie untersuchen neben radialen Sattelkräften auch tangentielle Kräfte und vergleichen die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung von Tangentialkräften. Die Arbeiten [18] und [19] sind eingeschränkt auf den Fall gelenkig gelagerter Böden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll es sein, mit Hilfe eines allgemeinen Berechnungsverfahrens Studien an liegenden Behältern und Rohren durchzuführen. Das Berechnungsverfahren beruht auf der Theorie der elastischen Schalen und ermittelt durch geeignete Diskretisierung der Sattelkräfte die Beanspruchungen im Behälter oder Rohr. Zunächst werden starre Sättel mit Schneidenform oder endlicher Breite betrachtet. Es werden verschiedene Möglichkeiten gezeigt, die Kraftverteilung am Sattel in Längsrichtung anzusetzen. Anschließend wird behandelt, wie man elastisch nachgiebige Lager oder Sättel berücksichtigt, deren Form von der Behälterform abweicht. Die Bedeutung der Teilfüllungen für die Bemessung wird untersucht. Ein örtliches Abheben der Behälter am Sattel wird in der Berechnung berücksichtigt. Nach der hier dargelegten Methode werden Untersuchungsergebnisse anderer Autoren nachgerechnet und verglichen. Es werden die Einflüsse der verschiedenen maßgebenden Parameter auf die Behälterbeanspruchungen untersucht. Diese Kenntnisse vom Tragverhalten der Schale erlauben es, Hinweise für die Praxis zu geben.

2. Berechnungsgrundlagen liegender Kreiszyklinderschalen

2.1 Schalentheorie

In dieser Arbeit werden die Schalen im elastischen Bereich untersucht. Ausgangspunkt der Schalenberechnung ist dabei die Theorie der Kreiszyklinderschalen von F l ü g g e [8]. Sie wird in der Darstellung von G i r k m a n n [20] angewendet. Alle Zusammenhänge am Element werden auf ein partielles Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen u , v , w reduziert.

Die Gleichgewichtsbedingungen am Element lauten:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + r X &= 0 \\ \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - Q_{\varphi} + r Y &= 0 \\ N_{\varphi} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi} + r Z &= 0 \\ r \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} - r Q_{\varphi} &= 0 \\ r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - r Q_x &= 0 \\ M_{\varphi x} + r(N_{x\varphi} - N_{\varphi x}) &= 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Die Schnittgrößen können durch Spannungen $\sigma_x, \sigma_{\varphi}, \tau_{\varphi x}, \tau_{xz}, \tau_{\varphi z}$ ausgedrückt werden. Die Querkräfte können eliminiert werden. Dies vereinfacht das Gleichungssystem.

Die Spannungs-Verzerrungsbedingungen am Element nach Hooke lauten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\varphi) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\varphi + \mu \epsilon_x) \\ \tau_{x\varphi} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{x\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r+z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Die Koordinate z gibt die Entfernung von der Mittelfläche der Schale an.

Man erhält daraus durch Umformung:

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu r \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} (1+\mu) r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \\ & + k \left[\frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - r^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{2} (1-\mu) r \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right] + \frac{r^2}{D} X = 0 \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\frac{1}{2}(1+\mu)r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}(1-\mu)r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} +$$

$$+ k \left[\frac{3}{2}(1-\mu)r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(3-\mu)r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right] + \frac{r^2}{D} Y = 0 \quad (2.4b)$$

$$\mu r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \left[\frac{1}{2}(1-\mu)r \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \varphi^2} - r^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{2}(3-\mu)r^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + r^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right] + \frac{r^2}{D} Z = 0 \quad (2.4c)$$

Dabei werden folgende Ausdrücke eingeführt:

$$D = \frac{E t}{(1 - \mu^2)} \quad \text{Dehnsteifigkeit} \quad (2.5)$$

$$K = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{Biegesteifigkeit} \quad (2.6)$$

$$k = \frac{K}{D r^2} = \frac{t^2}{12 r^2} \quad \text{Hilfsgröße} \quad (2.7)$$

Durch Integration des partiellen Differentialgleichungssystems erhält man eine allgemeine Lösung für die Kreiszyklinderschale.

Wenn man einzelne Faktoren oder Glieder der Differentialgleichungen vernachlässigt, kann man Vereinfachungen erzielen. Flüge selbst z.B. schlägt für dünne Schalen verschiedene Vereinfachungen vor. Streicht man dazu noch mehrere Terme mit k in den Differentialgleichungen, so erhält man nach einigen Umformungen eine partielle Differentialgleichung 8. Ordnung für w. Andere Vereinfachungen wurden von verschiedenen Autoren eingeführt.

Daneben gibt es andere Schalentheorien, die zu sehr ähnlichen partiellen Differentialgleichungssystemen kommen. Wlassow vernachlässigt in seiner Halbbiegetheorie besonders den Einfluß von M_x in einzelnen Gliedern und unterscheidet sich von dem Differentialgleichungssystem nach Flügge.

In der vorliegenden Arbeit dient das vollständige Flüggesche Differentialgleichungssystem als Grundlage für die weitere Schalenberechnung. Da bei allen Schalentheorien die numerische Auswertung Schwierigkeiten bereitet und bei den in Kapitel 4 benutzten Verfahren die oben beschriebenen Vernachlässigungen oder Abweichungen ohne Bedeutung sind, ist diese vollständige Theorie zu bevorzugen.

2.2 Lösungsansätze

Zur Beseitigung der partiellen Ableitungen wird eine Aufspaltung in Umfangs- und Längsrichtung vorgenommen. Für die Verschiebungen werden in Umfangsrichtung Fourieransätze folgender Art gewählt:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum u_m(x) \cos m\varphi \\ v &= \sum v_m(x) \sin m\varphi \\ w &= \sum w_m(x) \cos m\varphi \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Entsprechend sind auch die äußeren Lasten in Fourierreihen zu entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum X_m(x) \cos m\varphi \\ Y &= \sum Y_m(x) \sin m\varphi \\ Z &= \sum Z_m(x) \cos m\varphi \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Durch Ableitung von (2.8) und (2.9) nach φ , Einsetzen in die Differentialgleichungen (2.4) und einigen Umformungen ergibt sich für die m-ten Reihenglieder:

$$\begin{aligned} & r^2 u_m'' - \frac{1}{2}(1-\mu)m^2 u_m + \mu r w_m' + \frac{1}{2}(1+\mu) r m v_m' + \\ & + k \left[-\frac{1}{2}(1-\mu)m^2 u_m - r^3 w_m''' - \frac{1}{2}(1-\mu) r m^2 w_m' \right] + \frac{r^2}{D} X_m = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(1+\mu) r m u_m' - m^2 v_m + \frac{1}{2}(1-\mu) r^2 v_m'' - m w_m' + \\ & + k \left[\frac{3}{2}(1-\mu) r^2 v_m'' + \frac{1}{2}(3-\mu) r^2 m w_m'' \right] + \frac{r^2}{D} Y_m = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \mu r u_m' + m v_m + w_m + k \left[-\frac{1}{2}(1-\mu) r m^2 u_m' - r^3 u_m''' - \frac{1}{2}(3-\mu) r^2 m v_m'' + \right. \\ & \left. + r^4 w_m'''' - 2r^2 m^2 w_m'' + m^4 w_m - 2m^2 w_m + w_m \right] + \frac{r^2}{D} Z_m = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dabei wird festgelegt: $\frac{d}{dx} = ()'$

Damit ist das partielle Differentialgleichungssystem in ein totales Differentialgleichungssystem für die einzelnen Fourierkoeffizienten u_m , v_m und w_m umgewandelt worden.

Eine Fourierentwicklung in x-Richtung wäre ebenfalls möglich, konvergiert aber schlecht und schränkt die möglichen Randbedingungen ein.

In der folgenden Arbeit werden keine Längsbelastungen des Behälters untersucht, d.h. $X_m = 0$. Deshalb wird dieser Lastanteil zukünftig weggelassen. Infolge Eigengewicht des Behälters, Flüssigkeitsfüllungen und radialen Kraftangriffen ergeben sich lediglich Y_m - und Z_m -Glieder.

Das System der Differentialgleichungen (2.10), (2.11) und (2.12) wird noch umgewandelt in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Dazu löst man die erste Differentialgleichung (2.10) nach u_m'' auf und die Gleichung (2.11) nach v_m'' . Man erhält

$$u_m'' = \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{(1+k)m^2}{r^2} u_m - \frac{1}{2} \frac{(1+\mu)m}{r} v_m' + \left[\frac{1}{2} (1-\mu) k m^2 - \mu \right] \frac{1}{r} w_m' + \tau k w_m''' \quad (2.13)$$

$$v_m'' = \frac{2m^2}{(1-\mu)(1+3k)r^2} v_m + \frac{2m}{(1-\mu)(1+3k)r^2} w_m + \frac{(1+\mu)m}{(1-\mu)(1+3k)r} u_m' - \frac{(3-\mu)km}{(1-\mu)(1+3k)} w_m'' - \frac{2}{(1-\mu)(1+3k)D} Y_m \quad (2.14)$$

Durch Ableitung von u_m'' nach x ergibt sich u_m''' . Setzt man alle diese Ausdrücke in die Gleichung (2.12) ein, so ergibt sich für w_m^{IV} :

$$\begin{aligned}
 W_m^{\text{IV}} = & \left[\frac{2km^2}{(1+3k)} - 1 \right] \frac{m}{(1-k)k r^4} Y_m + \left[\frac{2km^2}{(1+3k)} - 1 - (m^2-1)^2 k \right] \frac{1}{(1-k)k r^4} W_m + \\
 & + \left[\frac{1}{2} (1-\mu) k m^2 + \frac{(1+\mu) k m^2}{(1+3k)} - \mu + \frac{1}{2} (1-\mu)(1+k) k m^2 \right] \frac{1}{(1-k)k r^3} u_m^1 + \\
 & + \left[\frac{1}{2} (1-\mu) k m^2 + 2m^2 - \frac{(3-\mu) k m^2}{(1+3k)} - \mu \right] \frac{1}{(1-k) r^2} W_m'' - \\
 & - \frac{1}{(1-k)k D r^2} Z_m - \frac{2m}{(1-k)(1+3k) D r^2} Y_m \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird im folgenden auf die Mitnahme des Index m verzichtet, die Formeln und Differentialgleichungen sind aber stets für alle betrachteten Reihenglieder anzusetzen.

Ergänzend zu den Gleichungen (2.13), (2.14) und (2.15) führt man folgende Identitäten ein:

$$\left. \begin{aligned}
 u' &= u' \\
 v' &= v' \\
 w' &= w' \\
 w'' &= w'' \\
 w''' &= w'''
 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Dann kann man alle Gleichungen in Matrizenform zusammengefaßt darstellen.

Es wird ein Vektor \mathbf{Y} der Verschiebungen und ihrer Ableitungen definiert:

$$\mathbf{Y}^T = \left[u \quad v \quad w \quad u' \quad v' \quad w' \quad w'' \quad w''' \right]$$

Man kann damit ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung angeben

$$Y' = A Y + P \quad (2.17)$$

Die Matrix **A** lautet hierbei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} & 0 & a_{48} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & a_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{82} & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 & a_{87} & 0 \end{pmatrix}$$

mit:

$$a_{41} = \frac{(1-\mu)(1+k)m^2}{2\tau^2}$$

$$a_{45} = -\frac{(1+\mu)m}{2\tau}$$

$$a_{46} = \left[\frac{(1-\mu)km^2}{2} - \mu \right] \frac{1}{\tau}$$

$$a_{48} = \tau k$$

$$a_{52} = \frac{2 m^2}{(1-\mu)(1+3k)r^2}$$

$$a_{53} = \frac{2m}{(1-\mu)(1+3k)r^2}$$

$$a_{54} = \frac{(1+\mu)m}{(1-\mu)(1+3k)r}$$

$$a_{57} = \frac{(3-\mu)km}{(1-\mu)(1+3k)}$$

$$a_{82} = \left[\frac{2km^2}{(1+3k)} - 1 \right] \frac{m}{(1-k)kr^4}$$

$$a_{83} = \left[\frac{2km^2}{(1+3k)} - 1 - (m^2-1)^2 k \right] \frac{1}{(1-k)kr^4}$$

$$a_{84} = \left[\frac{(1-\mu)km^2}{2} + \frac{(1+\mu)km^2}{(1+3k)} - \mu + \frac{(1-\mu)(1+k)km^2}{2} \right] \frac{1}{(1-k)kr^3}$$

$$a_{87} = \left[\frac{(1-\mu)km^2}{2} + 2m^2 - \frac{(3-\mu)km^2}{(1+3k)} - \mu \right] \frac{1}{(1-k)r^2}$$

Der Vektor **P** enthält sämtliche Anteile der äußeren Lasten

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 & 0 & p_8 \end{bmatrix}$$

mit:

$$p_s = - \frac{2}{(1-\mu)(1+3k)D} Y$$

$$p_z = - \frac{1}{(1-k)kDr^2} Z - \frac{2m}{(1-k)(1+3k)Dr^2} Y$$

Damit ist die Grundlage zur Schalenberechnung gelegt.
Ihre numerische Auswertung wird in Kapitel 4. gezeigt.

3. Ansätze in Umfangsrichtung bei der Berechnung der Sattellager

3.1 Allgemeines

Im Kontaktbereich zwischen dem liegenden Behälter und dem Sattel werden zunächst noch unbekannte Kräfte übertragen. Ist die Lagerung in Längsrichtung zwängungsfrei, so können diese Kontaktkräfte am Querschnitt in radiale und tangentielle Komponenten zerlegt werden. Je nach der Art der Verbindung zwischen Behälter und Sattel haben diese Kraftanteile verschiedene Größen und sind von unterschiedlicher Bedeutung. Man kann zwei Gruppen von Behältern unterscheiden.

Die erste Gruppe umfaßt alle Behälter, die mit dem Lager fest verbunden sind. Dies kann z.B. durch Anschweißen des Sattels gegeben sein. Bei dieser Gruppe sind die Tangentialkräfte am Sattel nicht einfach vernachlässigbar gegenüber den Radialkräften. Sie entstehen aus der Unverträglichkeit der tangentialen Verformungen von Schale und Sattel. Behälterberechnungen wurden mit Berücksichtigung dieser Tangentialkräfte 1976 von D u t h i e und T o o t h [19] durchgeführt. Sie studierten Behälter mit angeschweißten Sätteln mit Hilfe von Doppel-Fourierreihen und verglichen diese Ergebnisse mit anderen ohne Berücksichtigung von Tangentialkräften. Dabei zeigte es sich, daß einige Unterschiede bei den Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$ der Schale in Umfangsrichtung in der Nähe des Sattels auftraten. Setzte man nur Radialkräfte an, so ergaben sich im Lagerbereich hohe Druckspannungen. Die Tangentialkräfte reduzierten diese Drücke. Der angeschweißte Sattel entlastete dort den Behälter. Bei der Untersuchung der Biegebeanspruchungen der Schale fanden Duthie und Tooth, daß die örtlichen Spannungsspitzen am Sattelrand etwas abgemindert wurden. Außerhalb dieses Bereiches waren alle übrigen Behälterbeanspruchungen praktisch unverändert. Duthie und Tooth zeigten an Beispielen, daß man ohne Berücksichtigung der Tangentialkräfte stets etwas ungünstigere Be-

anspruchungen ermittelt als mit ihnen. Bei der Dimensionierung liegt man damit auf der sicheren Seite. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Behälter am örtlichen Abheben behindert ist. Entsprechend wurden auch von K ř u p k a in [13] die Tangentialkräfte bei der Berechnung angeschweißter Sättel vernachlässigt. Die Möglichkeit, Tangentialkräfte in der hier dargelegten Berechnung zu berücksichtigen, wird in Abschnitt 7.3 gezeigt. Der Rechenaufwand ist dabei viel höher. Nach [19] erhält man ohne die Tangentialkräfte Ergebnisse, deren Werte etwas höher liegen als mit Tangentialkräften.

Die zweite Gruppe der Behälter hat keine starre Verbindung mit dem Sattellager. Hier liegt die Schale frei auf den Unterstützungen auf. Tangentialkräfte ergeben sich dabei nur als Reibungskräfte bei der tangentialen Verformung des Behälters. Sie sind naturgemäß klein gegenüber den Radialkräften. Bereits Z w i e s e l e [5] erwähnt dies und sagt, daß die Wirkung der Tangentialkräfte auf die Beanspruchungen des Behälters unbedeutend ist. Der Ansatz dieser Kräfte würde auch sehr unsicher sein, da die Reibungskoeffizienten am Sattelumfang sehr stark veränderlich sind. Es hängt vom Einzelfall ab. Material, Oberflächenbeschaffenheit, Verschmutzung usw. sind dabei von Bedeutung. Eine andere Rolle spielt auch die Anpassung des Sattels an den Behälter. Zwieseles weist auf dieses Problem bei den Versuchen hin. Damit ergeben sich keine sicheren Rechengrundlagen. Die Radialkräfte überwiegen schon aus Gleichgewichtsgründen die Tangentialkräfte und bestimmen als Querlasten auf die Schale entscheidend die maßgebenden Schnittgrößen M_y und M_x . Die daraus entstehenden maximalen Biegespannungen am Sattelhorn beeinflussen die Dimensionierung des Behälters. K ř u p k a [13], B r a n d e s [6] und Z w i e s e l e [5] beschränken sich deshalb auf die Untersuchung radialer Kontaktkräfte und vernachlässigen die Reibungskräfte. Da die vorliegende Arbeit vor allem frei auf den Sätteln liegende Behälter untersuchen will, wird auf die eingehende Betrachtung der Tangentialkräfte verzichtet.

3.2 Aufteilung der Sattelpressungen in Einzelkräfte

Die genaue Verteilung der radialen Kontaktpressungen am Sattel ist unbekannt. Normalerweise ist es nicht möglich, eine konstante Verteilung der Kräfte in Umfangsrichtung anzunehmen. Die wirkliche Verteilung hängt von der Last, der Steifigkeit der Schale, der Gestalt, Steifigkeit und Stellung des Sattels ab. Die Lagerkräfte lassen sich nicht explizit als Funktion bestimmen. Man hat viele Messungen an Behältern durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen den Verlauf der Kräfte prinzipiell, können aber nicht in Form bestimmter Ansätze verallgemeinert werden.

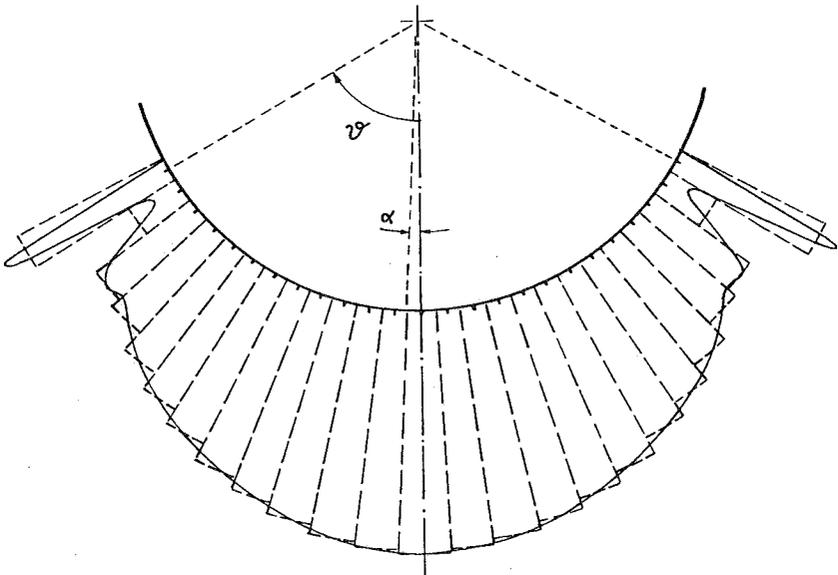


Bild 3.1: Kontaktkräfte

Man könnte den Kräfteverlauf jedoch für einen Fall schätzen und dafür die Verformungen des Behälters am Sattel auf ihre Verträglichkeit kontrollieren. Wenn diese nicht genügend ge-

nau erfüllt ist, könnte man durch Iteration einen besseren Verlauf finden. Dieser Weg ist sehr umständlich.

Eine bessere Möglichkeit besteht darin, den Verlauf der Kontaktkräfte durch Rechnung zu bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Weg beschritten, indem die Sattelpressung diskretisiert wird. Dazu unterteilt man die Kontaktfläche am Sattel in Teilbereiche mit konstanter Pressung, wie Bild 3.1 zeigt. In jedem Mittelpunkt dieser Teilbereiche greift die Resultierende als Unbekannte F_i an, wie in Bild 3.2 dargestellt ist. Die Aufteilung wird so gewählt, daß die äußerste Resultierende an das Sattelende bei $\varphi = 0^\circ$ fällt. Mit diesem Ansatz erhält man am Sattelhorn die erwarteten örtlichen Beanspruchungsspitzen. Krupka hat in seinen Arbeiten [11] und [12] einen ähnlichen Ansatz gewählt. Dabei stellt er sich Pendelstützen zwischen Behälter und Schale vor, die die Kräfte übertragen.

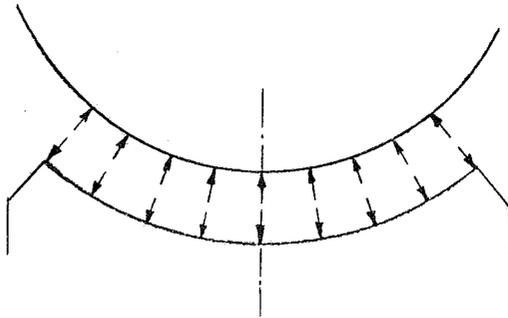


Bild 3.2: Unbekannte Einzelkräfte zwischen Schale und Sattel

In der weiteren Berechnung werden die Kräfte, so wie alle Belastungen der Schale, durch Fourierreihen in Umfangsrichtung dargestellt. Es handelt sich bei den eingeführten resultierenden Kräften F_i nicht um tatsächliche Einzelkräfte, sondern um endliche Bereiche mit konstanter Pressung. Deshalb ist für eine befriedigende Lösung keine übermäßig gro-

Be Zahl der Reihenglieder erforderlich. Bei der anschließenden Überlagerung der Kräfte wird durch Superposition aller Fourieryglieder ein geglätteter Pressungsverlauf am Sattel ermittelt.

Die gewählte Unterteilung der Sattelfläche in Teilbereiche der Breite 2α beeinflußt in gewissen Grenzen die Ergebnisse im Bereich des Sattelhorns. Die Spitze im Kräfteverlauf erhöht sich dabei örtlich für kleinere α - Werte. Bereits in geringer Entfernung sind die Abweichungen aber sehr klein. In größerem Abstand ist es einerlei, wie groß α gewählt wurde.

W i l s o n und T o o t h haben die Frage der Wahl von α in [18] näher untersucht. Sie fanden, daß die beherrschende Schnittgröße M_{φ} am Sattelhorn gegenüber solchen Änderungen in α unempfindlich ist. Tatsächlich zeigte es sich, daß sich bei einem α von $1/64$ des ursprünglichen Winkels der Maximalwert von M_{φ} nur um 6% erhöhte. Deshalb fanden Wilson und Tooth in ihren Untersuchungen, daß $\alpha = 2,5^{\circ}$ genügt.

Außerdem spielt die Entfernung des Bodens eine wichtige Rolle für die Größe des Maximalwertes der Beanspruchungen am Sattelhorn. Dabei gibt K ř u p k a in [31] und [14] Diagramme der Verminderungskoeffizienten für die Maximalkräfte an, wenn die Entfernung der Böden kleiner als $a < r\sqrt{r/t}$ ist. Das begründet er mit der aussteifenden und damit lastabtragenden Wirkung der Böden. Dies bestätigen auch Untersuchungen von M a k e ' e w und F e d i l [16]. Ebenfalls wird dieser Effekt bei M i z o g u c h i und H a t s u d a [17] beobachtet. Sie sehen den Grund darin, daß der Sattel in den Behälter "einsinkt". Dieser Einfluß der Entfernung der Böden wird in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 13.4 näher untersucht. Dort sieht man ebenfalls, daß die höchsten Spannungen nicht unbedingt an der Sattelspitze auftreten. Sie können auch in Sattelmittle erscheinen. Diese Werte sind aber von α unabhängig. Neben den Böden hat auch der Umschließungswinkel φ einen Einfluß auf die Maximalspannungen. Wie G e r b e a u x [35] zeigt, können sich bei kleinen Winkeln φ die

höchsten Spannungen in der Mitte des Sattels ergeben.

In der vorliegenden Arbeit hat sich durch Vergleichsrechnungen gezeigt, daß bei üblichen Umschließungswinkeln, z.B. $\varphi = 60^\circ$, Unterteilungen mit $\alpha = 5^\circ$ bereits befriedigende Ergebnisse liefern. Bei kleineren Umschließungswinkeln ist dagegen die Wahl von $\alpha = 2,5^\circ$ empfehlenswert. Allgemein soll man bei der Feinheit der Unterteilung mindestens $\alpha \leq \varphi/10$ wählen, um befriedigende Lösungen zu erhalten. Bei der Berechnung üblicher Lagerwinkel braucht man dann keine zu hohe Zahl an Fouriergliedern, um eine Konvergenz der Lösungen zu erreichen. Damit vermeidet man zusätzlich numerische Probleme beim Übertragungsverfahren.

3.3 Ermittlung der Sattelkräfte

Es werden schneidenförmige Sättel betrachtet, deren Symmetrieachse mit der Vertikalachse des Behälters zusammenfällt. Die noch unbekanntenen Einzelkräfte am Sattel werden unter Ausnutzung der Symmetrie nach Bild 3.3 angesetzt. Die Nachgiebigkeit des Sattels wird zunächst nicht berücksichtigt. Sie wird später in Abschnitt 7.2 untersucht.

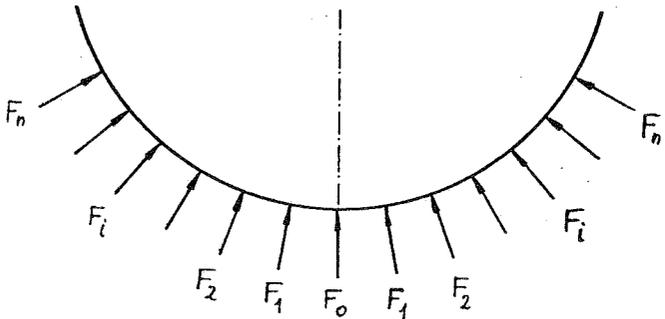


Bild 3.3: Einzelkräfte am Sattel

An den Belastungspunkten i entstehen Verschiebungen w_i , die sich durch die Einheitsverschiebungen δ_i ausdrücken lassen. Bild 3.4 zeigt die Verschiebungen δ_i infolge einer Einzelbelastung $F = 1$.

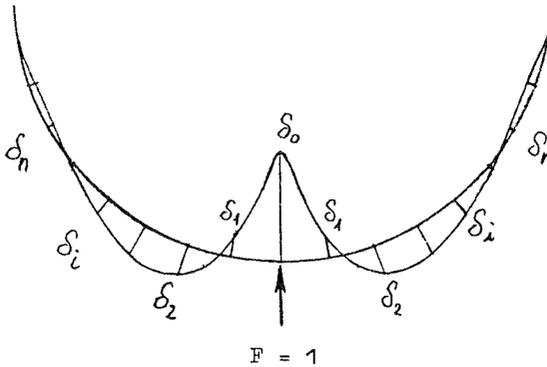


Bild 3.4: Verformungen infolge einer Einzelkraft

Hinzu kommen die Verformungen w_L aus der Nutzlast des Behälters. Die δ - Werte sind identisch mit den Radialverschiebungen w :

$$\delta \equiv w$$

Der Einfluß einer Kraft j ($j \neq 0$) auf die Verschiebung eines Punktes i ergibt sich wegen symmetrischem Lastangriff als $\delta_{|i-j|} + \delta_{|i+j|}$. Die resultierende Punktverschiebung muß im Sattelpunkt der Sattelform entsprechen.

Zunächst werden die Böden als unverschieblich betrachtet. Infolge von Nutzlast und Sattelkräften entsteht dann eine Starrkörperverschiebung δ_s des Sattels, die es im Grunde nicht gibt. Bild 3.5 zeigt diesen Zustand. Weil der Sattel absolut unverschieblich bleibt und sich die Böden in bezug auf den Sattel bewegen, ist eine Korrektur erforderlich. Dabei muß der Behälter als Starrkörper um den Wert δ_s verschoben werden. Diese Sattelverschiebung beeinflusst nicht

die Schnittgrößen, man muß aber die Verformungen v und w im ganzen Behälter entsprechend korrigieren.

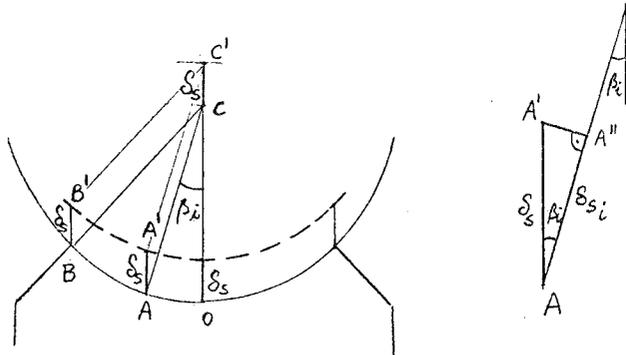


Bild 3.5: Starrkörperverschiebung δ_s

δ_s ist die Starrkörperverschiebung in Punkt O parallel zur Lagerkraft Q . Im Punkt i eines kreisförmigen Sattels beträgt diese Verschiebung in radialer Richtung:

$$\delta_{s_i} = \delta_s \cdot \cos \beta_i \quad (3.1)$$

Nach der gewählten Unterteilung in Kraftbereiche der Breite 2α gilt für β_i :

$$\beta_i = 2i\alpha \quad (3.2)$$

Die Bedingung für den Punkt i lautet:

$$\delta_{L_i} + \delta_i F_o + \sum_{j=1}^n (\delta_{|i-j|} + \delta_{|i+j|}) F_j = \delta_{s_i} \quad (3.3)$$

So gibt es $(n+1)$ Bedingungen für $(n+1)$ Kräfte.

Unbekannt ist auch δ_{s_i} bzw. mit (3.1) δ_s . Zusätzlich muß man deshalb noch eine Gleichgewichtsbetrachtung durchführen. Bei einem auf zwei Sätteln symmetrisch gelagerten Behälter müssen alle $(n+1)$ Sattelkräfte der halben Nutzlast gleich

sein. Bei einer Belastung $2Q$ gilt:

$$F_0 + 2 \sum_{j=1}^n F_j \cos 2j\alpha = Q \quad (3.4)$$

Mit den Gleichungen (3.3) für jeden der $(n+1)$ Punkte i und dem Gleichgewicht nach (3.4) erhält man unter Berücksichtigung von (3.1) und (3.2) ein Gleichungssystem für die Unbekannten. Es liegen insgesamt $(n+2)$ Bedingungs-
gleichungen vor, aus denen die $(n+1)$ Lagerkräfte und die Verschiebungsgröße δ_s berechnet werden können.

In Matrizenform ergibt sich:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{D} \quad (3.5)$$

Dabei gilt:

$$\mathbf{F}^T = \left[F_0 \quad F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n \quad \delta_s \right] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}^T = \left[-0,5\delta_{L_0} \quad -\delta_{L_1} \quad -\delta_{L_2} \quad \dots \quad -\delta_{L_n} \quad -0,5Q \right] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,5\delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n & -0,5 \\ \delta_1 & (\delta_0 + \delta_2) & (\delta_1 + \delta_3) & \dots & (\delta_{n-1} + \delta_{n+1}) & -\cos 2\alpha \\ \delta_2 & (\delta_1 + \delta_3) & (\delta_0 + \delta_4) & \dots & (\delta_{n-2} + \delta_{n+2}) & -\cos 4\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_n & (\delta_{n-1} + \delta_{n+1}) & (\delta_{n-2} + \delta_{n+2}) & \dots & (\delta_0 + \delta_{2n}) & -\cos 2n\alpha \\ -0,5 & -\cos 2\alpha & -\cos 4\alpha & \dots & -\cos 2n\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

(3.8)

Die Koeffizientenmatrix \mathbf{M} ist symmetrisch geworden. Die Auf-
lösung dieses Gleichungssystems ist ohne Schwierigkeiten

möglich. Mit der Kenntnis der Sattelkräfte und des Einheitszustandes mit der Belastung gemäß Bild 3.4 können alle Schnitt- und Verformungsgrößen des Behälters durch Superposition ermittelt werden.

Ähnliche Ansätze für die Aufteilung der Sattelpressung in Einzelkräfte verwendet K ř u p k a in [11] und [12]. Schwerpunkt seiner Untersuchungen sind vor allem lange Behälter, bei denen die Böden auf den Sattelbereich keinen Einfluß haben. Grundlage seiner Berechnung ist dabei die Halbbiegetheorie, die die Biegung in Längsrichtung vernachlässigt. Sie berücksichtigt die Biegung nur in Umfangsrichtung.

Mit der Halbbiegetheorie bestimmt K ř u p k a die Einheitsverschiebungen δ_i . Eine ausführliche Ableitung findet sich in seinem Buch [14]. Die Eigenverformung des Behälters infolge Füllung oder anderer Lasten wird nicht berücksichtigt.

K ř u p k a löst die Kompatibilitätsbedingungen am Sattel und das Gleichgewicht nicht in einem einzigen System, sondern getrennt. Bei der Matrix **M** entfallen auf diese Weise die letzte Zeile und die letzte Spalte. Zuerst löst er ein System von $(n+1)$ Gleichungen für eine angenommene Verschiebung $\delta_s = 1$. Damit erhält er Größen \bar{F}_i , die proportional zu den tatsächlichen Kräften F_i sind. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei δ_s . Das Gleichgewicht wird von K ř u p k a erst untersucht, nachdem er die Größen \bar{F}_i bestimmt hat. Daraus erhält er die Verschiebung δ_s und berechnet die endgültigen Kräfte F_i .

Infolge dieser Aufspaltung des Systems kann K ř u p k a den Einfluß der Nutzlasten nicht berücksichtigen. Bei ihm besteht kein Unterschied, ob der Behälter leer oder gefüllt ist. Er preßt nur eine Gesamtkraft Q in einen sonst unverformten Behälter hinein.

W i l s o n und T o o t h berücksichtigen in [18] das ungetrennte System von Gleichungen und die Verformung infolge der Nutzlast. Sie eliminieren zuerst δ_s aus dem System und bestimmen dann die Sattelkräfte. Zu dieser Elimination benötigen sie aufwendige mathematische Umformungen.

In der vorliegenden Arbeit wird das Gesamtsystem einschließlich Gleichgewicht in einem Schritt ohne weitere Umformungen oder Teileliminationen gelöst. Der mathematische und numerische Aufwand ist dabei geringer und die Lösung übersichtlicher. Nur bei Berücksichtigung des vollständigen Systems kann man die Füllung des Behälters, sein Eigengewicht und andere Nutzlasten zusammen mit den durch sie hervorgerufenen Verformungen erfassen. Der Einfluß von Teilfüllungen auf die Verteilung der Sattelkräfte und die Schnittgrößen des Behälters wird in Kapitel 10 untersucht.

4. Berechnung in Längsrichtung mit dem Übertragungsverfahren

4.1 Ermittlung der Übertragungsmatrix

Auf Grund der Flüggeschen Schalentheorie erhält man in Kapitel 2 ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in den Verschiebungen u , v , w und ihren Ableitungen (2.17). Zur Lösung muß eine Integration dieses Systems erfolgen. Dies ist analytisch nicht geschlossen möglich. Eine näherungsweise numerische Integration dagegen ist mit beliebiger Genauigkeit durchführbar.

In der vorliegenden Arbeit wird für die Berechnung in Längsrichtung das Übertragungsverfahren gewählt. Ziel ist dabei die Darstellung eines Vektors des Verschiebungszustandes \mathbf{Y}_E am Ende eines Schalenabschnittes durch \mathbf{Y}_A , den Vektor des Zustandes am Anfang, und \mathbf{Y}_P , den Partikuläranteilen infolge der im Abschnitt angreifenden äußeren Lasten. Der Zusammenhang ist linear und läßt sich in der Form

$$\mathbf{Y}_E = \mathbf{V} \mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_P$$

anschreiben. Unbekannt ist dabei die Übertragungsmatrix \mathbf{V} . Bevor die Übertragungsmatrix ermittelt wird, ist es sinnvoll, das System der Verschiebungen in ein neues System zu transformieren, das aus Verschiebungen und Schnittgrößen der Schale besteht, wie W u n d e r l i c h [23] und auch Z w i e s e l e [5] empfehlen. Das hat wesentliche Vorteile im späteren Einbau der erforderlichen Randbedingungen, die zum Teil Kräftebedingungen sind.

Es wird folgender Vektor definiert:

$$\mathbf{X}^T = \left[u \quad v \quad w \quad w' \quad N_x \quad M_x \quad \bar{Q}_x \quad \bar{N}_{x\varphi} \right]$$

Die erste Hälfte besteht aus Verschiebungsgrößen, die zweite

Hälfte erfaßt die Längskraft und das Längsmoment der Schale sowie zwei Ersatzkräfte.

Die Einführung dieser Ersatzkräfte nach F l ü g g e [8] erfolgt analog zu der Kirchhoffschen Plattentheorie und ist notwendig, um die vier offenen Kräfte-Randbedingungen in Längsrichtung mit den fünf vorhandenen Kräften N_x , M_x , Q_x , $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$ in Zusammenhang zu bringen. Dabei wird $M_{x\varphi}$ den beiden Größen Q_x und $N_{x\varphi}$ nach folgender Definition zuge- schlagen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_x &= Q_x + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \\ \bar{N}_{x\varphi} &= N_{x\varphi} - \frac{1}{r} M_{x\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Die Transformation von Y nach X erfolgt mit der Matrix B

$$X = B Y$$

bzw. $Y = B^{-1} X$

wobei B invertierbar ist und gemäß den Definitionen der Schnittgrößen zusammen mit den Gleichungen (4.1) leicht auf- gestellt werden kann.

Damit wird das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umge- wandelt in

$$X' = G X + P_x$$

Die neuen Matrizen G und P_x ergeben sich als

$$G = B \cdot A \cdot B^{-1}$$

$$P_x = B P$$

Das Ziel der Integration lautet nun folgendermaßen:

$$X_E = U X_A + X_P \quad (4.2)$$

Bei der Integration von G zu U handelt es sich um die Lösung eines Anfangwertproblems, wie es häufig in der Mathe- matik vorkommt.

Nach W u n d e r l i c h [41], Z u r m ü h l [42], U h r i g

[43] und P e s t e l und L e c k i e [44] läßt sich die Übertragungsmatrix U als Exponentialausdruck von G angeben.

Das Differentialgleichungssystem

$$X' = G X$$

hat nach dem Intervall x die allgemeine Lösung

$$X = e^{Gx} X_0$$

Im Vergleich mit (4.2) folgt daraus

$$U = e^{Gx}$$

Dieser Exponentialausdruck läßt sich durch eine Reihenentwicklung numerisch auswerten. Entsprechend

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{2!} (ax)^2 + \frac{1}{3!} (ax)^3 + \dots$$

ergibt sich mit der Einheitsmatrix E

$$U = E + Gx + \frac{1}{2!} (Gx)^2 + \frac{1}{3!} (Gx)^3 + \dots$$

Analog erhält man für den Anteil aus den Belastungen nach mehreren Umformungen, wie Z w i e s e l e [5] zeigt,

$$X_p = [e^{Gx} - E] G^{-1} P_x$$

Damit sind sämtliche Matrizen des Übertragungsverfahrens hergeleitet. Die äußeren Lasten sind bis auf die Sattelkräfte bekannt. Diese werden gemäß Kapitel 3 als Einheitskräfte angesetzt.

4.2 Durchführung der Übertragung

Zur vollständigen Lösung des Schalenproblems benötigt man die Randbedingungen. Bei der vorliegenden Schalentheorie sind es acht Randbedingungen an jedem Schalenende. Von diesen sind aber jeweils nur die Hälfte bekannt. Damit kann man die Übertragung nicht sofort durchführen. Man muß zusätzlich die fehlenden Anfangsbedingungen bestimmen.

Bei der Berechnung eines liegenden Behälters ergeben sich je nach dem Anschluß der Schale an die Endscheiben oder Bö-

den die in Tabelle 4.1 dargestellten Randbedingungen.

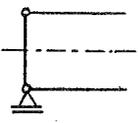
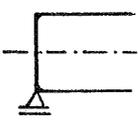
Lagerung	Fall 1	Fall 2	Fall 3
Skizze			
Randbedingungen	$v = 0$ $w = 0$ $N_x = 0$ $M_x = 0$	$v = 0$ $w = 0$ $w' = 0$ $N_x = 0$	$u = 0$ $w' = 0$ $\bar{Q}_x = 0$ $\bar{N}_{x\varphi} = 0$

Tabelle 4.1: Randbedingungen

Die beiden wichtigsten Fälle werden betrachtet

Fall 1: Gelenkig angeschlossene Endscheibe (Boden als starre Membrane) bei verschieblicher Lagerung des Behälters.

Fall 2: Biegesteif an eine sehr starre Endscheibe angeschlossener Behälter (Boden ist unendlich biegesteif) bei ebenfalls verschieblicher Lagerung des Behälters.

Ergänzend wird noch als weiterer Fall angegeben:

Fall 3: Bedingungen in einer Symmetrieachse des Behälters. Ebenfalls sind bei durchlaufenden Rohren die Randbedingungen am Lager durch Symmetrie bestimmt.

Diese Tabelle soll nur einige der wichtigsten Randbedingungen erfassen. Es gibt je nach dem untersuchten Behälter auch andere mögliche Bedingungen, wie z.B. voll eingespannte Enden, gezeigt in Bild 4.1.

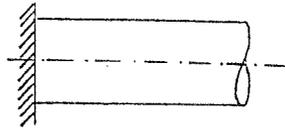


Bild 4.1: Voll eingespannte Enden

Der Anfangsvektor muß in einen unbekanntes und einen bekannten Teil aufgespalten werden. Der bekannte Teil besteht im allgemeinen aus Nullen oder konstanten Größen. Die Übertragung des Vektors der 4 Anfangsunbekanntes läßt sich in einem ersten Berechnungsschritt bis zum Ende des Behälters verfolgen. Dort ergeben sich aus den 4 bekannten Endbedingungen die erforderlichen Gleichungen zur Ermittlung der Unbekanntes. Anschließend kann man auch die unbekanntes Endwerte bestimmen, so wie dies durch Teilübertragungen auch für beliebige Zwischenpunkte möglich ist.

Prinzipiell ist so die direkte Übertragung von einem Schalenende zum anderen möglich. Bei Schalen tritt das bekannte Problem auf, daß bei gewissen Parametern ein Rand auf den anderen einen geringen Einfluß hat. Da aus den Bedingungen des Endrandes aber die fehlenden Anfangsbedingungen errechnet werden, treten numerische Schwierigkeiten auf. Ab einer bestimmten Schalenlänge werden infolge von Rundungsfehlern völlig falsche, meist sehr große Werte errechnet. Diese Schalenlänge hängt von den Schalenparametern, aber auch von der im Computer mitgeführten Anzahl signifikanter Ziffern ab.

Z w i e s e l e [5] gibt einen Hinweis für die kritische Schalenlänge l^* , für die die Übertragung noch zufriedenstellend ist. Bei größeren Längen treten numerische Probleme auf. Zwiesele empfiehlt nach seinen Untersuchungen ein $l^* \leq 0,4 r$. Dies gilt für den Bereich $r/t = 100$, bei 10 Reihengliedern und 7 signifikanten Ziffern bei der Berechnung. Will man l^* in Abhängigkeit von der Wanddicke t ausdrücken, so ergibt sich $t/l^* \geq 0,025$ bzw. $l^* \leq 40 t$. Die

Übertragungslänge soll kleiner als l^* sein.

Die praktisch interessierenden Behälter sind meist wesentlich länger. Die Übertragung in einem Schritt ist nicht mehr möglich. Zur Berechnung muß man das ursprüngliche Übertragungsverfahren abwandeln. Man unterteilt die Schale in Einzelabschnitte, deren Längen kleiner sind als l^* . Damit ist innerhalb dieser Abschnitte eine brauchbare Übertragung gesichert. Man nimmt als Unbekannte die am Rand eines solchen Abschnitts neu hinzukommenden unbekannt Randbedingungen mit. Die Gesamtzahl der Unbekannten wächst bei jedem Zwischenschnitt um acht an. Als zusätzliche Bedingungen erhält man je Abschnitt acht Übergangsbedingungen, so daß am Schluß ein vollständiges Gleichungssystem für diese Unbekannten vorliegt, das eindeutig lösbar ist. Hinweise finden sich bei W u n d e r l i c h [41] und M a r g u e r r e und U h r i g [27].

Nach Ermittlung aller Anfangswerte können mittels der Übertragungsmatrix für die entsprechende Schrittweite an beliebigen Zwischenpunkten die 8 Werte bestimmt werden. Dabei verwendet man an jedem nächsten Zwischenschnitt die Zwischenunbekannten, die bereits im Gleichungssystem ermittelt wurden. Damit vermeidet man zusätzliche Übertragungsfehler.

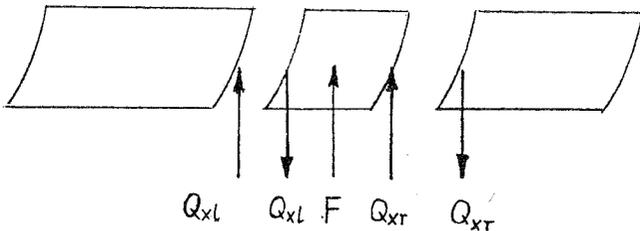


Bild 4.2: Schneidenlast

Bisher wurden nur verteilte Belastungen auf die Schalenabschnitte erfaßt. Bei den Ansätzen nach Kapitel 3 sind aber auch schneidenartige Lasten zu untersuchen, die in x-Richtung

die Angriffsbreite Null haben. Diese kann man am Ende eines Schalenabschnittes durch folgende Übergangsbedingung berücksichtigen, wie das Bild 4.2 zeigt.

Aus dem Gleichgewicht erhält man:

$$Q_{xT} = Q_{xL} - F$$

bzw. beim Einfügen von F in einen Sprungvektor

$$X_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F & 0 \end{bmatrix}$$

gilt

$$X_T = X_L + X_F$$

Danach kann über den folgenden Abschnitt weiter übertragen werden.

4.3 Abschließende Berechnung des Behälters auf Sattel- lagern

Nach der Lösung des Übertragungsverfahrens für die Nutzlast des Behälters und die Einheitsbelastung F_1 im Sattelpunkt für jedes einzelne Reihenglied m , kann die Berechnung der Sattelkräfte nach Kapitel 3 erfolgen. Anschließend sind alle Ergebnisse zu superponieren, um die vollständige Lösung des sattelgelagerten Behälters zu erhalten.

Die vollständige Beschreibung der Schalenverformungen und Schalenkräfte umfaßt insgesamt 16 Größen. Davon sind im eigentlichen Übertragungsverfahren nur 8 ermittelt worden. Es fehlen noch die Größen N_φ , $N_{\varphi x}$, M_φ , $M_{\varphi x}$, Q_φ , $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$, Q_x . Dabei sind $N_{x\varphi}$ und Q_x die eigentlichen Schnittgrößen, nicht die Ersatzkräfte des Übertragungsverfahrens. Sie lassen sich aus den bereits bekannten Werten u , v , w und deren Ableitungen errechnen.

Es sind für alle betrachteten Punkte auf dem Schalenumfang die Reihenanteile

$$u_m(x, \varphi) = u_m(x) \cos m\varphi$$

$$v_m(x, \varphi) = v_m(x) \sin m\varphi$$

$$w_m(x, \varphi) = w_m(x) \cos m\varphi$$

usw.

zu berechnen und zur Gesamtlösung über alle m aufzuaddieren.

4.4 Betrachtungen zur numerischen Konvergenz

Bei dem Ansatz von Fourierreihen ist die Zahl der berechneten Reihenglieder von Bedeutung. Einerseits soll diese Zahl nicht zu groß sein, um nicht den Rechenaufwand zu sehr in die Höhe zu treiben. Immerhin ist für jedes Reihenglied ein vollständiger Behälter einschließlich der Einzelkräfte zu berechnen. Andererseits ist eine Mindestzahl erforderlich, um eine genügende Genauigkeit der Ergebnisse zu garantieren. Wären nur verteilte Nutzlasten, wie z.B. die Flüssigkeitsfüllung, anzusetzen, so genügen wenige Reihenglieder. Bei voller Füllung ist bereits für $m = 1$ die exakte Lösung erreicht. Bei Linien- oder Flächenlasten auf einem begrenzten Schalenbereich, wie sie nach Kapitel 3 für den Sattel angesetzt werden, muß man mehr Reihenglieder berechnen.

Das Bild 4.3 zeigt als Beispiel den Ansatz einer Teilbelastung auf einem Bereich von $2\alpha = 10^\circ$. Die Pressungen p sind auf einen Grundwert p_0 bezogen. Die theoretische Belastung ist zusammen mit dem Belastungsverlauf für 60 Fourierglieder dargestellt. Neben der ersten Teilfläche, die zur Hälfte von $\varphi = 0^\circ$ bis $\varphi = 5^\circ$ gezeichnet ist, wird eine zweite Teilflächenbelastung angesetzt. Diese reicht bis $\varphi = 15^\circ$. Bei der Superposition ist deutlich zu erkennen, wie ein Ausgleich zwischen beiden Teilflächenlasten erfolgt. Der Gesamtver-

lauf nähert sich sehr gut den theoretischen Werten an und erfüllt den Verlauf besser, als jeder der Einzelverläufe für sich. Bei Superposition erreicht man bei gleicher Anzahl der Reihenglieder eine Qualität, die viel höher ist, als bei den einzelnen Verläufen. Bei dem Ansatz der Sattelkräfte muß deshalb die Zahl der Reihenglieder nicht so hoch gewählt werden, um gut konvergierende Lösungen zu erhalten. Außerhalb des eigentlichen Belastungsbereiches klingen die Lastwerte sehr schnell ab. Ihre Auswirkung ist praktisch bedeutungslos.

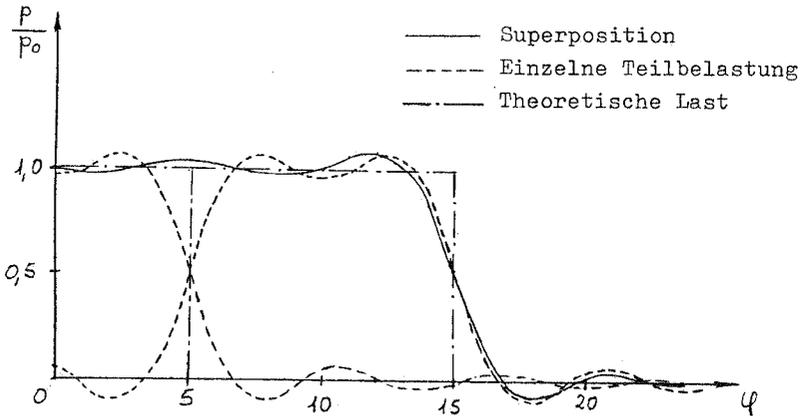


Bild 4.3: Verlauf zweier Einheitsbelastungen mit $2\alpha = 10^\circ$

Wichtiger, als die Konvergenz für die Sattelpressung, ist die Konvergenz für die Verformungen und die Schnittgrößen des Behälters. Diese sollen als nächste betrachtet werden. Als Beispiel wird ein zur Hälfte gefüllter Behälter untersucht mit

$$\begin{array}{lll} l = 11,0 \text{ m} & r = 1,25 \text{ m} & t = 5 \text{ mm.} \\ a/l = 0,10 & 2\alpha = 40^\circ. & \end{array}$$

Er ist auf Schneiden gelagert.

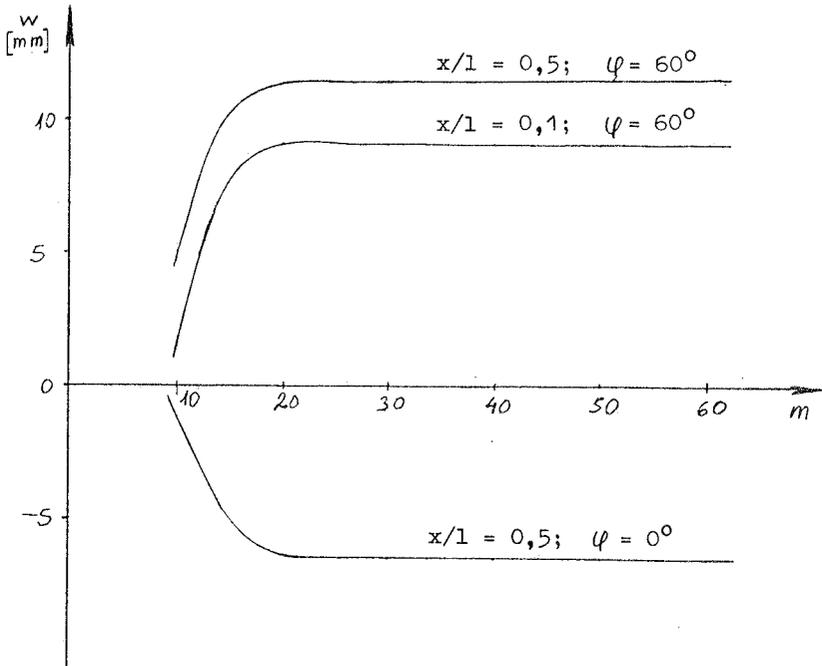


Bild 4.4: Verschiebungen w in Abhängigkeit von der Anzahl der Reihenglieder m bei $\alpha = 5^\circ$

Bild 4.4 zeigt die Radialverformungen w an verschiedenen Stellen des Behälters. Dabei ist $\alpha = 5^\circ$ angesetzt worden. Alle Behälterpunkte verhalten sich bei der Konvergenz gleichartig. Die Verformungen erreichen sehr früh einen Wert, der sich praktisch nicht mehr ändert. Bereits ab $m = 20$ ist eine weitere Steigerung der Reihenglieder ohne Einfluß auf die Verformungen.

Für denselben Behälter ist in Bild 4.5 das Längsbiegemoment M_x am Sattel für $\varphi = 0^\circ$ in Abhängigkeit von m dargestellt. Es werden die beiden Fälle $\alpha = 5^\circ$ und $\alpha = 2,5^\circ$ gezeigt. Die Verläufe sind sehr ähnlich zu denen bei der Verformung w .

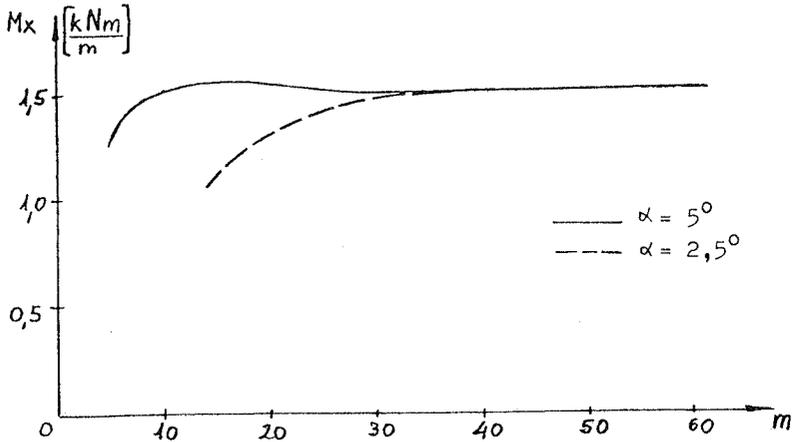


Bild 4.5: Biegemoment M_x am Sattel ($\varphi = 0^\circ$) in Abhängigkeit von m

Für $\alpha = 5^\circ$ erreicht M_x schon bei etwa $m = 10$ den Endwert in guter Näherung. Ab $m = 20$ ändert sich das Moment kaum noch. Für $\alpha = 2,5^\circ$ ist der Endwert genau der gleiche wie bei $\alpha = 5^\circ$. Er wird ab $m = 30$ erreicht. Wie man sieht, sind bei einem Ansatz kleinerer α -Werte mehr Reihenglieder zu berechnen. Das Biegemoment M_φ in Umfangsrichtung zeigt dieselbe Verhaltensweise bei der Abhängigkeit von m .

Die Membrankraft N_x ist in Bild 4.6 gezeichnet. Der Zusammenhang mit der Zahl der Fourierglieder ist ähnlich zu den Biegemomenten. Hier erreicht N_x beim Ansatz mit $\alpha = 5^\circ$ den Endwert für etwa $m = 20$. Bei $\alpha = 2,5^\circ$ braucht man mindestens 35 Reihenglieder. Ähnlich wie N_x verhält sich auch die Membrankraft N_φ .

Vergleichsberechnungen an einzelnen Behältern haben gezeigt, daß bei den Verformungen und Schnittgrößen eine kleinere Anzahl von Reihengliedern ausreicht, als bei der Betrachtung der einzelnen Teilflächenbelastungen. Die Mitnahme von mehr Reihengliedern erhöht die Rechenzeit und damit die Kosten,

ohne eine Verbesserung der Ergebnisse zu bringen. Im Gegenteil zeigen sich bei weiterem Ansteigen von m ab einer gewissen Grenze numerische Probleme beim Übertragungsverfahren. Dies ist auf den stark abklingenden Charakter der Lösungen zurückzuführen. Darauf weist W u n d e r l i c h in [23] hin.

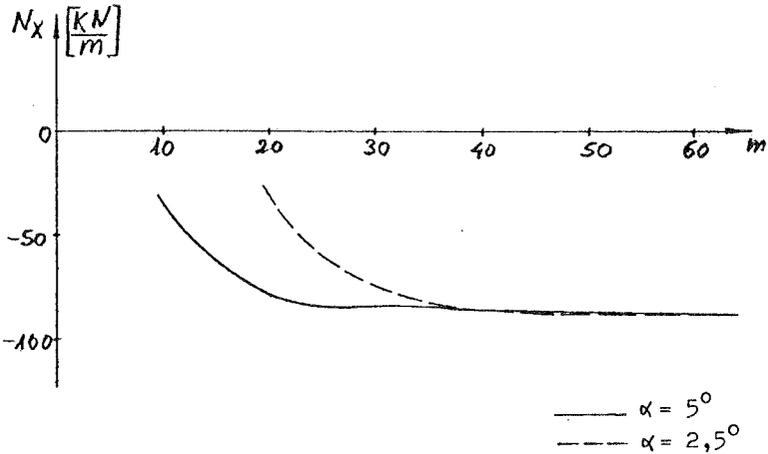


Bild 4.6: Normalkraft N_x am Sattel ($\psi = 0^\circ$) in Abhängigkeit von m

Bei α zwischen $2,5^\circ$ und 5° erfolgt die Konvergenz bereits für kleinere m in der Größenordnung von 20 bis 40. Bei einer Verkleinerung der Teilfläche α wächst die erforderliche Anzahl der Reihenglieder an. Zur Bestimmung der notwendigen Zahl der Reihenglieder betrachtet man die einzelnen Verformungen und Schnittgrößen. Man vergleicht die für eine Konvergenz mindestens erforderliche Zahl m . Es können sich dabei leicht unterschiedliche Werte ergeben. Maßgebend für eine Berechnung ist die größte Anzahl dieser Reihenglieder.

5. Ansätze in Längsrichtung bei der Berechnung von Sätteln endlicher Breite

5.1 Ansatz mit konstanter Sattelpressung in Längsrichtung

Die zuvor behandelte Schneidenlagerung ist in Wirklichkeit nur ein gedachtes Extrem. Die tatsächlich ausgeführten Sättel haben eine gewisse Breite. Diese ist in der Praxis relativ groß. Die für Schneidensättel berechneten Schnittgrößen des Behälters sind sehr hoch. In Versuchen wurden immer viel günstigere Werte gefunden. Deshalb muß die wirkliche Sattelbreite genauer berücksichtigt werden.

Bei Schneidensätteln genügt eine Aufteilung der unbekanntesten Sattelkräfte in Umfangsrichtung. Mit gegebener Breite muß man auch für die Längsrichtung Ansätze machen. Es liegt nahe, dabei eine konstante Pressung nach Bild 5.1 zu wählen.

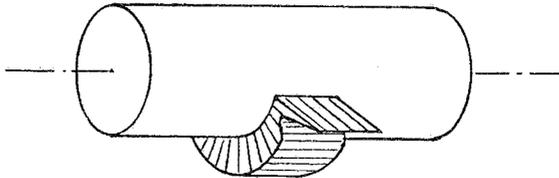


Bild 5.1: Ansatz einer konstanten Sattelpressung in Längsrichtung

Die Kompatibilitätsbedingungen werden an der Mittellinie des Sattels aufgestellt. Die Anzahl der Unbekannten wächst nicht weiter an. Nur die Sprunggröße infolge $F = 1$ bei der Behälterberechnung entfällt. Dafür muß ein Schalenabschnitt der Länge b mit einer Belastung $p(x) = \text{konstant}$ berechnet werden. Mit diesem Ansatz arbeiten viele Autoren, wie z.B.

K ř u p k a [11], Z w i e s e l e [5], W i l s o n und T o o t h [18] sowie D u t h i e und T o o t h [19].

In einem Beispiel wird die Wirkung dieses Ansatzes in Längsrichtung gezeigt. Die häufig für Bemessungen maßgebende Größe M_{φ} an der Sattelspitze wird in Abhängigkeit von der Sattelbreite in Bild 5.2 aufgetragen. Die Behälterlänge ist $l = 4$ m, der Radius beträgt $r = 1,00$ m, die Wanddicke ist $t = 3$ mm, $\varphi = 60^{\circ}$, $a/l = 0,20$. Man erkennt deutlich die Verminderung in der Beanspruchung, wenn der Sattel verbreitert wird.

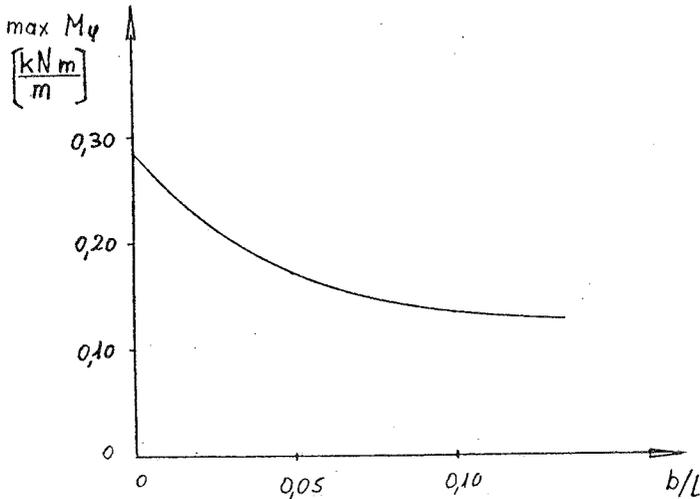


Bild 5.2: Abhängigkeit des Maximalwertes von M_{φ} am Sattel von der bezogenen Sattelbreite b/l bei Ansatz konstanter Pressung in Längsrichtung.

Man kann die Auswirkung der Sattelbreite auf die Größtwerte von M_{φ} gut erkennen. Entsprechendes ergibt sich für alle anderen Schnittgrößen.

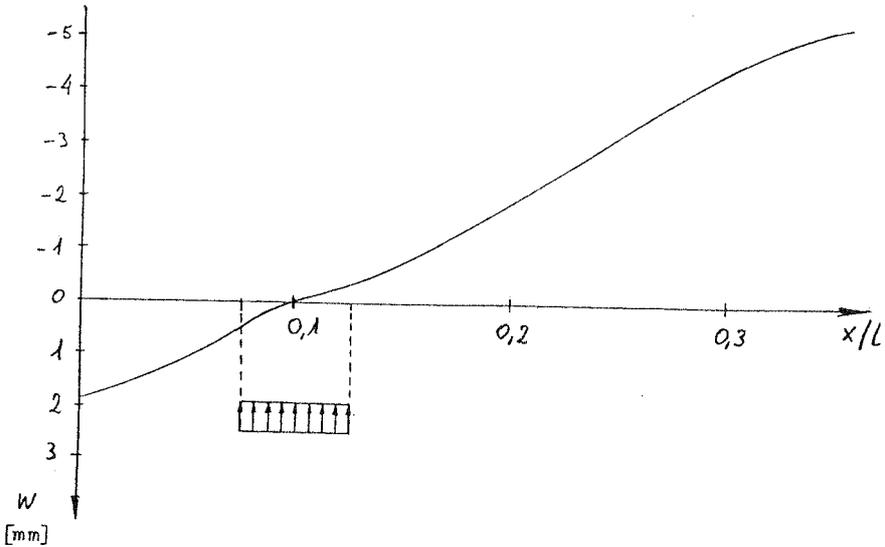


Bild 5.3: w -Verlauf für $\varphi = 0^\circ$ bei konstanter Pressung

Der Verlauf der Verschiebung w in der unteren Faser ($\varphi = 0^\circ$) über die Behälterlänge wird in Bild 5.3 für ein Beispiel gezeigt. Die dargestellte Verformung des Behälters am Sattel in Längsrichtung ist nur bei einem entsprechend verformbaren Lager möglich. Bei starrer Lagerung ist die Kompatibilität nicht auf der gesamten Lagerbreite erfüllt. Das kann sich vor allem bei breiten Sätteln auf die Ergebnisse auswirken.

Mit Hilfe der konstanten Pressung läßt sich die Breite des Sattels besser berücksichtigen. Die Ergebnisse sind nicht extrem hoch, wie bei Schneidenlagern, und damit realistischer. Für kleine Sattelbreiten reicht dieser Ansatz für die Berechnung aus. Bei unnachgiebigen, breiten Sätteln muß man aber berücksichtigen, daß die Sattelpressung in Längsrichtung ungleichmäßig sein kann. Darauf wird in Abschnitt 5.3 näher eingegangen.

5.2 Ansatz einer Doppelschneide in Längsrichtung

Wie Versuche zeigten, sind die Sattelpressungen in vielen Fällen ungleichmäßig über die Satteltbreite verteilt. Sie sind an den Rändern wesentlich höher als in Sattelmittle. Darauf hat z.B. Z w i e s e l e [5] hingewiesen, wie Bild 5.4 zeigt. Es wäre auch möglich, den Sattel als eine "Doppelschneide" zu betrachten. Das ist in Bild 5.5 dargestellt. Der Behälter liegt dabei nur an den beiden Sattellrändern auf. Die Pressungen im Mittelbereich werden vernachlässigt.

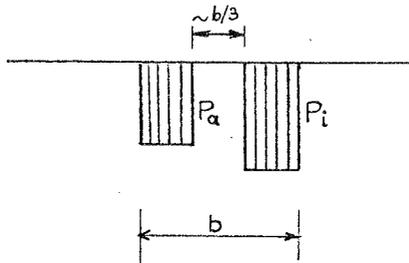


Bild 5.4: Ansatz mit zwei Lastbereichen

M i z o g u c h i und H a t s u d a [17] , [25] haben diesen Effekt in Versuchen bei schmalen Sätteln beobachtet. Sie teilen mit, daß bei relativen Satteltbreiten $b/2r < 0,15$ der Ansatz einer Doppelschneide schon besser ist, als der einer konstanten Pressung. Für $b/2r < 0,05$ muß man ihrer Meinung nach die Doppelschneide annehmen. Bei breiten Sätteln dagegen empfehlen sie, eine konstante Pressung gegenüber der Doppelschneide anzusetzen.

Der Ansatz einer Doppelschneide erlaubt es, an den beiden Rändern die Kontinuitätsbedingungen zwischen Sattel und Behälter zu erfüllen. Bei der konstanten Pressung war dies nur in Sattelmittle möglich. In Bild 5.6 ist der Verlauf der Ra-

dialverschiebung w ($\varphi = 0^\circ$) aufgetragen.

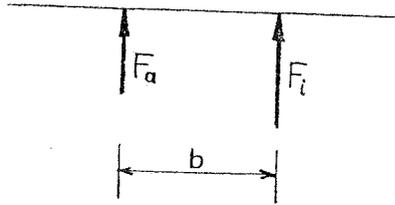


Bild 5.5: Ansatz einer Doppelschneide

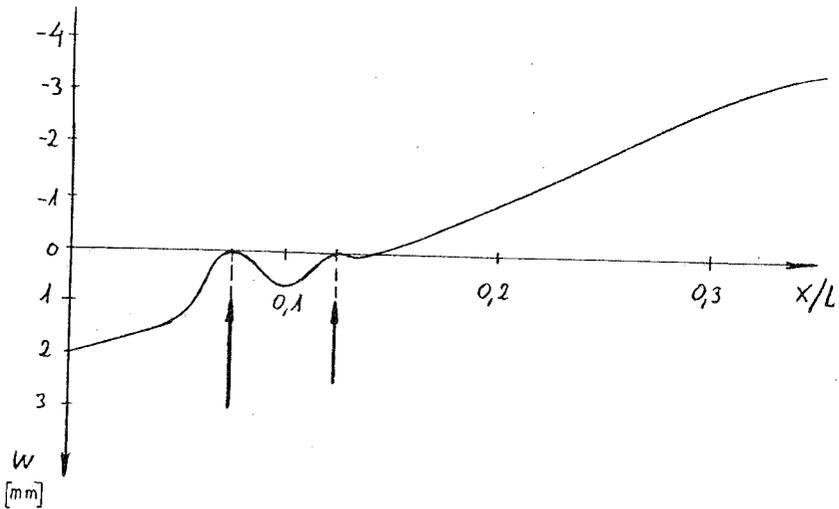


Bild 5.6: w -Verlauf für $\varphi = 0^\circ$ bei Doppelschneide

Man kann aus Bild 5.6 erkennen, daß die Sattelbedingungen gut eingehalten sind, solange im Bereich zwischen den Schneiden der Behälter vom Sattel abhebt. Das ist häufig der Fall bei schmalen Sätteln und die so gefundenen Lö-

sungen stellen eine mögliche Grundlage für die Berechnung eines Behälters dar. Der Einfluß der Verteilung der Sattelpressungen ist weitgehend lokal auf den Sattelpbereich beschränkt. In einiger Entfernung ist der Unterschied in den Beanspruchungen des Behälters gering.

5.3 Neu vorgeschlagene kombinierte Ansätze in Längsrichtung

Die Ansätze mit konstanter Pressung oder als Doppelschneide sind bei schmalen Sätteln brauchbar. Bei breiteren Sattellagern reichen sie im allgemeinen nicht aus. Das gilt vor allem, wenn die Schale zwischen den Sattelrändern nicht abhebt, sondern durch die Flüssigkeitsfüllung zurück gedrückt wird. Es entsteht eine zusätzliche Kontaktzone. Diese ist aber mit Zusatzkräften verbunden. Das muß in den Ansätzen entsprechend berücksichtigt werden.

Es ist denkbar, eine weitere Einzelkraft in Sattelmitte anzusetzen. Da die Pressungsfläche aber meistens eine größere Breite hat, ist es sinnvoller, eine konstant über den Sattel verteilte dritte Pressung anzusetzen. Sie wird als neue Unbekannte eingeführt und ergibt einen neuen Ansatz in Längsrichtung. Das zeigt Bild 5.7.

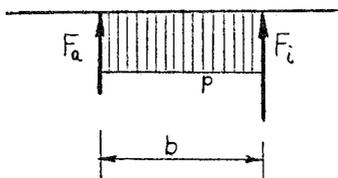


Bild 5.7: Kombiniertes Ansatz mit drei Kräften

Der hier eingeführte kombinierte Ansatz verbindet außerdem die beiden Grenzfälle der reinen konstanten Pressung und der Doppelschneide. Er kann dazu aber die Veränderlichkeit der Kräfte über die Sattelbreite besser erfassen.

Dieser Ansatz ist neuartig und bisher von keinem Autor verwendet worden. Er erlaubt es, die Kontinuitätsbedingungen am Sattel an den beiden Lagerrändern und in Sattelmittle besser zu erfüllen. Die Aufteilung in Umfangsrichtung wird wie früher beibehalten. In Bild 5.8 ist für das zuvor behandelte Beispiel die Auswirkung auf w gezeigt. Man erkennt gut die Kontaktstellen mit dem Sattel.

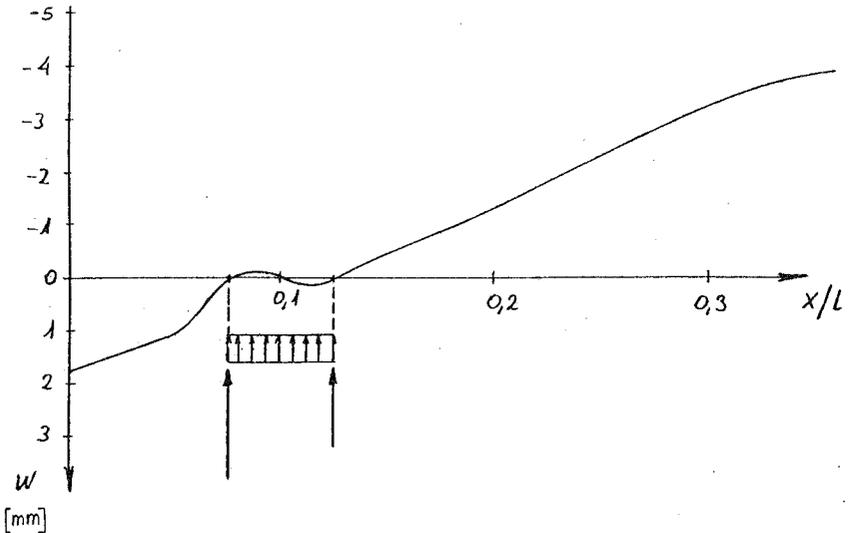


Bild 5.8: w -Verlauf für $\psi = 0^\circ$ bei kombiniertem Ansatz

In Bild 5.9 sind die drei w -Verläufe übereinander gezeichnet, um die Unterschiede, aber auch die Gemeinsamkeiten zu zeigen. Unterschiede ergeben sich am Sattel selbst. Der kombinierte Ansatz erfüllt die Bedingungen am besten. In einiger Entfernung vom Sattel ist der Verformungsverlauf sehr ähnlich, so daß dort auch mit geringeren Abweichungen für

die Schnittgrößen gerechnet werden kann.

In Abschnitt 9.3 wird ein Beispiel mit den drei Ansätzen vergleichsweise durchgerechnet und Versuchswerten gegenübergestellt. Daraus erkennt man, daß in einiger Entfernung ausserhalb des Sattelbereiches eine gute Übereinstimmung der Schnittgrößen besteht.

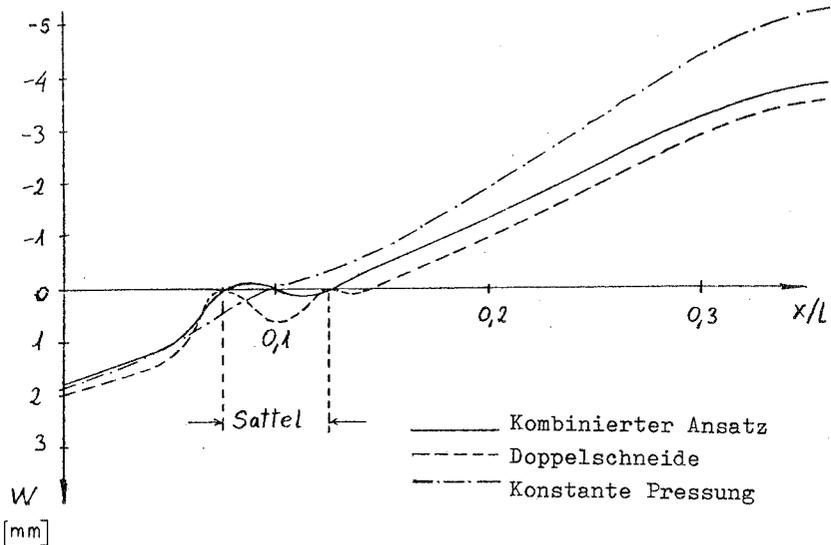


Bild 5.9: w -Verläufe für die drei Ansätze in Längsrichtung ($\varphi = 0^\circ$)

Die tatsächliche Pressung in Längsrichtung entspricht bei breiteren Sätteln eher einem Verlauf, wie er in Bild 5.10 dargestellt ist.

Dieser Pressungsverlauf ist von einer starren Fundamentplatte auf elastischer Bettung bekannt, wie er sich nach Boussinesq ergibt. Die "Bettung" im vorliegenden Fall wird durch die Schale dargestellt, das starre Fundament durch den star-

ren Sattel. Dieser Verlauf wird durch den kombinierten Ansatz gut angenähert. Die Spitzenkräfte werden in Einzelkräften dargestellt. Die "Grundpressung" wird als eine konstante Pressung berücksichtigt. Dieser Ansatz ist in Bild 5.10 zusätzlich gezeigt.

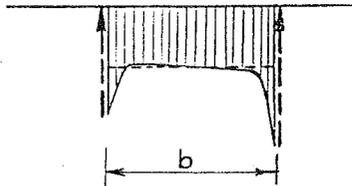


Bild 5.10: Prinzipieller Verlauf der zu erwartenden tatsächlichen Sattelpressungen

Weitere neue Möglichkeiten wären Ansätze in Form von Stufenpressungen in Längsrichtung, wie schon in Umfangsrichtung angenommen wurde, oder als Funktionsansätze, z.B. als Trapeze oder Parabeln. Der Rechenaufwand steigt mit der Zahl der Unbekannten und der Komplikation bei den Lastansätzen stark an. Das begrenzt die praktische Verwendungsfähigkeit. Nur bei extrem breiten Sätteln, die aber selten vorkommen, wird auf diese Weise ein komplizierterer Ansatz eine Verbesserung bringen. Die praktisch ausgeführten Sattelbreiten liegen in einem Bereich, für den der hier vorgeschlagene kombinierte Ansatz mit konstanter Pressung im Mittelbereich besonders gut geeignet ist. Die Ergebnisse in dieser Arbeit wurden mit dem kombinierten Ansatz nach Bild 5.7 gerechnet.

6. Berücksichtigung des örtlichen Abhebens am Sattel

Wenn der Sattel nicht mit dem Behälter fest verbunden ist, gibt es die Möglichkeit, daß sich in gewissen Fällen die Schale örtlich vom Sattel abhebt. In seinen Versuchen hat Z w i e s e l e [5] diese Erscheinung beobachtet. In diesen Fällen gab es in der Nähe des Sattelhorns einen Entlastungsbereich, in dem ein Abheben auftrat. Bei sehr kleinem Sattelwinkel φ und steifem Behälter ist nach K ř u p k a [11] sogar im ganzen mittleren Bereich des Sattels ein Abheben des Behälters möglich. Die Schale stützt sich nur noch an den beiden Sattelspitzen ab. Auch V i n e t und D o r é [38] haben für Behälter verschiedene Grenzfälle mit örtlichem Abheben untersucht.

In dem Fall des Abhebens würden in der vorliegenden Arbeit bei einer Berechnung zuerst einzelne negative Lagerkräfte auftreten. Diese entsprechen Zugkräften zwischen Sattel und Behälter. Aber solche Kräfte sind bei einem frei aufliegenden Behälter nicht möglich. Die Schale hebt sich an diesen Punkten in Wirklichkeit vom Sattel ab und überträgt die Lasten nach einer Umlagerung nur durch Druckkräfte auf den Sattel. Bei der Bestimmung der Kontaktkräfte liegt ein System veränderlicher Gliederung vor.

Beim örtlichen Abheben ist die Zahl der Kontaktpunkte kleiner als ohne diesen Effekt. Das Kontaktproblem muß für diese neue unbekannte Zahl von Berührungspunkten gelöst werden. Dabei entfallen in der Koeffizientenmatrix **M** die Zeilen und Spalten, die den Punkten entsprechen, an denen kein Kontakt zwischen Behälter und Sattel besteht. Die Lösung erfolgt iterativ.

Es wird ein Beispiel für einen frei auf zwei Sätteln liegenden Behälter gegeben, bei dem sich örtliches Abheben zeigt. Die wichtigsten Parameter des Stahlbehälters sind dabei:

$$\begin{array}{lll} l = 4 \text{ m} & r = 0,60 \text{ m} & t = 6 \text{ mm} \\ a/l = 0,125 & b/l = 0,05 & \varphi = 60^\circ. \end{array}$$

Der Behälter ist voll gefüllt.

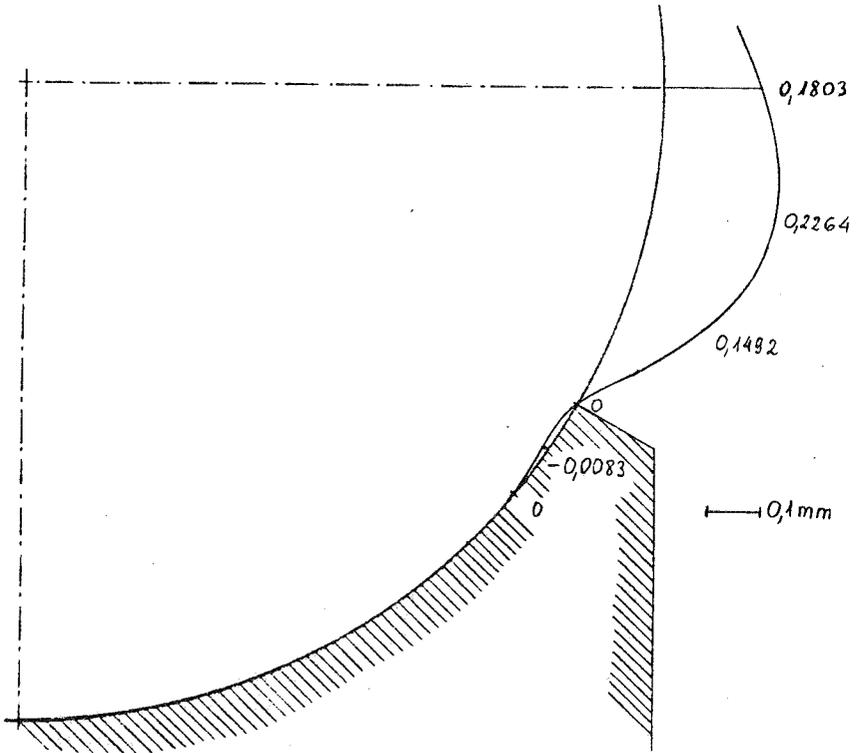


Bild 6.1: Radialverschiebung w [mm] im Bereich des Sattels.

Bild 6.1 stellt den Verlauf der Radialverschiebungen w in Sattelachse dar, wie er sich im unmittelbaren Bereich des Sattelhornes ergibt. Dicht unterhalb der Sattelspitze tritt ein örtliches Abheben ein. Der Bereich dieser negativen Verformungen ist sehr klein. Danach liegt die Schale

voll am Sattel an. Außerhalb des Sattels hängt der Behälter seitlich über. Die größte Radialverschiebung w tritt dabei in kurzer Entfernung vor der Sattelspitze auf.

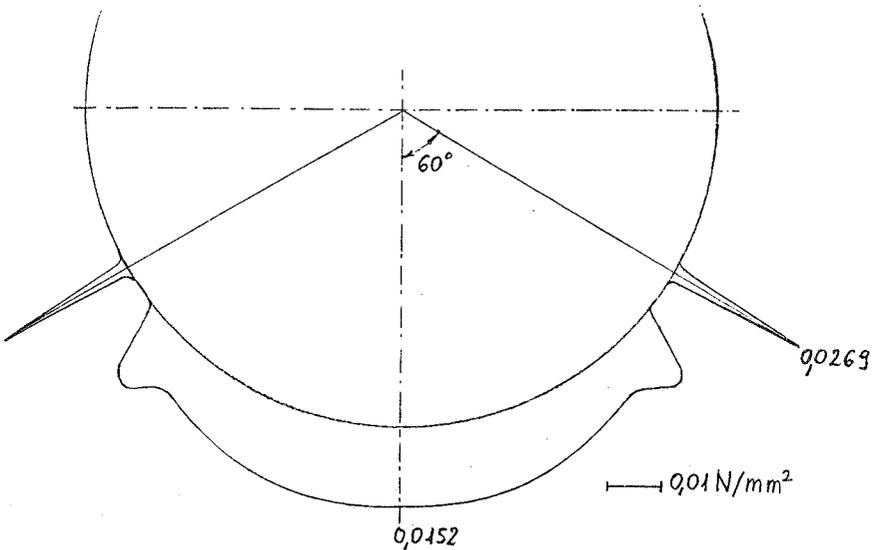


Bild 6.2: Sattelpressung p [N/mm^2] in Sattelmittle.

Das Bild 6.2 zeigt die zugehörigen Lagerpressungen in Sattelachse. Im abhebenden Bereich sind diese Pressungen gleich Null. Am Sattelhorn erreichen sie den Maximalwert. Ein zweites, viel kleineres relatives Maximum der Sattelpressungen tritt an der inneren Seite des abhebenden Bereichs auf. Dieser Wert liegt in der Größenordnung der übrigen Lagerpressungen. Die Kontaktkräfte bei $\varphi = 0^\circ$ sind sogar etwas höher. V i n e t und D o r é [38] studieren Behälter auf kontinuierlicher Lagerung. Bei einem ihrer

Lagerungsfälle mit Abheben setzen sie zwei Einzelkräfte neben dem Bereich des Abhebens an. Die kleinere, innere Kraft entspricht dem obengenannten, zweiten relativen Maximalwert in Bild 6.2

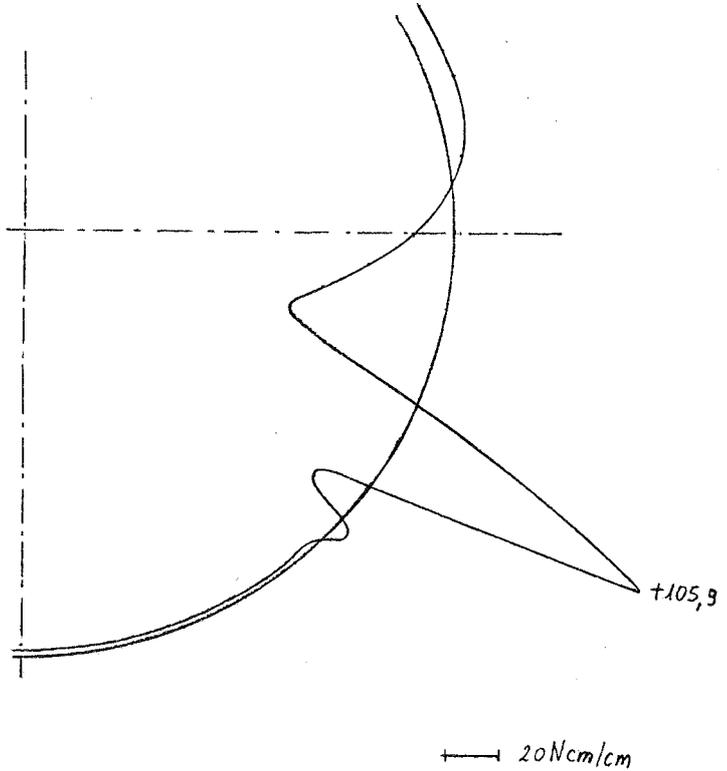


Bild 6.3: Biegemomente M_φ [Ncm/cm] in Sattelachse.

Als Beispiel für eine Schnittgröße wird in Bild 6.3 der M_φ - Verlauf in Sattelachse dargestellt. Wie aus der Verteilung der Kontaktkräfte zu erwarten ist, zeigen sich auch bei dem Biegemoment M_φ in Umfangsrichtung zwei örtliche Maxima an den beiden Rändern des abhebenden Bereichs. Die beiden positiven Werte sind in ihrer Größe sehr verschieden. Der Maximalwert erscheint an dem Sattelhorn selbst. Danach fallen die Umfangsbiegemomente sehr schnell auf einen negativen Extremwert ab. Dieser stimmt in seiner Lage mit der größten Ausbauchung im w - Verlauf nach Bild 6.1 überein.

Bei den übrigen Schnittgrößen M_x , N_φ , N_x usw. ist der Bereich des Abhebens in seiner Auswirkung nicht mehr zu erkennen.

7. Zusätzliche Betrachtungen am Sattel

7.1 Unterschiedliche Sattelformen

Normalerweise werden die Sättel bei liegenden Behältern mit demselben Radius gebaut wie die Schalen. Z w i e s e l e [5] empfiehlt diese Konstruktion, aber bei unterschiedlichen Radien ist der Fall $r_s > r$ besser als umgekehrt. Auf diese Weise sind die Beanspruchungen günstiger. M i z o g u c h i und H a t s u d a [25] untersuchen unterschiedliche Abweichungen im Bereich der Sattelhörner, um die Lagerung zu verbessern. Sie weisen aber darauf hin, daß es in der Praxis sehr schwierig ist, solche Formen mit der nötigen Genauigkeit herzustellen. Konstruktiv einfacher ist der Fall, daß der Sattel mit einem Kreisradius $r_s = r + \Delta r$ gebaut wird. Darauf weist auch B r a n d e s [6] hin. Ein solcher Lagerungsfall wird in Kapitel 9 gerechnet und mit den theoretischen Ergebnissen von Brandes verglichen. Die Übereinstimmung ist dabei sehr gut.

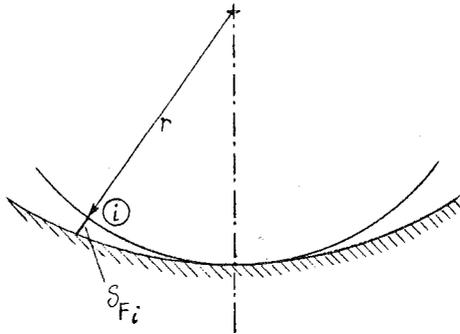


Bild 7.1: Beispiel für die Differenzwerte δ_{Fi} bei abweichender Sattelform

Für eine beliebige Sattelform ergibt sich an jedem Punkt i eine Abweichung δ_{Fi} des Sattels von der Zylinderform. Das zeigt Bild 7.1. Diese Werte der Abweichungen δ_{Fi} summieren

sich zu der rechten Seite der Kompatibilitätsgleichungen (3.3). Die Gleichung (3.4) für das Gleichgewicht bleibt erhalten und die Gleichung (3.5) wandelt sich um in

$$\mathbf{M} \mathbf{F} = \mathbf{D} + \mathbf{D}_F \quad (7.1)$$

Dabei sind die Matrizen \mathbf{F} , \mathbf{D} und \mathbf{M} in den Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.8) definiert.

Die Matrix \mathbf{D}_F enthält alle Abweichungswerte δ_{Fi}

$$\mathbf{D}_F^T = \begin{bmatrix} 0,5 \delta_{F0} & \delta_{F1} & \delta_{F2} & \cdots & \delta_{Fn} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

An der weiteren Durchführung der Rechnung ändert sich nichts.

7.2 Elastische Nachgiebigkeit des Sattels

Die Sättel sind häufig relativ starr gegenüber den verformbaren dünnwandigen Behältern. Es gibt aber auch Fälle, in denen die Sättel nachgiebig konstruiert sind oder eine elastische Zwischenlage besitzen. Das beeinflusst die Beanspruchungen im Behälter in der Nähe des Sattels. Will man diesen Einfluß berücksichtigen, so muß man die Einheitsverformung des Sattels infolge der Einheitskräfte kennen. Wenn man den Sattel als gekrümmten Kragträger betrachten kann, gibt K ř u p k a [13] eine Berechnungsmöglichkeit für diese Verformungen an.

Die Einheitsverformungen des Sattels werden mit δ_{ij}^* bezeichnet und sind in Bild 7.2 dargestellt. Dabei sind alle δ -Werte einheitlich in Richtung von +w positiv definiert. Die Einheitsverformungen δ_{ij}^* des Sattels sind mit den unbekanntenen Kräften F_j zu multiplizieren und addieren sich zu der rechten Seite der Kompatibilitätsgleichungen (3.3).

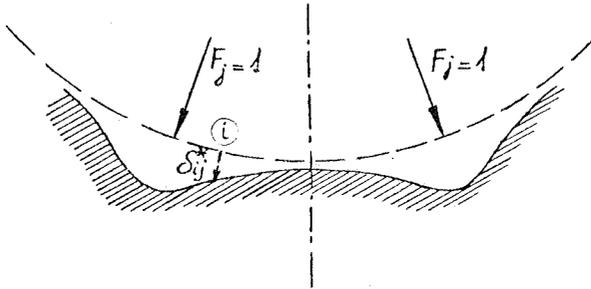


Bild 7.2: Federanteile δ_{ij}^* des Sattels bei symmetrischen Kraftangriff $F_j = 1$

Umgeformt erhält man die Matrixengleichung

$$(M - M^*)F = D \quad (7.3)$$

Diese entspricht der früheren Gleichung (3.5). Die Matrix M^* enthält dabei die Federanteile δ_{ij}^* des Sattels:

$$M^* = \begin{pmatrix} 0,5 \delta_{00}^* & 0,5 \delta_{01}^* & 0,5 \delta_{02}^* & \dots & 0,5 \delta_{0n}^* & 0 \\ \delta_{10}^* & \delta_{11}^* & \delta_{12}^* & \dots & \delta_{1n}^* & 0 \\ \delta_{20}^* & \delta_{21}^* & \delta_{22}^* & \dots & \delta_{2n}^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n0}^* & \delta_{n1}^* & \delta_{n2}^* & \dots & \delta_{nn}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7.4)

Die übrigen Matrizen in (7.3) wurden bereits in Abschnitt 3.3 definiert.

7.3 Ansatz tangentialer Sattelkräfte

Die meisten Behälter liegen frei auf den Sätteln auf. Das ist konstruktiv einfacher und die Schale kann sich frei verformen. Wenn der Behälter aber an den Sattel angeschweißt ist, treten neben den Radialkräften auch Tangentialkräfte T auf. Diese lassen sich in der Berechnung analog zu den Radialkräften behandeln. Sie sind dabei zusätzliche Unbekannte. Der Ansatz der Tangentialkräfte erfolgt antimetrisch nach Bild 7.3.

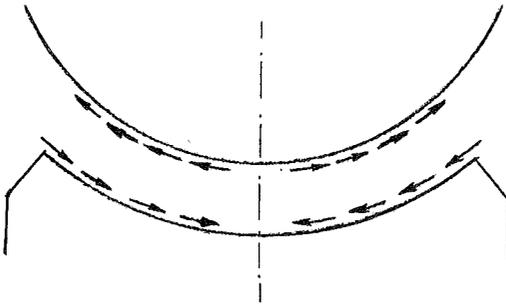


Bild 7.3: Ansatz der tangentialen Einzelkräfte

Die Tangentialkraft T_0 bei $\varphi = 0^\circ$ ist bei symmetrischer Belastung gleich Null. Damit wächst die Zahl der Unbekannten um n an. Die Kompatibilitätsbedingungen in radialer Richtung sind entsprechend zu Abschnitt 3.3 aufgebaut, enthalten aber zusätzlich Verformungsanteile infolge der Kräfte T . Der Ansatz erfolgt in ähnlicher Weise wie für die Kräfte F . Neu hinzu kommen Kompatibilitätsbedingungen in tangentialer Richtung. Es sind n zusätzliche Gleichungen, da wegen symmetrischer Belastung die Tangentialverschiebung an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ gleich Null ist. Diese Gleichungen enthalten An-

teile aus radialen und tangentialen Kräften. Die Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung erweitert sich ebenfalls um die vertikalen Komponenten der Tangentialkräfte.

Die Gleichung (3.5) bleibt im Prinzip erhalten. Sie lautet jetzt

$$\mathbf{M}_G \mathbf{F}_G = \mathbf{D}_G \quad (7.5)$$

Der Index G weist auf die zusätzliche Erfassung der Tangentialkräfte hin. Die Tangentialverschiebungen werden mit ξ bezeichnet. Die Matrizen von (7.5) lassen sich darstellen als

$$\mathbf{F}_G^T = \left[F_0 \ F_1 \ F_2 \ \cdots \ F_n \ T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_n \ \delta_s \right] \quad (7.6)$$

$$\mathbf{D}_G^T = \left[-0,5 \delta_{L_0} \ -\delta_{L_1} \ -\delta_{L_2} \ \cdots \ -\delta_{L_n} \ \xi_{L_1} \ \xi_{L_2} \ \cdots \ \xi_{L_n} \ -0,5Q \right] \quad (7.7)$$

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \mathbf{M}_5 & \\ & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & & & \\ & & & & & \\ & & & \mathbf{M}_6 & & 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Die Untermatrix \mathbf{M}_1 enthält die Einheitsverformungen in radialer Richtung infolge der Radialkräfte F. Sie ist gleich wie die Matrix \mathbf{M} in (3.8), jedoch ohne die letzte Zeile und Spalte. \mathbf{M}_2 enthält die Einheitsverformungen in

radialer Richtung infolge der Tangentialkräfte T. Sie ist ähnlich gebaut wie M_1 . Die Elemente der Untermatrix M_3 sind die Einheitsverformungen in tangentialer Richtung infolge der Radialkräfte F. M_4 enthält die Einheitsverformungen in tangentialer Richtung infolge der Tangentialkräfte T. Ihr Aufbau ist analog zu M_1 .

Die Spaltenmatrix M_5 enthält die Komponenten der Starrkörperverschiebung in radialer und tangentialer Richtung.

M_6 enthält die Koeffizienten aus der Gleichgewichtsbedingung.

Das gesamte Gleichungssystem wächst sehr stark an und damit steigt auch der Rechenaufwand erheblich. Will man Längskräfte berücksichtigen, so ist das analog den Radial- und Tangentialkräften möglich. Natürlich wächst der Rechenaufwand noch weiter an.

8. Beispiel für einen Behälter auf Schneidenlagern

In den folgenden Kapiteln werden ausführlich Behälter auf Sattellagern endlicher Breite untersucht. Vorher soll aber ein vollständiges Beispiel für einen liegenden Behälter auf Schneidenlagern gebracht werden. Dazu wird ein Stahlbehälter mit halber Füllung betrachtet. Seine Parameter sind:

$$\begin{aligned} l &= 4,0 \text{ m} & r &= 1,0 \text{ m} & t &= 3 \text{ mm} \\ \varphi &= 60^\circ & a/l &= 0,20. \end{aligned}$$

Einige Ergebnisse werden in den folgenden Bildern exemplarisch dargestellt. Es sind dies die maßgebenden Verformungen und Schnittgrößen am Sattel. Ihnen werden die entsprechenden Verläufe in Feldmitte gegenübergestellt. Wegen der Symmetrie ist dabei jeweils nur eine Hälfte des Querschnitts gezeichnet. In typischen Fällen werden auch Längsverläufe angegeben.

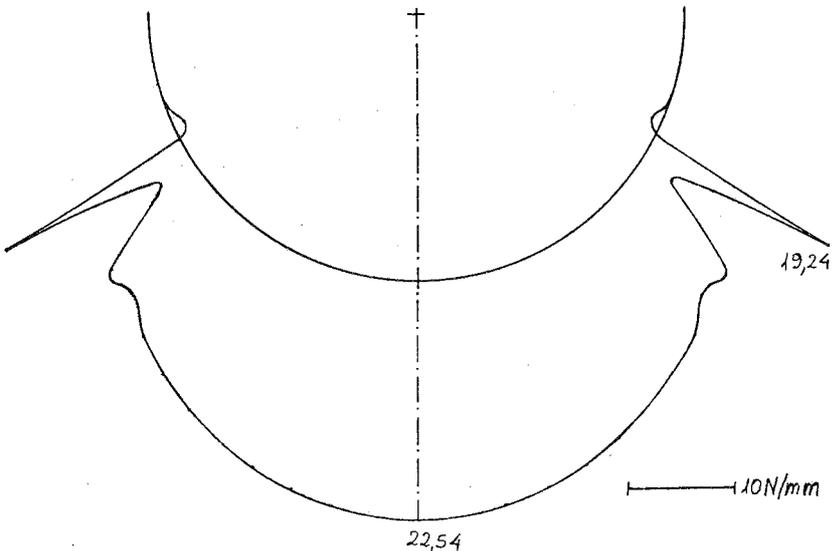


Bild 8.1: Sattelkräfte p [N/mm]

Als erstes ist in Bild 8.1 der Verlauf der Kontaktkräfte am Sattel dargestellt. Kraftspitzen zeigen sich im Bereich der Sattelenden mit einem raschen Abfall zum Sattellinneren. Im mittleren Bereich des Sattels ist der Verlauf gleichmäßig. Der Maximalwert der Sattelkräfte ergibt sich an der Stelle $\varphi = 0^\circ$.

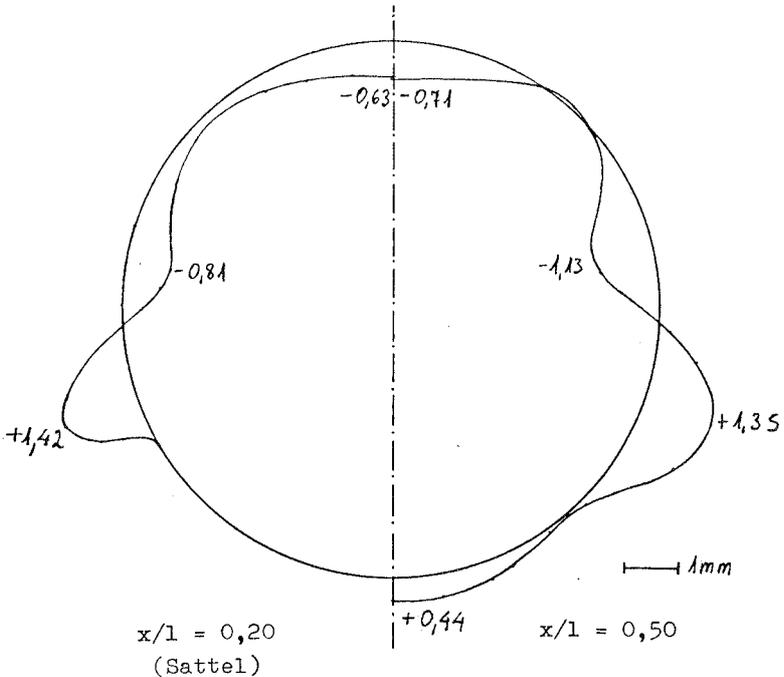


Bild 8.2: Radialverschiebungen w [mm]

Bild 8.2 zeigt den Verlauf der Radialverschiebungen w in Umfangsrichtung. Die Verschiebung w ist am Sattel selbst gleich Null. Typisch ist die Ausbauchung der Schale dicht oberhalb der Sattelspitze. Am Sattel und in Feldmitte sinkt der obere Bereich der Schale nach innen. Die Verformungen in Feldmitte weichen vom ursprünglichen Kreis ab. Das ist anders, als bei einem Balken zu erwarten wäre. Der Verlauf von w in Behälterlängsrichtung ist in Bild 8.3 dargestellt.

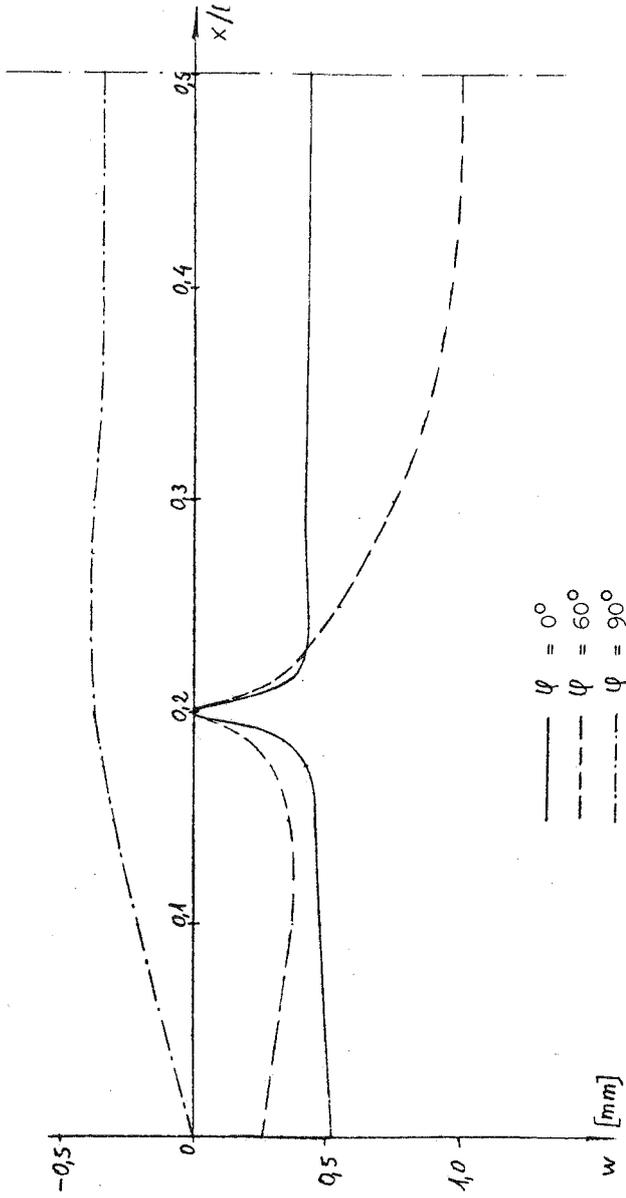


Bild 8.2: Verlauf der Radialverschiebungen w über die Behälterlänge

Angegeben sind die Werte für drei verschiedene Fasern. Man erkennt die örtliche Störung durch den Sattel. Diese ist auf einen engen Bereich begrenzt. Das gilt in Längsrichtung, aber auch in Umfangsrichtung. Bei $\varphi = 90^\circ$ ist die Sattelstörung überhaupt nicht zu merken.

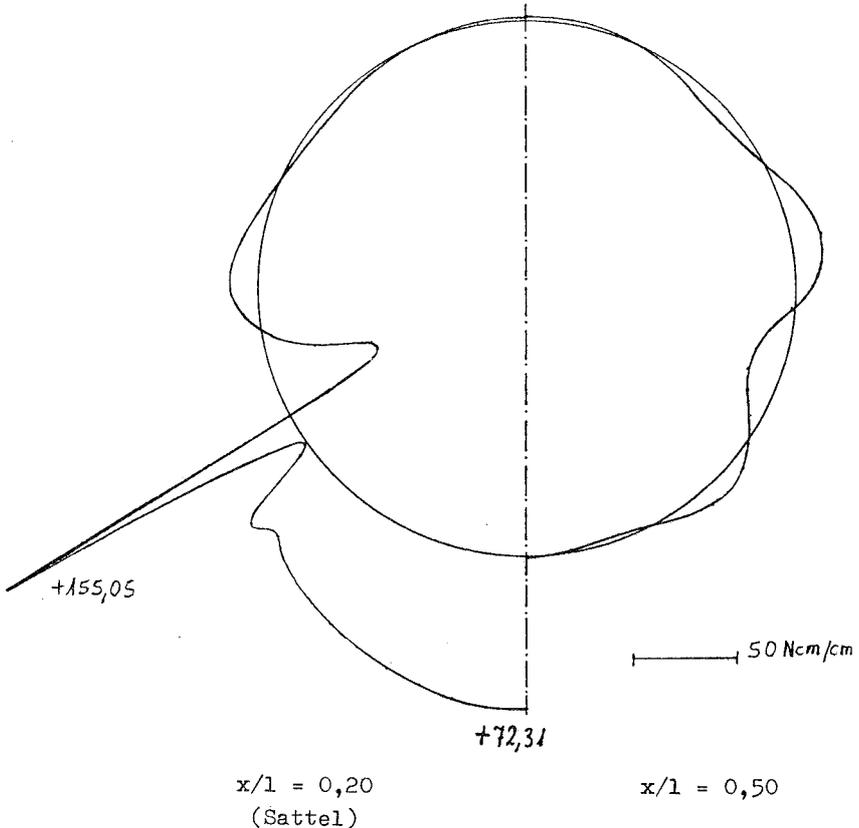


Bild 8.4: Umfangsbiegemomente M_φ [Ncm/cm]

Für eine Dimensionierung ist das Biegemoment M_φ in Umfangsrichtung wichtig. Maßgebend ist dabei der Sattelbereich wegen der direkten und hohen Querbelastung. Wie in

Bild 8.4 zu erkennen ist, treten hier die Maximalwerte am Sattelhorn auf. Das steile Anwachsen und Abfallen der Momente an der Sattelspitze ist typisch für diese Art der Lagerung. In einer Entfernung wird der Verlauf ausgeglichener. Anders als beim Balken gibt es auch in Feldmitte noch Biegemomente M_{φ} . Diese sind viel kleiner als am Sattel.

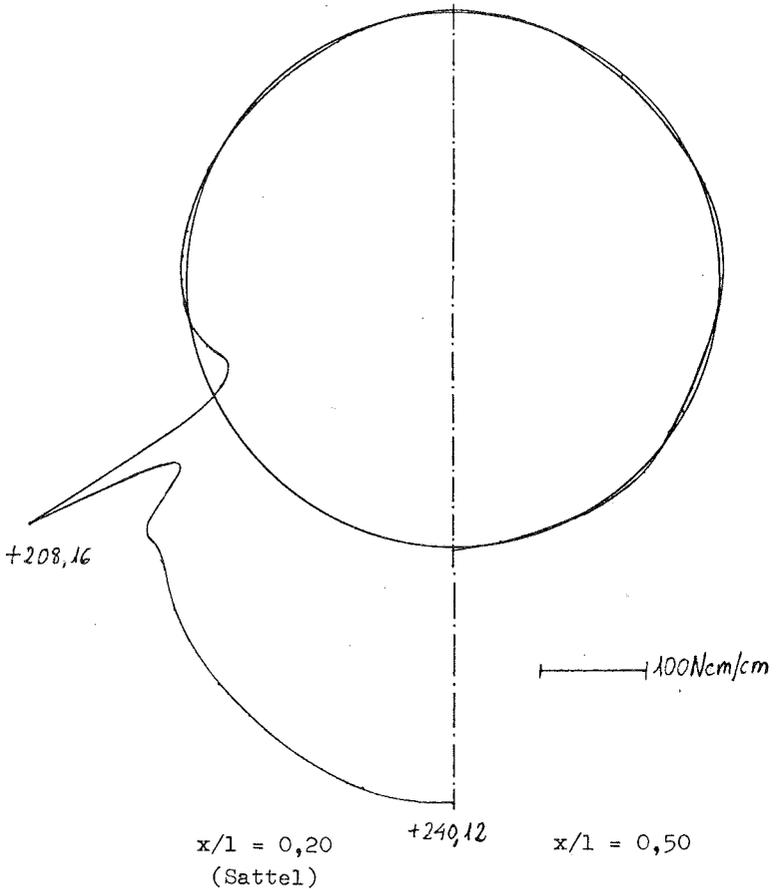


Bild 8.5: Längsbiegemomente M_x [Ncm/cm]

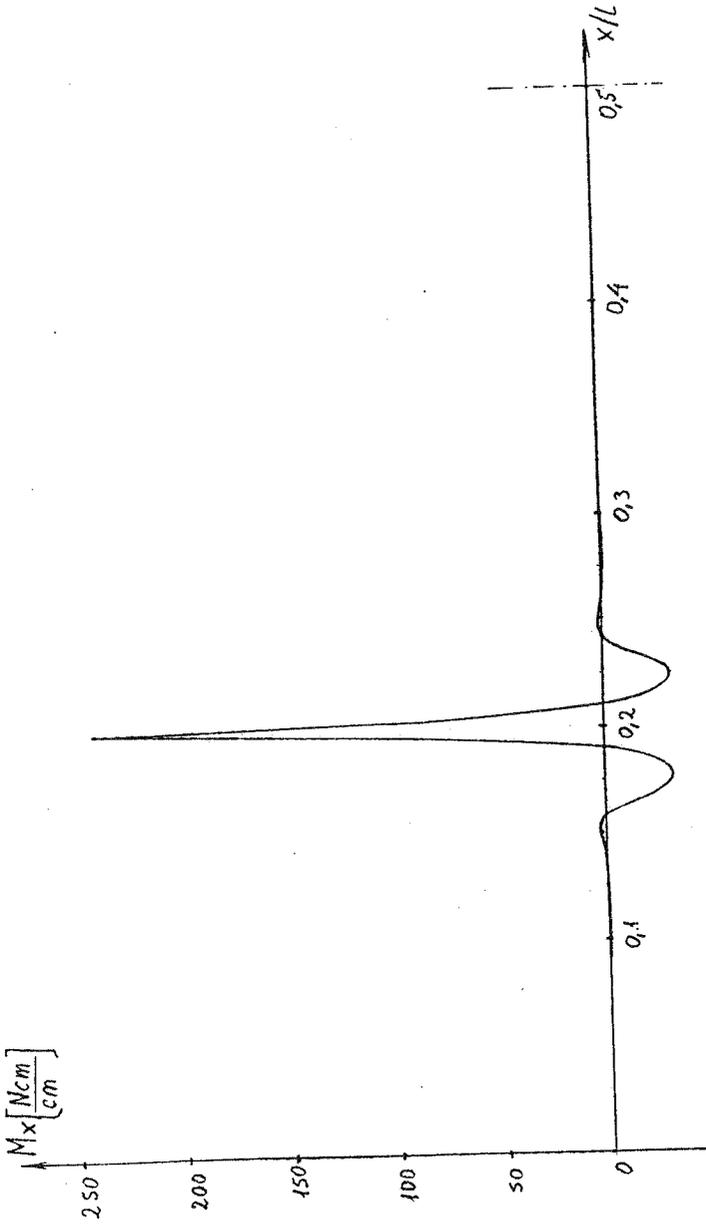


Bild 8.6: Verlauf von M_x in Längsrichtung für $\varphi = 0^\circ$

Die Biegemomente M_x sind praktisch nur auf den Sattelbereich beschränkt. Wie Bild 8.5 verdeutlicht, sind diese Beanspruchungen selbst im Sattelquerschnitt, aber außerhalb des direkten Lagerbereiches, sehr klein. In Feldmitte sind sie ebenfalls unbedeutend. Bild 8.6 zeigt das schnelle Abklingen von M_x in Längsrichtung. Das Verhalten ähnelt sehr dem Abklingen von Randstörungen bei Rotationsschalen. Dieses Thema wird von B e l l u z z i [21], H a a s [22] und M a n g [33] behandelt. Die Abklinglänge ist proportional zu \sqrt{rt} . K ř u p k a [14] gibt den 1. Nulldurchgang für das Biegemoment M_x bei $0,6 \sqrt{rt}$ an. Das stimmt mit den Angaben von Mang überein. Die gesamte Störung ist näherungsweise in einer Entfernung von $3 \sqrt{rt}$ abgeklungen. Das bestätigt sich in dem vorliegenden Beispiel.

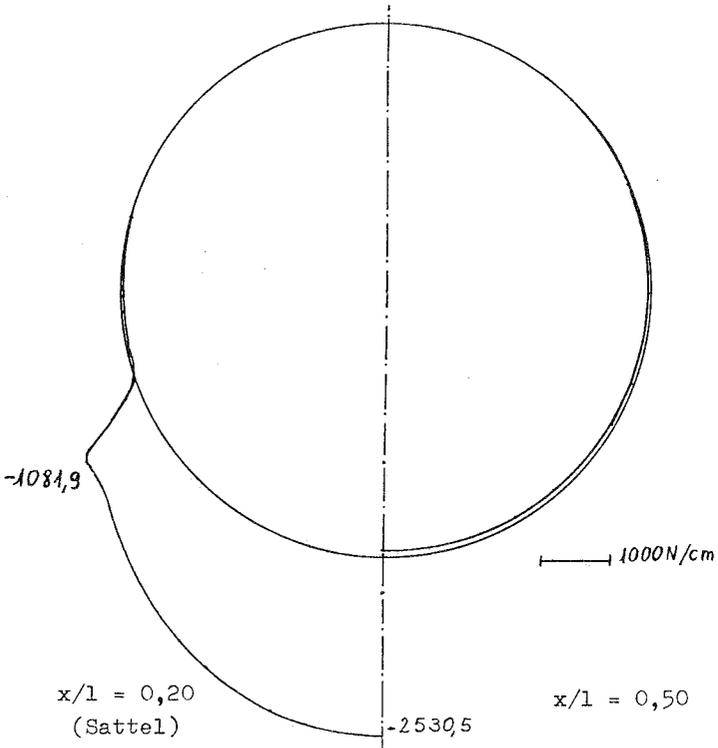


Bild 8.7: Membrankraft N_φ [N/cm] in Umfangsrichtung

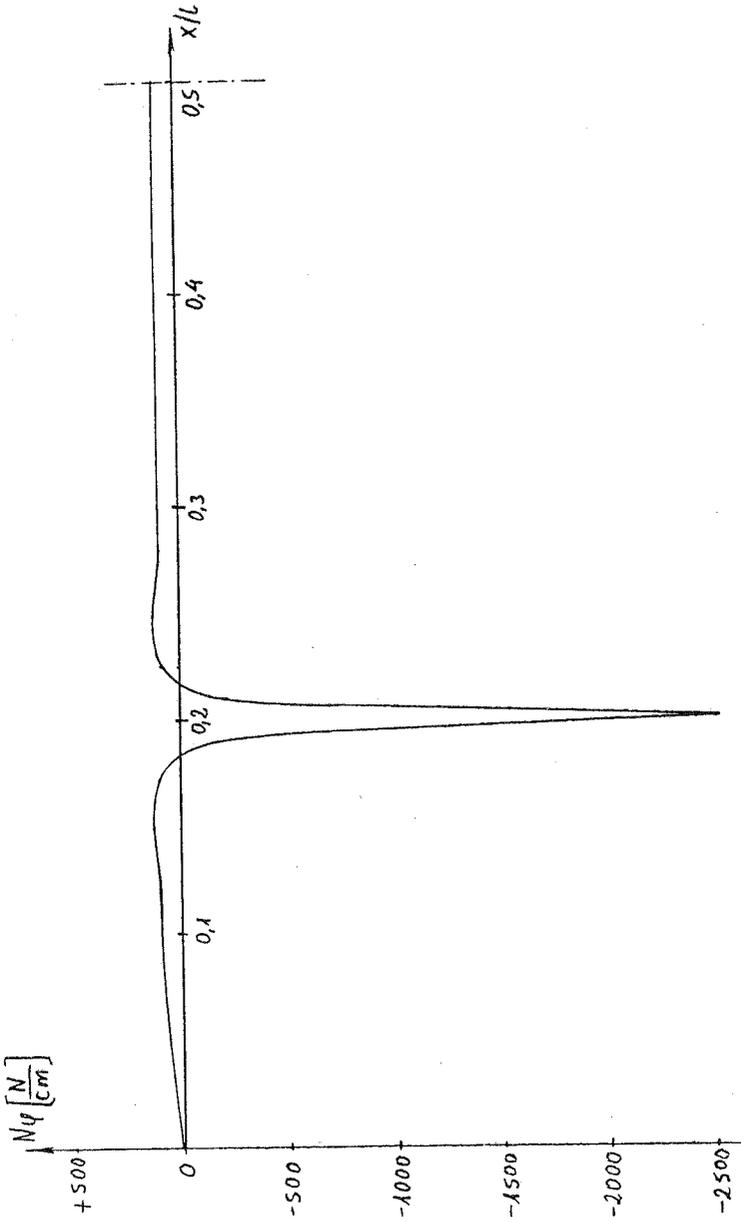


Bild 8.8: Längsverlauf der Membrankraft Nq für $\varphi = 0^\circ$

Eine ähnliche Konzentration am Sattel zeigt sich für die Membrankraft N_φ in Umfangsrichtung. Außerhalb des Sattelbereichs sind die Werte sehr klein. Das gilt, wie aus den Bildern 8.7 und 8.8 zu sehen ist, in Umfangs- und in Längsrichtung. Das Abklingen verhält sich ähnlich wie bei M_x . Darauf weisen Alessi, Ceccoli und Chiari [26] hin.

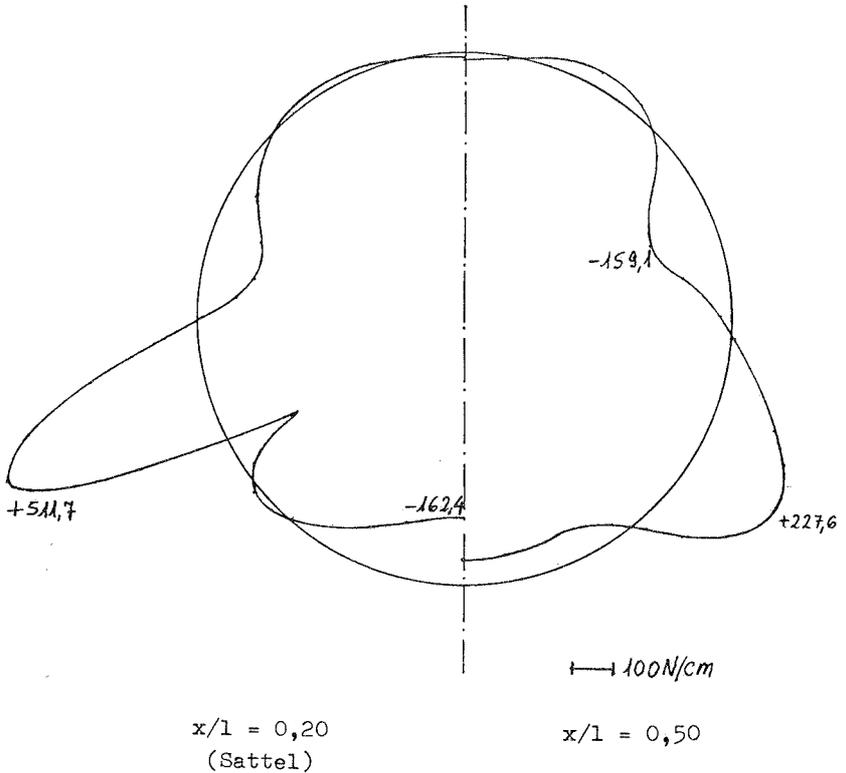


Bild 8.9: Membrankräfte N_x [N/cm]

Zum Abschluß wird in Bild 8.9 der Verlauf von N_x gezeigt. Diese Membrankraft ergibt in Feldmitte völlig andere Verteilungen als bei einem Balken. N_x wechselt mehrfach das

Vorzeichen und die maximale Druckkraft in Feldmitte tritt nicht bei $\varphi = 180^\circ$ auf. Bei $\varphi = 0^\circ$ erscheinen ebenfalls Druckkräfte. Das alles entspricht nicht dem cosinusförmigen Verlauf bei einem Balken. Darauf wird in Kapitel 12 noch näher eingegangen. Auch am Sattel sind die Verläufe von N_x so kompliziert, daß man sie nicht einfach mit den Beanspruchungen eines Balkens mit reduziertem Querschnitt vergleichen kann, wie das Z i c k [1] empfiehlt.

Zusammenfassend erkennt man, daß es sich bei der Sattelbeanspruchung um eine starke, lokale Störung handelt. Da in diesem Beispiel ein Schneidensattel betrachtet wurde, sind die Schnittgrößen sehr hoch. Bei einem wirklichen Sattel der Breite $b \neq 0$ sind die Beanspruchungen wesentlich kleiner. Wie aus Abschnitt 13.3 zu sehen ist, ergibt sich schon bei kleinen Breiten ein starker Abfall der Maximalspannungen.

9. Vergleiche mit Untersuchungsergebnissen anderer Autoren an Rohren und Behältern

9.1 Vergleich der Sattelkräfte mit Berechnungen von Brandes und Versuchen von Zwiesele

In den folgenden Kapiteln wird das Tragverhalten der liegenden Behälter näher untersucht. Es werden dabei die Einflüsse der verschiedenen Parameter studiert. Zuvor sollen aber einige vorhandene Ergebnisse anderer Autoren betrachtet werden. Manche Ergebnisse sind theoretisch ermittelt worden, andere beruhen auf Meßwerten. Bei den Nachrechnungen werden alle Abmessungen nach den Angaben der Autoren angesetzt.

Die genaue Bestimmung der Sattelkräfte, d.h. ihre Verteilung entlang des Sattels, ist ein Hauptproblem bei der Berechnung liegender Behälter und Rohre. Diese Kräfte sind von großer Bedeutung für das Gesamtergebnis und werden hier zunächst betrachtet.

Als erstes wird die Sattelpressung bei einem Rohr untersucht. Der Radius des Sattels ist dabei größer als der Zylinderradius. Theoretische Untersuchungen zur Verteilung der Sattelkräfte in diesem Fall finden sich bei Brandes [6]. Er ermittelt in seiner Arbeit die Kräfte bei Rohren auf Schneidenlagern. Für die Sattelpressungen wählt er Polynomansätze, die er in Fourierreihen entwickelt. Die unbekanntenen Koeffizienten bestimmt er mit Hilfe einer Kollokationsmethode. Verbessert wird dieser Ansatz durch die Berücksichtigung von Einzelkräften an den beiden Sattelspitzen. Für einen speziellen Fall demonstriert er in Bild 20 seiner Arbeit [6] seine beiden Ansätze und vergleicht die Ergebnisse. Dort finden sich auch die wichtigsten Parameter für Rohr und Sattel.

Dieses 1. Beispiel wird nach der hier dargelegten Methode nachgerechnet und bietet einen guten Vergleich für die Berechnung von Rohren. Dazu kommt noch der Sonderfall, daß der Sattelradius um $\Delta r = 0,2$ cm größer gewählt wurde als

der Rohrradius $r = 25$ cm. Die Behandlung eines Lagerungsfalles, bei dem der Sattelradius größer ist als der Schalenradius, wurde schon in Abschnitt 7.1 analysiert.

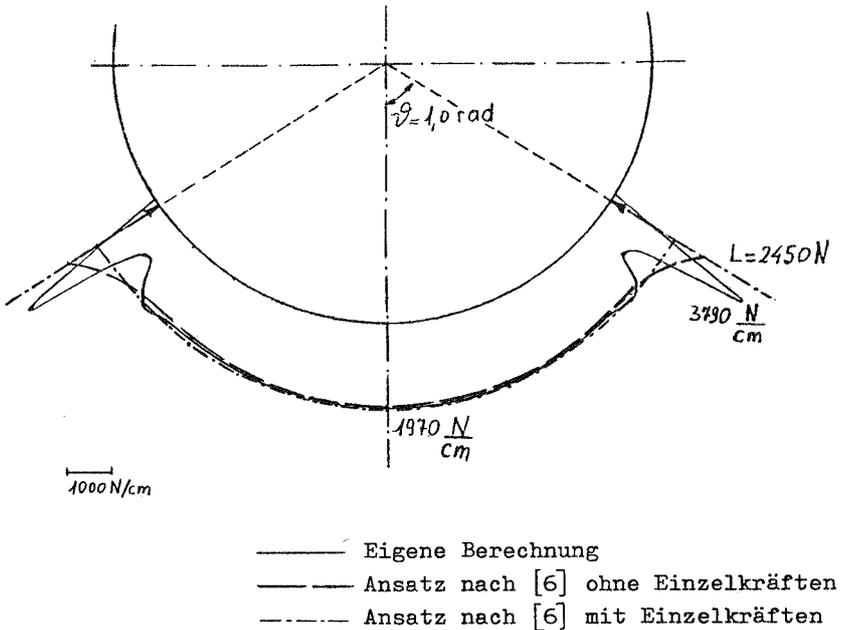


Bild 9.1: Sattelkraftverläufe für Beispiel 1.

In Bild 9.1 ist das Ergebnis zusammen mit den beiden Verläufen der Sattelkräfte nach Brandes dargestellt. Die erste Vergleichskurve ist von Brandes ohne, die zweite mit zusätzlichen Einzellasten bestimmt worden. Der hier neu berechnete Verlauf entspricht ausgezeichnet den von Brandes vorausgesagten Werten. Im Mittelbereich ist praktisch keine Abweichung vorhanden. An den Sattelenden erhält man nach der hier durchgeführten Berechnung einen kontinuierlichen Kräfteverlauf. Vor dem Sattelhorn zeigt sich ein örtliches Absinken der Kontaktkräfte. Der Mittelwert des Verlaufes am

Sattelhorn entspricht dem Ansatz von Brandes ohne die Einzelkräfte. Die Einzelkraft von Brandes erfaßt die Konzentration der Pressungen am Sattelende stärker.

Experimentelle Messungen der Sattelkräfte an einem liegenden Behälter hat vor allem Zwiesele [5] gemacht. Er beschreibt dabei die Schwierigkeiten bei der Versuchsdurchführung. Zwiesele benutzte zunächst eine indirekte Methode zur Ermittlung der Sattelkräfte. Durch die Messung von Reibungskräften versuchte er, die Sattelkräfte zu bestimmen. Er zog Metallstreifen zwischen den Behältern und den Sätteln durch und maß die dabei auftretenden Reibungskräfte. Die Sättel waren aus Beton gegossen und mit Kunststoff beschichtet worden. Die Nachrechnung einer seiner Versuche wird hier gezeigt. Die Ergebnisse sind in Bild 9.2 dargestellt. Sie werden den Werten von Bild 14 aus der Arbeit von Zwiesele [5] gegenübergestellt.

Die Abmessungen für Beispiel 2 betragen:

$$E = 68000 \text{ N/mm}^2$$

$$l = 2,0 \text{ m}$$

$$r = 0,60 \text{ m}$$

$$t = 3 \text{ mm}$$

$$b = 0,05 \text{ m}$$

$$c = 0,38 \text{ m}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

Zum Vergleich der Kräfte mußte man den Reibungskoeffizienten μ schätzen, da Zwiesele keine Angabe darüber macht. Es werden hier zwei Werte angesetzt, die den Verlauf in zwei Bereichen des Sattels unterschiedlich annähern. Man erkennt die prinzipielle Übereinstimmung der Kraftverteilung am Sattel. Die Reibungskoeffizienten sind in verschiedenen Bereichen des Sattels sehr unterschiedlich.

In einem anderen Experiment hat Zwiesele die Sattelkräfte direkt zu messen versucht. Er teilte den Sattel in Segmente auf, deren Belastung er ermitteln konnte. In Bild 13 seiner Arbeit gibt Zwiesele Versuchswerte für die Radialkräfte im Sattelpbereich an. Der Behälter mit $\varphi = 60^\circ$ wurde als Beispiel 3 nachgerechnet. Bild 9.3 stellt die Ergebnisse einander gegenüber.

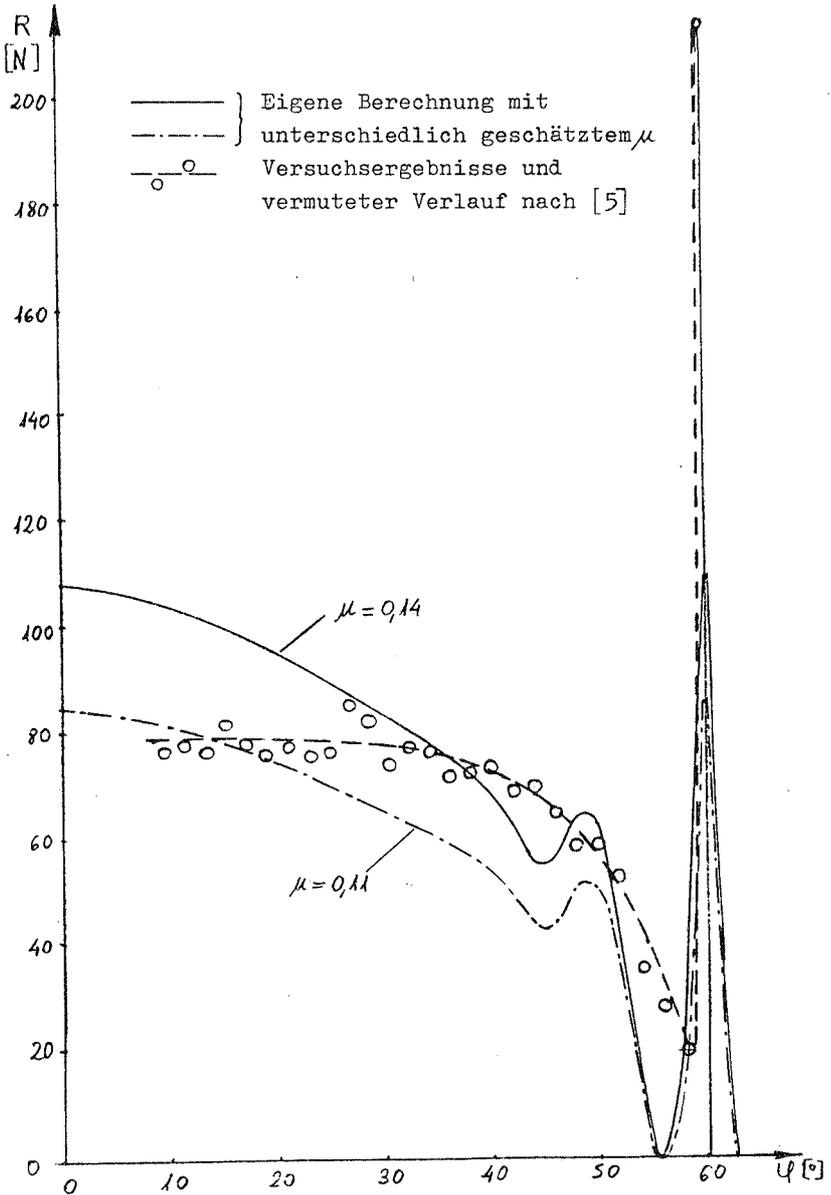


Bild 9.2: Beispiel 2
Vergleich der Reibungskräfte

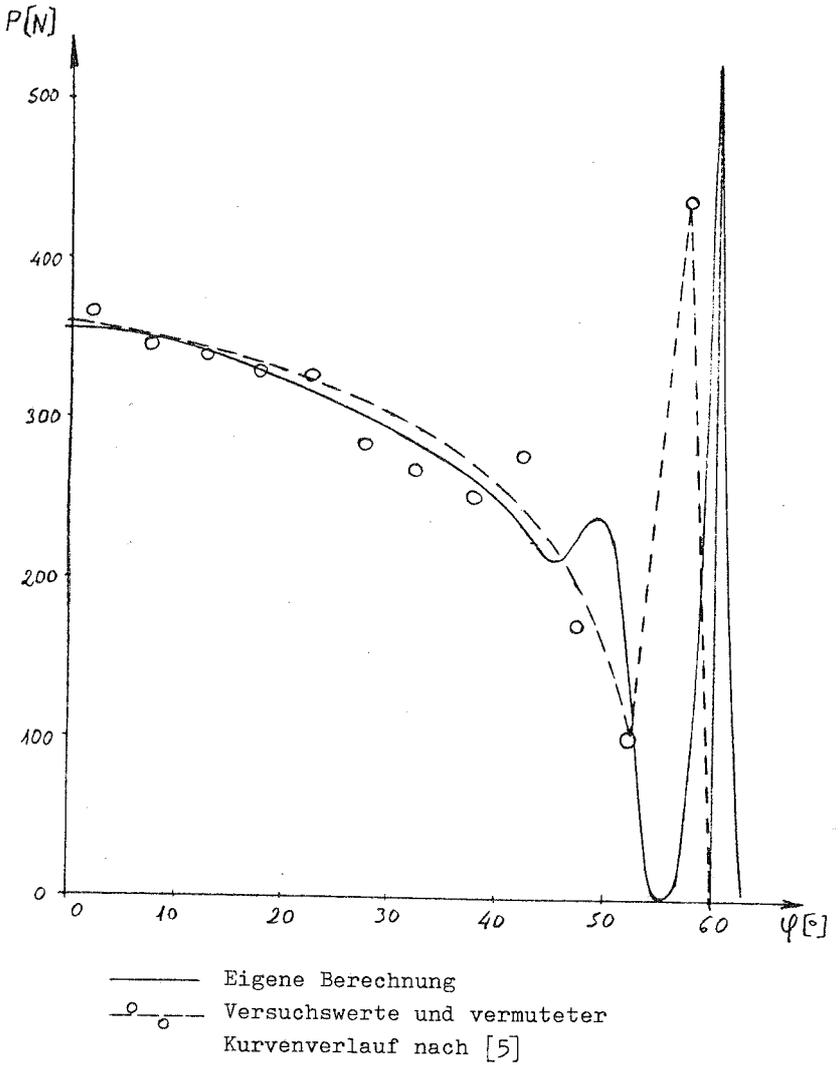


Bild 9.3: Beispiel 3
Vergleich der Sattelkräfte

Die Parameter im Beispiel 3 sind:

$$E = 68000 \text{ N/mm}^2$$

$$l = 2,0 \text{ m}$$

$$r = 0,40 \text{ m}$$

$$t = 3 \text{ mm}$$

$$b = 0,05 \text{ m}$$

$$c = 0,239 \text{ m}$$

$$\vartheta = 60^\circ$$

Alle drei Beispiele zeigen übereinstimmend die guten Ergebnisse mit der hier vorgelegten Berechnungsmethode. Die Sattelkräfte entsprechen sehr gut der Wirklichkeit und bieten für die Praxis eine gute Grundlage bei der Dimensionierung.

9.2 Vergleich der Dehnungen und Spannungen im Behälter mit Versuchen von Zwiesele

Als Beispiel für die örtlichen Beanspruchungen des Behälters in der Nähe des Sattels wird ein Versuchsbehälter von **Z w i e s e l e** [5] nachgerechnet. Zwiesele gibt dabei nur Dehnungen der Schale an, keine Spannungen. Die Dehnungen lassen sich aber nach Hooke umrechnen.

Die Abmessungen für Beispiel 4 betragen:

$$E = 68000 \text{ N/mm}^2$$

$$l = 2,0 \text{ m}$$

$$r = 0,40 \text{ m}$$

$$t = 3 \text{ mm}$$

$$b = 0,05 \text{ m}$$

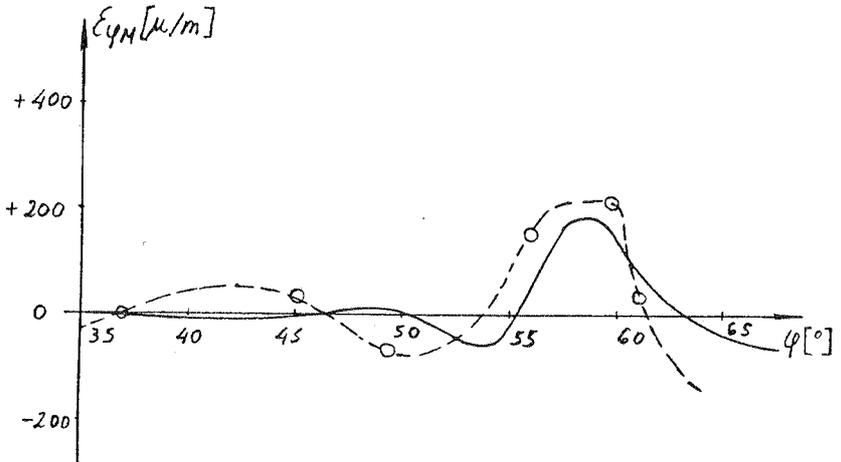
$$c = 0,079 \text{ m}$$

$$\vartheta = 60^\circ$$

In Bild 9.4 sind die Biegedehnungen $\varepsilon_{\varphi M}$ und Membrandehnungen $\varepsilon_{\varphi N}$ in Umfangsrichtung am Sattelrand dargestellt. Bild 9.5 gibt den Verlauf dieser Dehnungen entlang der Mantellinie nahe der Sattelspitze an. Es werden dabei die eigenen Ergebnisse der Nachrechnung denen von Zwiesele gegenübergestellt. Bei Zwiesele sind die Vergleichswerte in den Bildern 29 und 30 zu finden.

Auch hier zeigen sich gute Übereinstimmungen mit den Versuchswerten. Einzelne Abweichungen kommen aus der schwierigen Messung der örtlichen Dehnungen und aus dem schnellen Wechsel der Beanspruchungen neben dem Sattel. Eine kleine Abweichung vom Ort der Messung kann schon wesentliche Unterschiede im Ergebnis bringen. Das zeigt sich besonders deut-

lich bei der Biegedehnung in Umfangsrichtung, wie in Bild 9.4a zu sehen ist.



— Eigene Berechnung
—○— Meßwerte und vermuteter Verlauf nach [5]

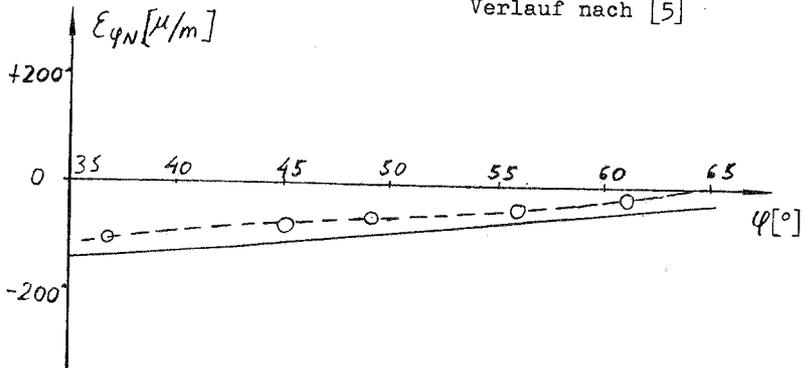


Bild 9.4: Beispiel 4

- a) Biegedehnungen $\epsilon_{\varphi M}$ am Sattelrand
- b) Membrandehnungen $\epsilon_{\varphi N}$ am Sattelrand

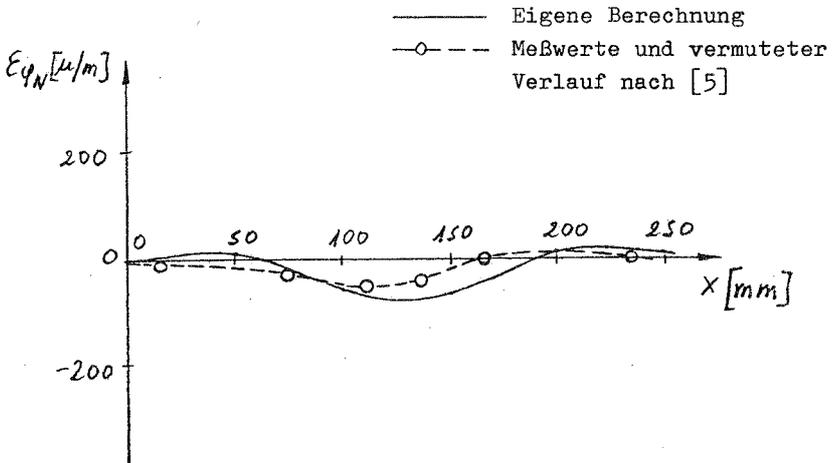
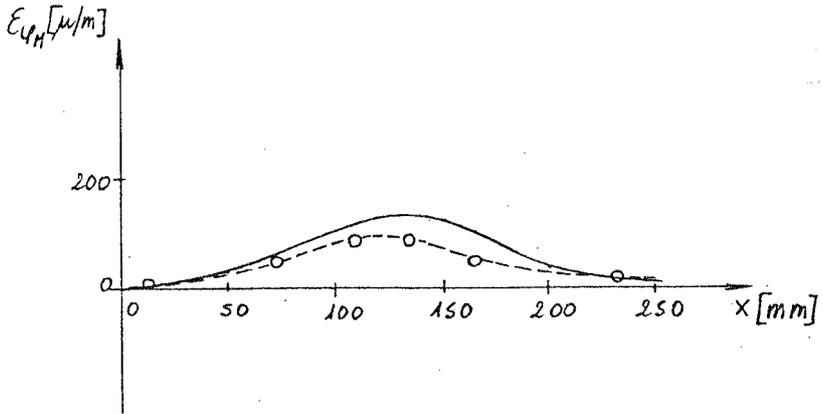


Bild 9.5:

Beispiel 4

a) Biegedehnungen ϵ_{QM} nahe der Sattelspitze

b) Membrandehnungen ϵ_{QN} nahe der Sattelspitze

Die Größe der Dehnungen ändert sich zum Teil sehr rasch und wechselt sogar das Vorzeichen in Intervallen die in der Größenordnung von etwa 5° liegen. Das gilt vor allem in der Nähe der Sattelspitze. Dabei ist zu beachten, daß bei diesem kleinen Versuchsbehälter ein Winkelunterschied von 5° eine Verschiebung am Umfang von nur 3,5 cm bedeutet. Messungen an kleineren Behältern, wie sie Zwiesele benutzt hat, müssen daher sehr sorgfältig durchgeführt werden. Dennoch bleibt die Gefahr von größeren Meßungenauigkeiten ein schwer abschätzbares Problem.

9.3 Vergleich mit neueren Versuchen von Decock und Sys und Berechnungen von Beeckman und Van Leeuwen

Versuche an großen Behältern aus rostfreiem Stahl wurden in neuerer Zeit unter anderen von Decock und Sys in Belgien durchgeführt. Sie haben darüber in [4] berichtet. Vergleichsrechnungen mit Hilfe finiter Elemente wurden dazu von Beeckman und Van Leeuwen [29] gemacht. Das folgende Beispiel 5 ist daraus entnommen und wird nach der hier dargelegten Methode nachgerechnet.

Die Dimensionen des Reservoir N^o 1 von [4] sind:

$$\begin{array}{lll} l = 3,460 \text{ m} & r = 0,954 \text{ m} & t = 2,5 \text{ mm} \\ a = 0,815 \text{ m} & b = 0,400 \text{ m} & 2\varphi = 103^\circ \end{array}$$

Verglichen werden die Gesamtspannungen an der Außenseite des Behälters in Umfangs- und Längsrichtung, $\sigma_{\varphi a}$ und $\sigma_{x a}$. Sie setzen sich aus Fiege- und Membranspannungen zusammen und geben ein gutes Bild von der tatsächlichen Gesamtbeanspruchung des Behälters.

Die Bilder 9.6 und 9.7 enthalten die Meßwerte von Decock und Sys [4] in der Sattelachse. Sie werden nach dem Bild von Seite 14 aus [29] durch die Rechenergebnisse nach Beeckman und Van Leeuwen ergänzt. Daneben ist jeweils das Ergebnis der hier durchgeführten Nachrechnung angegeben.

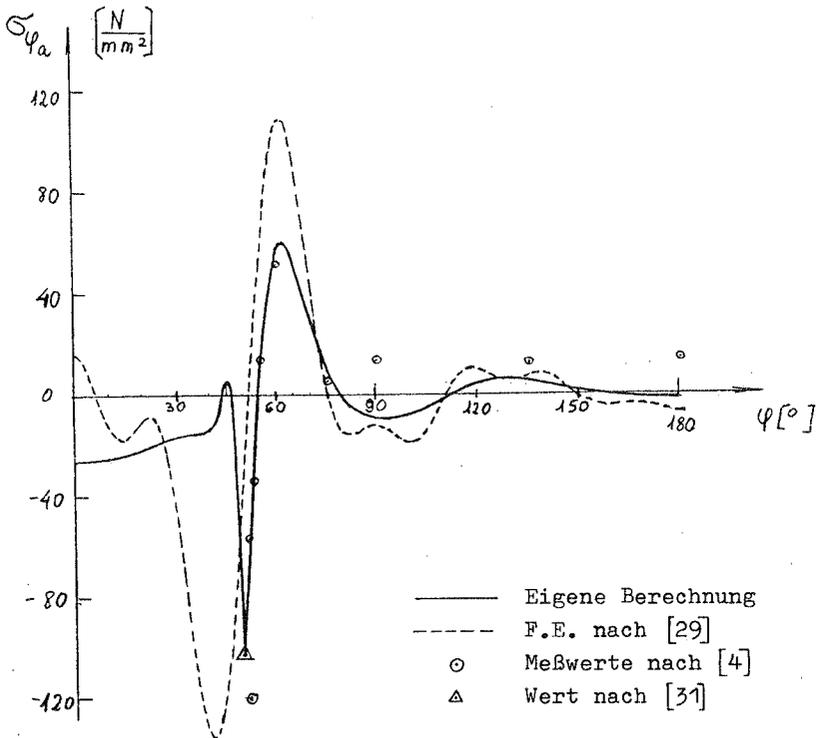


Bild 9.6: Umfangsspannungen an der Außenseite des Behälters in Sattelachse

Bild 9.6 zeigt dabei die Verläufe der Umfangsspannungen $\sigma_{\varphi a}$ an der Außenseite über φ . Bild 9.7 stellt die entsprechenden Werte für die Längsspannungen σ_{xa} im Sattelbereich dar.

In [31] gibt K ř u p k a Näherungsformeln zur Ermittlung der Maximalspannungen der Behälter an. In einem Beispiel berechnet er für den Behälter von Decock und Sys die Spannung an der kritischen Stelle am Sattelhorn nach seiner Methode. Sein Ergebnis zeigt dabei eine gute Übereinstim-

mung mit Decock und Sys. Der Spannungswert ist in Bild 9.6 markiert. Er stimmt ebenfalls mit dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit gut überein.

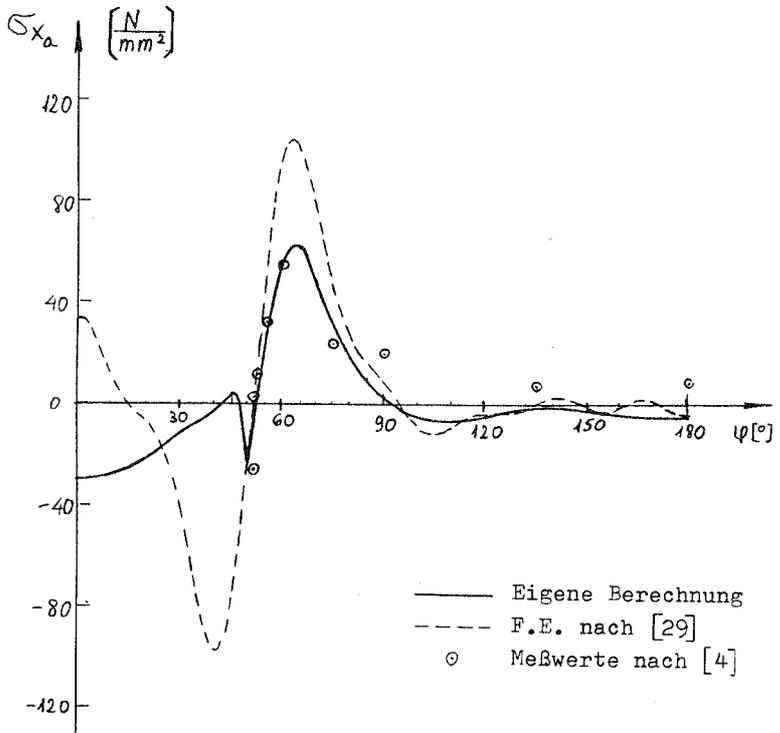


Bild 9.7: Längsspannungen an der Außenseite des Behälters in Sattelachse

In der Arbeit von Beeckman und Van Leeuwen [29] wurden nur 13 Reihenglieder berücksichtigt, in der vorliegenden Nachrechnung dagegen 50. Daraus ergeben sich gewisse Abweichungen im Verlauf. In der Nähe des Sattelhornes sind die Maximalwerte in guter Übereinstimmung zwischen den Meßwerten und

den beiden Berechnungen. In einiger Entfernung vom Sattel zeigen sich Unterschiede. Speziell der Meßwert von $\sigma_{\varphi a}$ bei $\varphi = 90^\circ$ weicht in seinem Vorzeichen ab. Diese Erscheinung wurde in einem Briefwechsel mit Decock erörtert. Nach Meinung von Decock sind solche Abweichungen der Meßergebnisse durch mögliche Fehler in der Rundheit des Behälters verursacht. Außerdem spielt bei diesen relativ kleinen Werten ab $\varphi = 90^\circ$ auch der Meßfehlerbereich eine Rolle. Auf den Einfluß der Unrundheit auf Versuchsergebnisse weisen auch D u t h i e und T o o t h [19] hin. Vor allem Behälter mit einem Verhältnis von Radius zu Wanddicke $r/t > 100$ sind davon betroffen. Die hier durchgeführte Berechnung stimmt mit der elektronischen Berechnung mit finiten Elementen [29] gut überein.

In der Berechnung mit finiten Elementen [29] haben Beeckman und Van Leeuwen für die Sattelkräfte einen Ansatz in Umfangsrichtung vorausgesetzt. Dieser ist parabolisch. Die Ergebnisse werden durch diese Vorwahl weitgehend beeinflusst. Dagegen ist in der vorliegenden Arbeit keine solche Annahme im voraus notwendig.

Nach der hier dargestellten Methode ergibt sich als Teil der Ergebnisse, wie die Verteilung der Sattelkräfte ist. Damit werden dann alle übrigen Schnittgrößen und Verformungen des Behälters weiter berechnet. Die Ergebnisse stimmen mit den gemessenen Beanspruchungen der Behälter sehr gut überein. Das haben die vorigen Beispiele und Vergleiche gezeigt.

Zusätzlich wurde der Behälter von Decock und Sys mit verschiedenen Kraftansätzen in Längsrichtung durchgerechnet, die in Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit gezeigt wurden. Es waren dies die konstante Lagerpressung, die Doppelschneide und der kombinierte Ansatz. Bild 9.8 stellt den Verlauf der Umfangsspannungen $\sigma_{\varphi a}$ an der Außenseite des Behälters in Sattellachse dar. Dabei ist der wichtige Bereich der Sattelspitze mit den entsprechenden Meßwerten nach [4] gezeichnet. Bild 9.9 zeigt die Werte für die

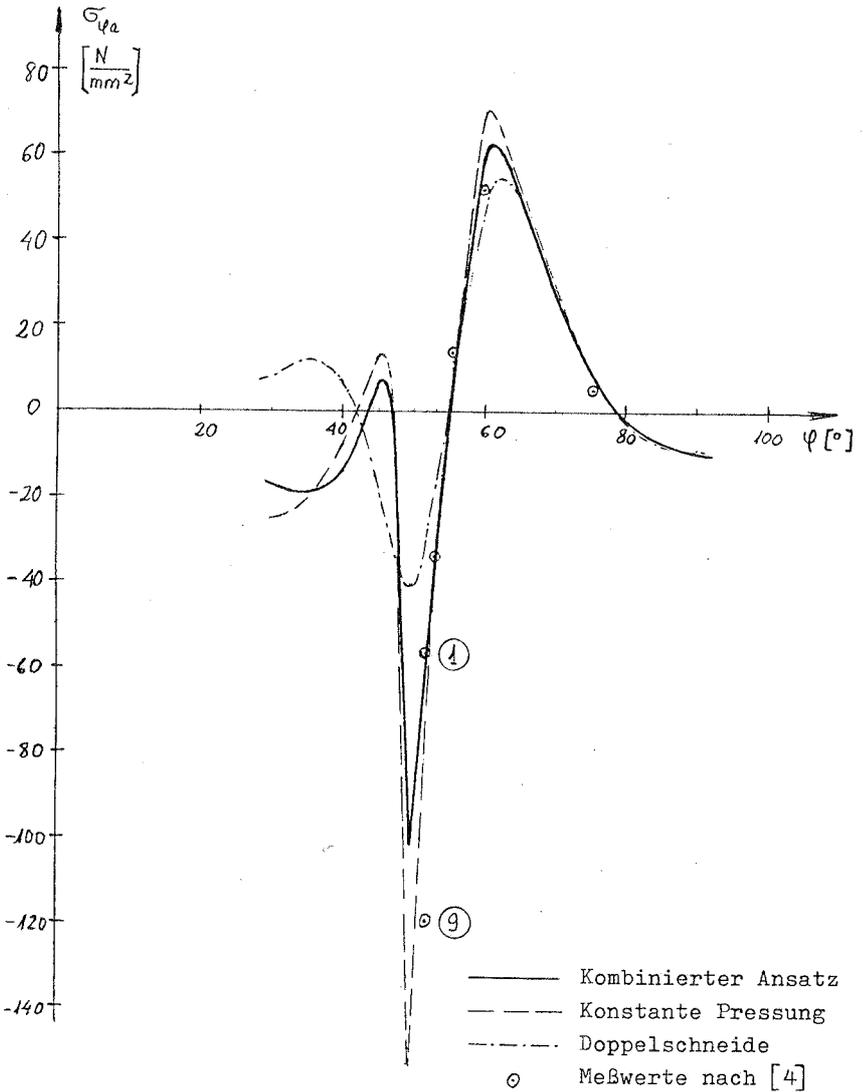


Bild 9.8: Umfangsspannungen an der Außenseite des Behälters in Sattelachse für verschiedene Ansätze

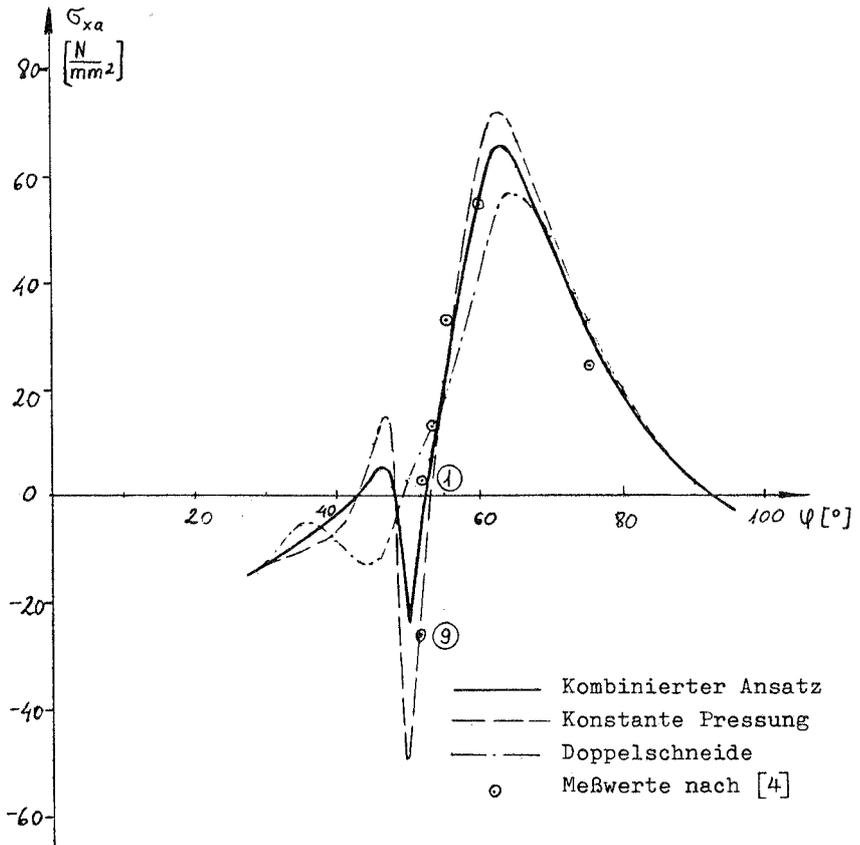


Bild 9.9: Längsspannungen an der Außenseite des Behälters in Sattelachse für verschiedene Ansätze

Längsspannungen σ_{xa} an der Außenseite des Behälters, ebenfalls in Sattelachse. Die Versuchsergebnisse stimmen mit allen drei Ansätzen für die Sattelpressung in Längsrichtung sehr gut überein. Außerhalb des Sattels fallen alle drei Kurven schon nach kurzem Abstand fast zusammen. Dicht neben der Sattelspitze stimmt der kombinierte Ansatz am

besten mit den Meßwerten überein. Dabei muß man beachten, daß die mit ① und ⑨ bezeichneten Meßpunkte symmetrisch zur vertikalen Behälterachse angeordnet waren, wie Bild 3 in [4] zeigt. Bei beiden Spannungen $\sigma_{\psi\alpha}$ und $\sigma_{x\alpha}$ liegt der arithmetische Mittelwert der Messungen an diesen Punkten ① und ⑨ auf der Kurve für den kombinierten Ansatz. Experimentelle Untersuchungen innerhalb des Sattels liegen nicht vor.

10. Einfluß von Teilfüllungen

Während der Füllung eines liegenden Behälters ändern sich die Verformungen und Schnittgrößen. Die Entwicklung dieser Beanspruchungen soll näher untersucht werden. In Bild 10.1 sind die verschiedenen Radialverschiebungen w eines Behälters am Sattel dargestellt. In diesem Beispiel wurde eine Schneidenlagerung mit $\varphi = 60^\circ$ angesetzt. Die Schale besitzt folgende Abmessungen:

$$l = 4,0 \text{ m} \qquad r = 1,0 \text{ m} \qquad t = 3 \text{ mm}$$

Die Verformungen w sind für vier verschiedene Füllhöhen angegeben, nämlich $r/2$ (Viertelfüllung), r (Halbfüllung), $3r/2$ (Dreiviertelfüllung) und $2r$ (Vollfüllung). Mit wachsender Füllung nehmen die Verformungen der Schale zu. Der Behälter baucht sich oberhalb der Sattelspitze nach außen aus und sinkt im oberen Teil nach unten. Die Verformungen wachsen zunächst mit der Füllhöhe rasch an, um sich bei der Annäherung an die volle Füllung nur noch wenig zu ändern. Bild 10.2 verdeutlicht dieses Verhalten.

Die Verläufe der Sattelpressungen sind in Bild 10.3 für die verschiedenen Füllhöhen angegeben. Die Kurve für Viertelfüllung weicht in ihrer Form stark von denen bei höherer Füllung ab. Bei größerer Füllhöhe sind die Verläufe der Sattelpressungen zu einander ähnlich. Das Anwachsen der Werte ist aber nicht proportional. Besonders der Wert an der Sattelspitze nimmt bei Füllhöhen zwischen 0 und $r/2$ schneller zu als die Werte im Zentrum des Sattels.

Die Entwicklung der Maximalspannungen im Behälter mit wachsender Füllung ist in Tabelle 10.1 zusammengestellt. Betrachtet werden die Biegespannungen $\sigma_{\varphi M}$, $\sigma_{\chi M}$ und die Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$, $\sigma_{\chi N}$. Bei den Membranspannungen werden die größten Druckwerte angegeben, da diese für Beulerscheinungen verantwortlich sein können. Die Zugspannungen sind gegenüber den Biegespannungen von geringerer Bedeutung. Die Tabellenwerte sind für drei verschiedene Sattelstellungen angegeben, um den zusätzlichen Para-

meter der Entfernung des Sattels vom Behälterboden zu erfassen:

- Fall a) Sattel bei $a/l = 0,1$
- Fall b) Sattel bei $a/l = 0,2$
- Fall c) Sattel bei $a/l = 0,3$.

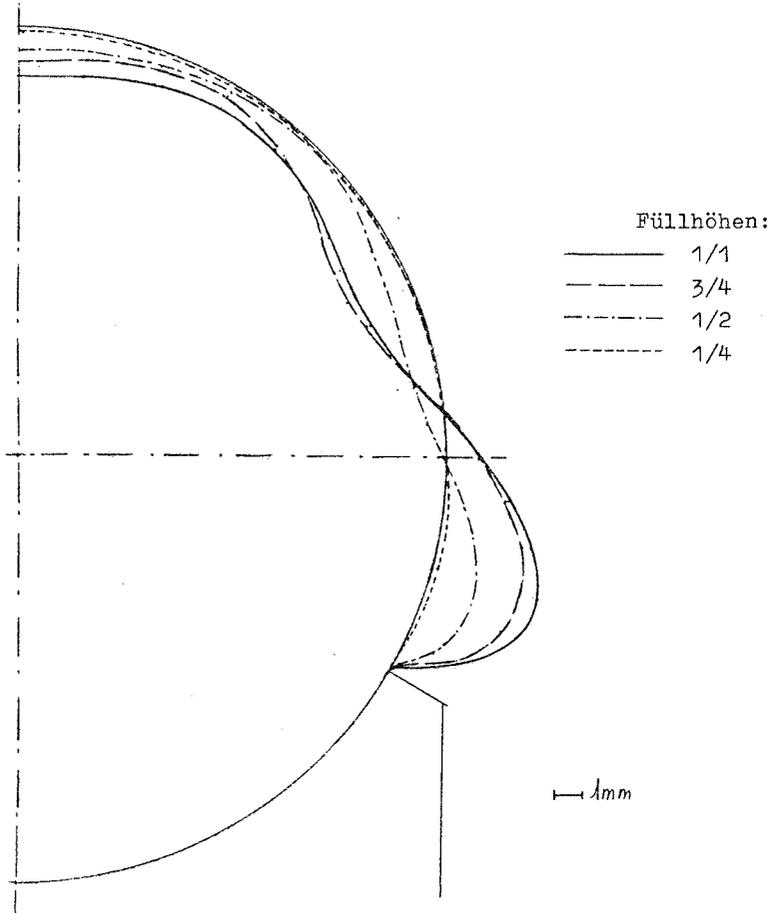


Bild 10.1: Radialverschiebung w [mm] am Sattel für verschiedene Füllhöhen

Maximalspannungen σ [N/mm ²] und σ/Q [1/m ²]											
Füllungen	σ_{QM}	σ_{QM}/Q	σ_{XM}	σ_{XM}/Q	σ_{QN}	σ_{QN}/Q	σ_{XN}	σ_{XN}/Q	$\sigma_{XN}^{*)}$	$\sigma_{XN}/Q^{*)}$	
1/4 Q=12,28 kN	a	+ 21,05	+1713	+ 70,20	+5715	- 36,94	-3007	- 1,27	-103	- 4,83	-393
	b	+ 20,88	+1700	+ 69,60	+5666	- 36,56	-2976	- 1,22	- 99	- 2,50	-204
	c	+ 20,63	+1679	+ 68,73	+5595	- 36,05	-2935	- 1,55	-126	- 0,64	- 52
1/2 Q=31,42 kN	a	+ 74,61	+2375	+158,48	+5045	- 83,52	-2658	- 4,29	-136	- 6,51	-207
	b	+103,36	+3290	+160,08	+5096	- 84,35	-2685	- 5,94	-189	- 5,30	-169
	c	+124,62	+3967	+160,86	+5120	- 83,86	-2669	- 8,13	-259	- 7,43	-236
3/4 Q=50,55 kN	a	+108,15	+2140	+266,69	+5276	-141,13	-2792	- 6,61	-131	-12,67	-251
	b	+156,77	+3101	+266,09	+5264	-140,74	-2784	-13,62	-269	-14,15	-280
	c	+195,02	+3858	+262,95	+5202	-139,09	-2752	-19,55	-387	-19,19	-380
1/1 Q=62,83 kN	a	+131,13	+2087	+330,03	+5253	-174,19	-2772	- 8,49	-135	- 6,54	-104
	b	+189,09	+3009	+329,98	+5252	-174,07	-2770	-17,68	-281	-13,96	-222
	c	+234,88	+3738	+326,43	+5195	-172,22	-2741	-25,41	-404	-25,16	-400

a - Sattel bei $a/l = 0,1$ *) Werte in Feldmitte ($x = l/2$)
 b - Sattel bei $a/l = 0,2$ sonst alle Werte am Sattel
 c - Sattel bei $a/l = 0,3$

Tabelle 10.1

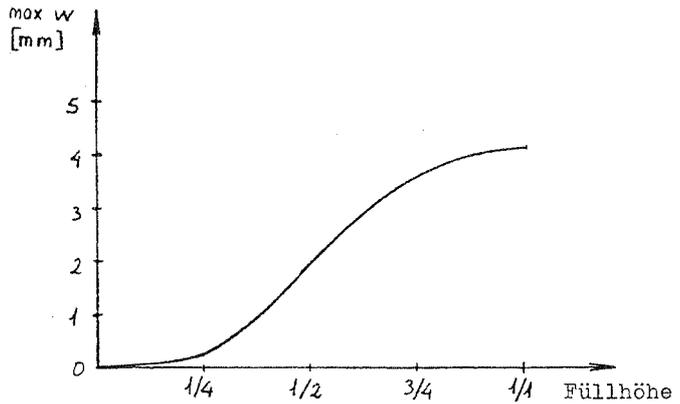


Bild 10.2: Abhängigkeit der maximalen Radialverschiebung von der Füllhöhe

Die Biegespannung $\sigma_{\varphi M}$ in Umfangsrichtung ist am Sattel am größten und nimmt mit der Füllhöhe stetig zu. Am Umfang tritt der Maximalwert ab halber Füllung an der Sattelspitze auf. Für kleinere Füllungen liegt er innerhalb des Sattels. Die größte Beanspruchung ist bei voller Füllung erreicht. Die Biegespannung σ_{xM} in Längsrichtung wächst ebenfalls mit der Füllhöhe an. Der Maximalwert liegt in allen diesen Fällen in der unteren Faser des Behälters bei $\varphi = 0$.

Die Membranspannung $\sigma_{\varphi N}$ ist am Sattel für $\varphi = 0$ am größten und nimmt auch mit wachsender Füllung zu. Die Spannung σ_{xN} in Längsrichtung hat ihren Maximalwert nicht unbedingt am Sattel. Das Maximum kann auch in Feldmitte des Behälters erscheinen. Das hängt von der Füllhöhe und der Stellung des Sattels ab. Die Tabelle 10.1 enthält deshalb auch die Werte σ_{xN}^* in Feldmitte. Wenn der Maximalwert am Sattel auftritt, liegt er innerhalb des Sattels. In Feldmitte ist er am Umfang nicht örtlich festgelegt. Er muß nicht unbedingt bei $\varphi = 180^\circ$ erscheinen, wie es bei einem Balken zu erwarten wäre. Der Maximalwert der Membranspannung σ_{xN} am Sattel wächst mit der Füllhöhe an. Er ist bei voller Füllung

am größten. Die Spannungen σ_{xN}^{st} in Feldmitte können ihre Maximalwerte bei Teilfüllungen erreichen. Das ist in Sonderfällen bei Beulgefahr zu beachten.

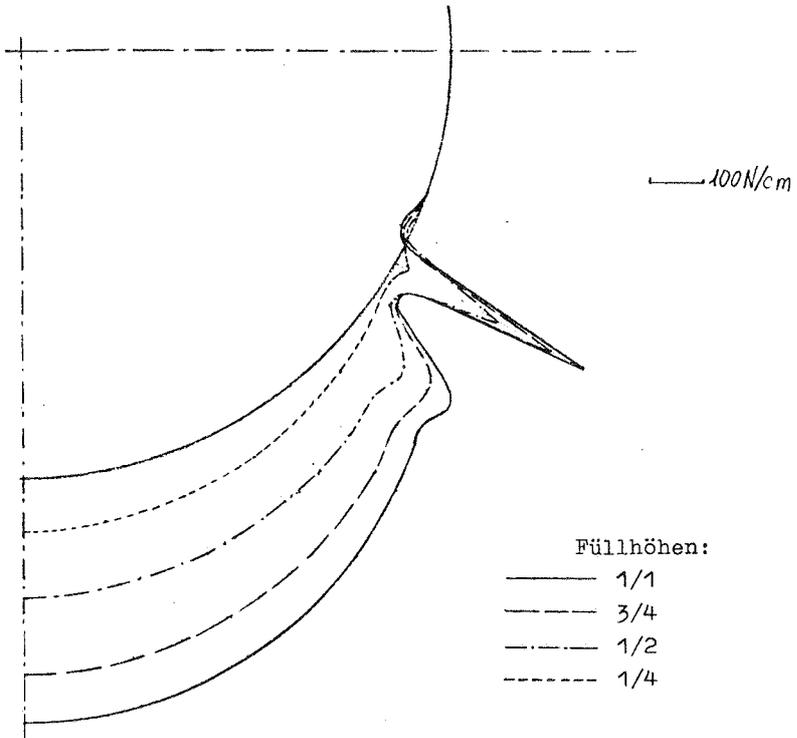


Bild 10.3: Sattelpressungen p [N/cm] für verschiedene Füllhöhen

Zum besseren Vergleich der Spannungen untereinander werden sie in Tabelle 10.1 zusätzlich auf die zugehörigen Auflagerkräfte Q bezogen. Damit läßt sich zeigen, wie weit die Spannungen proportional zu Q sind. Aus den entsprechenden Werten von Tabelle 10.1 zeigt sich, daß der Anstieg der Span-

nungen bei geringer Füllhöhe nicht proportional zu der Auflagerkraft Q ist. Das kann man besonders bei der Umfangsbiegespannung $\sigma_{\varphi M}$ erkennen. Ab der halben Füllung wachsen die Werte annähernd proportional an. Die bezogenen Spannungen σ/Q ändern sich dabei nur wenig. Der Verlauf von σ_{xN}^*/Q in Feldmitte ist sehr unregelmäßig. Bild 10.4 stellt die Verläufe von σ/Q am Sattel für den Lagerungsfall a dar. Die beiden Fälle b und c ergeben entsprechende Kurven.

Das nicht proportionale Verhalten der Spannungen gegenüber Q zeigt, daß die Beanspruchungen nicht nur vom Gesamtgewicht Q abhängen. Die Verformungen, die der Behälter aus der Füllung erhält, beeinflussen ebenfalls das Ergebnis. Wie schon in Kapitel 3 gezeigt wurde, kann man das Gleichungssystem nicht in eine Gleichgewichtsaufgabe und ein Kompatibilitätsproblem von Sattel und Schale aufspalten. Man muß alle Faktoren beim Kontaktproblem gemeinsam betrachten. Damit ist es nicht möglich, einen Einheitsfall zu lösen und die Ergebnisse mit Q zu multiplizieren.

Die Verhältnisse für die Teilfüllungen sind bei allen drei Sattelstellungen ähnlich. Die Entfernung der Sättel von den Behälterböden spielt für die Größe der Spannungen eine Rolle. Mit wachsendem a/l steigen die Spannungen $\sigma_{\varphi M}$ und σ_{xN} am Sattel stark an, ausgenommen ist dabei nur die Viertelfüllung. Bei den Werten für σ_{xM} und $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel zeigen sich bei den hier berechneten Fällen kaum Änderungen. Ein spezielles Studium der Sattelstellungen wird später in Abschnitt 13.4 durchgeführt.

Zusammenfassend zeigt es sich, daß bei den Beanspruchungen des Behälters keine völlige Proportionalität zur Auflagerkraft vorhanden ist. Die Maximalwerte treten aber in allen wichtigen Fällen bei voller Füllung auf. Die meisten Autoren untersuchen deshalb die Behälter nur für den vollen Zustand. Z w i e s e l e [5] weist in diesem Zusammenhang darauf hin, daß die durch die Teilfüllung selbst erzeugten

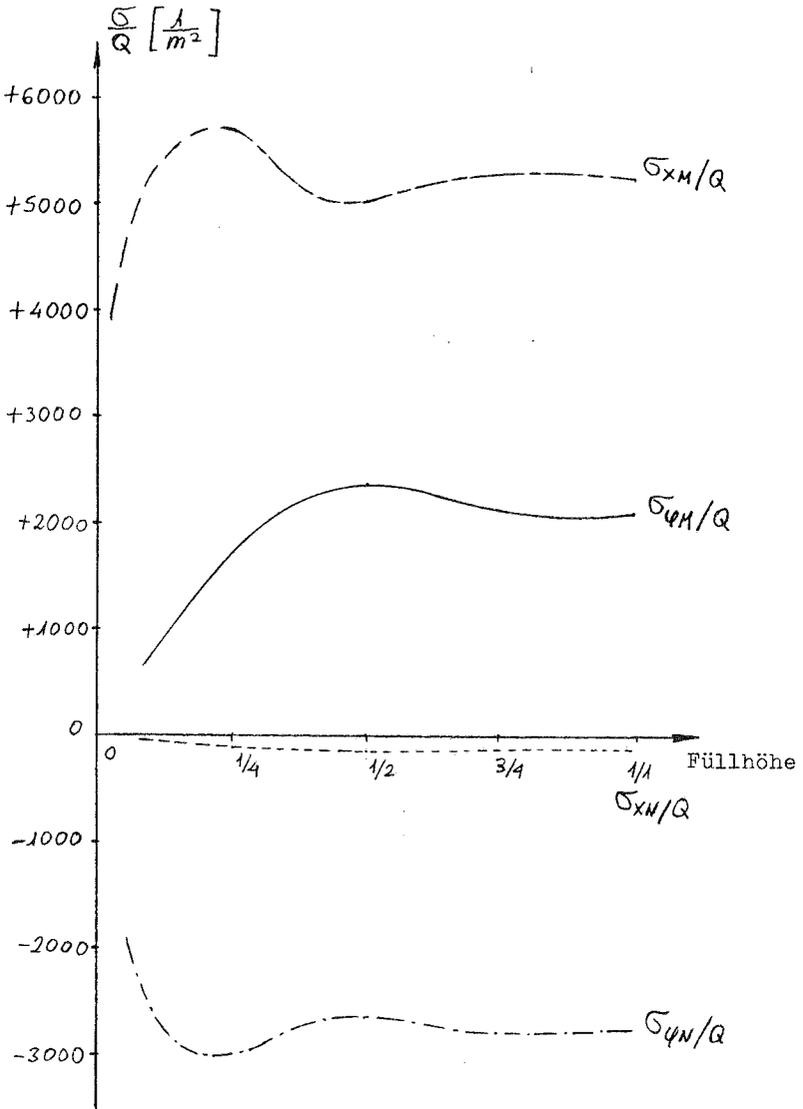


Bild 10.4: Abhängigkeit der bezogenen Spannungen am Sattel von der Füllhöhe (Beispiel a)

Biegebeanspruchungen im Behälter durch die höheren Spannungen überdeckt werden, die durch die Sattelkräfte entstehen.

Liegende Behälter dienen in der Praxis auch als Druckbehälter. Diese unterscheiden sich von den zuvor behandelten Fällen im Ansatz eines zusätzlichen konstanten Innendrucks, der sich den anderen Nutzlasten überlagert. Steigert man nach voller Füllung des Behälters den inneren Druck, so werden die maximalen Beanspruchungen am Sattelhorn geringer. Dies erhalten W i l s o n und T o o t h [18] nach ihren Ergebnissen. Der Innendruck wirkt sich stabilisierend auf den Behälter aus. Da vorher immer der Zustand ohne Innendruck durchlaufen werden muß, ist der Zustand der vollen Füllung für die Praxis maßgebend. Probleme der Berstsicherheit für hohe Innendrucke werden hier nicht betrachtet.

In den folgenden Kapiteln werden die Behälter nur noch mit voller Füllung untersucht, da die dabei gewonnenen Ergebnisse für eine praktische Berechnung von Bedeutung sind.

11. Untersuchung der Behälterparameter

11.1 Allgemeines

Das Verhalten eines liegenden Behälters auf Sattellagern ist kompliziert und hängt von verschiedenen Parametern ab. Ein erster Parameter, die Füllung des Behälters, wurde in Kapitel 10 betrachtet. Andere Parameter hängen direkt mit der Schale zusammen. Dies sind die Wanddicke t , der Schalenradius r und die Behälterlänge l . Wieder andere Parameter ergeben sich im Zusammenhang mit der Lagerung. Auf diese wird später in Kapitel 13 eingegangen. Hier sollen zunächst die Schalenparameter näher untersucht werden.

In den folgenden Studien wird untersucht, wie die wichtigsten Schnittgrößen von den einzelnen Parametern abhängen. Betrachtet werden dabei die Biegespannungen $\sigma_{\varphi M}$ und $\sigma_{\chi M}$ und die Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$ und $\sigma_{\chi N}$. Vor allem die Biegespannungen gehören zu den Hauptbeanspruchungen der liegenden Behälter. Die Maximalwerte treten dabei immer am Sattel auf. Bei den Membranspannungen $\sigma_{\chi N}$ und $\sigma_{\varphi N}$ interessieren besonders die größten Druckspannungen, da diese zu Beulerscheinungen führen können. Die Membran-Zugspannungen sind dagegen im Vergleich zu den Biegespannungen von geringerer Bedeutung. Bei den Spannungen $\sigma_{\varphi N}$ in Umfangsrichtung ergeben sich die Maximalwerte ebenfalls am Sattel. Für die Längsspannungen $\sigma_{\chi N}$ ist das nicht immer der Fall. Es können die größten Werte auch in Feldmitte erscheinen. Diese Druckspannung in Feldmitte wird deshalb in interessanten Fällen auch in die folgenden Betrachtungen einbezogen.

Für eine Dimensionierung der isotropen Schale sind immer die Maximalwerte der Spannungen von Bedeutung. Der Ort in Umfangsrichtung, an dem diese Maximalwerte auftreten, ändert sich manchmal bei der Variation der Parameter. Trägt man die Spannungen mehrerer Einzelpunkte auf, würden sich in diesem Fall überschneidende Kurven ergeben, deren niedriger liegende Abschnitte ohne Bedeutung sind. Um die Ef-

fekte besser zeigen zu können, werden deshalb die Einhüllenden der Kurven dargestellt. Bei bedeutenden Abweichungen im Ort der Maximalwerte wird zusätzlich angegeben, in welchem Punkt die maßgebenden Werte auftreten.

Bei den folgenden Parameterstudien werden Stahlbehälter mit voller Füllung analysiert. Es ist ein örtliches Abheben vom Sattel möglich, d.h. die Behälter sind nicht an den Sätteln angeschweißt. Ziel der Studie ist es, den Einfluß der verschiedenen Faktoren auf das Tragverhalten der Behälter zu finden. Zur genaueren Trennung der Einzeleinflüsse werden jeweils alle Parameter bis auf einen festgehalten. In einzelnen, komplexen Zusammenhängen werden auch zwei Parameter bei der Variation gekoppelt, um genauere Aufschlüsse zu erhalten. Ergänzend werden bei manchen Spannungsverläufen zusätzliche Kurven angegeben, bei denen ein festgehaltener Parameter abgewandelt wird.

11.2 Variation der Schalendicke t

Zur Untersuchung des Einflusses der Schalendicke t wird ein Behälter mit etwa 50 m^3 Inhalt gewählt. Die Behälterabmessungen betragen:

$$\begin{aligned} l &= 11,0 \text{ m} & r &= 1,25 \text{ m} \\ \varphi &= 50^\circ & b/l &= 0,10. \end{aligned}$$

Die Wanddicke t wird zwischen 5 und 10 mm variiert. Zusätzlich werden zwei unterschiedliche Anordnungen der Sättel betrachtet; einmal mit $a/l = 0,075$ und zum anderen mit $a/l = 0,125$. Damit kann man den Einfluß der Nähe der Böden auf die Schalenbeanspruchung erkennen.

In Bild 11.1 sieht man, wie die Maximalgrößen der Biegespannung $\sigma_{\varphi M}$ in Umfangsrichtung mit der Wanddicke t zusammenhängen. Die Maximalwerte treten dabei stets an der Sattelspitze auf. Über die Satteltbreite ändern sich die Spannungen nur wenig, klingen aber außerhalb des Sattels mit der Entfernung rasch ab. Der Einfluß von t ist bei

den Spannungen deutlich zu erkennen. Die Maximalwerte fallen mit wachsender Wanddicke ab. Der Verlauf ist dabei nichtlinear. Bei kleineren t ist die Abnahme größer als bei den großen Wanddicken. Dort ist der Einfluß einer weiteren Steigerung von t gering. Andere Parameter haben dann einen größeren Einfluß, wie das schon bei der geänderten Sattelstellung zu erkennen ist. Die Grundform der Kurve bleibt auch bei anderem a/l erhalten. Die Werte nehmen dabei mit wachsendem a/l zu.

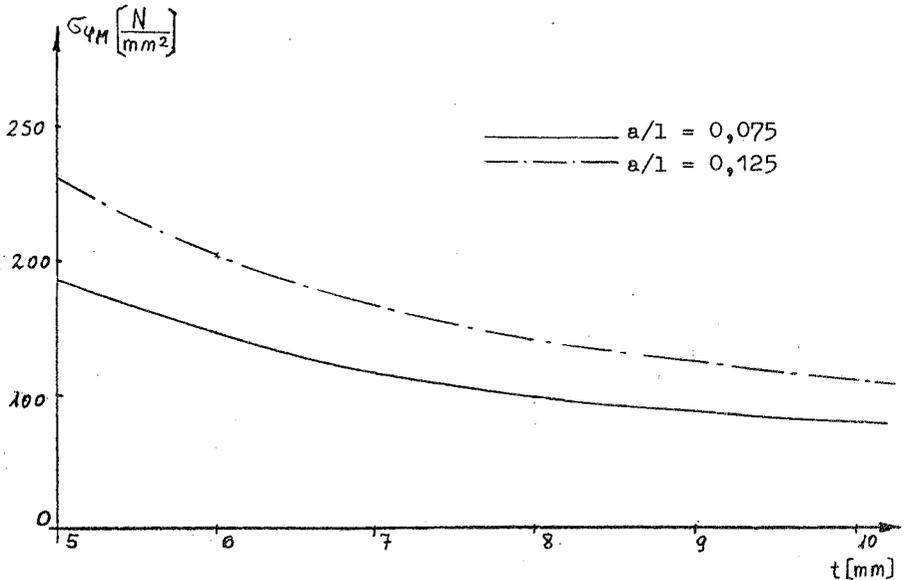


Bild 11.1: Maximalspannung $\sigma_{\phi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von t

Bei den Biegespannungen σ_{XM} in Längsrichtung ist die Abhängigkeit von t ähnlich wie bei $\sigma_{\phi M}$. Bild 11.2 zeigt die entsprechenden Verläufe. Hier treten die Maximalwerte am Sattel entweder an der Sattelspitze oder in der unteren Faser des Behälters ($\varphi = 0^\circ$) auf.

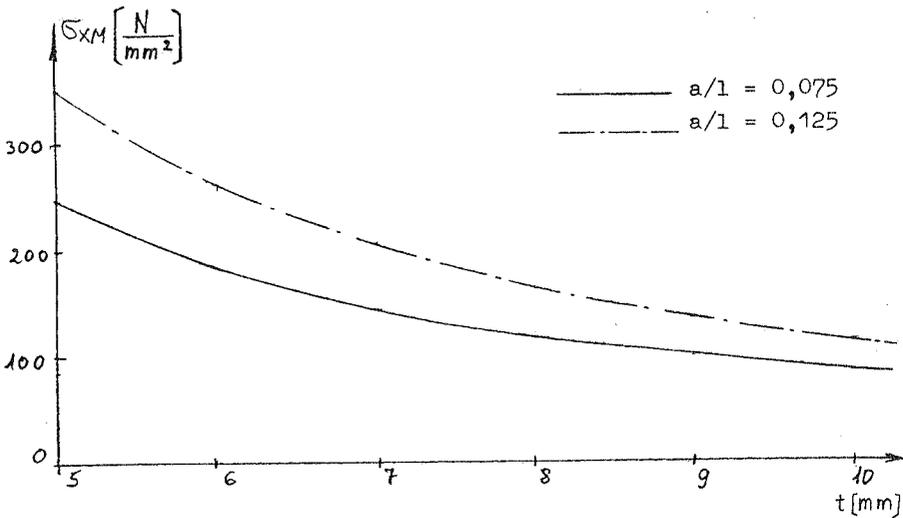


Bild 11.2: Maximalspannung σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von t

Die größte Membranspannung ist $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel. Das Maximum der Druckwerte liegt in der unteren Faser bei $\varphi = 0^\circ$. Außerhalb des Sattels nehmen die Spannungen rasch ab. Der Verlauf von $\sigma_{\varphi N}$ am Behälter ist ähnlich, wie schon für die Schnittgröße N_φ im Beispiel des Kapitels 8 in Bild 8.7 und 8.8 gezeigt wurde. Die Abhängigkeit von der Wanddicke t wird in Bild 11.3 dargestellt. Das Verhalten ist entsprechend zu den Biegespannungen. Die Abnahme mit wachsendem t ist dabei etwas stärker.

Bild 11.4 zeigt den Einfluß von t auf die Membranspannungen σ_{xN} am Sattel. Die Änderung dieser Größen mit t ist nicht so ausgeprägt wie bei den zuvor betrachteten Spannungen. Die Membranspannung σ_{xN} ist häufig die kleinste von allen Spannungen und kann auch außerhalb des Sattels, z.B. in Feldmitte, ihr Maximum erreichen. Das gilt besonders für die Druckspannungen an der Oberseite des Behälters wegen einer möglichen Beulgefahr.

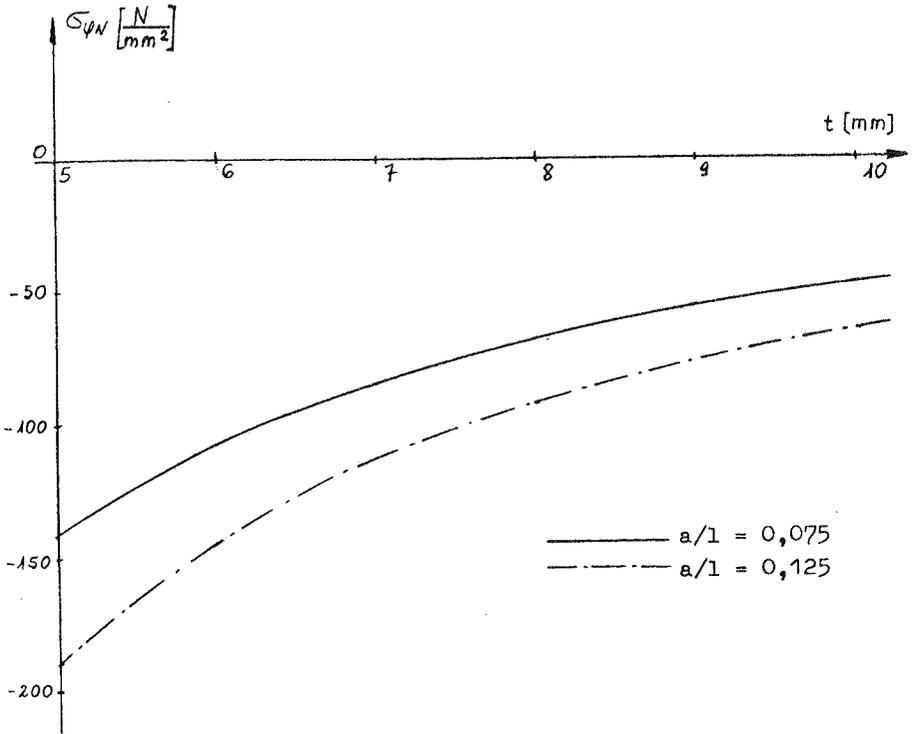


Bild 11.3: Maximale Druckspannungen $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel
in Abhängigkeit von t

In Bild 11.5 ist der Verlauf von $\sigma_{\chi N}$ in Feldmitte über t annähernd linear. Die Maximalwerte treten aber nicht in der obersten Faser des Behälters auf, sondern auch in etwas darunter liegenden Teilen der Schale. Die Spannungsverteilung in der Druckzone ist damit anders als bei einem Balken. Zum Vergleich sind in Bild 11.5 die Werte eingetragen, die sich bei einer Berechnung des Behälters als Balken in Feldmitte ergeben. Der Unterschied ist sehr groß. Auf diesen Vergleich mit einem Balken wird in Kapitel 12 näher eingegangen.

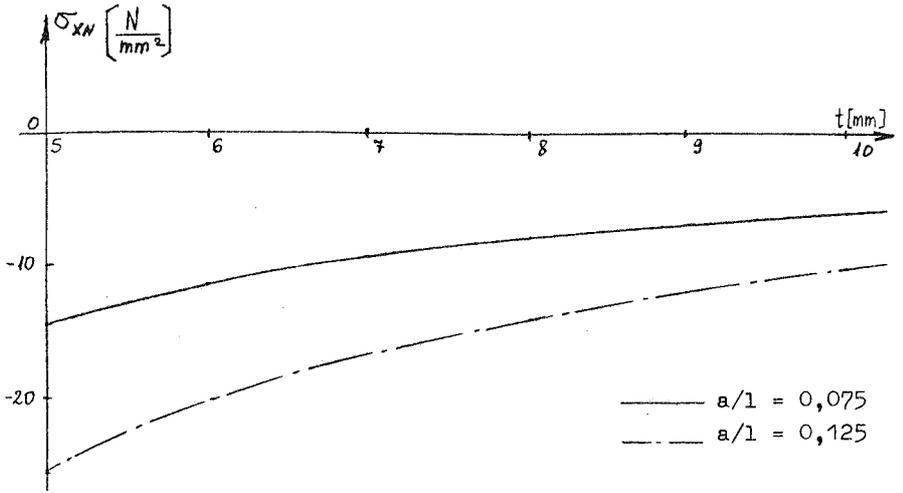


Bild 11.4: Maximale Druckspannungen σ_{xN} am Sattel in Abhängigkeit von t

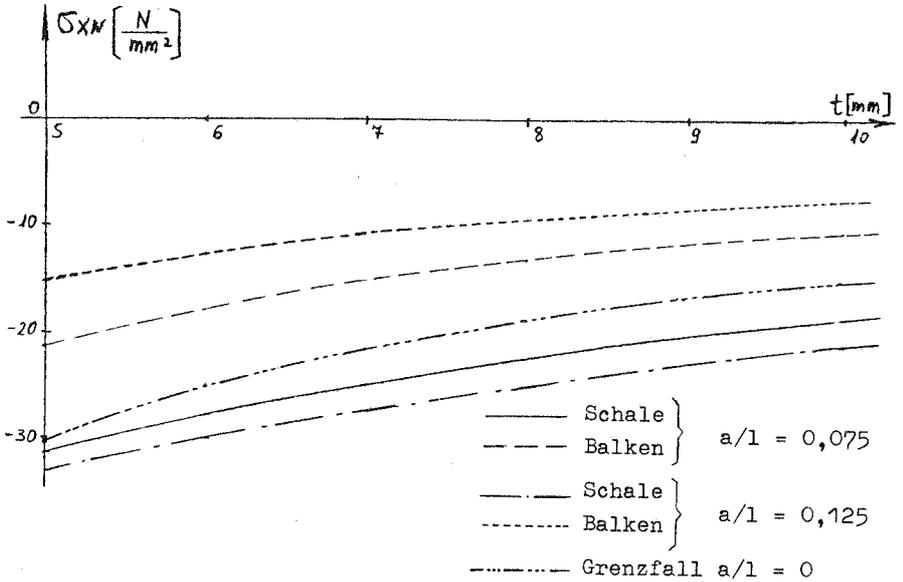


Bild 11.5: Maximale Druckspannungen σ_{xN} in Behältermitte in Abhängigkeit von t

11.3 Variation der Schalenradien r

Als Beispiel für die Variation der Schalenradien r wird ein Behälter der Länge $l = 4,0$ m gewählt. Die Sättel sind bei $a/l = 0,125$ angeordnet und haben die bezogene Breite $b/l = 0,05$. Der Sattelwinkel beträgt $\varphi = 60^\circ$.

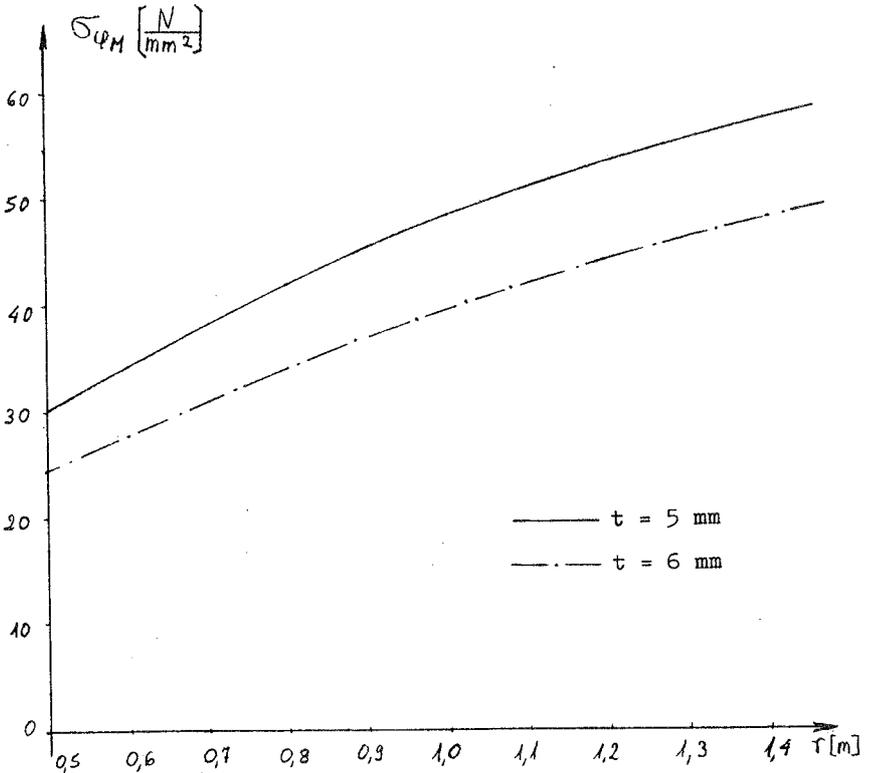


Bild 11.6: Maximalspannungen $\sigma_{\varphi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von r

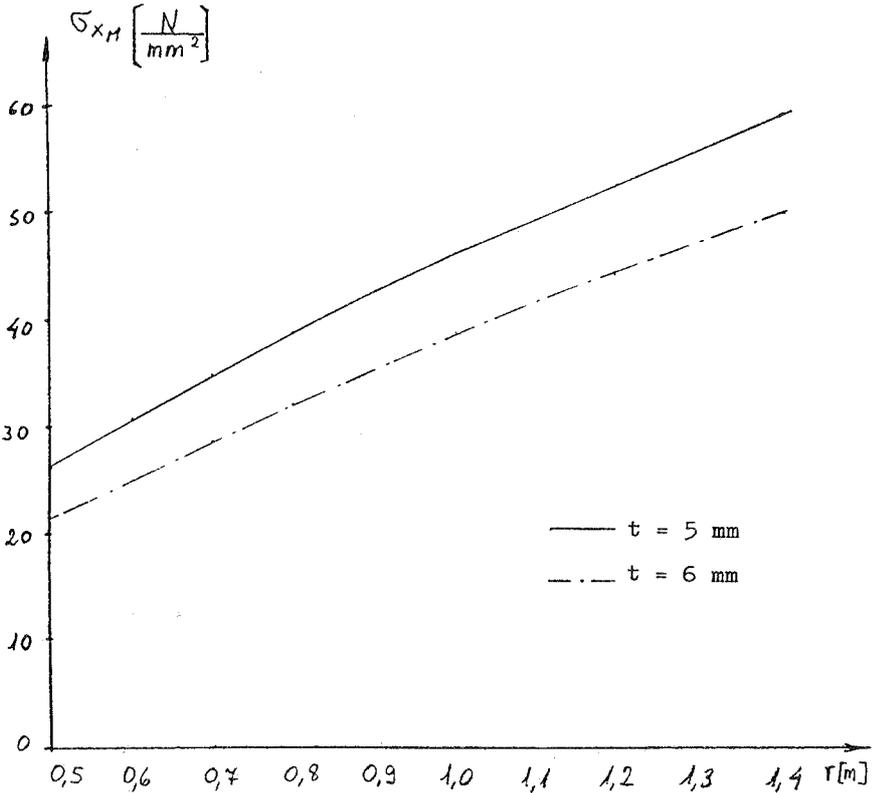


Bild 11.7: Maximalspannungen σ_{xM} am Sattel in Abhängigkeit von r

Die maximalen Biegespannungen werden in den Bildern 11.6 für $\sigma_{\varphi M}$ und 11.7 für σ_{xM} angegeben. Die Spannungen werden größer, wenn r anwächst. Anfangs ist der Anstieg annähernd linear, nimmt dann aber weniger zu. Das Anwachsen der Spannungen mit r ist auf das dabei vergrößerte Volumen und damit auf das wachsende Gewicht zurückzuführen. Da das Gewicht mit r^2 anwächst, die Spannungserhöhung aber weit geringer ist, muß sich ein größeres r günstig auf die Spannungen auswirken. Dividiert man die Werte von Bild 11.6 durch die zu-

gehörige Lagerkraft Q , ergibt sich der Verlauf von Bild 11.8. Hier kann der Einfluß von r getrennt von der Gewichtszunahme beobachtet werden. Die Spannungen werden durch wachsende Radien r günstig beeinflusst. Die Abnahme der Spannungen ist anfangs sehr stark und verringert sich bei größerem r . Entsprechendes gilt auch für die Biegespannungen σ_{xM} .

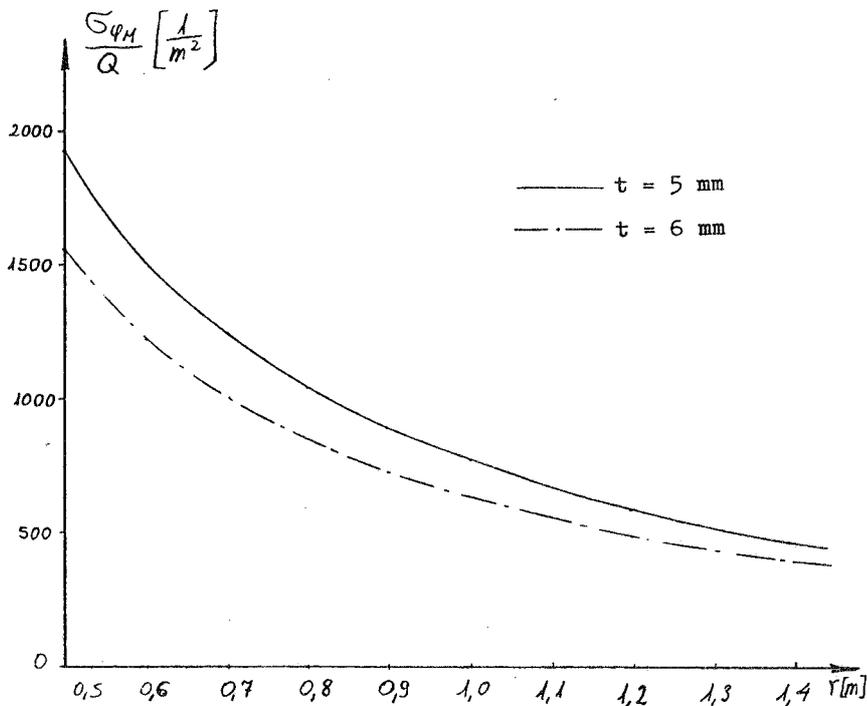


Bild 11.8: Abhängigkeit der relativen Spannung $\sigma_{\varphi H}/Q$ am Sattel von r ($\varphi = 60^\circ$)

Es werden bei den Biegespannungen zusätzlich zwei Fälle mit $t = 5 \text{ mm}$ bzw. 6 mm betrachtet. Dabei ergeben sich einander ähnliche Spannungsverläufe. Die Werte nehmen, wie auch schon in Abschnitt 11.2 gezeigt wurde, mit größerem t ab.

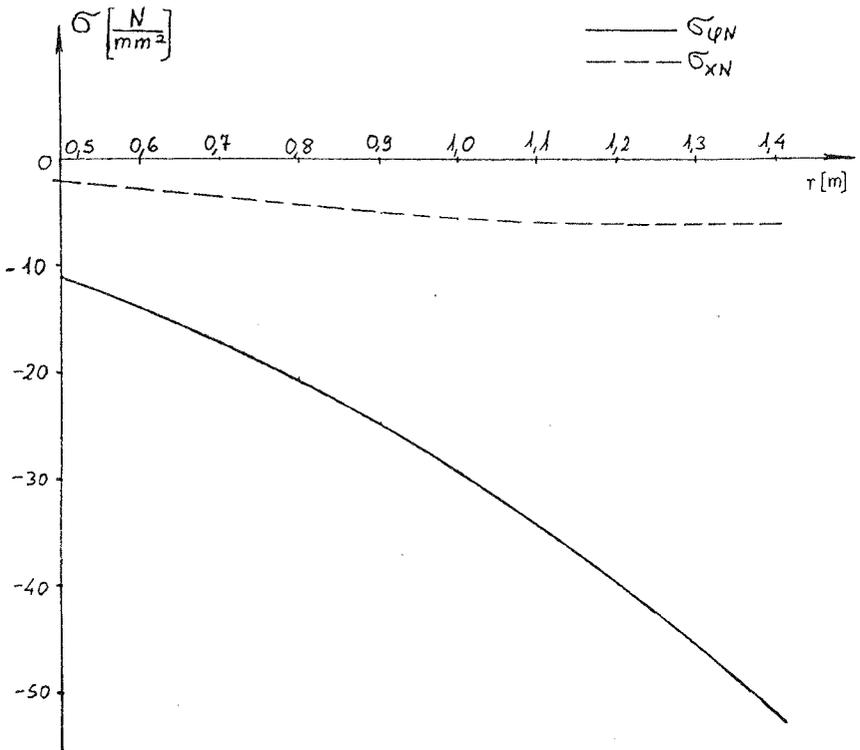


Bild 11.9: Maximale Druckspannungen $\sigma_{\varphi N}$ und $\sigma_{\chi N}$ am Sattel in Abhängigkeit von r

In Bild 11.9 sind die Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$ und $\sigma_{\chi N}$ am Sattel dargestellt. Die Schalendicke beträgt dabei 5 mm. Für andere Schalendicken ergeben sich ähnliche Verläufe. Die Spannung $\sigma_{\varphi N}$ nimmt beinahe linear mit r zu. Das ist ähnlich zu dem Verhalten der Biegespannungen. Auch hier ist der Einfluß von r günstig, wenn man die Gewichtszunahme ausschaltet. Die Membranspannungen $\sigma_{\chi N}$ ändern sich nur wenig bei der Variation von r . Sie unterscheiden sich darin wesentlich von den $\sigma_{\varphi N}$. Bei der Druckspannung in Feldmitte ergibt sich sogar eine leichte Abnahme mit wachsen-

dem r . Bei der Division durch Q folgt daraus für σ_{xN} eine sehr starke Verringerung der Maximalwerte mit wachsendem r .

11.4 Variation der Behälterlänge l

In der Untersuchung für den Einfluß der Behälterlänge l werden die Lager einheitlich bei $a/l = 0,075$ vorgesehen. Damit soll eine mögliche Beeinflussung durch die Sattelanordnung ausgeschaltet werden. Diese Abhängigkeit wird später für sich untersucht. Als Behälterradius wird $r = 1,25$ m gewählt. Die Satteltiefe beträgt $b/l = 0,10$ und der Sattelwinkel $\vartheta = 50^\circ$.

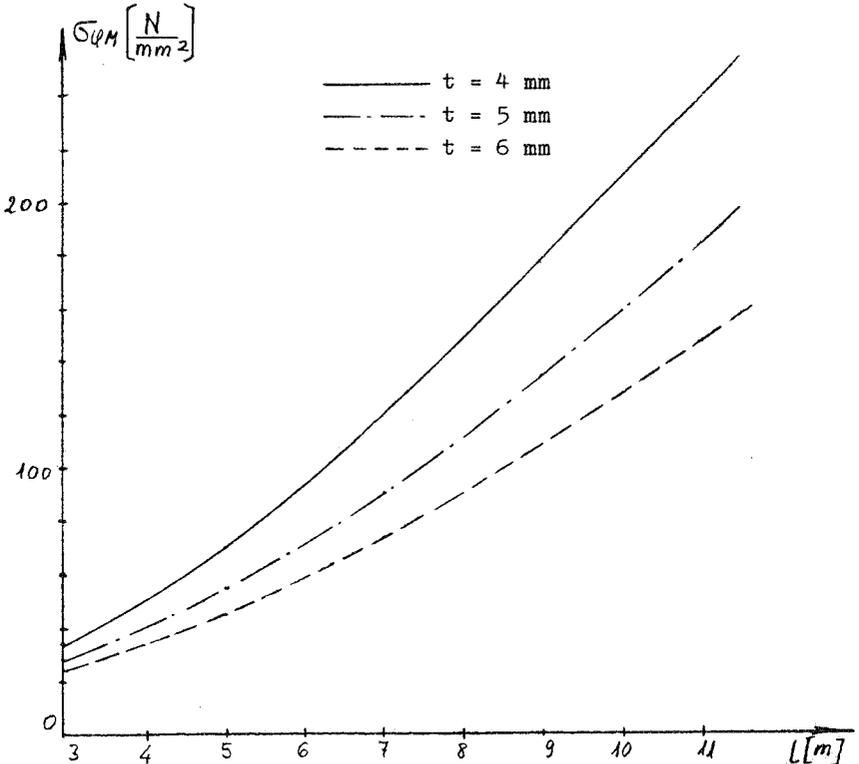


Bild 11.10: Maximalspannungen $\sigma_{\varphi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von l

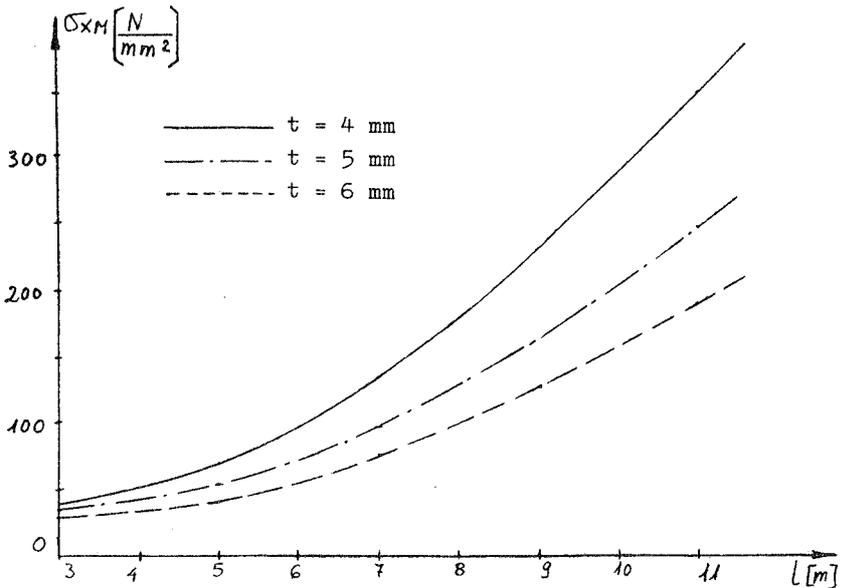


Bild 11.11: Maximalspannungen σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von l

Der Zusammenhang der maximalen Biegespannungen $\sigma_{\varphi M}$ und σ_{XM} mit der Behälterlänge l ist in den Bildern 11.10 und 11.11 zu finden. Dort sind jeweils drei Verläufe für verschiedene Schalendicken t angegeben. Erneut erkennt man das stärkere Anwachsen aller Spannungen für kleinere t . Die Biegespannungen wachsen überproportional mit der Länge l an. Für kleinere l ist der Kurvenverlauf bei σ_{XM} jedoch flacher als bei $\sigma_{\varphi M}$. Da das Gesamtgewicht mit l linear zunimmt, ist der mit Q dividierte Verlauf der Spannungen für größere l immer noch ansteigend. Bild 11.12 zeigt das exemplarisch für σ_{XM}/Q . Bei kleineren l zeigt sich ein optimaler Bereich. Ein kleineres l vermindert σ_{XM} kaum noch.

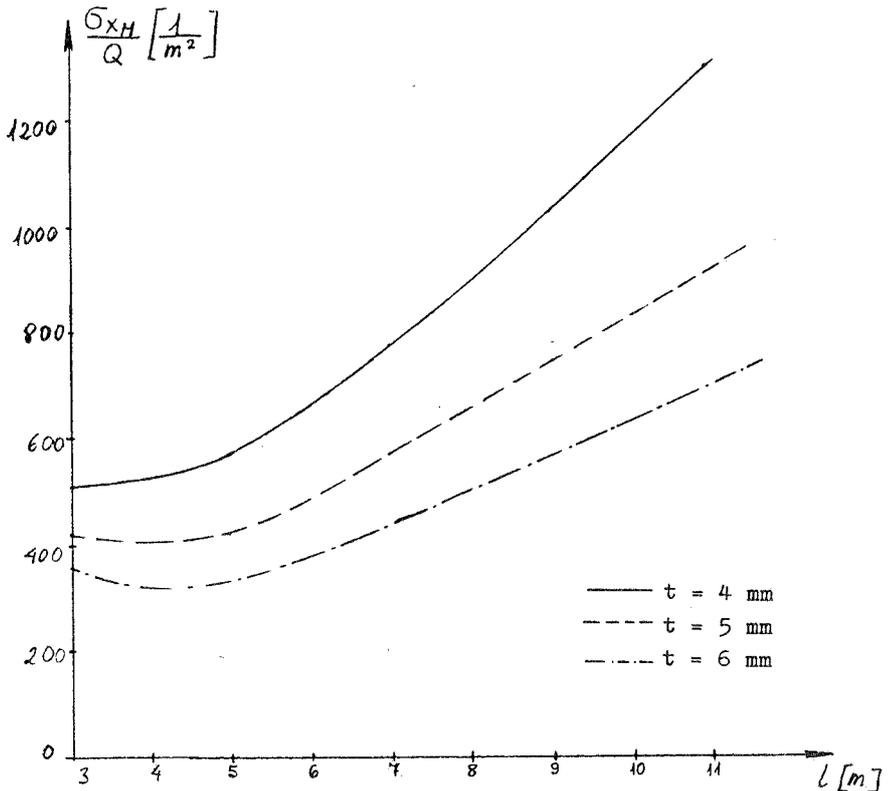


Bild 11.12: Abhängigkeit der relativen Spannung σ_{xM}/Q am Sattel von l

Die Membranspannung σ_{QN} verhält sich nach Bild 11.13 ähnlich zu den Biegespannungen. Die Zunahme mit l ist ebenfalls überproportional. Eine Ausnahme bildet erneut σ_{xN} am Sattel mit einem geringen Anstieg der Werte. In Feldmitte dagegen nehmen die σ_{xN} ähnlich zu σ_{QN} mit wachsendem l stark zu.

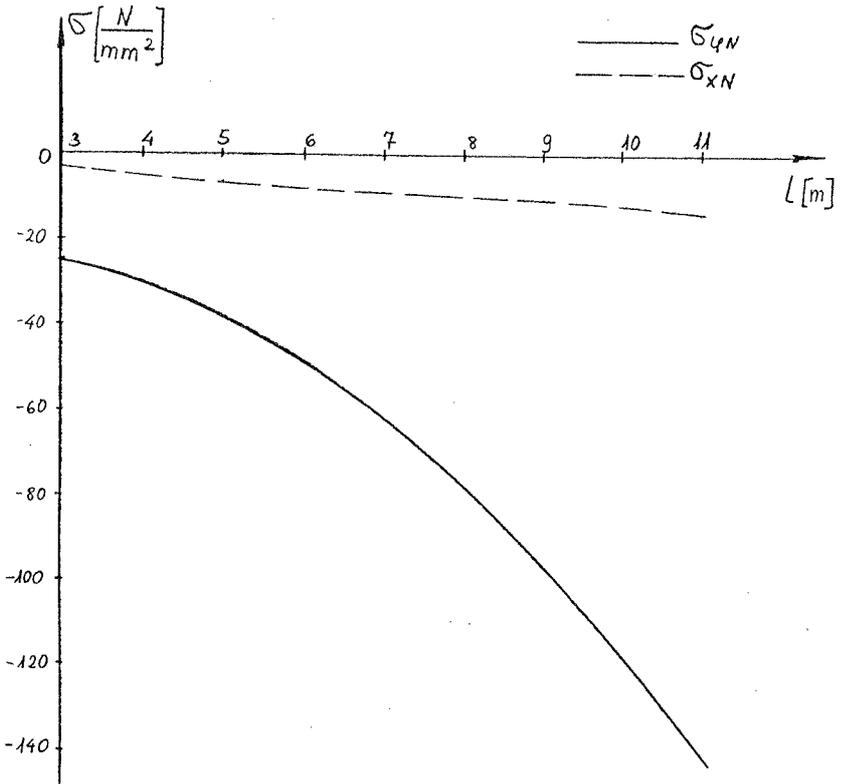


Bild 11.13: Maximale Druckspannungen σ_{yN} und σ_{xN} am Sattel in Abhängigkeit von l

11.5 Gemeinsame Variation von r und l bei konstantem Behältervolumen

Die beiden Schalenparameter r und l können nicht in beliebigem Ausmaß variiert werden, da sie miteinander zusammenhängen. Gibt man ein bestimmtes Behältervolumen vor und wählt r oder l , so ist der andere Wert dadurch festgelegt. Das ist anders als bei der Schalendicke t , die man freier

wählen kann. Bezieht man die Spannungen auf die Auflagerkraft Q und damit auf das Volumen, dann erkennt man aus den Bildern 11.8 und 11.12, daß es sich empfiehlt, kleinere l und größere r zu wählen.

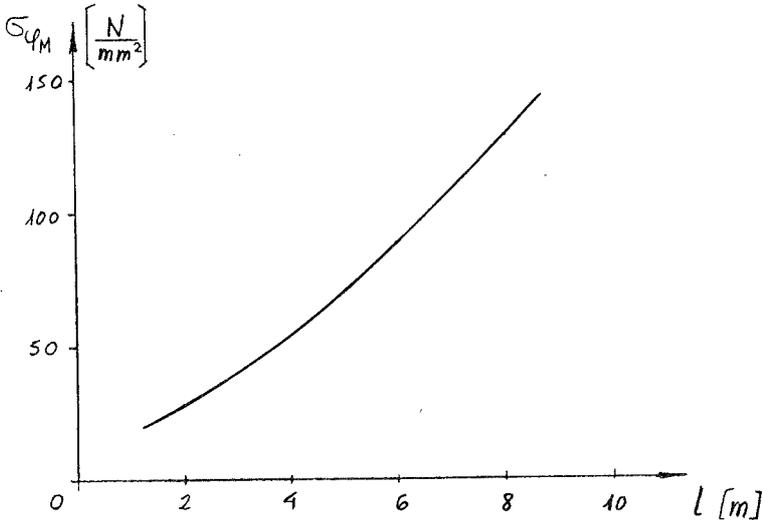


Bild 11.14: Maximalspannungen σ_{fM} am Sattel in Abhängigkeit von l bei konstantem Behältervolumen

Zur Bestätigung wurde bei einem Beispiel das Behältervolumen mit $V = 18,1 \text{ m}^3$ festgehalten und die Länge l geändert. Der Radius ist damit von l abhängig vorgegeben. Bild 11.14 zeigt den Einfluß dieser Variation auf die Biegespannungen σ_{fM} . Der Anstieg mit l bzw. bei abnehmendem r ist sehr stark, wie aus den früheren Überlegungen zu erwarten war.

Bild 11.15 stellt das Verhalten der Längsbiegespannungen σ_{XM} am Sattel dar. Für größere l ergibt sich bei konstantem Volumen ein ähnlicher Anstieg wie bei σ_{fM} . Für kleinere l werden andererseits die Spannungen erneut etwas ungünstiger. Dazwischen liegt ein optimaler Bereich. Die

Werte für $\varphi = 0^\circ$ an den äußeren Sattlerrändern werden bei kleinen l maßgebend gegenüber den sonst größeren Werten für $\varphi = 60^\circ$ am Innenrand des Sattels. Die äußeren Sattlerränder befinden sich auf der Seite der Behälterböden.

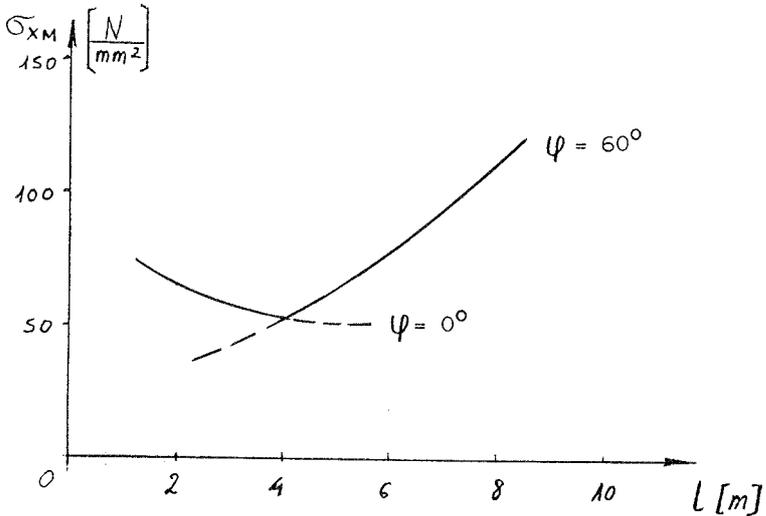


Bild 11.15: Maximalspannungen σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von l bei konstantem Behältervolumen

11.6 Schlußfolgerungen

Bei der vorherigen Untersuchung der Einflüsse aus den Schalenparametern t , r und l haben sich einige wesentliche Ergebnisse gezeigt. Bei Vergrößerung der Wanddicke t , Verkleinerung des Schalenradius r und Verkürzung der Behälterlänge l werden die Spannungen im Behälter geringer. Ein Behälter mit höherer Steifigkeit ist damit günstiger. Eine Vergrößerung von t ist jedoch aus wirtschaftlichen Gründen nicht immer sinnvoll. Ab einer gewissen Grenze lohnt es sich nicht, t zu vergrößern, da der Materialaufwand hoch wird.

Kleine Werte von r und l würden es nicht erlauben, Behälter mit größerem Volumen zu bauen. Die gemeinsame Betrachtung beider Größen zeigte jedoch, daß es vorteilhaft ist, Behälter zu wählen, die bei gleichem Volumen größere Radien und kleinere Längen besitzen. Die Spannungen bei solchen "gedrungenen" Behältern sind geringer als bei langen, schlanken Behältern. In diesem Fall kann man optimale Verhältnisse finden.

12. Vergleich der Schalenbeanspruchungen mit einem Balken

Bei der vorliegenden Untersuchung von Schalen zeigte es sich, daß das Verhalten nicht mit dem eines Balkens übereinstimmt. Das gilt z.B. für die Membranspannung σ_{xN} in Feldmitte. Bereits in Kapitel 8 ist der Verlauf von N_x nach Bild 8.9 nicht mit einer Balkenlösung vergleichbar. Bei halber Füllung ergaben sich für N_x bis zu vier Vorzeichenwechsel über die Behälterhöhe. Das ist verständlich, wenn man die Radialverschiebungen in Bild 8.2 betrachtet. Der Querschnitt hält nicht die Kreisform.

Auch bei den Untersuchungen der Teilfüllung in Kapitel 10 zeigte es sich, daß die Beanspruchungen nicht proportional zur Auflagerkraft Q waren, wie bei einem Balken zu erwarten wäre. Außerdem traten in Feldmitte die Maximalwerte der Längsbiegespannungen σ_{xN} nicht immer bei $\varphi = 180^\circ$ auf. Auch das müßte bei einem Balken der Fall sein.

Es wurde auch die Änderung der Sattelstellung betrachtet. Denkt man an einen Balken auf zwei Stützen, so nimmt die maximale Druckspannung in Feldmitte ab, wenn die Entfernung zwischen den Lagern kleiner wird. Im Gegenteil dazu ergibt sich bei höheren Füllständen, daß das bei der Schale ganz anders ist. Wenn die Sättel näher zusammen liegen, steigen diese Druckspannungen sogar an. Ein solches Verhalten sieht man in Bild 11.5. Hier wurden die Wanddicken variiert und für verschiedene Sattelstellungen die Spannungen σ_{xN} in Feldmitte angegeben. Zum Vergleich sind die entsprechenden Balkenlösungen eingetragen. Die Schalenspannungen liegen höher als die Balkenspannungen. Mit kleinerer Stützweite, d.h. größerem a/l , wachsen sie weiter an. Es ist in Bild 11.5 auch der Grenzfall für $a/l = 0$ eingetragen, das bedeutet eine Auflagerung an den Behälterböden. In diesem Fall ergibt sich nach G i r k m a n n [20] für den vollen Behälter eine reine Membranlösung. Diese ist identisch mit einer Balkenlösung.

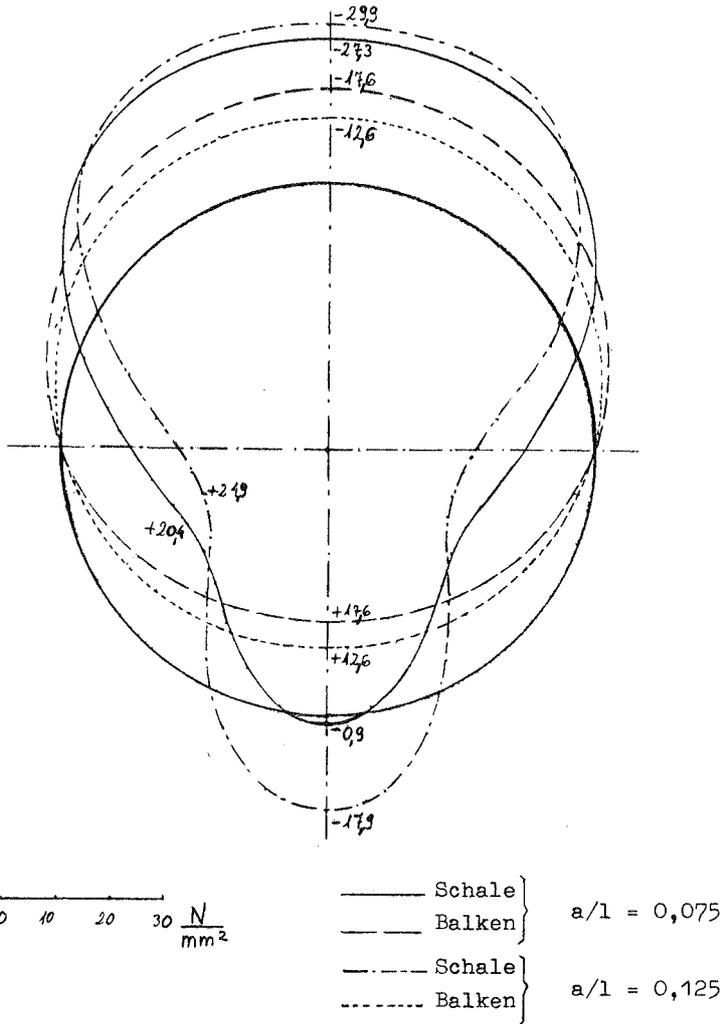


Bild 12.1: Verläufe von σ_{xN} in Feldmitte für zwei Sattel-
anordnungen und die zugehörigen Balkenlösungen

Der Unterschied zur Balkenlösung erklärt sich aus der Sattelstörung und der dadurch hervorgerufenen Radialverformung w der Schale. Der ursprüngliche Kreisquerschnitt bleibt nicht erhalten. Die lokalen Verformungen bewirken eine Änderung der Spannungen gegenüber dem Balken. Die Spannungsverteilung ist über den Umfang nicht mehr cosinus-förmig. Bild 12.1 zeigt die Spannungsverläufe σ_{xN} in Feldmitte für die Wanddicke $t = 6$ mm. Die Schalenwerte werden der Balkenlösung gegenübergestellt.

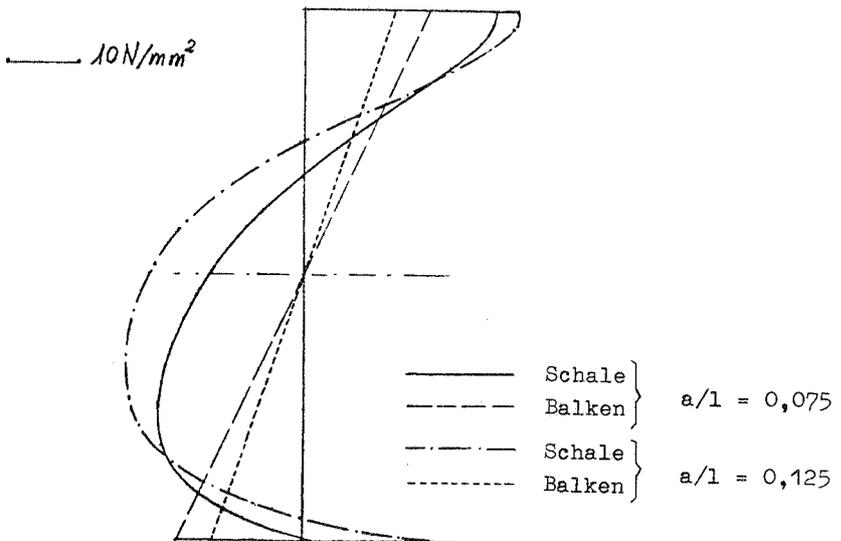


Bild 12.2: Verläufe von σ_{xN} in Feldmitte, aufgetragen über die Höhe des Behälters

Es werden zwei verschiedene Sattelstellungen betrachtet. Beide Spannungsverläufe unterscheiden sich wesentlich von den zugehörigen Balkenlösungen. Die Unterschiede nehmen mit a/l zu. Die Maximalwerte der Druckspannungen treten bei der Schale mit $a/l = 0,125$ bei $\varphi = 170^\circ$ auf. In der unteren Faser treten anstelle der erwarteten Zugspannungen

gen sogar Druckspannungen auf. Bei $\varphi = 90^\circ$ können Spannungen erheblicher Größe erscheinen. Die maximalen Zug- und Druckwerte sind größer als beim Balken. Im Fall des großen Sattelabstands von den Böden sind die Spannungen allgemein höher.

Bild 12.2 verdeutlicht die Spannungsverläufe über die Behälterhöhe. Beim Balken sind es Geraden. Bei der Schale ergeben sich komplizierte Kurven. Dieser Fall zeigt die Problematik, wenn man aus Balkenlösungen auf die Verhältnisse bei Schalen schließen will. Die Angabe von Näherungsformeln oder Umrechnungsfaktoren ist nur beschränkt möglich und kann kaum verallgemeinert werden.

13. Untersuchung der Sattelparameter

13.1 Allgemeines

In Kapitel 11 wurden die Schalenparameter analysiert. Einen großen Einfluß auf die Beanspruchungen des Behälters haben aber auch die Parameter, die mit der Lagerung verbunden sind. Dazu gehören vor allem der Umschließungswinkel ϑ des Sattels, die Satteltbreite b und die Sattelanordnung. Die folgende Untersuchung erfolgt in ähnlicher Art wie in Kapitel 11. Es werden die entsprechenden Biege- und Membranspannungen betrachtet.

13.2 Einfluß des Sattelwinkels ϑ

Von den Parametern des Sattels scheint als erster der Umschließungswinkel ϑ wichtig zu sein. Ist dieser Winkel sehr klein gewählt, muß die vorgegebene Auflagerkraft stark konzentriert in die Schale eingeleitet werden. Dies ergibt aber sehr große Spannungen im Behälter. Ist der Umschließungswinkel sehr groß, im Extremfall über die Hälfte des Umfangs, so dürfte bei freier Lagerung des Behälters, d.h. ohne Schweißverbindung mit dem Sattel, eine weitere Erhöhung von ϑ eine geringe Bedeutung haben. Der Behälter könnte im oberen Bereich nicht mehr am Sattel anliegen. Der effektive Lagerwinkel ϑ^* wäre dann eine lastabhängige Größe.

Im folgenden wird der frei aufgelagerte Behälter mit Umschließungswinkeln ϑ innerhalb des ersten Quadranten untersucht, die von praktischem Interesse sind. Zusätzlich werden noch zwei verschiedene Sattelanordnungen betrachtet. Fall 1 mit $a/l = 0,075$ und Fall 2 mit $a/l = 0,125$. Die Behälterlänge beträgt beide Male $l = 11$ m, der Radius $r = 1,25$ m und die Wanddicke $t = 6$ mm. Die Ergebnisse sind in den Bildern 13.1 bis 13.4 dargestellt.

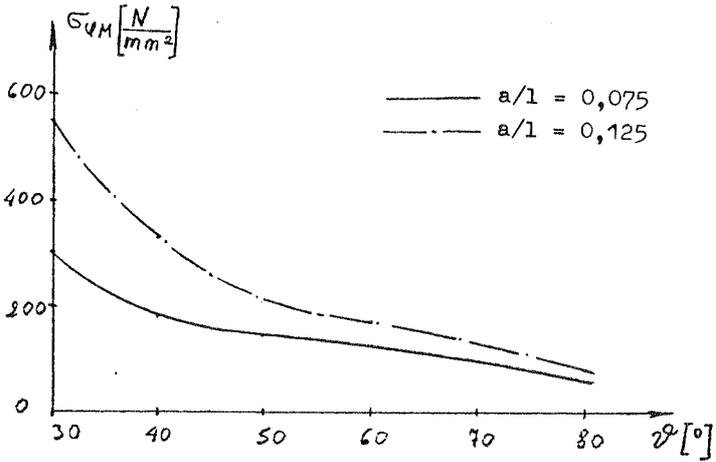


Bild 13.1: Maximalspannungen $\sigma_{\varphi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von φ

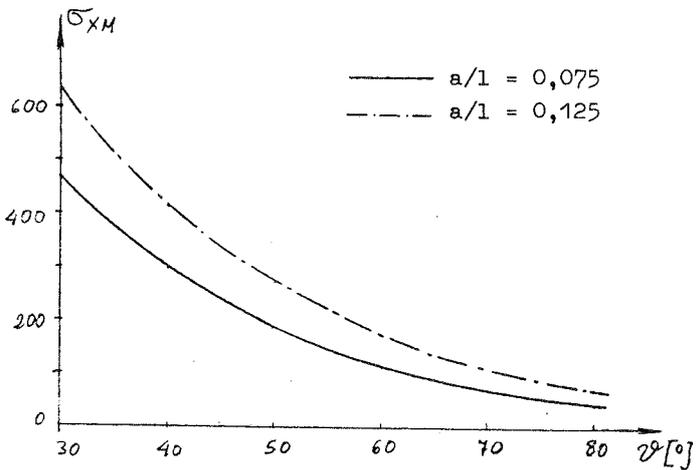


Bild 13.2: Maximalspannungen σ_{xM} am Sattel in Abhängigkeit von φ

Die maximalen Biegespannungen $\sigma_{\varphi M}$ treten an der Sattelspitze auf und fallen mit wachsendem Umschließungswinkel ϑ . Bild 13.1 zeigt für kleine Winkel eine starke Abnahme der Werte mit wachsendem ϑ . Diese Verminderung ist bei größeren Bodenabständen a/l stärker ausgeprägt. Bei größeren Winkeln ist die Veränderung gering. Ein ähnliches Verhalten weisen die Biegespannungen $\sigma_{X M}$ nach Bild 13.2 auf.

Die Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$ und $\sigma_{X N}$ am Sattel verhalten sich ähnlich wie die Biegespannungen. Die Bilder 13.3 und 13.4 verdeutlichen die günstige Wirkung größerer Umschließungswinkel für die Sattelbereiche. Die größten Druckspannungen $\sigma_{X N}$ in Feldmitte sind ebenfalls in Bild 13.4 dargestellt. Im Bereich kleiner ϑ wachsen sie mit ϑ leicht an und sind bei größeren ϑ beinahe konstant. Bei größeren Winkeln ϑ sind diese Spannungen in Feldmitte höher als am Sattel. Damit ist für $\sigma_{X N}$ eine Steigerung von ϑ über einen gewissen Wert hinaus kaum von Bedeutung.

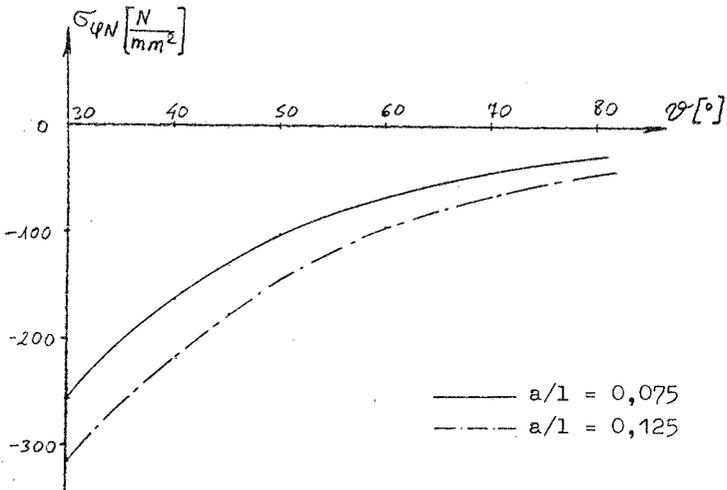


Bild 13.3: Maximale Druckspannungen $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel in Abhängigkeit von ϑ

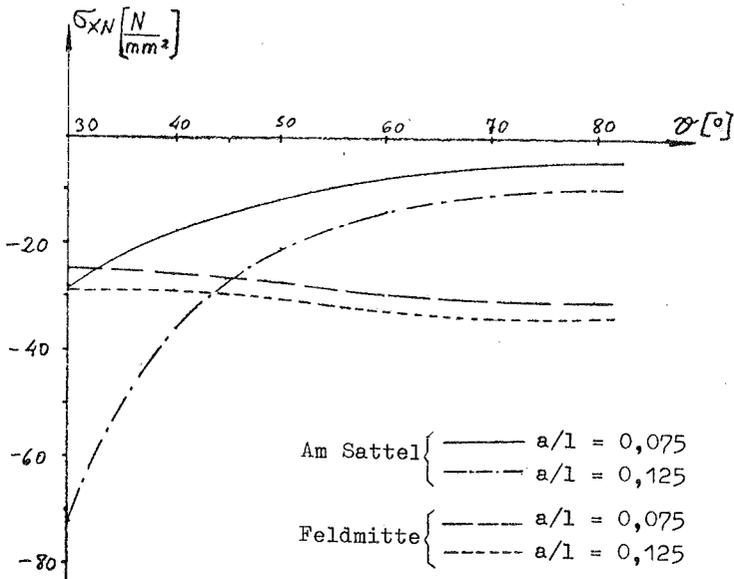


Bild 13.4: Maximale Druckspannungen σ_{xN} in Abhängigkeit von φ

Wie man an den Spannungsverläufen der Bilder 13.1 bis 13.4 sieht, sind die Einflüsse von φ vor allem auf den Sattelpbereich beschränkt.

13.3 Einfluß der Sattelpbreite

Um den Einfluß der Sattelpbreite auf die Behälterbeanspruchungen betrachten zu können, wird im folgenden Beispiel die Achse des Lagers festgehalten und der Sattel dazu symmetrisch verbreitert. Der äußere Sattelrand wandert dabei in Richtung der Behälterböden, wie Bild 13.5 zeigt. Die Parameter des Beispiels sind:

$$l = 11,0 \text{ m} \qquad r = 1,25 \text{ m} \qquad \varphi = 50^\circ$$

Die Sattelachse liegt bei $a/l = 0,10$ und es werden zwei verschiedene Wanddicken untersucht.

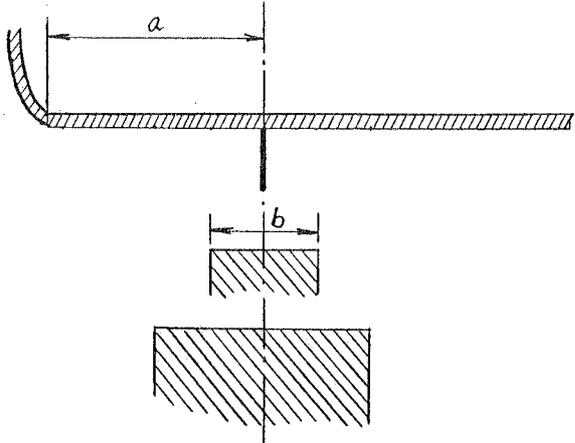


Bild 13.5: Variation der Sattelbreite bei festgehaltener Achse

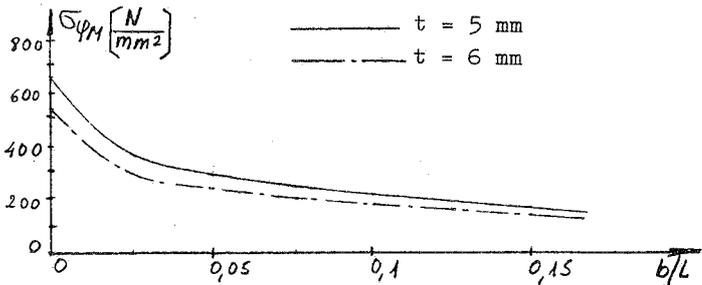


Bild 13.6: Maximalspannungen $\sigma_{\phi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von b ($a = \text{konstant}$)

Die maximalen Biegespannungen $\sigma_{\phi M}$ haben ihren höchsten Wert bei der Schneidenlagerung, wie man in Bild 13.6

sieht. Schon bei einer kleinen Sattelbreite fallen die Spannungen schnell ab. Dieser erste Teil der Kurven ist sehr steil und geht mit größerer Breite in einen flacheren Verlauf über. Die Verläufe sind bei den verschiedenen Wanddicken t ähnlich. Noch ausgeprägter ist dieser Abfall am Anfang der Kurven bei den Biegespannungen σ_{XM} . Das zeigt Bild 13.7. Der weitere Verlauf ist ab einer gewissen Breite beinahe konstant.

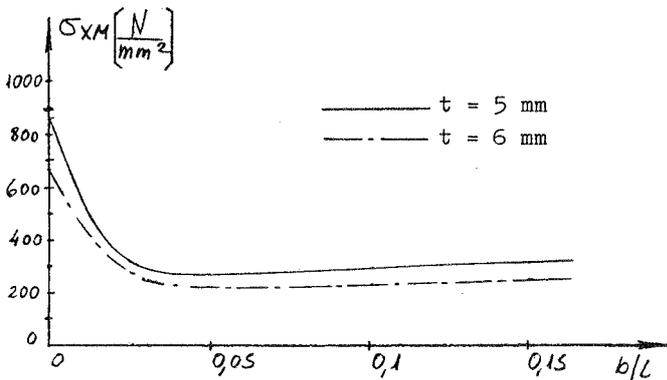


Bild 13.7: Maximalspannungen σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von b ($a = \text{konstant}$)

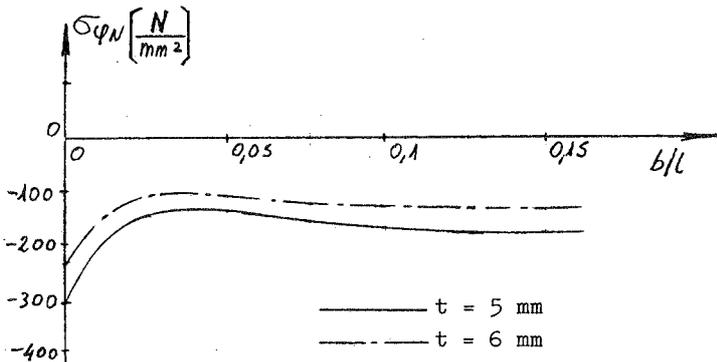


Bild 13.8: Maximale Druckspannungen $\sigma_{\phi N}$ am Sattel in Abhängigkeit von b ($a = \text{konstant}$)

Die Membranspannungen $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel sind in Bild 13.8 dargestellt. Sie verhalten sich in ihrer Abhängigkeit von b analog zu den Biegespannungen σ_{XM} . Die Druckspannungen σ_{XN} am Sattel ähneln in ihrem Verlauf $\sigma_{\varphi N}$. In Feldmitte zeigen sie praktisch keine Abhängigkeit von der Sattelbreite.

Aus den Spannungsverläufen erkennt man den günstigen Einfluß der Sattelbreite. Ab einer gewissen Breite ändern sich manche Spannungen nur noch wenig und andere bleiben konstant. Eine Vergrößerung der Sattelbreite ist danach wenig wirtschaftlich.

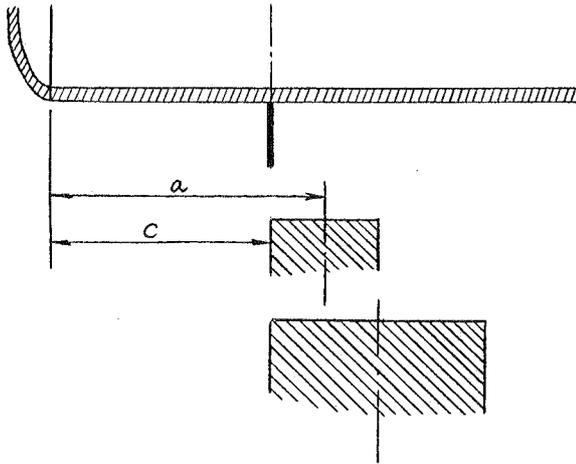


Bild 13.9: Variation der Sattelbreite bei festgehaltenem äußeren Sattelrand

Es wurde bisher ein Behälter betrachtet, bei dem die Achse des Sattels festgehalten und die Sattelbreite variiert wurde. Zum Vergleich wird am selben Behälter der äußere Rand des Sattels festgehalten und die Sattelbreite verändert. Der innere Rand des Sattels wandert in Richtung der Behältermitte. Die Sattelachse bleibt dabei nicht fest, sondern wandert ebenfalls in Richtung der Behälter-

mitte, wie in Bild 13.9 zu sehen ist. In den folgenden Bildern wird neben b/l auch die Achslage a/l angegeben. Der äußere Rand liegt bei $c/l = 0,025$. Es werden ebenfalls zwei verschiedene Wanddicken analysiert.

Die Ergebnisse für $\sigma_{\varphi M}$ sind ähnlich zu den zuvor ermittelten Kurven. In Bild 13.10 ist nach dem ersten raschen Abfall der Maximalwerte ein fast konstanter Verlauf erreicht. Ganz anders zeigt sich der Verlauf für $\sigma_{\chi M}$ in Bild 13.11. Nach einem stark ausgeprägten Abfallen der Spannungen vom Schneidensattel wird ein Minimum erreicht und die Werte steigen erneut an.

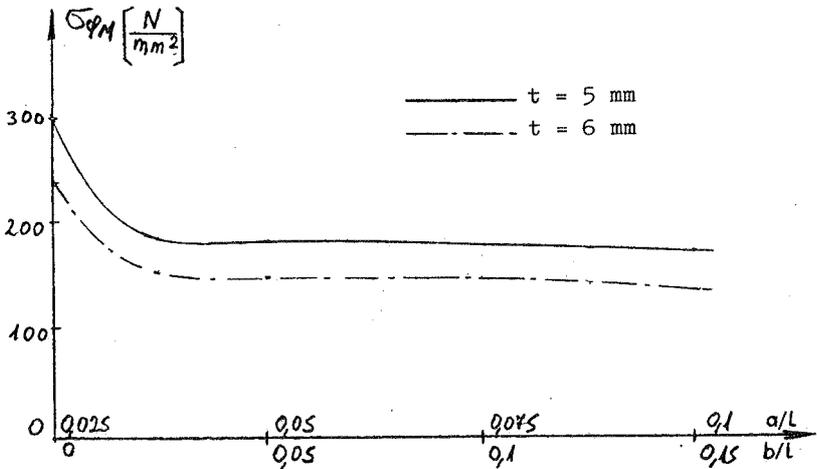


Bild 13.10: Maximalspannungen $\sigma_{\varphi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von b ($c = \text{konstant}$)

Eine ähnliche Tendenz zeigt sich im Bild 13.12 für $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel. Die Spannungen $\sigma_{\chi N}$ am Sattel und in Feldmitte zeigen nur geringe Änderungen bei der Vergrößerung der Sattelbreite.

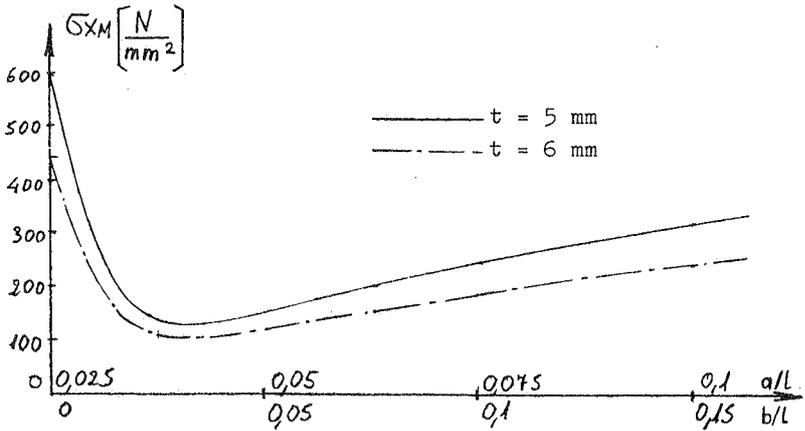


Bild 13.11: Maximalspannungen σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von b ($c = \text{konstant}$)

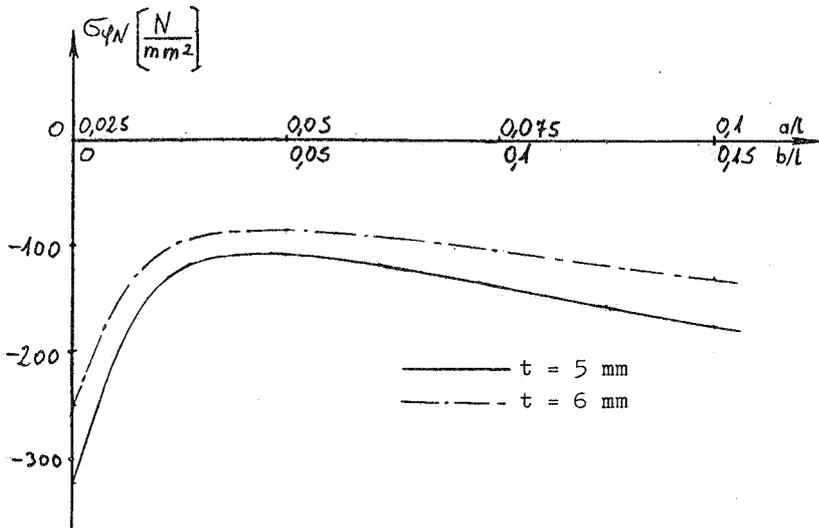


Bild 13.12: Maximale Druckspannungen σ_{qN} am Sattel in Abhängigkeit von b ($c = \text{konstant}$)

Der erneute Anstieg der Spannungen beim Anwachsen von b ab einer gewissen Breite ist beim ersten Blick überraschend. Dies scheint den Ergebnissen im ersten Teil dieses Abschnitts zu widersprechen. Im ersten Teil wurde die Lage der Sattelachse festgehalten. Im zweiten Teil hat sich aber a/l mit b/l zusammen geändert. Diese unterschiedliche Lage der Sattelachse verursacht die Unterschiede in den Ergebnissen für größere Sattelbreiten. Auf den Einfluß, den die Achslage auf die Spannungen besitzt, wird im folgenden Abschnitt 13.4 näher eingegangen.

In dieser Arbeit zeigt es sich, daß sich eine Verbreiterung des Sattels günstig auswirkt. Ab einer gewissen Breite jedoch ist eine weitere Steigerung von b unwirtschaftlich. Bei der Sattelverbreiterung ist es wichtig, die Lage der Achse zu beachten, um nicht einen Teil der gewonnenen Verbesserung wieder zu verlieren. In allen Fällen ist eine Schneidenerlagerung äußerst ungünstig.

13.4 Einfluß der Sattelstellung

Zur Untersuchung der Sattelstellung wird derselbe Behälter betrachtet wie in Abschnitt 13.3. Die Breite des Sattels wird konstant gehalten und die Achse verschoben, wie Bild 13.13 zeigt. Die bezogene Breite beträgt $b/l = 0,10$ und es werden erneut zwei Wanddicken untersucht.

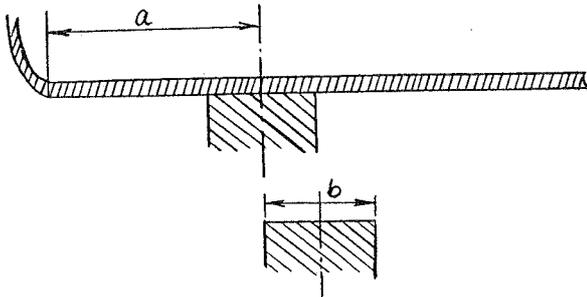


Bild 13.13: Variation der Sattelstellung bei konstanter Sattelbreite

Die Bilder 13.14 und 13.15 veranschaulichen die Veränderung der Biegespannungen infolge a/l . Während $\sigma_{\varphi M}$ beinahe linear zunimmt, geht $\sigma_{\chi M}$ für größere a/l in einen konstanten Wert über. In diesem Bereich ist der Abstand des Sattels von den Böden ohne weiteren Einfluß auf die Größe von $\sigma_{\chi M}$. Für beide Wanddicken ergibt sich die entsprechende Verhaltensweise.

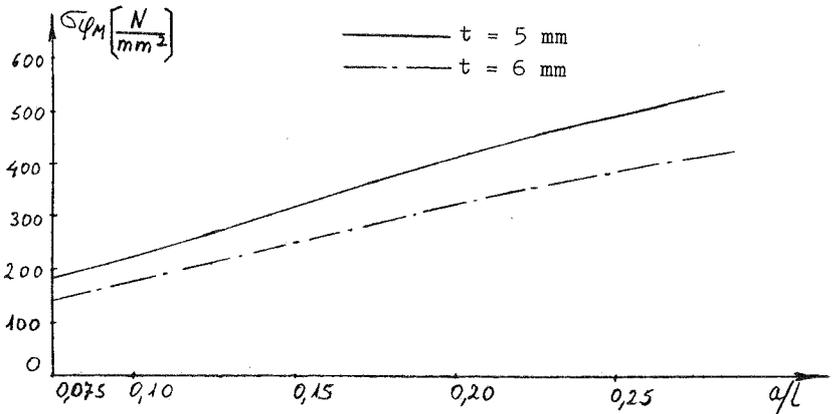


Bild 13.14: Maximalspannungen $\sigma_{\varphi M}$ am Sattel in Abhängigkeit von a ($b = \text{konstant}$)

Bei der Membranspannung $\sigma_{\varphi N}$ am Sattel ist der Verlauf sehr ähnlich zu $\sigma_{\chi M}$. Die Druckspannungen $\sigma_{\chi N}$ am Sattel steigen fast linear mit a/l an, wie Bild 13.16 zeigt. In Feldmitte ändert sich dagegen $\sigma_{\chi N}$ nur geringfügig und steigt mit a/l etwas an. Auch dieses Verhalten entspricht nicht dem eines Balkens, bei dem durch ein Zusammenschieben der Sättel das Feldmoment abnimmt.

Da die Spannungen $\sigma_{\varphi M}$ und $\sigma_{\chi N}$ am Sattel rasch mit a/l anwachsen, ist es sinnvoll, die Sättel möglichst nahe an den Behälterböden anzuordnen. Bei größeren Wanddicken wachsen die Spannungen nicht so schnell an wie bei kleineren Wanddicken t .

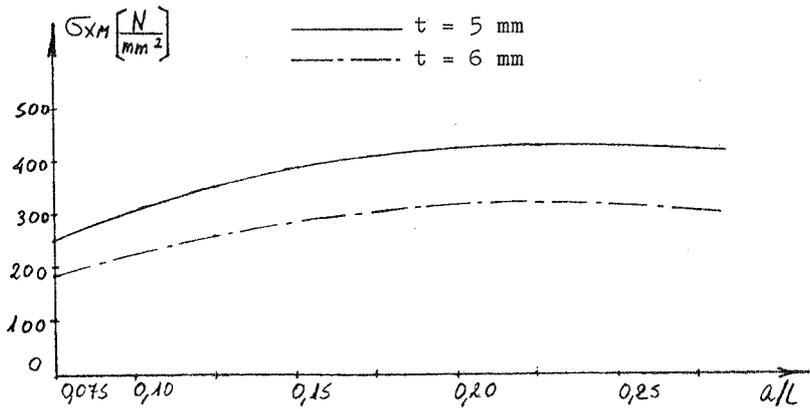


Bild 13.15: Maximalspannungen σ_{XM} am Sattel in Abhängigkeit von a ($b = \text{konstant}$)

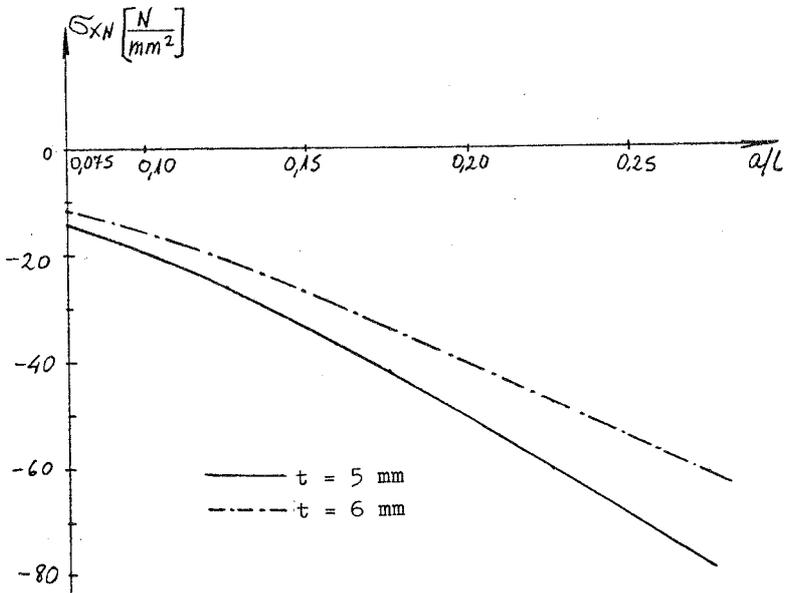


Bild 13.16: Maximale Druckspannungen σ_{XN} am Sattel in Abhängigkeit von a ($b = \text{konstant}$)

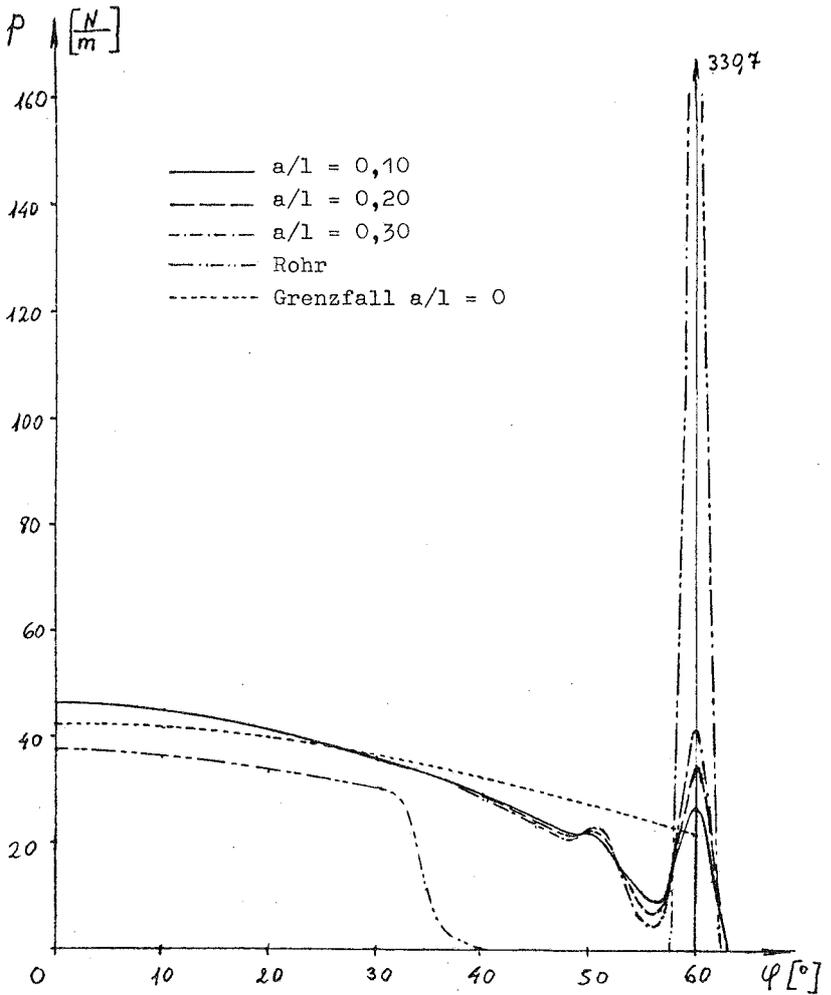


Bild 13.17: Sattelpressungen in Abhängigkeit vom Bodenabstand

Ergänzend soll der Einfluß der Sattelstellung a/l auf die Sattelspannung untersucht werden. Dazu wird ein Behälter mit $l = 4,0$ m, $r = 1,0$ m und $t = 3$ mm betrachtet. Um

den Einfluß der Sattelbreite b zu eliminieren, wird ein Schneidensattel mit $\varphi = 60^\circ$ gewählt.

Bild 13.17 zeigt den Verlauf der Sattelpressung p für drei Sattelstellungen. Zusätzlich ist der Verlauf für ein Rohr angegeben, das denselben Radius, dieselbe Wanddicke und dieselbe Lagerkraft Q besitzt wie der Behälter. Die Sattelpressungen sind für die drei Behälterlösungen in einem großen Teil des Sattels praktisch gleich. Erst in der Nähe des Sattelhorns zeigen sich Unterschiede. Die Spitzen im Pressungsverlauf wachsen mit größerem Bodenabstand an.

Wie man bei diesem Beispiel sieht, treten beim Behälter die Maximalwerte nicht unbedingt am Sattelhorn auf, sondern können auch in Sattelmitte erscheinen. Schon G e r b e a u x [35] zeigt, daß das auch für kleine Sattelwinkel φ möglich ist. Hier spielt die aussteifende Wirkung der Böden eine entscheidende Rolle. Mit kleinerem Abstand zum Boden fällt die Pressungsspitze am Sattelhorn und erreicht bedeutend kleinere Werte als die Pressung in Sattelmitte. Die Werte in Sattelmitte bleiben dagegen für verschiedene a/l beinahe konstant.

Beim Rohr ergibt sich ein völlig anderer Verlauf der Sattelpressungen bei gleicher Auflagerkraft. Hier entfällt die aussteifende Wirkung der Böden ganz. Die Pressungen in Sattelmitte sind geringer. Dafür ergibt sich eine sehr große Pressungsspitze am Sattelhorn. Die Werte liegen weit über denen der Sattelmitte und übertreffen auch alle Maximalwerte der Behälter wesentlich.

Dieser Einfluß der Aussteifung durch die Böden auf die Sattelpressung wurde von M a k e ' e w und F e d i ò [16] untersucht. In Bild 3 ihrer Arbeit zeigen sie ähnliche Effekte bei der Sattelpressung. Sie weisen darauf hin, daß die extremen Pressungsspitzen nur am unendlich langen Rohr auftreten. Bei wirklichen Behältern mit aussteifenden Böden werden die Spitzen wesentlich kleiner. Die Ver-

teilung der Kontaktpressungen nähert sich dem Cosinusverlauf, der bei Sätteln auftreten würde, die direkt am Boden angeordnet sind. In Bild 13.17 ist dieser Grenzfall des Cosinus-Verlaufes eingetragen.

Bei einem Behälter mit gleichen Abmessungen und Lasten wie ein Rohr sind die Beanspruchungen bei Sattellagerung um ein Vielfaches kleiner als bei dem Rohr. Mizoguchi und Hatahata [17] weisen darauf hin, daß die Verformungen des Behälters etwa 1% von denen des entsprechenden Rohres betragen. Das wird durch die aussteifende Wirkung der Böden des Behälters erreicht.

13.5 Schlußfolgerungen

In dieser Arbeit haben sich nach der Untersuchung der Sattelparameter einige wichtige Erkenntnisse ergeben. Der Sattel muß eine Mindestbreite haben, um die extremen Beanspruchungen des Behälters durch eine Schneidenlagerung zu vermeiden. Bei größeren Breiten ist der zusätzliche Gewinn gering und eine weitere Verbreiterung des Sattels wird unwirtschaftlich. Ähnlich ist es beim Sattelwinkel. Auch hier sind größere Winkel empfehlenswert, doch gibt es einen optimalen Bereich. Danach wächst der Aufwand und bringt kaum Verbesserungen.

Es hat sich auch gezeigt, daß bei der Sattelstellung die Lage der Sattelachse entscheidend ist. Selbst bei Verbreiterung der Sättel kann durch eine ungünstige Verschiebung der Achse der Behälter höher beansprucht werden. Empfehlenswert ist die Anordnung der Sättel möglichst nahe an den Behälterböden. Diese Nähe zu den Böden verbessert die gesamten Beanspruchungen. Die Böden wirken aussteifend für den Behälter. Entsprechende Rohre müssen viel dickwandiger ausgeführt werden.

In allen Fällen traten die höchsten Beanspruchungen in der Nähe des Sattels auf. Wenn man die Parameter sowohl

von der Schale als auch vom Sattel günstig wählt, verbessert sich das Tragverhalten. Das Zusammenwirken dieser Parameter ist sehr kompliziert und bietet zahlreiche Variationen. Es ist aber möglich, Grundtendenzen aufzuzeigen. Damit ist es möglich, gezielte Verbesserungen in der Konstruktion vorzunehmen.

14. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden dünnwandige, liegende, zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern untersucht. Am Anfang steht eine Analyse der Literatur und eine Zusammenfassung der wichtigsten Untersuchungen über dieses Thema. Für die hier vorgelegte Studie wird die vollständige Schalentheorie von Flügge ohne Vereinfachungen angesetzt. Die numerische Durchführung der Schalenberechnung erfolgt mit Hilfe von Fourierreihen in Umfangsrichtung. In Längsrichtung wird das Übertragungsverfahren benutzt. Auf diese Weise ist es möglich, verschiedene Randbedingungen der Schale, z.B. unterschiedliche Arten der Anschlüsse des Behälters an die Böden und auch den Fall der Rohre, zu untersuchen.

In Umfangsrichtung werden die Sattelkräfte diskretisiert und als Unbekannte in die Berechnung eingeführt. In der vorliegenden Arbeit wird bei der Lösung die Eigenverformung des Zylinders infolge verschiedener Teilfüllungszustände und auch anderer Lasten berücksichtigt. Es wird auf diese Weise nicht nur die Wirkung der gesamten Lagerkraft Q betrachtet, die in einen sonst unverformten Zylinder hineingepreßt wird, sondern auch die vollständige Verformung der Schale infolge der oben genannten Lasten.

Gegenüber früheren Arbeiten werden hier in Längsrichtung neue Ansätze für die Kraftverteilung am Sattel vorgeschlagen. Als besonders geeignet erweist sich ein kombinierter Ansatz mit Einzelkräften an den Rändern und verteilten Belastungen dazwischen.

Weiterhin wird der Fall des örtlichen Abhebens der Schale am Sattel analysiert. Außerdem wird berücksichtigt, daß die Sattelformen unterschiedlich und die Sättel selbst elastisch nachgiebig sein können. Die Tangentialkräfte oder Längskräfte am Sattel lassen sich in zu den Radialkräften analoger Form einführen. Die Vergleiche an einzelnen durchgerechneten Behältern und Rohren mit den theoretisch und

experimentell ermittelten Ergebnissen anderer Autoren zeigen eine gute Übereinstimmung.

Vor den ausführlichen Studien an liegenden Zylindern, die der Untersuchung der wesentlichen Parameter von Schale und Sattel dienen, werden verschiedene Teilfüllungen betrachtet. Die Beanspruchungen wachsen mit dem Füllungsgrad an, sind jedoch nicht proportional zu der zunehmenden Auflagerkraft. Im allgemeinen ist der Zustand der vollen Füllung für die Dimensionierung maßgebend.

Bei der Variation der Schalenparameter zeigt es sich, daß eine Vergrößerung der Wanddicke günstig ist. Jedoch der Aspekt der Wirtschaftlichkeit darf dabei nicht außer acht gelassen werden, da mit wachsender Wanddicke die relative Verminderung der Kräfte kleiner wird. Bei den Untersuchungen der Außenabmessungen der Behälter hat es sich herausgestellt, daß der optimale Bereich bei "gedrungenen" Behälterformen liegt. Diese sind günstiger als langgestreckte Behälter mit gleichem Volumen.

Bei der Untersuchung der Sattelparameter läßt sich erkennen, daß eine Mindestbreite erforderlich ist. Ein Schneidensattel stellt die ungünstigste Art der Lagerung dar. Beim Sattelwinkel sind größere Werte vorzuziehen. Bei einer Vergrößerung der Sattelpartei und des Sattelwinkels muß man jedoch, wie bei der Wanddicke, den anwachsenden Materialaufwand der Verbesserung der Beanspruchungen gegenüberstellen.

In dieser Arbeit hat sich auch gezeigt, wie wichtig die Stellung der Sattelachse für die Beanspruchungen des Behälters ist. Bei einer Verbreiterung des Sattels muß man deshalb besonders beachten, daß sich dabei die Sattelachse nicht ungünstig verschiebt, sonst verliert man die übrigen Vorteile. Im allgemeinen sollen die Sättel möglichst nahe an den Behälterböden angeordnet werden, weil die Böden die Schale wesentlich versteifen. Darin liegt der Vorteil von Behältern gegenüber Rohren mit gleichen Abmessungen.

Durch diese Studien kann man das Tragverhalten der über Sätteln liegenden Zylinderschale erkennen. Man erhält dadurch auch Hinweise zur vorteilhaften Wahl der Parameter. Es hat sich bei dünnwandigen Behältern gezeigt, daß es zu falschen Werten und Spannungsverläufen führen kann, wenn man die Schale in der Berechnung näherungsweise wie einen Balken behandelt. Deshalb können Umrechnungsfaktoren und Näherungsformeln kaum verallgemeinert werden.

Summary

The present research deals with thin horizontal cylindrical vessels and pipes on saddle supports. At the beginning, the most important publications in connection with this subject are commented. This study is based on Flügge's complete theory of shells, without simplifications. Expansions in Fourier series are used in the circumferential direction. In the axial direction, the problem is solved by the transfer matrix method. Thus, different boundary conditions at the ends of the vessel, and also the case of pipes, can be considered.

The interface pressure in the saddle region is assumed to consist of unknown discrete uniform loads. In this analysis, different degrees of fill and also other loads are taken into account. Thus, not only the resultant saddle reaction Q , pressed into the undeformed cylinder, but also the whole state of deformation due to the loads mentioned above, is considered.

In comparison with previous publications, new hypotheses are proposed here, concerning the interface pressure distribution in longitudinal direction. One of these, combining concentrated loads at the edges of the supports and distributed load in the middle is specially suitable.

The case in which the shell can separate from the saddle within the contact region, is also analysed. Furthermore, the possibility that the saddle supports can have different

forms is considered. Attention is given moreover, to the problem of flexible saddles. The tangential or longitudinal reaction components are treated like the radial ones. Comparative calculations agree satisfactorily with theoretical and experimental results obtained by other authors.

An analysis dealing with different levels of fill precedes the detailed examination of the main parameters of the cylinder and its supports. The stresses increase with growing height of the fluid level above the lowest point of the vessel. The stresses however, are not proportional to the support reactions. The most unfavourable state corresponds, in general, to the cylinder full of liquid.

With respect to the parameters of the cylindrical shell, a thickness increment is advantageous for the state of stress. As the thickness increases however, the relative stress reduction decreases. The material expenses should be regarded in each case. It is shown here, that an optimum design of a cylindrical vessel with a given volume, is reached by choosing a compact form, since this form is more advantageous than a longer one.

The saddle supports are further analysed. A line support constitutes the most unfavourable case, therefore a minimum saddle width is required. Concerning the angle of opening of the saddle, relatively big values are preferable to small ones. When the width and the angle of the support are increased, the stress reductions become lower, as in the case of the shell thickness. The corresponding increasing material costs should be also taken into account here.

This study also shows the important influence of the position of the saddle axis upon the stresses. When the saddle width is increased, the axis should not move to a more unfavourable position. It is generally convenient to place the supports as near the heads as possible, because those stiffen the vessel considerably. For this reason, the stresses in a vessel are lower than in a pipe that has the same cross section and the same saddle reactions.

Those studies show the behaviour of cylindrical shells on saddle supports. Moreover, indications for a convenient parameter choice are deduced from such analysis. The assumption that a thin vessel behaves as a beam, can yield wrong results and unreal distributions of stresses. Therefore, neither transformation factors nor approximate formulae should be generalized.

Resumen

El propósito del presente trabajo, es analizar el comportamiento de recipientes cilíndricos y tuberías horizontales, de paredes delgadas, apoyados sobre silletas. En primer término, se comenta la bibliografía existente, con una síntesis de las investigaciones más importantes vinculadas al tema. Los estudios en esta obra se basan en la teoría de cáscaras completa de Flügge; no se introducen simplificaciones en la solución. En dirección circunferencial, se desarrollan en serie de Fourier las funciones que intervienen en el problema. En dirección longitudinal, se recurre al método de la matriz de transferencia. Así pueden analizarse diferentes condiciones de borde en los extremos del recipiente, y también el caso de tuberías.

La presión de contacto con la silleta en dirección circunferencial, se considera constituida por cargas discretas, las cuales son incógnitas del problema. En la presente obra, se tienen en cuenta distintos niveles de líquido, y también otras cargas. Se considera así, no solamente el efecto de la reacción total de la silleta Q , presionada en el cilindro aún no deformado, sino además, el estado de deformación completo de la cáscara debido a las cargas citadas anteriormente.

En comparación con trabajos anteriores, se proponen aquí nuevas hipótesis para la distribución de la carga transmitida por la silleta en dirección longitudinal. Una hipótesis que combina cargas concentradas en los bordes del apoyo y

carga distribuida en la región central del mismo, resulta especialmente adecuada.

Además, se analiza el caso de la posible separación local de la cáscara y la silleta, dentro de la zona de contacto. Asimismo, se considera la posibilidad de que los apoyos en silleta tengan distintas formas, así como el caso de apoyos elásticamente deformables. Las componentes tangenciales o longitudinales de las fuerzas de contacto con la silleta se tratan en forma similar a las componentes radiales de dichas fuerzas. Los cálculos comparativos efectuados, coinciden satisfactoriamente con resultados teóricos y experimentales de otros autores.

Un análisis relativo a distintos niveles de llenado de líquido precede el estudio detallado de los parámetros fundamentales del sistema. Las solicitaciones aumentan con la altura de líquido contenido. Sin embargo, las tensiones no son proporcionales a las reacciones de apoyo. El estado más desfavorable corresponde, en general, al del cilindro lleno.

Con respecto a los parámetros de la cáscara cilíndrica, un aumento del espesor es favorable para la sollicitación. No obstante, al aumentar el espesor y por consiguiente la cantidad de material, la reducción relativa de los esfuerzos es cada vez menor. Se demuestra aquí, que para diseñar de manera óptima un recipiente de un volumen determinado, conviene elegir una forma compacta, por ser ésta más ventajosa que una alargada.

A continuación se analizan los parámetros del apoyo en silleta. Un apoyo lineal constituye el caso más desfavorable, por eso la silleta debe tener un ancho mínimo. Para el ángulo de abertura es preferible elegir valores relativamente grandes. Al aumentar el ancho y el ángulo del apoyo, sin embargo, debe compararse el incremento de material con la mejora del estado de sollicitación obtenida, como en el caso del aumento del espesor del cilindro.

En el presente trabajo, se demuestra también la importancia de la posición que ocupa el eje de la silleta. Al aumentar

el ancho del apoyo, debe tratarse que el eje de la silleta no se desplace a una posición más desfavorable. En general, conviene ubicar los apoyos lo más cerca posible de los fondos, porque éstos últimos rigidizan una cáscara sustancialmente. Por eso, un recipiente se encuentra menos solicitado que una tubería de igual sección transversal e iguales reacciones de apoyo.

A través de estos estudios, puede reconocerse el comportamiento de una cáscara cilíndrica sobre silletas. Asimismo, de dichos análisis se deducen indicaciones para elegir los parámetros más convenientemente. Del cálculo aproximado de un depósito de paredes delgadas, como si se tratara de una viga, pueden resultar valores falsos y distribuciones de esfuerzos que no corresponden a la realidad. Por este motivo, no deben generalizarse factores de transformación ni fórmulas aproximadas.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Un-
terlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-
mente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-
weiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.^f
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. -G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache)