

Torsion und Profilverformung

Berechnung eines in Feldmitte durch ein
Torsionsmoment belasteten Trägers mit einem
verformbaren biegesteifen Rechteckkastenprofil
mit auskragenden Gurten

Von der Universität Stuttgart (TH)
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.)
genehmigte Abhandlung



vorgelegt von
Alfred Steinle
geboren zu Ulm/Donau

14.03.2008

Z

Hauptberichter:	Prof. Dr. -Ing. F.W. Bornscheuer
Mitberichter:	Prof. Dr. -Ing. W. Pelikan
Tag der Einreichung:	22. Januar 1967
Tag der mündlichen Prüfung:	27. Juli 1967

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Modellstatik der Technischen Hochschule Stuttgart.

Sie wurde angeregt durch die theoretischen Arbeiten und die Vorlesung über Torsion meines verehrten Lehrers Herrn Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer, dem ich für die ständige Unterstützung und Förderung dieser Arbeit danke. Unter seiner Leitung wurde schon vor einigen Jahren ein umfangreiches Versuchsprogramm aufgestellt, das zur Klärung der bei torsionsbeanspruchten dünnwandigen Stäben auftretenden Probleme beitragen sollte. Die dabei geleistete Vorarbeit durch meinen Kollegen Herrn Dr.-Ing. D. Feder, M.S., bedeutete für mich eine wesentliche Hilfe.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Pelikan danke ich für die bereitwillige Übernahme des Korreferats und der damit verbundenen Mühe.

Dem Wirtschaftsministerium des Landes Baden-Württemberg gilt mein Dank für die großzügige Unterstützung bei der Finanzierung der umfangreichen experimentellen Untersuchungen.

Abschließend möchte ich nicht versäumen, an dieser Stelle allen Mitarbeitern des Instituts für Modellstatik, die mir stets mit Rat oder Tat behilflich waren, recht herzlich zu danken.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Schrifttum	6
Bezeichnungen	9
1. Einleitung	13
2. Koordinatensystem und Vorzeichenkonvention	16
3. Reine Torsion	18
3.1 Schubspannungsverlauf bei reiner Torsion	18
3.2 Verformungen infolge reiner Torsion	24
4. Wölbkrafttorsion (starrer Querschnitt)	27
4.1 Allgemeines	27
4.2 Verteilung der Normal- und Schubspannungen über den Querschnitt infolge Wölbkrafttorsion	28
4.3 Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	35
4.4 Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	38
5. Betrachtung zur Faltwerkstheorie (Gelenkwerk) ohne Berücksichtigung der Schubverformung	42
6. Torsion des nicht ausgesteiften Querschnitts	48
6.1 Verteilung der Normal- und Schubspannungen über den Querschnitt beim Faltwerk unter profilverformender Belastung	48
6.2 Ableitung der Differentialgleichung des biegesteifen Faltwerks unter profilverformender Belastung mit Berücksichtigung der Schubverformung	53
6.3 Lösung der vollständigen Differentialgleichung des biegesteifen Faltwerks unter profilverformender Belastung	66
6.3.1 Einfeldträger belastet durch ein in Feldmitte in den Stegen wirkendes Kräftepaar (Fall I)	66
6.3.2 Unendlich langer Träger belastet durch ein in den Stegen wirkendes Kräftepaar (Fall I)	71

	Seite
6.3.3 Unendlich langer Träger belastet durch ein über ein Schott eingeleitetes Torsionsmoment (Fall II)	73
6.3.4 Sonderfall des doppelsymmetrischen Rechteckkastens ohne Konsolen	76
7. Praktische Berechnung der Querschnittswerte und der Spannungsverteilung	80
8. Theoretische Ergebnisse	82
8.1 Untersuchte Querschnittsformen	82
8.2 Längsverteilung der Bimomente, deren Ableitungen und des Verformungswinkels	88
8.3 Längsverteilung der Normalspannungen	98
9. Experimentelle Spannungsanalyse	101
9.1 Versuchsprogramm	101
9.2 Versuchsdurchführung und -auswertung	102
9.3 Versuchsergebnisse	102
9.4 Diskussion der Versuchsergebnisse und Hinweise für die Praxis	114
10. Zusammenfassung	117
 Anhang	
A. Ableitung der Differentialgleichung der Wölbkraft-torsion unter Berücksichtigung der Verformungen infolge sekundärer Schubspannungen	119
A.1 Ableitung der DGl. nach Heilig	119
A.2 Ableitung der DGl. nach Umanskij	122
A.3 Vergleich der verschiedenen Theorien für die Ableitung der DGl. der Wölbkrafttorsion	125
B. Die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens unter Berücksichtigung der Schubverformung	127

Schrifttum

- [1] Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehungsvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21 (1952), H. 1, S. 1
- [2] Bornscheuer, F.W.: Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe. Der Stahlbau 21 (1952), H. 12, S. 225
Der Stahlbau 22 (1953), H. 2, S. 32
a) Berichtigung: Der Stahlbau 30 (1961), H.3, S. 96
- [3] Heilig, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil. Der Stahlbau 30 (1961), H. 4, S. 97
- [4] Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 30 (1961), H. 11, S. 333
a) Berichtigung: Der Stahlbau 32 (1963), H. 2, S. 64
b) Zuschrift von R. Dabrowski: Der Stahlbau (1962), H. 4, S. 128
- [5] Bencsoter, S.U.: A Theory of Torsion Bending of Multicell Beams. Journal of Applied Mechanics (1954), H. 3, S. 25
- [6] Dabrowski, R.: Torsion Bending of Thin-walled Members with Nondeformable Closed Cross-Sections. New-York, 1963 (unveröffentlichte Arbeit)

- [7] Girkmann, K.: Flächentragwerke.
Springer Verlag, Wien 1954, 3. Auflage
- [8] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1.
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964
- [9] Lacher, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast.
Der Stahlbau 31 (1962), H. 10, S. 299
Der Stahlbau 31 (1962), H. 11, S. 325
- [10] Dabrowski, R.: Die Torsion von dünnwandigen Konstruktionen des Brücken- und Wasserbaus mit geschlossenem Querschnitt.
Rozprawy Inżynierskie (1958), S. 283
(in polnischer Sprache)
- [11] Dabrowski, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil.
Der Bauingenieur 40 (1965), H. 11, S. 444
- [12] Kollbrunner/Basler: Torsion
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966
- [13] Watanabe, N.: Berechnung der Spannungen eines Durchlaufträgers mit offen-geschlossenem Profil bei Biegung und Torsion.
Universität Hokkaido (in japanischer Sprache)

- [14] Born, J.: Faltwerke, ihre Theorie und Berechnung.
Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1954
- [15] Roik, K. und Sedlacek, G.: Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen.
Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes.
Der Stahlbau (1966), H. 2, S. 43
- [16] Müller, R.K.: Automatische Meßanlage für 200 Dehnmeßstreifen
Elektronik 14 (1965), H. 9
- [17] Florin, G.: Vergleich verschiedener Theorien für den auf Verdrehung beanspruchten Kastenträger ohne Querschnittsaussteifung an der Lasteinleitungsstelle an Hand eines Modellversuchs
Der Stahlbau 32 (1963), H. 2, S. 51

Bezeichnungen

(Für Abschnitt 4 und Anhang B werden besondere Bezeichnungen eingeführt)

a, a_o, a_u, b	[cm]	Querschnittsabmessungen
$A_1, A_2, \bar{A}_1, \bar{A}_2$	[1]	Integrationskonstanten
B_I	[kpcm ²]	Bimoment aus Wölbkrafttorsion
B_{II}	[kpcm ²]	Bimoment aus Profilverformung
C_1, C_2, C_3, C_4 $C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*$	[1]	Integrationskonstanten
E	[kp/cm ²]	Elastizitätsmodul
f_I	[kp/cm ⁴]	B_I/J_I
f_{II}	[kp/cm ⁴]	B_{II}/W_{II}
F	[cm ²]	gesamte Querschnittsfläche
F_B	[cm ²]	Bredt'sche Fläche
F_o, F_u, F_v	[cm ²]	Querschnittsflächen der Einzelscheiben
G	[kp/cm ²]	$E/2(1+\mu)$ Schubmodul
J_o, J_u, J_v	[cm ³]	Plattenträgheitsmomente $t^3/12(1-\mu^2)$
J_R	[cm ²]	Querschnittswert für die Rahmensteifigkeit
J_V, J_B	[cm ⁴]	St.Venant'sches bzw. Bredt'sches Torsions-trägheitsmoment
J_T	[cm ⁴]	gesamtes Torsionsträgheitsmoment
J_C	[cm ⁴]	zentrales Trägheitsmoment
J_I	[cm ⁶]	Wölbträgheitsmoment der Wölbkrafttorsion
J_{II}	[cm ⁶]	Wölbträgheitsmoment der Profilverformung
k	[cm ²]	Schubverformungseinfluß für Profilverformung

K_1, K_2, K^*	[1]	Parameter
K_1^*, K_2^*, K_3^*		
ϱ	[cm]	halbe Stablänge
m	[kp]	stetig verteiltes äußeres Torsionsmoment
m_A, m_B	[kp]	Quermomente in den Ecken A und B des Kastens
M	[cmkp]	äußeres Torsionsmoment
M_T	[cmkp]	Torsionsschnittmoment
M_V	} M_P	St. Venant'scher bzw. Bredt'scher Anteil des
M_B		
$M_S \equiv B'_I$	[cmkp]	sekundäres Torsionsschnittmoment
P_I^*	[kp]	"Wölbbelastung" aus Wölbkrafttorsion
P^*	[cmkp]	"Wölbblast"
$Q^* = Q_I^* + Q_{II}^*$	[cmkp]	"Wölbquerkraft"
r_t	[cm]	Abstand des Drehpunktes bzw. Schubmittelpunktes von der Konturtangente
s	[cm]	Konturkoordinate
S_I	[cm ⁴]	statisches Wölbmoment der Wölbkrafttorsion
S_{II}	[cm ⁴]	statisches Wölbmoment der Profilverformung
t, t_o, t_u, t_v	[cm]	Wanddicken
T	[kp/cm]	Schubfluß allgemein
T_M	[kp/cm]	Torsionsschubfluß
T_P, T_S	[kp/cm]	primärer bzw. sekundärer Torsionsschubfluß aus Wölbkrafttorsion
T_I	[kp/cm]	profilverformender Schubfluß aus Wölbkrafttorsion $\int T_I r_t ds = 0$
T_{II}	[kp/cm]	Schubfluß aus Profilverformung
u, v	[cm]	Axial- bzw. Tangentialverschiebung
W_I	[cm ⁶]	Querschnittsfunktion bei Wölbkrafttorsion
W_{II}	[cm ⁶]	Querschnittsfunktion bei Profilverformung

x	[cm]	Stablängsachse
y, z	[cm]	Querschnittshauptachsen
α	[1]	Kennwert $k \lambda_{II}^2$
$\alpha_o, \alpha_u, \alpha_o^*, \alpha_u^*$	[1]	Querschnittsverhältniszahlen
β	[1]	Verhältniszahl $ \omega_{II,B} / \omega_{II,A} $
$\gamma = \gamma_o + \gamma_v$	[1]	Verformungswinkel des geschlossenen Kastens
$\gamma_I, \gamma_{II}, \gamma_m$	[1]	Anteile des Verformungswinkels
$\bar{\gamma}$	[1]	Gleitung des Elements
ε	[1]	Kennwert der Wölbkrafttorsion bezüglich Profilverformung
ϱ	[1]	Formbeiwert der St.Venant'schen Torsionssteifigkeit
ϱ_1, ϱ_2	[1]	Parameter für die Rahmensteifigkeit bzw. für die Eckmomente
$\varrho^{\mathcal{L}}$	[1/cm]	Funktion der Wölbkrafttorsion
χ	[1]	Schubverformungsfaktor aus Wölbkrafttorsion
λ_x	[1/cm]	Abklinggrad der Wölbkrafttorsion
λ_{II}	[1/cm]	Abklinggrad der Profilverformung
λ_2	[1/cm]	$\lambda_{II} \sqrt{1 \pm \alpha}$
μ	[1]	Querdehnzahl
ν	[1]	Schubverteilungszahl bei Wölbkrafttorsion
ξ	[1]	$4 \left(\frac{\lambda_{II}}{\lambda_x} \right)^4 (1 - k \lambda_x^2)$
σ	[kp/cm ²]	Normalspannung in x-Richtung
σ_x	[kp/cm ²]	σ infolge Wölbkrafttorsion
σ_{II}	[kp/cm ²]	σ infolge Profilverformung
τ	[kp/cm ²]	Schubspannung
τ_v, τ_B	[kp/cm ²]	St.Venant'sche bzw. Bredt'sche Schubspannung bei reiner Torsion

φ	[1]	Drehwinkel (infolge Wölbkrafttorsion)
φ_{II}	[1]	zusätzliche Verdrehung aus Profilverformung infolge Schubdeformation
$\varphi_1, \overset{\circ}{\varphi}_1, \varphi_2, \overset{\circ}{\varphi}_2$	[1]	Funktion von λ_1 und λ_2
Φ_s	[cm ⁴]	$\oint S_r \frac{ds}{t} / \oint \frac{ds}{t}$
Φ_{I}	[cm ⁴]	$\int_{\text{I}} S_r r_t ds / \oint r_t ds$
Φ_{II}	[cm ⁴]	$\int_{\text{II}} S_{\text{II}} r_t ds / \oint r_t ds$
Ψ_{I}	[cm ²]	$2F_{\text{B}} / \oint \frac{ds}{t}$
Ψ_{II}	[cm ²]	$a \cdot b / 4 (1 + \beta)$
ω_{I}	[cm ²]	Einheitsverwölbung der Wölbkrafttorsion
ω_{II}	[cm ²]	Einheitsverwölbung der Profilverformung
$()'$	[1/cm]	Ableitung nach $x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$
\oint, \sum_{K}		Integral bzw. Summe über den geschlossenen Kasten
\int, \sum_{F}		Integral bzw. Summe über die gesamte Querschnittsfläche

1. Einleitung

Torsionsbeanspruchte Träger werden vielfach mit einem geschlossenen Querschnitt (Kastenquerschnitt) ausgeführt. Technische, wirtschaftliche oder ästhetische Gesichtspunkte erfordern demgegenüber aber häufig eine Ausführung mit noch zusätzlich offenen Profilteilen. Diese Tragwerke werden bisher entweder nach der Wölbkrafttorsion oder nach der Faltwerkstheorie berechnet, je nachdem, ob der Querschnitt durch entsprechend dicht angeordnete Querschotte in seiner Form erhalten bleibt oder sich verformen kann.

Die klassische Theorie der Wölbkrafttorsion [1] betrachtet Träger, bei denen die aus den "primären" Schubspannungen der reinen Torsion herrührenden Verwölbungen (Verformungen in Stablängsachse) behindert werden. Dies bedeutet, daß Normalspannungen entstehen. Es wird vorausgesetzt, daß der Querschnitt in seiner Form erhalten bleibt und daß die Verformungen aus den "sekundären" Schubspannungen vernachlässigt werden, d.h. aus den Schubspannungen, die mit den sich in Stablängsrichtung ändernden Wölbnormalspannungen im Gleichgewicht stehen.

Die letztere Einschränkung wurde für offene Querschnitte von Heilig [3] aufgehoben, wobei sich zeigte, daß deren Einfluß bei dünnwandigen, offenen Profilen von nur geringer Bedeutung ist. Dagegen ist bei geschlossenen Querschnitten der Einfluß aus der Verformung durch die sekundären Schubspannungen bei der Wölbkraftberechnung zu berücksichtigen, wie Heilig [4], Benscoter [5], Umanskij und Dshanelidze - Panovko (in [6]) gezeigt haben.

Der Einfluß der Profilverformung wird wesentlich, wenn keine oder nur wenige Queraussteifungen vorhanden sind, was aus technischen und wirtschaftlichen Gründen oft nötig ist.

Bei der Faltwerkstheorie wird ein nicht ausgesteifter Querschnitt betrachtet. Die Profilverformung bewirkt Durchbiegungen der ein-

zeln Querschnittskanten und dadurch Normalspannungen. Auch bei der Faltwerkstheorie lassen sich vereinfachende Annahmen treffen, die einerseits zwar den Umfang, andererseits aber auch die Genauigkeit und damit den Bereich der Anwendbarkeit dieser Berechnungsmethode vor allem auf Torsionsprobleme einschränken.

So geht die Faltwerkstheorie im allgemeinen vom "Gelenkwerk" aus. Da dieses mit der Wirklichkeit nur bei entsprechenden Querschnitts-abmessungen übereinstimmt, wird durch die Annahme von biegesteifen Kanten eine wesentliche Verbesserung erzielt. Das Berechnungsverfahren für Faltwerke nach [7] beruht auf der Kraftgrößenmethode. Demgegenüber verwendet W. S. Wlassow [8] eine Art Formänderungsgrößenmethode und berücksichtigt dabei auch die im allgemeinen vernachlässigten Schubverformungen. Diese Methode erweiterte Lacher [9] für Träger mit in regelmäßigen Abständen angeordneten Schotten, allerdings nur für Querbelastung. An einem einfach symmetrischen geschlossen - offenen Querschnitt zeigt er den Einfluß von Querschotten auf die Spannungen und Verformungen unter symmetrischer Gleichstreckenlast.

Dabrowski behandelt in [10] ebenfalls Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Querschnitt unter Torsionsbelastung als Faltwerk. Aber erst in [11] berücksichtigt er auch die Schubverformungen, womit eine Gegenüberstellung mit der Wölbkrafttorsion sinnvoll wird. Allerdings behandelt er nur geschlossene Kastenquerschnitte ohne auskragende Konsolen.

In dieser Arbeit sollen nun verformbare biegesteife Rechteckkastenprofile mit auskragenden Gurten untersucht werden. Zur Lösung dieser Aufgabe wird ein ähnlicher Weg wie in [11] beschritten. Zunächst wird der starre Querschnitt betrachtet, dem die volle Torsionsbelastung zugewiesen wird. Die dabei entstehenden Normal- und Schubspannungen werden nach der verfeinerten Theorie der Wölbkrafttorsion ermittelt. Sodann wird die Verformbarkeit des Querschnitts wiederhergestellt. Auf das Faltwerk wirken somit nur noch die profilverformenden Kräfte, die sich im Querschnitt das Gleichgewicht halten. Die Faltwerksberechnung hat also im Rahmen

dieser Arbeit nur noch diesen profilverformenden Lastfall zu erfassen.

Die sich längs des Trägers ändernden Schubspannungen aus Wölbkrafttorsion wirken nach Wiederherstellung der Verformbarkeit des Querschnitts profilverformend, d.h. belastend auf das Faltwerk. Zur Ermittlung dieser profilverformenden Wirkung der Wölbkrafttorsion ist eine im deutschen Schrifttum nicht übliche Aufteilung des Torsionsschubflusses bei Querschnitten mit einem geschlossenen Teil erforderlich. Es wird deshalb einleitend eine kurze Darstellung der Theorie der Wölbkrafttorsion gegeben, wobei vor allem dieser Unterschied gezeigt werden wird.

Es werden am Beispiel des Einfeldträgers mit Endquerschotten, belastet durch ein Einzeltorsionsmoment in Feldmitte, folgende zwei für die Praxis wichtige Fälle betrachtet:

- I. Kein zusätzliches Schott über die ganze Länge des Stabes.
- II. Nur ein zusätzliches starres Schott in Feldmitte (Lastquerschnitt).

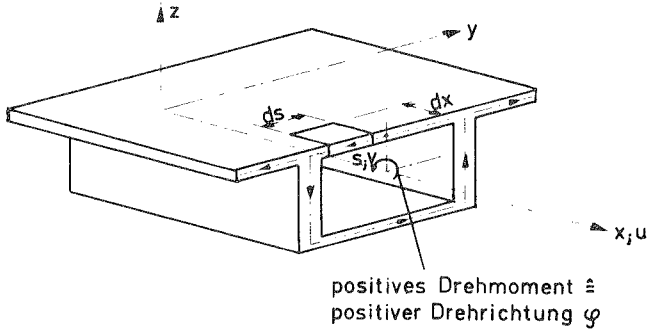
Die Beschränkung auf diesen Lastfall rechtfertigt sich aus der Tatsache, daß die Normalspannungen infolge Torsion meistens die Bedeutung von Nebenspannungen gegenüber den Biegespannungen haben und deshalb dieser für die Torsion ungünstigste Fall für die Beurteilung bei der Dimensionierung ausreicht.

Den theoretischen Ergebnissen werden experimentell ermittelte Werte gegenübergestellt. Dabei wurden die Querschnitte so gewählt, daß sie den im Stahlbeton- und Spannbetonbau üblichen entsprechen.

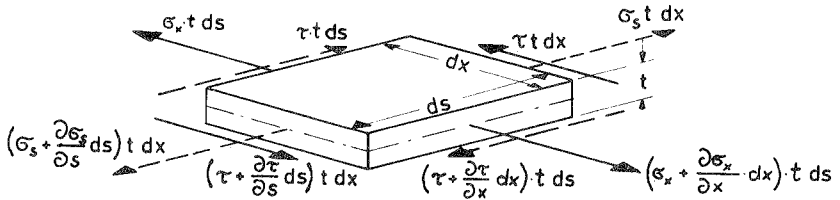
2. Koordinatensystem und Vorzeichenkonvention

Für die Stablängsrichtung wird die x-Achse verwendet. Aus der Forderung, daß das x-y-z - Koordinatensystem ein Rechtssystem ist, entsteht die in Bild 2.1 festgelegte Zuordnung. Die positive Umfahungskordinate s verläuft im geschlossenen Kasten entgegen dem Uhrzeigersinn, in den offenen Teilen verläuft sie vom Kasten nach außen. Es wird immer das positive Schnittufer betrachtet.

Spannungskomponenten sind positiv, wenn sie in Flächen mit positiver Flächennormalen in eine positive Achsrichtung zeigen.



a.) Koordinatensystem



b.) positive Schnittkräfte am Element

Bild 2.1 Koordinatensystem und Vorzeichenkonvention

Der torsionsbeanspruchte Stab wird entsprechend [2] dargestellt (siehe Bild 2.2).

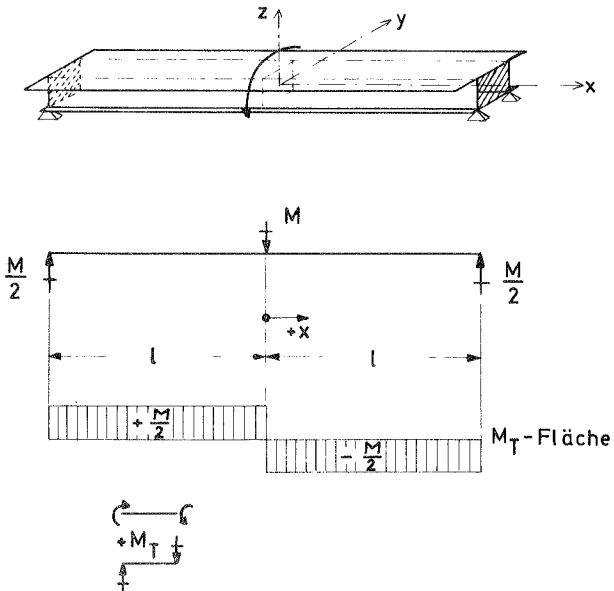


Bild 2.2 Systemskizze des behandelten Lastfalls

3. Reine Torsion

3.1 Schubspannungsverlauf

Reine Torsion liegt dann vor, wenn ein Balken mit konstantem Querschnitt, dessen Enden sich frei verwölben können, durch zwei Endtorsionsmomente beansprucht wird. Im Rahmen dieser Arbeit soll ein geschlossen - offener Querschnitt betrachtet werden, wobei die einzelnen Querschnittsscheiben jeweils konstante Dicke haben.

Der Schubspannungsverlauf infolge reiner Torsion kann besonders anschaulich mit Hilfe des Prandtl'schen Seifenhautgleichnisses gezeigt werden (s. z.B. [12]). Die Neigung der unter Innendruck ($\hat{=}$ Torsionsbeanspruchung) stehenden Membran entspricht der Schubspannung. Bei Hohlquerschnitten gilt, daß die innere Begrenzung eine Niveaulinie der Membran darstellt und daß der Hohlraum durch eine starre, zur Querschnittsebene parallelen Fläche überspannt ist.

Für dünnwandige Kastenquerschnitte, wie sie im Stahlbau üblich sind, wird im allgemeinen mit der durchschnittlichen Schubspannung gerechnet, die proportional der Neigung der Membran über der Mittellinie des Scheibenelementes ist. Dies bedeutet einen über die Scheibendicke konstanten Schubfluß: $T = \tau t = \text{const.}$

Bei nicht mehr "dünnwandigen" Querschnitten wird sich aber die Membran unter dem gleichmäßigen Druck dehnen, so daß eine unterschiedliche Neigung, also eine andere Schubspannung im Innen - bzw. Außenrand entsteht. Diese zusätzliche über die Scheibendicke linear veränderliche Schubspannung ergibt sich aus der Überlagerung der Eigentorsionssteifigkeit der einzelnen Querschnittsscheiben mit der Torsionssteifigkeit des geschlossenen Teils. Diese Tatsache ist weniger von Bedeutung bei der theoretischen Behandlung der in der Einleitung erläuterten Aufgabenstellung als vielmehr für die nachfolgende experimentelle Span-

nungsanalyse. Sie zwingt zum beidseitigen Messen der Schubspannungen, um aus dem Mittelwert den konstanten Schubfluß zu erhalten.

Im weiteren wird nun zur Vereinfachung der über die Wanddicke konstante Schubfluß als Bredt'scher (Index B) und der über die Wanddicke veränderliche Schubfluß als St.Venant'scher Schubfluß (Index V) bezeichnet. Ein äußeres Torsionsmoment verteilt sich entsprechend dem Verhältnis von St.Venant'scher zu Bredt'scher Torsionssteifigkeit über den Querschnitt [13].

$$\begin{aligned} M_T &= M_B + M_V \\ &= M_T \frac{J_B}{J_T} + M_T \frac{J_V}{J_T} \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

mit M_T = Torsionsschnittmoment,
 J_B = Bredt'sches
 J_V = St.Venant'sches

 $J_T = J_B + J_V =$ gesamtes } Torsionsträgheitsmoment .

Die Anteile des Torsionsträgheitsmomentes ergeben sich in bekannter Weise zu

$$J_B = \frac{4 F_B^2}{\sum_k \frac{s_i}{t_i}} \quad , \quad (3.1-2)$$

$$J_V = \frac{2}{3} \sum_F s_i t_i^3 \quad (3.1-3)$$

mit F_B = der von der Kontur, d.h. der Mittellinie des geschlossenen Querschnittsteils umschlossenen Fläche
= Bredt'sche Fläche = Höhe x Breite beim Rechteckkasten,

s_i, t_i = den Abmessungen der einzelnen Querschnittsscheiben,

ϑ = einem Formbeiwert, der im allgemeinen gleich Eins gesetzt werden kann (s. z.B. [12]),

\sum_k = Summe nur über den geschlossenen Kasten und

\sum_F = Summe über den gesamten Querschnitt.

Der Bredt'sche Anteil ergibt im Bereich des Kastens einen konstanten Schubfluß, der auf die Scheibendicke bezogen folgende Schubspannungen liefert:

$$\begin{aligned} \tau_B &= M_B \frac{1}{2F_B t} = \frac{M_T}{J_T} \frac{J_B}{2F_B t} \\ &= \frac{M_T}{J_T} \frac{\psi_I}{t} \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

mit
$$\psi_I = \frac{J_B}{2F_B} = \frac{2F_B}{\sum_k \frac{s_i}{t_i}} \quad (3.1-5)$$

Der St.Venant'sche Anteil liefert über die Dicke der einzelnen Querschnittsscheiben linear veränderliche Schubspannungen, die an den Oberflächen folgenden Wert annehmen:

$$\tau_v = \pm M_v \cdot \frac{t}{J_v} = \pm \frac{M_T}{J_T} t \quad (3.1-6)$$

Die gesamte Schubspannung an den Oberflächen der Wände ist demnach

$$\tau = \frac{M_T}{J_T} \left(\frac{\psi_I}{t} \pm t \right) \quad (3.1-7)$$

wobei für die offenen Teile ψ_{T} gleich Null zu setzen ist. Bei (3.1-7) kann gegebenenfalls für die im Spannbetonbau üblichen Querschnitte $J_{\text{T}} \approx J_{\text{B}}$ gesetzt werden, wogegen bei der örtlichen Spannungsermittlung die St.Venant'sche Schubspannung, vor allem wenn einzelne Teile des Querschnitts dicker sind als die übrigen, nicht mehr vernachlässigt werden kann, wie folgendes Beispiel zeigt (s. Bild 3.1).

Es wird ein geschlossener Kasten mit $\frac{a}{b} = 3$ und $t_{\text{v}} = \frac{b}{3}$ und $t_{\text{o}} = t_{\text{u}} = \frac{b}{10}$ betrachtet.

Mit den Querschnittskonstanten

$$2F_{\text{B}} = 2 \cdot a \cdot b = 6 \cdot b^2 \quad \text{und} \quad \psi_{\text{T}} = \frac{6 \cdot b^2}{2 \cdot (30+3)} = \frac{b^2}{11}$$

ergibt sich für die $\frac{J_{\text{T}}}{M_{\text{T}}}$ fachen Schubspannungen

$$\text{im Steg:} \quad \tau \frac{J_{\text{T}}}{M_{\text{T}}} = \frac{3b^2}{11b} \pm \frac{b}{3} = \frac{b}{110} (30 \pm 36,7),$$

Bredt St.Venant

$$\text{in den Platten:} \quad \tau \frac{J_{\text{T}}}{M_{\text{T}}} = \frac{10b^2}{11b} \pm \frac{b}{10} = \frac{b}{110} (100 \pm 11),$$

Bredt St.Venant

bzw. für das gesamte Torsionsträgheitsmoment

$$J_{\text{T}} = \frac{36b^4}{2(30+3)} + \frac{2}{3} \left(\frac{3b^4}{10^3} + \frac{b^4}{3^3} \right) = 0,571 b^4 (0,95 + 0,05).$$

Bredt St.Venant

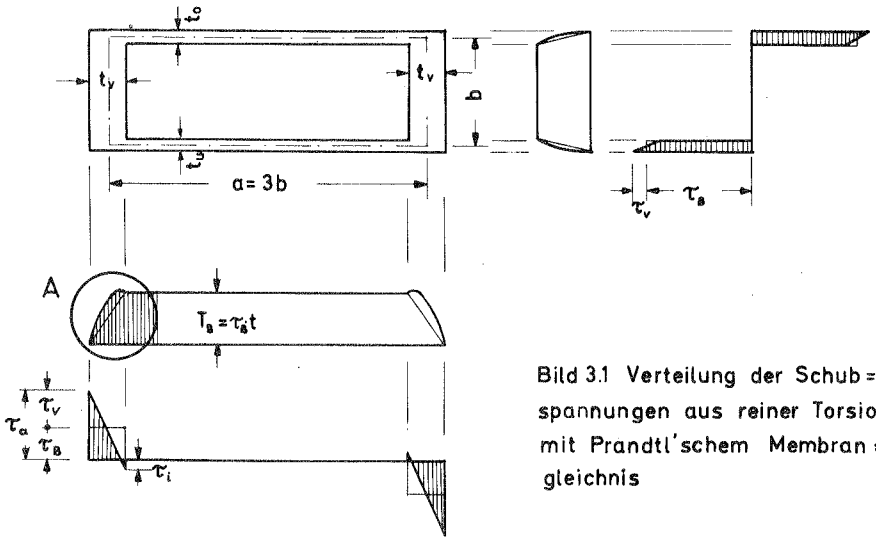


Bild 3.1 Verteilung der Schubspannungen aus reiner Torsion mit Prandtl'schem Membran = gleichnis

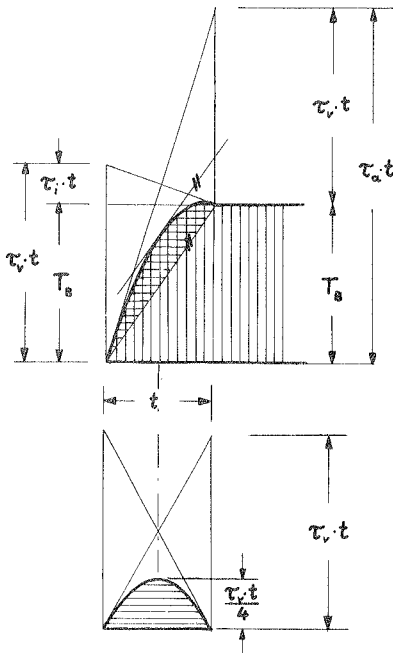


Bild 3.2 Detail A von Bild 3.1. Überlagerung des Bredt'schen und St.-Venant'schen Schubflusses

Für einen Kasten mit konstanter Dicke gilt, wie sich leicht zeigen lässt [12], $\tau_v/\tau_B = F/F_B$
mit $F = t \sum_{\kappa} S_{\kappa} =$ gesamte Querschnittsfläche.

Es sei noch bemerkt, daß die Verbindungslinie der τ zweier gegenüberliegender Seiten nur dann durch τ_a bzw. τ_1 geht, wenn der geschlossene Querschnitt ein Quadrat oder ein Kreisring mit konstanter Wandstärke ist (Bild 3.3). Beim Rechteck mit konstanter Wandstärke stimmt das schon nicht mehr.

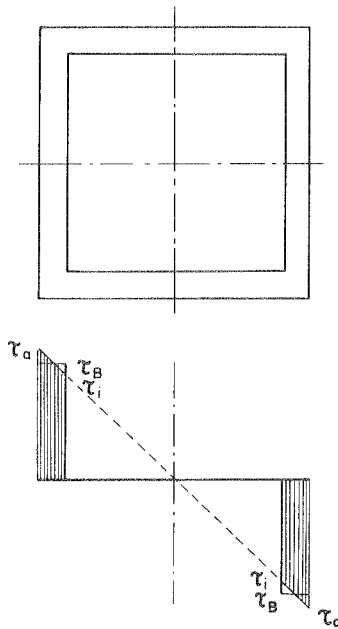


Bild 3.3 Schubspannungen aus reiner Torsion bei quadratischen Hohlkasten mit konstanter Wandstärke

3.2 Verformungen

Die Gleitung in der Profilmittellinie ist im offenen Teil gleich Null, im geschlossenen

$$\bar{\gamma} = \frac{\tau_B}{G} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad (3.2-1)$$

wobei $\bar{\gamma}$ = Gleitung ,

G = Schubmodul ,

u = Axialverschiebung (Bild 2.1) ,

v = Tangentialverschiebung (Bild 2.1) ist .

v ergibt sich für den geschlossenen Teil zu

$$v = v(x, s) = r_t(s) \varphi(x) \quad (3.2-2)$$

mit r_t = Abstand der Drehachse von der Tangente an den betrachteten Punkt (s. Bild 3.4) und ,

φ = Drehwinkel .

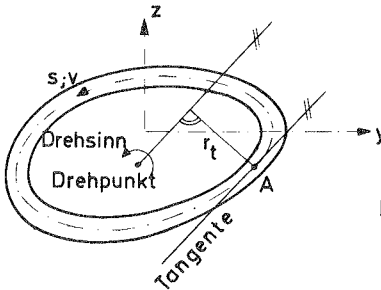


Bild 3.4 Allgemeiner einzelliger Querschnitt

Aus (3.2-1) folgt

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau_B}{G} - r_t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.2-3)$$

bzw. nach Integration entlang s

$$u(x,s) = u_0 + \int_0^s \frac{\tau_B}{G} ds - \varphi' \int_0^s r_t ds . \quad (3.2-4)$$

Wird über den geschlossenen Querschnitt integriert, so ergibt sich, da dann wieder $u = u_0$ sein muß,

$$\oint \frac{\tau_B}{G} ds = \varphi' \oint r_t ds .$$

Mit (3.1-2) und (3.1-4) und unter Berücksichtigung von $\oint r_t ds = 2F_B$ erhält man für die Verwindung

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\oint \frac{\tau_B}{G} ds}{\oint r_t ds} = \frac{M_B}{G} \frac{\oint \frac{ds}{t}}{(2F_B)^2} \\ &= \frac{M_B}{GJ_B} = \frac{M_T}{GJ_T} . \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Nun wird die Einheitsverwölbung $\omega(s)$ definiert als die negative Verwölbung u pro Einheit der Funktion $\mathcal{A}(x)$, die die Abhängigkeit der Verwölbung von der Längskoordinate x beschreibt: $\omega = -\frac{u}{\mathcal{A}}$ bzw.

$$u = -\mathcal{A}\omega . \quad (3.2-6)$$

Bei reiner Torsion ist \mathcal{A} gleich der Verwindung φ' :

$$u = -\varphi'\omega . \quad (3.2-7)$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\varphi' \frac{\partial \omega}{\partial s} . \quad (3.2-8)$$

Nach (3.2-3) ist

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\varphi' \left(r_t - \frac{\tau_B}{G} \right) .$$

Für u folgt daraus nach Integration

$$u = u_0 - \mathcal{G}' \int_0^s \left(r_t - \frac{\tau_B}{\mathcal{G}'G} \right) ds . \quad (3.2-9)$$

Da nach einmaligem Umfahren des geschlossenen Teils u seinen Ausgangswert wieder erreichen muß, d.h. $u = u_0$ wird, gilt

$$\oint r_t ds = \frac{\tau_B t}{\mathcal{G}'G} \oint \frac{ds}{t}$$

und damit

$$\frac{\tau_B t}{\mathcal{G}'G} = \frac{\oint r_t ds}{\oint \frac{ds}{t}} = \psi_I . \quad (\text{vgl. (3.1-5)})$$

Somit ergibt sich aus (3.2-7) und (3.2-9)

$$\omega = \omega_0 + \int_0^s \left(r_t - \frac{\psi_I}{t} \right) ds , \quad (3.2-10)$$

bzw.

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = r_t - \frac{\psi_I}{t} . \quad (3.2-11)$$

Für offene Teile des Querschnitts ist wegen $\tau_B = 0$ auch $\psi_I = 0$ zu setzen.

4. Wölbkrafttorsion (starrer Querschnitt)

4.1 Allgemeines

Da im Rahmen dieser Arbeit bei der Untersuchung der Profilverformung torsionsbeanspruchter Kastenträger die Wölbkrafttorsion mitberücksichtigt werden soll, wird in diesem Abschnitt eine kurze Darstellung der Theorie der Wölbkrafttorsion gegeben. Dabei werden, soweit möglich, die Größen mit I indiziert, die beim Falwerk entsprechend auftreten und dort mit II bezeichnet werden.

Die in Bild 2.1 gestrichelt eingetragenen σ_s -Spannungen werden entsprechend der Stabtheorie vernachlässigt. Für die Gleichgewichtsbilanz in s-Richtung bleiben also noch die in x-Richtung sich ändernden Schubkräfte übrig. Da die dem Schnittmoment das Gleichgewicht haltenden Bredt'schen Schubspannungen τ_M bei dem hier untersuchten Lastfall nicht von x abhängig sind, kann für $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ der zusätzliche Anteil aus τ_I infolge Wölbbehinderung gesetzt werden:

$$t \frac{\partial \tau}{\partial x} dx ds \equiv t \frac{\partial \tau_I}{\partial x} dx ds = \frac{\partial T_I}{\partial x} dx ds .$$

Diese Kräfte müssen von dem als starr angenommenen Kastenquerschnitt aufgenommen werden. Wird der Querschnitt durch Schotte ausgesteift, werden diese Kräfte unmittelbar in die als starr angenommenen Schotte eingeleitet. Die in der Wand i wirkende Schottkraft $P_{I,i}$ ergibt sich zu

$$P_{I,i} = dx \int \frac{\partial T_I}{\partial x} ds . \quad (4.2-1)$$

Diese Kräfte der Einzelscheiben stehen in sich am Gesamtquerschnitt im Gleichgewicht, wie noch gezeigt werden wird. Ist das Kastenprofil biegeweich und in einzelnen Abschnitten oder über die ganze Länge nicht durch Querschotte ausgesteift, so wirken diese Kräfte als Belastung auf den in diesem Bereich als Falwerk wirkenden Querschnitt. Dies wird in Abschnitt 6 behandelt.

4.2 Verteilung der Normal- und Schubspannungen über den Querschnitt

Bei der Wölbkrafttorsion wird angenommen, daß sich die Normalspannungen und die Verwölbungen ebenso über den Querschnitt verändern wie die Verwölbungen bei reiner Torsion. Es gilt also (3.2-6) mit

$$u(x, s) = - \vartheta(x) \omega_I(s) \quad . \quad (4.2-2)$$

Hierbei und im folgenden ist ω_I die auf den Schubmittelpunkt bezogene Einheitsverwölbung, d.h., es wird im zweimal orthogonalisierten Hauptsystem gearbeitet (vgl. [1]).

Die Wölbnormalspannungen ergeben sich aus der bekannten Beziehung

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot E$$

mit dem Elastizitätsmodul E
zu

$$\sigma_I = - E \vartheta' \omega_I \quad . \quad (4.2-3)$$

Mit dem Wölbträgheitsmoment der Wölbkrafttorsion

$$J_I = \int_F \omega_I^2 dF$$

ergibt sich

$$B_I = \int_F \sigma_I \omega_I dF = - E J_I \vartheta' \quad . \quad (4.2-4)$$

B_I ist das Wölbmoment aus Wölbkrafttorsion (= Wölbverdrehmomentenintegral nach [1]). Im Unterschied zu einem Biegemoment, das sich als Kräftepaar deuten läßt, stellt das Bimoment ein Momentenpaar dar. Dies ist eine Gleichgewichtsgruppe (Wölbgruppe) der inneren Kräfte.

Für die Normalspannungen lässt sich mit (4.2-3) und (4.2-4) auch schreiben

$$\sigma_x = f_x \omega_x \quad (4.2-5)$$

mit
$$f_x = \frac{B_x}{J_x} .$$

Diesen Längsspannungen sind aus Gleichgewichtsgründen Schubspannungen zugeordnet (Bild 2.1):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial s} = 0$$

bzw.
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} t + \frac{\partial T_x}{\partial s} = 0 \quad (4.2-6)$$

mit $T_x = \tau_x t =$ Schubfluß aus Wölbkrafttorsion .

Durch Integration ergibt sich

$$T_x = T_{x,0} - \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} t ds = T_{x,0} - \frac{B_x}{J_x} S_x \quad (4.2-7)$$

mit
$$S_x = \int \omega_x dF .$$

S_x ist das statische Wölbmoment der Wölbkrafttorsion. Da, wie in Abschnitt 4.1 erläutert, der dem Schnittmoment zugeordnete Schubfluß $T_M = \tau_M \cdot t$ schon abgespalten ist, darf aus T_x kein Drehmoment mehr resultieren. $T_{x,0}$ ergibt sich somit aus der Bedingung

$$\int_F T_x \tau_t ds = 0 . \quad (4.2-8)$$

Aus (4.2-7) ergibt sich

$$T_{I,0} \oint r_t ds = \frac{B'_I}{J_I} \int S_I r_t ds$$

und damit

$$T_{I,0} = \frac{B'_I}{J_I} \Phi_I \quad (4.2-9)$$

mit

$$\Phi_I = \frac{\int_F S_I r_t ds}{\oint r_t ds} \quad (4.2-10)$$

(4.2-9) in (4.2-7) eingesetzt ergibt

$$T_I = - \frac{B'_I}{J_I} (S_I - \Phi_I) \quad (4.2-11)$$

Der gesamte Schubfluß setzt sich nun aus T_I und dem Schubfluß T_M aus dem Schnittmoment M_T , das hier ganz der Bredt'schen Torsionssteifigkeit zugewiesen wird ($J_V = 0$), zusammen (vgl. 3.1-4):

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_I \\ &= \frac{M_T}{2F_B} - \frac{B'_I}{J_I} (S_I - \Phi_I) \end{aligned} \quad (4.2-12)$$

In (4.2-12) ist also der gesamte Schubfluß T aufgeteilt in T_M (mit $\oint T_M r_t ds = M_T$) und T_I (mit $\int_F T_I r_t ds = 0$). Diese Aufteilung des Schubflusses ist nur bei Querschnitten mit einem geschlossenen Anteil möglich. Da T_M im geschlossenen Bereich konstant und in den offenen Teilen Null ist, kann für $\frac{\partial T}{\partial s}$ in (4.2-1) $\frac{\partial T_I}{\partial s}$ gesetzt werden.

Die den Querschnitt in seiner Ebene beanspruchenden Kräfte lauten also

$$P_I = dx \int \frac{\partial T_I}{\partial x} ds. \quad (4.2-1a)$$

Wird die Querschnittsform durch entsprechend dicht angeordnete Schotte gewährleistet, kann mit $dx = \Delta x =$ Querschottabstand die Beanspruchung eines Schottes berechnet werden. Mit (4.2-11) ergibt sich

$$P_I = -\Delta x \frac{B_x''}{J_I} \int (S_I - \phi_I) ds. \quad (4.2-13)$$

Für einen Rechteckkasten sind in Bild 4.1 die Kraftrichtungen für die einzelnen Wände eingetragen. Wird der Träger durch ein Einzeltorsionsmoment in Feldmitte belastet, so ergibt sich die Querschottbeanspruchung entsprechend Bild 4.4.

Nun läßt sich das Schnittmoment M_T aber auch aufteilen, analog zur klassischen Theorie für offene Profile, in ein primäres Schnittmoment M_P und ein sekundäres Schnittmoment M_S , wobei sich hier M_P aus dem Bredt'schen Anteil $M_{P,B}$ und dem St. Venant'schen Anteil $M_{P,V}$ zusammensetzt:

$$M_T = M_P + M_S = (M_{PB} + M_{PV}) + M_S. \quad (4.2-14)$$

Entsprechend wird der über die Scheibendicke konstante Schubfluß T aufgeteilt:

$$T = T_P + T_S.$$

Die Anteile des Schnittmomentes ergeben sich durch Multiplikation der Schubflußanteile mit $r_t ds$ und Integration über s :

$$\oint T_P r_t ds = M_{PB},$$

$$\int_F T_S r_t ds = M_S \equiv B_I'.$$

Wird nun $M_{P,V}$ vernachlässigt ($J_V = 0$), läßt sich mit

$$M_T = M_{P,B} + M_S \quad \text{und} \quad B'_I \equiv M_S$$

aus (4.2-12) für den gesamten Schubfluß schreiben:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M_{P,B}}{2F_B} + \frac{M_S}{2F_B} - \frac{M_S}{J_I} (S_I - \phi_I) \\ &= \frac{M_{P,B}}{2F_B} - \frac{M_S}{J_I} (S_I - \phi_S) \end{aligned} \quad (4.2-15)$$

mit
$$\phi_S = \phi_I + \frac{J_I}{2F_B} . \quad (4.2-16)$$

Für (4.2-15) kann, wenn man (3.1-1) auf M_P anwendet und (3.1-5) berücksichtigt, geschrieben werden

$$T = \frac{M_P}{J_T} \psi_I - \frac{M_S}{J_I} (S_I - \phi_S) . \quad (4.2-15a)$$

In [1] wurde ϕ_S direkt aus der Beziehung

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial x} t - \frac{\partial T_S}{\partial s} = 0$$

abgeleitet, die identisch ist mit (4.2-6), da sich T_I und T_S nur durch eine additive Konstante unterscheidet. Für T_S ergibt sich entsprechend (4.2-7):

$$T_S = T_{S,0} - \frac{B'_I}{J_I} S_I , \quad (4.2-17)$$

woraus sich $T_{S,0}$ aus der Kontinuitätsbedingung

$$\oint \frac{T_S}{t} ds = \oint \tau_s ds = 0$$

durch

$$T_{S,0} \oint \frac{ds}{t} = \frac{B'_I}{J_I} \oint S_I \frac{ds}{t}$$

zu

$$T_{S_0} = \frac{B'_x}{J_x} \Phi_S$$

mit

$$\Phi_S = \frac{\oint S_x \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (4.2-16a)$$

ergibt.

Es lässt sich nachweisen, daß (4.2-16) unter Berücksichtigung von (4.2.10) mit (4.2-16a) übereinstimmt.

Für T_S lässt sich nun zusammenfassen

$$T_S = - \frac{B'_x}{J_x} (S_I - \Phi_S). \quad (4.2-18)$$

Für die über die Dicke der Querschnittsscheiben konstant verteilten Schubspannungen ergibt sich aus (4.2-12)

$$\tau = \frac{T}{t} = \frac{M_T}{2F_B t} - \frac{B'_x}{J_x t} (S_I - \Phi_x), \quad (4.2-19)$$

wobei hier die über die Wanddicke veränderlichen Schubspannungen nicht erfasst werden können. Aus (4.2-15a) lässt sich dagegen mit der entsprechend angewandten Gleichung (3.1-7) für die Schubspannungen an den Oberflächen der Querschnittsscheiben schreiben:

$$\tau_{\alpha} = \frac{M_P}{J_T} \left(\frac{\psi_x}{t} \pm t \right) - \frac{M_S}{J_x t} (S_I - \Phi_S), \quad (4.2-20)$$

worin $M_S \equiv B'_x$ ist.

Diese Gleichung kann nun auch auf rein offene Querschnitte angewendet werden mit $\Phi_S = \Psi_I = 0$ und $J_T = J_V$.

In Bild 4.1 sind für einen Rechteckkasten mit konstanter Wanddicke die Normalspannungsverteilung, der Verlauf des über die einzelnen Scheibendicken konstanten Schubflusses sowie die die Schotte beanspruchenden Kräfte dargestellt.

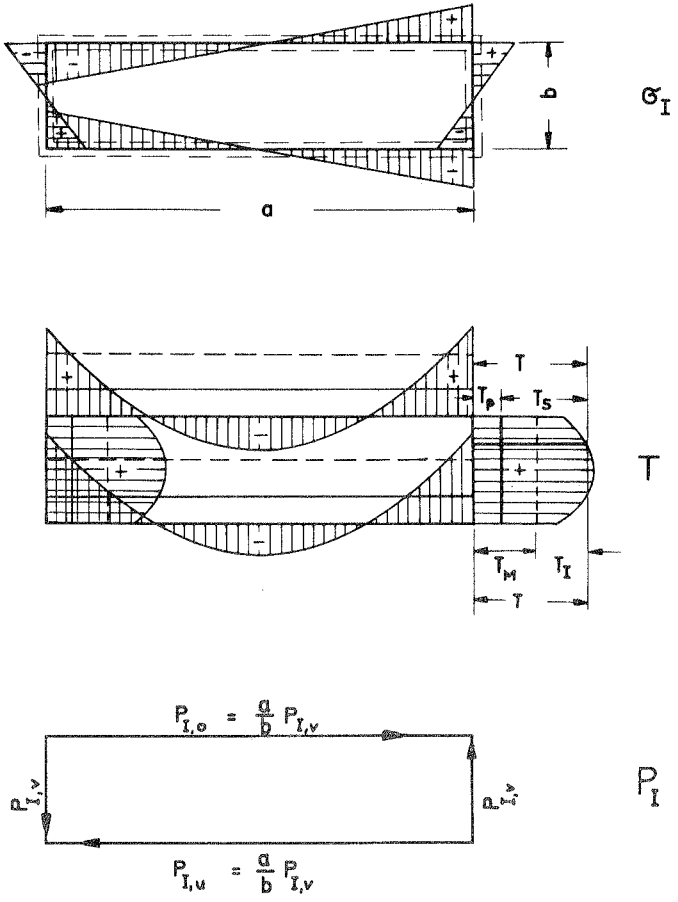


Bild 4.1 Rechteckkasten ($t = \text{const.}$) mit Verlauf der Normalspannungen, des Schubflusses und der profilverformenden Kräfte bei positiven Schnittgrößen aus Wölbkrafttorsion

4.3 Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Im Gegensatz zur klassischen Theorie der Wölbkrafttorsion soll nun die Verformung aus den sekundären Schubspannungen $\frac{T_S}{t}$ mitberücksichtigt werden. Dabei stimmt die Wölbfunktion ϑ nicht mehr mit der Änderung des Drehwinkels überein, d.h. $\vartheta \neq \varphi'$. Dies wird im folgenden gezeigt.

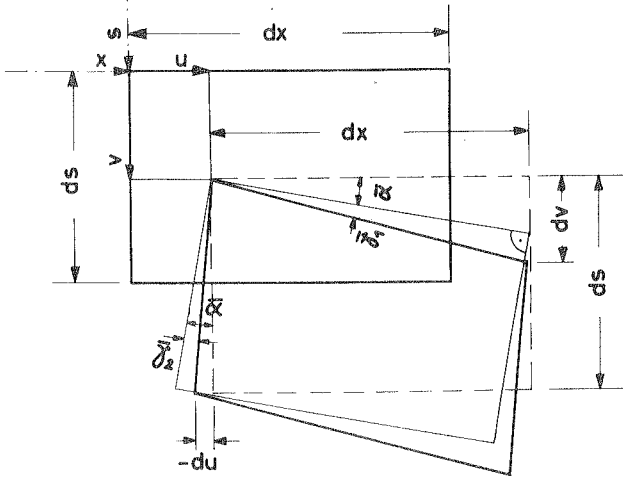
Aus Bild 4.2 ergibt sich für den offenen Bereich (in Analogie zur Schubverformung des Biegebalkens)

Biegebalken	Wölbkrafttorsion
$dv = (\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1) dx$	$d\vartheta = (\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1) dx = r_t d\varphi$
$\frac{dv}{dx} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1 = v'$	$\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1 = r_t \varphi'$
$-du = (\bar{\alpha} - \bar{\gamma}_2) ds$	$-d\vartheta = (\bar{\alpha} - \bar{\gamma}_2) ds$
$\frac{du}{ds} = -\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_2$	$\frac{d\vartheta}{ds} = -\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_2$
$\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{ds}$	$\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 = \frac{d\vartheta}{ds} + r_t \cdot \varphi'$
$\frac{du}{ds} = -(v' - \frac{Q}{\nu_s G_s F})$	$\frac{d\vartheta}{ds} = -r_t \cdot (\varphi' - \frac{M_s}{\nu G J_T})$

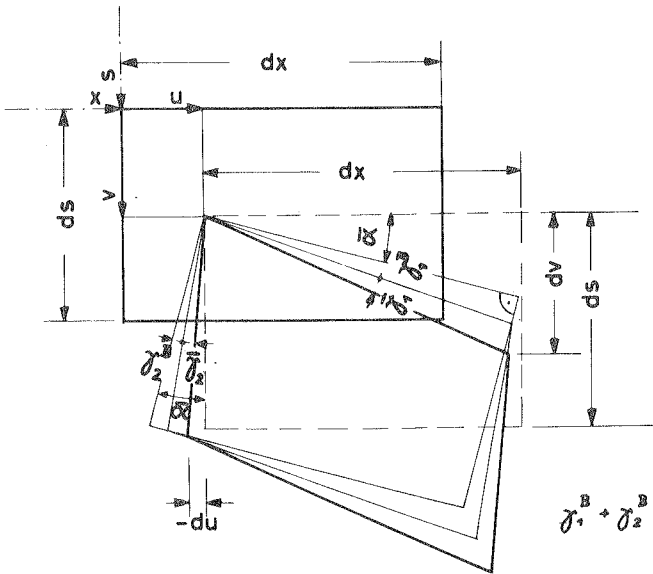
mit ν bzw. ν_s = Schubverteilungszahl.

Hierbei gelten folgende Analogien:

$$\begin{aligned}
 v' &\cong \varphi' \\
 \bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1 &\cong \frac{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}_1}{r_t} \\
 \bar{\gamma} &\cong \frac{\bar{\gamma}}{r_t} \\
 Q &\cong M_s \\
 \nu_s GF &\cong \nu G J_T \\
 \bar{\gamma}_s = \frac{Q}{\nu_s GF} &\cong \frac{\bar{\gamma}_s}{r_t} = \frac{M_s}{\nu G J_T}
 \end{aligned}$$



a. im offenen Bereich



b. im geschlossenen Bereich

Bild 4.2. Verschiebungen und Verformungen eines Elementes in einer Tangentialebene x-s

$$\text{Mit } \varphi' - \frac{M_s}{\nu G J_T} = \mathcal{L} \text{ als Wölbfunktion} \quad (4.3-1)$$

ergibt sich

$$u = - \mathcal{L} \int r_t ds = - \mathcal{L} \omega_x . \quad (4.3-2)$$

Wird ein Element des geschlossenen Querschnittsteils betrachtet, muß noch die Verzerrung des Elements aus der Bredt'schen Schubspannung mitberücksichtigt werden, wodurch sich

$$u = - \mathcal{L} \int \left(r_t - \frac{\psi_x}{t} \right) ds \quad (4.3-3)$$

ergibt, was sich aus Bild 4.3b ableiten lässt.

In der klassischen Theorie der Wölbkrafttorsion lautet nach [1] die Differentialgleichung

$$E J_x \mathcal{L}'' - G J_T \mathcal{L} = - M_T , \quad (4.3-4)$$

wobei $\mathcal{L} = \varphi'$ gesetzt wird.

Bei der Berücksichtigung der Verformungen aus den sekundären Schubspannungen lautet die Differentialgleichung mit den hier verwendeten Bezeichnungen folgendermaßen (siehe Anhang (A. 3.1)):

$$E J_x \mathcal{L}'' - \chi G J_T \mathcal{L} = - \chi M_T \quad (4.3-5)$$

mit χ als Schubverformungsfaktor der Wölbkrafttorsion. Dieser wurde bisher im Schrifttum auf verschiedene Art mit unterschiedlichem Ergebnis bestimmt (s. Anhang A).

Zwischen φ und \mathcal{L} findet sich folgende Beziehung (vgl. Anhang (A. 1.10) bzw. (A. 2.8)):

$$\varphi' = \chi \mathcal{L} + (1 - \chi) \frac{M_T}{G J_T} . \quad (4.3-6)$$

4.4 Lösung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.3-5) findet sich mehrfach im angegebenen Schrifttum (z.B. [3], [6]). Es sei deshalb nur kurz auf den hier betrachteten Lastfall, Einzeltorsionsmoment in Feldmitte (s. Bild 2.2), eingegangen.

(4.3-5) lässt sich umformen in

$$\vartheta'' - \lambda_I^2 \vartheta = -x \frac{M_T}{EJ_I} \quad (4.4-1)$$

mit

$$\lambda_I = \sqrt{x \frac{GJ_T}{EJ_I}} \quad (4.4-2)$$

Die Lösung aus dem homogenen und partikulären Anteil lautet

$$\vartheta = \bar{A}_1 \operatorname{Cosh} \lambda_I x + \bar{A}_2 \operatorname{Sinh} \lambda_I x - \frac{M_T}{GJ_T} (\operatorname{Cosh} \lambda_I x - 1) \quad (4.4-3)$$

Der Drehwinkel φ ergibt sich durch Integration aus (4.3-6) mit (4.4-3) zu

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{x}{\lambda_I} \left(\bar{A}_1 \operatorname{Sinh} \lambda_I x + \bar{A}_2 \operatorname{Cosh} \lambda_I x \right) + \bar{A}_3 \\ &\quad - \frac{x}{\lambda_I} \frac{M_T}{GJ_T} \operatorname{Sinh} \lambda_I x + x \frac{M_T}{GJ_T} x + (1-x) \frac{M_T}{GJ_T} x \\ &= \frac{x}{\lambda_I} \left(\bar{A}_1 \operatorname{Sinh} \lambda_I x + \bar{A}_2 \operatorname{Cosh} \lambda_I x \right) + \bar{A}_3 \\ &\quad + \frac{M_T}{GJ_T} \left(x - \frac{x}{\lambda_I} \operatorname{Sinh} \lambda_I x \right) \quad (4.4-4) \end{aligned}$$

Nun werden die beiden Gleichungen für ϑ und φ dimensionsgleich geschrieben:

$$G J_T \varphi = \frac{x}{\lambda_I l} (A_1 \sinh \lambda_I x + A_2 \cosh \lambda_I x) + A_3 + M_T l \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\lambda_I l} \sinh \lambda_I x \right),$$

$$G J_T \vartheta l = A_1 \cosh \lambda_I x + A_2 \sinh \lambda_I x - M_T l (\cosh \lambda_I x - 1).$$

Letztere nach x differenziert und in (4.2-2) eingesetzt ergibt für das Bimoment

$$\begin{aligned} B_I &= - E J_I \vartheta' = - \frac{E J_I}{G J_T l} G J_T \vartheta' l & (4.4-5) \\ &= - \frac{x}{\lambda_I l} (A_1 \sinh \lambda_I x + A_2 \cosh \lambda_I x - M_T l \sinh \lambda_I x). \end{aligned}$$

Für den hier betrachteten Lastfall lauten die Randbedingungen

- 1.) $x = 0$: $\vartheta = 0$ (Symmetrie!)
 - 2.) $x = l$: $B_I = 0$ (Membran!)
 - 3.) $x = l$: $\varphi = 0$ (Gabellagerung!)
- (4.4-6)

So folgt aus 1.) $A_1 = 0$,

$$\text{aus 2.) } 0 = - \frac{x}{\lambda_I l} (A_2 \cosh \lambda_I l - M_T l \sinh \lambda_I l),$$

$$A_2 = M_T l \frac{\sinh \lambda_I l}{\cosh \lambda_I l},$$

$$\text{aus 3.) } 0 = A_2 \frac{x}{\lambda_I l} \cosh \lambda_I l + A_3 + M_T l \left(1 - \frac{x}{\lambda_I l} \sinh \lambda_I l \right)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= -M_T l \left(\frac{x}{\lambda_I l} \sinh \lambda_I l + 1 - \frac{x}{\lambda_I l} \sinh \lambda_I l \right) \\ &= -M_T l. \end{aligned}$$

Für das Bimoment der Wölbkrafttorsion ergibt dies aus (4.4-5)

$$\begin{aligned} B_I &= - \frac{x}{\lambda_I l} M_T l \left(\frac{\sinh \lambda_I l \cosh \lambda_I x - \sinh \lambda_I x \cosh \lambda_I l}{\cosh \lambda_I l} \right) \\ &= - \frac{x}{\lambda_I} M_T \frac{\sinh \lambda_I (l-x)}{\cosh \lambda_I l}. \end{aligned}$$

Für den hier betrachteten Lastfall (s. Bild 2.2) ist

$$M_T = - \frac{M}{2}$$

und somit

$$B_x = x \frac{M}{2\lambda_x} \frac{\text{Sinh } \lambda_x (l-x)}{\text{Cosh } \lambda_x l} \quad (4.4-7)$$

bzw. $B_x' \equiv M_s = -x \frac{M}{2} \frac{\text{Cosh } \lambda_x (l-x)}{\text{Cosh } \lambda_x l}$ (4.4-8)

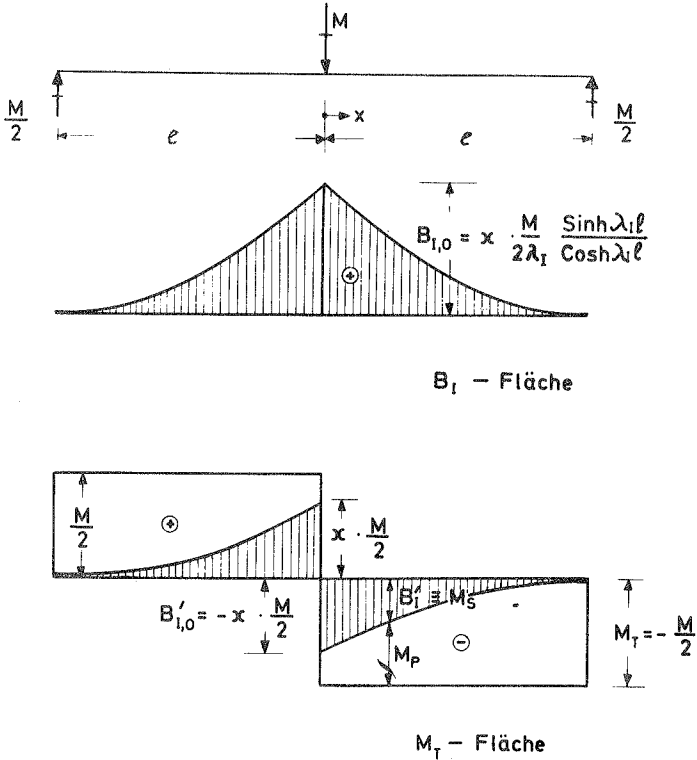


Bild 4.3 B_I - und M_T - Fläche
 Lastfall: M in Feldmitte

In Bild 4.3 ist die charakteristische Verteilung des Bimomentes aus Wölbkrafttorsion und die Aufteilung des Schnittmomentes in M_P und M_S dargestellt. Bild 4.4 zeigt die Beanspruchung der Schotte infolge der sich in Stablängsrichtung ändernden Schubkräfte.

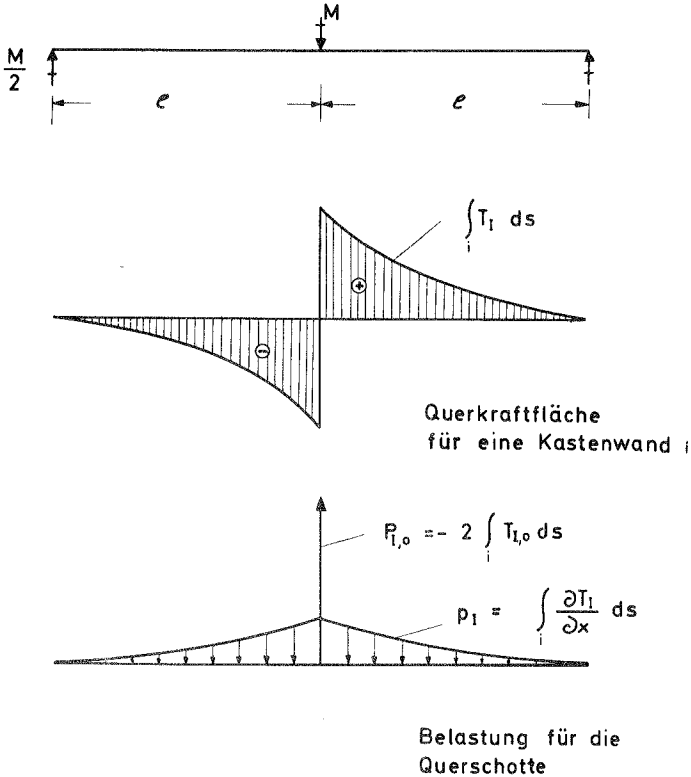


Bild 4.4 Querkraftfläche einer Kastenwand und die sich daraus ergebende Schottbelastung infolge Wölbkrafttorsion
Lastfall: M in Feldmitte

5. Betrachtung zur Faltwerkstheorie (Gelenkwerk) ohne Berücksichtigung der Schubverformung

Bei nicht ausgesteiften Profilen werden Torsionsprobleme vielfach mit Hilfe der Faltwerkstheorie behandelt (s. z.B. [14]). Für die hier betrachteten Kastenquerschnitte soll nun aber an Hand eines Beispiels der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Theorien: Faltwerk (ohne Schubverformung) - Wölbkrafttorsion gezeigt werden.

Es wird ein doppelsymmetrischer Kasten mit konstanter Wandstärke und einem Seitenverhältnis von $a/b \neq 1$ betrachtet (Bild 5.1). Der Querschnitt ist also nicht wölbfrei. Die Belastung des Trägers sei ein über die Stablängsachse beliebig verteiltes Torsionsmoment m .

Folgende, nur für diesen Abschnitt geltende Bezeichnungen werden verwendet:

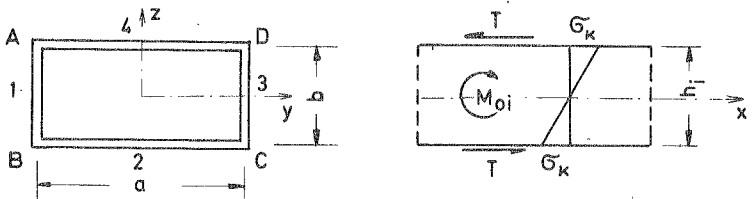


Bild 5.1

$h_1 = a$ bzw. $b =$ Höhe der Scheibe 1

$t =$ konstante Wandstärke

$F_1 = h_1 \cdot t =$ Querschnittsfläche der Scheibe 1

$W_1 = h_1^2 \cdot t / 6 =$ Widerstandsmoment der Scheibe 1

$T =$ Kantenschubkraft

$M_{O1} =$ Schnittmoment M_O der losgetrennten Scheibe 1

$M_1 = M_{O1} - T \cdot h_1 =$ Schnittmoment in der Scheibe 1 im Gelenkwerk

$\sigma_K = M_1 / W_1 =$ Normalspannung in der Kante K in x-Richtung

Das Torsionsmoment M wird nun durch zwei verschiedene, statisch aber gleichwertige Lastgruppen aufgebracht:

Fall a: Moment aufgeteilt in ein Kräftepaar: $m = \frac{m}{a} \cdot a$ (Bild 5.2)

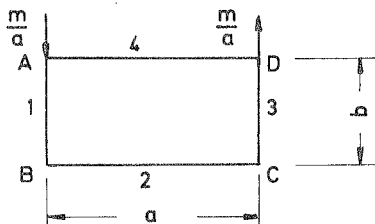


Bild 5.2 Fall a

Aus Symmetriegründen ist $T_A = T_B = T_C = T_D = T$.

Aus der Dreischübegleichung (vgl. [14]) ergibt sich für den Schubfluß in Kante A folgende Beziehung:

$$T \left(\frac{1}{F_1} + \frac{2}{F_2} + \frac{2}{F_4} + \frac{1}{F_4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{01}}{W_1} + \frac{M_{04}}{W_4} \right). \quad (5.0)$$

Da $M_{04} = 0$ ist, wird

$$3T \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_4} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_{01}}{W_1} \quad (5.1a)$$

und

$$T = \frac{\alpha}{b(\alpha+b)} M_{01}. \quad (5.2a)$$

Für die Scheibenmomente ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{01} - bT = M_{01} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+b} \right) = M_{01} \frac{b}{\alpha+b}, \\ M_4 &= -\alpha T = -M_{01} \frac{\alpha^2}{b(\alpha+b)} = -M_{01} \frac{\alpha^2}{b^2(\alpha+b)}. \end{aligned} \right\} (5.3a)$$

Die Spannung in Kante A ist demnach

$$\sigma_A = -\frac{M_1}{W_1} = \frac{M_4}{W_4} = -\frac{M_{01} b \cdot 6}{(\alpha+b) b^2 t} = -6 \cdot \frac{M_{01}}{bt(\alpha+b)}. \quad (5.4a)$$

Fall b: Moment aufgeteilt in 2 Kräftepaare: $m = \frac{m}{2a} \cdot a + \frac{m}{2b} \cdot b$
(Bild 5.3)

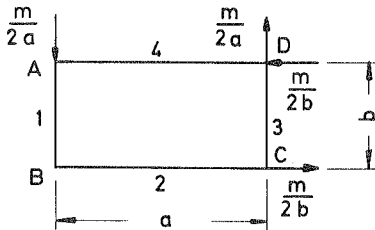


Bild 5.3 Fall b

Aus Gleichung (5.1a) ergibt sich, da jetzt

$$\frac{M_{04}}{M_{01}} = \frac{m}{2b} \frac{2a}{m} = \frac{a}{b} \quad \text{ist,}$$

$$3T \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{01}}{W_1} + \frac{a M_{01}}{b W_4} \right), \quad (5.1b)$$

$$T = \frac{M_{01} \left(\frac{b}{b^2} + \frac{6a}{b a^2} \right)}{6 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}, \quad (5.2b)$$

$$T = \frac{M_{01}}{b}.$$

Für die Scheibenmomente ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{01} - bT = M_{01} \left(1 - \frac{b}{b} \right) = 0, \\ M_4 &= M_{04} - aT = M_{01} \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3b)$$

Die Spannung in Kante A ist also

$$\sigma_A = - \frac{M_1}{W_1} = \frac{M_4}{W_4} = 0. \quad (5.4b)$$

Um nun Fall b in Fall a zu überführen, sind diesem noch folgende Kräftepaare zu überlagern:

Fall c: Belastung durch 2 Kräftepaare, die in sich im Gleichgewicht stehen (Bild 5.4).

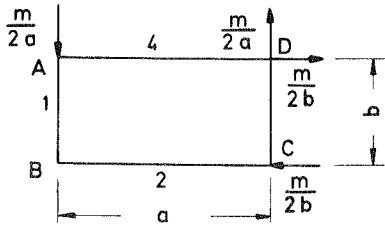


Bild 5.4 Fall c

Aus Gleichung (5.1a) ergibt sich, da nun

$$\frac{M_{04}}{M_{01}} = -\frac{\alpha}{b} \quad \text{ist,}$$

für den Kantenschub

$$T = M_{01} \frac{\alpha - b}{b(\alpha + b)} \quad (5.2c)$$

Die Scheibenmomente ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{01} - bT = M_{01} \left(1 - \frac{\alpha b}{\alpha + b}\right) = 2M_{01} \frac{b}{\alpha + b}, \\ M_4 &= M_{04} - \alpha T = M_{01} \left(-\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha(\alpha - b)}{b(\alpha + b)}\right) = -2M_{01} \frac{\alpha^2 b}{b^2(\alpha + b)}. \end{aligned} \right\} (5.3c)$$

Die Spannung in Kante A ist hier

$$\bar{\sigma}_A = -\frac{M_1}{W_1} = \frac{M_4}{W_4} = -12 \frac{M_{01}}{bt(\alpha + b)} \quad (5.4c)$$

Diese Spannung ist nun genauso groß wie die in Fall a, da M_{01} hier nur die Hälfte von dem in Fall a ist.

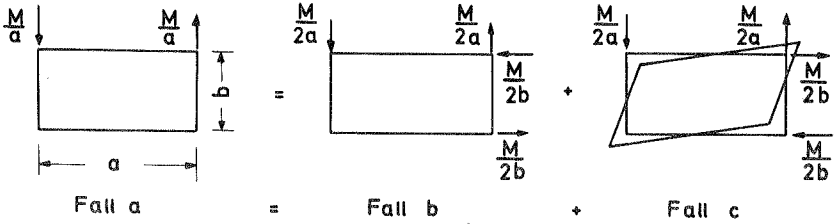


Bild 5.5 Aufteilung eines Kräftepaars für die Fallwerksberechnung

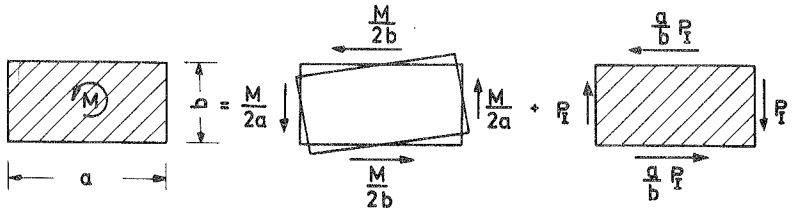


Bild 5.6 Aufteilung eines äußeren Momentes oder Kräftepaars, das über ein Schott eingeleitet wird (Wölbkrafttorsion)

Aus dem Beispiel zeigt sich nun folgendes (Bild 5.5): Nur der profilverformende Lastfall c liefert Normalspannungen nach der Faltwerkstheorie. Bei Fall b entstehen keine Faltwerksspannungen, und der Querschnitt bleibt damit erhalten, sofern die Schubverformungen nicht mitberücksichtigt werden. Wie in Abschnitt 3 gezeigt wurde, verdreht sich aber ein entsprechend Fall b auf Torsion beanspruchter Querschnitt durch die Verformungen infolge der Schubspannungen aus reiner Torsion. Ist der Querschnitt nicht wölbfrei, so entstehen infolge Wölbbehinderung zusätzliche Normalspannungen und sekundäre Schubspannungen und damit verbundene Verformungen entsprechend Abschnitt 4. Das heißt: Die Faltwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformungen erfaßt nur profilverformende Kräfte entsprechend Bild 5.7 und kein Torsionsmoment. Diese Kräfte stehen in sich im Gleichgewicht und bewirken keine Lagerreaktion.

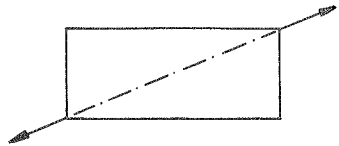


Bild 5.7 Profilverformende Belastung

Im Rahmen dieser Arbeit soll mit Hilfe der Faltwerkstheorie weiterhin auch nur die profilverformende Belastung erfaßt werden. Die Belastung p_I bzw. P_I , die in der Wölbkrafttorsion den Schotten zugewiesen wird, muß nun dem in Wirklichkeit als steifknotiges Faltwerk wirkenden Querschnittsrahmen zugewiesen werden. Dabei müssen aber nun konsequenterweise bei der Faltwerksberechnung die Schubverformungen mitberücksichtigt werden. Die Richtung und Größe dieser zusätzlichen Kräfte hängt außer von der äußeren Belastung auch von der Querschnittsform ab. So sind die Kräfte P_I in Bild 5.6 bei einem wölbfreien Querschnitt gleich Null. Bei einem Kasten konstanter Wandstärke mit $\frac{a}{b} < 1$ verlaufen sie in umgekehrter Richtung als in Bild 5.6 dargestellt.

6. Torsion des nicht ausgesteiften Querschnitts

6.1 Verteilung der Normal- und Schubspannungen über den Querschnitt beim Falzwerk unter profilverformender Belastung

Die in der Wölbkrafttheorie enthaltene Bedingung, daß der Querschnitt in seiner Form erhalten bleibt, wird nun aufgehoben, d.h., es wird ein steifknotiges Falzwerk betrachtet, wobei die Schubverformungen mitberücksichtigt werden, da außer den in Abschnitt 5 unter Fall c behandelten Kräftegruppen (Bild 5.5c) auch noch die profilverformenden Kräfte aus Wölbkrafttorsion (s. Bild 4 und 5.6) von der Querbiegesteifigkeit des Kastens aufgenommen werden müssen.

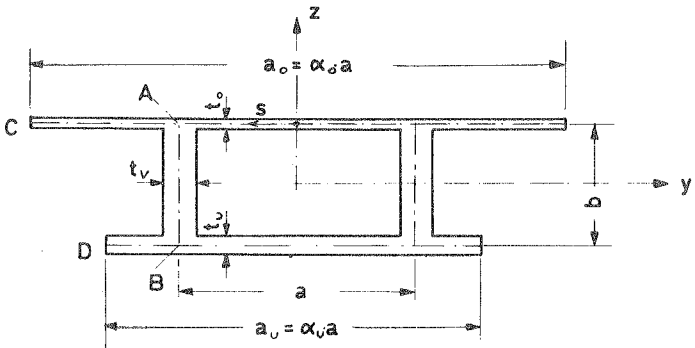


Bild 6.1 Allgemeine Form des behandelten einfach-symmetrischen, geschlossen-offenen Querschnitts

Den aus den Durchbiegungen der einzelnen Querschnittsscheiben sich ergebenden Längsspannungen ist für den ganzen Querschnitt betrachtet keine Normalkraft bzw. kein Biegemoment zugeordnet. Sie müssen deshalb in sich im Gleichgewicht sein, d.h. ein Bimoment erzeugen.

Es werden geschlossen - offene einfachsymmetrische Querschnitte entsprechend Bild 6.1 behandelt.

Die Normalspannungen in s-Richtung werden entsprechend der Theorie der Wölbkrafttorsion (s. Abschnitt 4.1) vernachlässigt. Die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit (GJ_v) der Einzelscheiben bleibt unberücksichtigt. Es wird vorausgesetzt, daß die Querschnitte der einzelnen Scheiben eben bleiben. Da die offenen Querschnittsteile in der Verlängerung einer Kastenwand verlaufen, müssen sie zusammen mit dieser als eine Scheibe betrachtet werden, da sonst keine Eindeutigkeit für die Annahme der Spannungsverteilung möglich ist.

Bezüglich des Koordinatensystems und der Vorzeichenkonvention sei auf Abschnitt 2 verwiesen. Für die beim Faltwerk neu einzuführenden Bezeichnungen, die denen aus der Wölbkrafttorsion (s. Abschnitt 4) entsprechen, wird der Index II verwendet.

Es wird in diesem Abschnitt die in [11] beschriebene Methode angewendet. Sie wird in mancher Hinsicht modifiziert und erweitert. So wird hier die in Längsrichtung wirkende Normalspannung σ_{II} entsprechend (4.2-3) als Produkt einer Funktion f_{II} [kp/cm^4] und einer Einheitsverwölbung ω_{II} [cm^2] ausgedrückt:

$$\sigma_{II}(x,s) = f_{II}(x) \omega_{II}(s) . \quad (6.1-1)$$

Dadurch wird es möglich, die Analogie der hier auf den Rechteckkasten mit Konsolen erweiterten Querschnittswerte und -funktionen zu denen aus der Wölbkrafttorsion zu zeigen. Für den Querschnitt nach Bild 6.1 ist die normierte ω_{II} -Funktion in Bild 6.2a dargestellt. Sie ist im allgemeinen Fall nicht mehr affin zur ω_I -Funktion wie beim Sonderfall des Kastens ohne Konsolen. Dadurch werden weitere Modifikationen gegenüber [11] erforderlich.

Wegen der zur z-Achse symmetrischen Querschnittsform und antimetrischen Belastung sowie wegen den Bedingungen $\int_F \sigma_x z dF = \int_F \sigma_x dF = 0$ muß ω_{II} antimetrisch sein. Aus der Bedingung $\int_F \sigma_x y dF = 0$ folgt das Verhältnis β , das zwischen $\omega_{II,B}$ und $\omega_{II,A}$ besteht:

$$\beta = \left| \frac{\omega_{II,B}}{\omega_{II,A}} \right| = \frac{\alpha_o^* + 3}{\alpha_u^* + 3} \quad (6.1-2)$$

mit

$$\alpha_o^* = \alpha_o^3 \frac{\alpha t_o}{b t_v} ,$$

$$\alpha_u^* = \alpha_u^3 \frac{\alpha t_u}{b t_v} \quad (6.1-3)$$

und

$$\alpha_o = \frac{\alpha_o}{\alpha} ,$$

$$\alpha_u = \frac{\alpha_u}{\alpha} . \quad (6.1-4)$$

Den Längsspannungen sind aus Gleichgewichtsgründen Schubspannungen zugeordnet (vgl. Bild 2.1):

$$t \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx ds + t \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial s} ds dx = 0. \quad (6.1-5)$$

Hieraus folgt durch Integration und nach Einsetzen von Gleichung (6.1-1) für den Schubfluß

$$T_{II} = \tau_{xx} t = - \rho_{xx}' (S_{II} - \phi_{II}) \quad (6.1-6)$$

mit
$$S_{II} = \int \omega_{II} dF \quad (6.1-7)$$

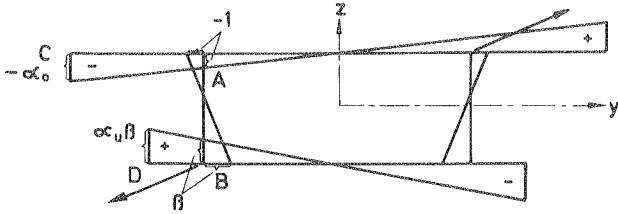
und
$$\phi_{II} = \frac{\int_F S_{II} r_t ds}{\oint r_t ds} \quad (6.1-8)$$

als Integrationskonstante, die sich aus der Bedingung eines verschwindenden Torsionsschnittmomentes

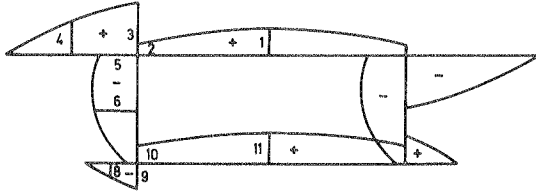
$$\int_F T_{II} r_t ds = 0$$

ergibt. S_{II} ist das statische Wölbmoment des Faltnetzes.

Für den Querschnitt nach Bild 6.1 gilt die in Bild 6.2.b dargestellte Verteilung von $(S_{II} - \phi_{II})$, die nach (6.1-6) proportional zur Verteilung des Schubflusses ist.

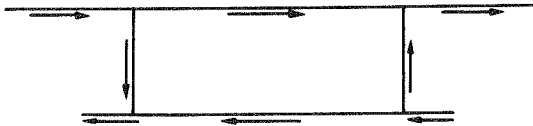


a.) Normierte Einheitsverwölbung $\frac{\omega_{II}}{|\omega_{II,A}|}$ infolge Profilverformung



1	$\frac{\alpha_0 F_0}{4} + (5-4\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$	11	$\frac{\alpha_u \beta F_U}{4} - (1-2\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$
2	$\frac{\alpha_0^2 - 1}{4 \alpha_0} F_0 + (5-4\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$	10	$\frac{\alpha_u^2 - 1}{4 \alpha_u} \beta F_U - (1-2\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$
3	$\frac{\alpha_0^2 - 1}{4 \alpha_0} F_0$	9	$\frac{\alpha_u^2 - 1}{4 \alpha_u} \beta F_U$
4	$\frac{(\alpha_0 - 1)(3\alpha_0 + 1)}{16 \alpha_0} F_0$	8	$-\frac{(\alpha_u - 1)(3\alpha_u + 1)}{16 \alpha_u} \beta F_U$
5	$(5-4\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$	7	$-(1-2\beta) \frac{F_V}{12} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$
6	$(1-5\beta) \frac{F_V}{24} - \alpha_u^2 \beta \frac{F_U}{12}$		

b.) Querschnittsfunktion $\frac{(S_{II} - \Phi_{II})}{|\omega_{II,A}|}$



c) Richtungssinn des Schubflusses $T_{II} = -f'_{II} (S_{II} - \Phi_{II})$

Bild 6.2 Querschnittsfunktionen des Falzwerks

6.2 Ableitung der Differentialgleichung des biegesteifen Falt-
werks mit Berücksichtigung der Schubverformung unter profil-
verformender Belastung

Als charakteristische Größe für die Querschnittsverformung wird der Winkel γ verwendet, der sich aus der Verdrehung der oberen Querschnittsscheibe gegenüber der vertikalen Stegscheibe ergibt (s. Bild 6.3):

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_v = \frac{2v}{a} + \frac{u_0 + u_v}{b} \quad (6.2-1)$$

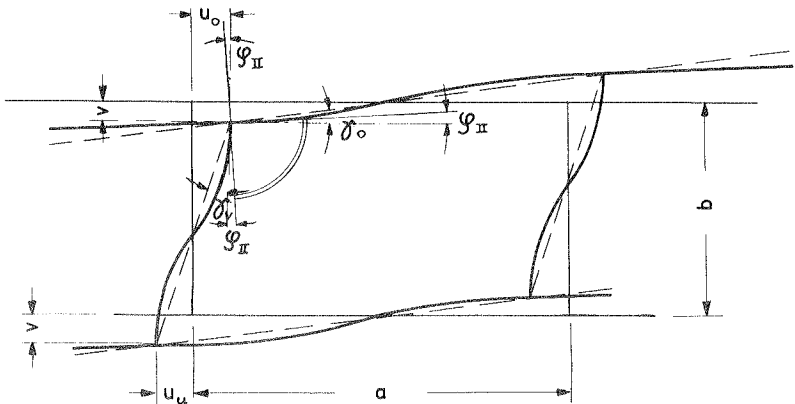


Bild 6.3 Komponenten der Verschiebung und des positiven Verformungswinkels

Die Verschiebungen v , u_0 bzw. u_u lassen sich nun unter Berücksichtigung der Schubverformung durch f_{II} ausdrücken.

So gilt z.B. für die Stegscheibe (vgl. Anhang B):

$$\begin{aligned} v'' &= - \frac{M_b}{EJ_b} + \frac{1}{GF_b} \frac{\partial Q_b}{\partial x} \\ &= - \frac{1}{EJ_b} \left(M_b - \frac{EJ_b}{GF_b} \frac{\partial Q_b}{\partial x} \right) \\ &= - \frac{W_b}{EJ_b} \left(\frac{M_b}{W_b} - \frac{EJ_b}{GF_b W_b} \frac{\partial Q_b}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} J_b &= \frac{b^3}{12} t_v \\ W_b &= \frac{b^2}{6} t_v \\ F_b &= b t_v \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{J_b}{F_b W_b} &= \frac{1}{2 t_v} \\ \frac{W_b}{J_b} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$$

Nun werden M_b und Q_b durch f_{II} ausgedrückt:

$$M_b = \frac{(|\omega_{II,A}| + |\omega_{II,B}|) f_{II}}{2} W_b = \frac{|\omega_{II,A}| (1+\beta)}{2} f_{II} W_b ,$$

$$Q_b = \int_b T_{II} ds = - f_{II}' \int_b (S_{II} - \phi_{II}) ds ,$$

$$\frac{\partial Q_b}{\partial x} = - f_{II}'' \int_b (S_{II} - \phi_{II}) ds .$$

Dies in Gleichung für v'' eingesetzt ergibt

$$v'' = -\frac{2}{Eb} \left[\frac{|\omega_{II,A}|(1+\beta)}{2} f_{II} - \left(-\frac{E}{2Gt_v} \int_b (S_{II} - \Phi_{II}) ds \right) f_{II}'' \right]$$

$$= -\frac{|\omega_{II,A}|(1+\beta)}{Eb} \left[f_{II} - \left(-\frac{E}{Gt_v} \frac{\int_b (S_{II} - \Phi_{II}) ds}{(1+\beta)|\omega_{II,A}|} \right) f_{II}'' \right].$$

Analoge Beziehungen lassen sich nun für u_o und u_u herleiten. Zusammengefasst lauten sie:

$$v'' = -\frac{|\omega_{II,A}|}{E} \frac{1+\beta}{b} (f_{II} - k_v f_{II}''), \quad (a)$$

$$u_o'' = -\frac{|\omega_{II,A}|}{E} \frac{2}{\alpha} (f_{II} - k_o f_{II}''), \quad (b) \quad (6.2-2)$$

$$u_u'' = -\frac{\beta|\omega_{II,A}|}{E} \frac{2}{\alpha} (f_{II} - k_u f_{II}'') \quad (c)$$

mit den Werten

$$k_v = -\frac{E}{Gt_v} \frac{\int_b (S_{II} - \Phi_{II}) ds}{(1+\beta)|\omega_{II,A}|},$$

$$k_o = -\frac{E}{Gt_o} \frac{\int_{\alpha_o} (S_{II} - \Phi_{II}) ds}{2\alpha_o|\omega_{II,A}|}, \quad (6.2-3)$$

$$k_u = -\frac{E}{Gt_u} \frac{\int_{\alpha_u} (S_{II} - \Phi_{II}) ds}{2\alpha_u\beta|\omega_{II,A}|},$$

die den Anteil der Schubverformung zu den Gesamtverformungen ausdrücken.

Nun wird (6.2-1) zweimal differenziert und (6.2-2) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \gamma'' &= \frac{2bv'' + \alpha u_o'' + \alpha u_u''}{\alpha b} \\
 &= - \frac{2(1+\beta) |\omega_{II,A}|}{E \alpha b} (f_{II} - k_v f_{II}'') \\
 &\quad - \frac{2 |\omega_{II,A}|}{E \alpha b} (f_{II} - k_o f_{II}'') \quad (6.2-4) \\
 &\quad - \frac{2\beta |\omega_{II,A}|}{E \alpha b} (f_{II} - k_u f_{II}'') \\
 &= - \frac{4(1+\beta) |\omega_{II,A}|}{E \alpha b} \left[f_{II} - \left(\frac{k_v}{2} + \frac{|\omega_{II,A}| (k_o + \beta k_u)}{2(1+\beta) |\omega_{II,A}|} \right) f_{II}'' \right] \\
 &= - \frac{4(1+\beta) |\omega_{II,A}|}{E \alpha b} \left[f_{II} - \frac{k_v}{2(1+\beta)} \left(1 + \beta + \frac{k_o + \beta k_u}{k_v} \right) f_{II}'' \right].
 \end{aligned}$$

Mit $\psi_{II} = \frac{\alpha b}{4(1+\beta)}$ (6.2-5)

und $k = \frac{k_v}{2(1+\beta)} \left(1 + \beta + \frac{k_o + \beta k_u}{k_v} \right)$ (6.2-6)

lässt sich für (6.2-4) schreiben

$$\gamma'' = - \frac{|\omega_{II,A}|}{E \cdot \psi_{II}} (f_{II} - k f_{II}'') , \quad (6.2-7)$$

worin k den Beitrag der Schubverformung zum Verformungswinkel γ ausdrückt.

Aus (6.2-3) ergibt sich für den Ausdruck $\frac{k_o + \beta k_u}{k_v}$ in (6.2-6) unter Berücksichtigung von

$$Q_y = 0, \text{ d.h. } \int_{\alpha_o} T_{II} ds = \int_{\alpha_u} T_{II} ds$$

$$\text{bzw. } \int_{\alpha_o} (S_{II} - \Phi_{II}) ds = \int_{\alpha_u} (S_{II} - \Phi_{II}) ds$$

$$\text{und } M_T = 0, \text{ d.h. } b \int_{\alpha_o} T_{II} ds = \alpha \int_b T_{II} ds$$

$$\text{bzw. } b \int_{\alpha_o} (S_{II} - \Phi_{II}) ds = \alpha \int_b (S_{II} - \Phi_{II}) ds,$$

$$\frac{k_o + \beta k_u}{k_v} = \frac{\alpha}{b} \frac{(1+\beta)}{2} \left(\frac{t_v}{t_o \alpha_o} + \frac{t_v}{t_u \alpha_u} \right).$$

Dies in (6.2-6) eingesetzt ergibt

$$k = \frac{k_v}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{2b} \left(\frac{t_v}{t_o \alpha_o} + \frac{t_v}{t_u \alpha_u} \right) \right], \quad (6.2-8)$$

wobei k_v nach (6.2-3a) sich zu

$$k_v = \frac{b^2}{6} (1+\mu) \frac{3 + 2(\alpha_o^* + \alpha_u^*) + \alpha_o^* \alpha_u^*}{6 + (\alpha_o^* + \alpha_u^*)} \quad (6.2-9)$$

ergibt. Hierin ist $(1 + \mu) = \frac{E}{2G}$ und μ die Querdehnungszahl.

Nach der geometrischen Beziehung für γ (6.2-1) wird nun die Abhängigkeit des Winkels γ von den profilverformenden Kräften und der Profilsteifigkeit betrachtet.

Ein aus dem Träger herausgeschnittener Querrahmen von der Länge dx wird durch die Differenzen der Schubkräfte, die in sich im Gleichgewicht stehen, verformt. Ihre positive Richtung wird nun entsprechend dem positiven Verformungswinkel definiert (s. Bild 6.4). Dies bedeutet gegenüber dem positiv definierten Schubfluß eine Umkehrung des Vorzeichens in der oberen und unteren Platte. Es gilt also

$$P_o = p_o dx = P_u = p_u dx$$

und

$$P_o b = P_u b = P_v a = a dx \int_b \frac{\partial T}{\partial x} ds \quad (6.2-10)$$

$$= -b dx \int_{a_o} \frac{\partial T}{\partial x} ds .$$

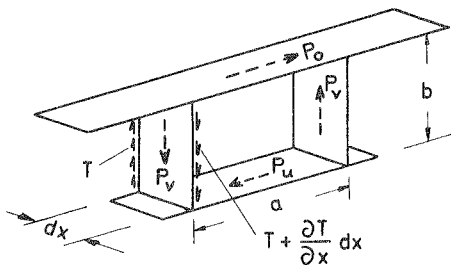


Bild 6.4 Querrahmen von der Länge dx

Der Verformungswinkel γ ergibt sich nun aus einer einfachen Rahmenrechnung (wobei hier die Schubverformung vernachlässigt wird):

$$\gamma = \frac{p_v \alpha}{EJ_R} \quad (6.2-11)$$

mit
$$J_R = \frac{24 J_v}{\eta_1 b} \quad (6.2-12)$$

EJ_R ist die Rahmensteifigkeit des Kastens.
Dabei ist

$$\eta_1 = 1 + \frac{2 \frac{\alpha}{b} + 3 \frac{J_o + J_u}{J_v}}{\frac{J_o + J_u}{J_v} + 6 \frac{b}{\alpha} \frac{J_o J_u}{J_v^2}}$$

mit

$$J_i = \frac{t_i^3}{12(1-\mu^2)} \quad .$$

Der Schubfluß T in (6.2-10) setzt sich aus T_{II} entsprechend (6.1-6) und T_I aus Wölbkrafttorsion (vgl. (4.2-9)) zusammen. Beide liefern einen Anteil zum Verformungswinkel γ .

$$\gamma_{II} = \frac{P_{vII} \alpha}{EJ_R} = \frac{\alpha}{EJ_R} \int_b \frac{\partial T_{II}}{\partial x} ds = - \frac{\alpha}{EJ_R} f_{II}'' \int_b (S_x - \Phi_x) ds \quad (6.2-13)$$

Die in der Wölbkrafttorsion den Querschotten zugewiesenen Kräfte (vgl. Bild 4.5) müssen nun ebenfalls von der Rahmensteifigkeit des Querschnitts aufgenommen werden und liefern somit einen Anteil zu γ :

$$\gamma_I = \frac{P_{xv} \alpha}{EJ_R} = \frac{\alpha}{EJ_R} \int_b \frac{\partial T_I}{\partial x} ds = - \frac{\alpha}{EJ_R} f_I'' \int_b (S_I - \Phi_I) ds \quad (6.2-14)$$

$$\text{Mit } W_{II} = -\alpha \int_b (S_{II} - \Phi_{II}) ds \quad (\text{a})$$

(6.2-15)

$$\text{und } W_I = -\alpha \int_b (S_I - \Phi_I) ds \quad (\text{b})$$

ergibt sich aus (6.2-13) und (6.2-14):

$$\gamma_{II} = \frac{W_{II}}{EJ_R} \varphi_{II}'' \quad , \quad (\text{a})$$

(6.2-16)

$$\gamma_I = \frac{W_I}{EJ_R} \varphi_I'' = \frac{P_I^*}{EJ_R} \quad (\text{b})$$

$$\text{mit } P_I^* = W_I \varphi_I'' = W_I \frac{B_I''}{J_I} = \text{Wölbbelastung} \quad . \quad (\text{6.2-17})$$

Differenziert man (4.4-7) zweimal nach x , erhält man für den hier betrachteten Lastfall

$$B_I'' = \lambda_x^2 B_I$$

und kann damit auch schreiben :

$$P_I^* = \frac{\lambda_x^2 W_I}{J_I} B_I \quad . \quad (\text{6.2-18})$$

Wirkt außer oder statt dem hier betrachteten Einzelmoment in Feldmitte noch ein über die Trägerlänge verteiltes Torsionsmoment m , so wird dieses ebenfalls entsprechend Bild 5.5 aufgeteilt in einen verdrehenden Teil und einen profilverformenden Teil $m/2$. Letzterer ist eine zusätzliche Wölbbelastung und bewirkt den Winkel

$$\gamma_m = \frac{m/2}{EJ_R} \quad . \quad (\text{6.2-19})$$

Der Gesamtwinkel setzt sich also folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_{II} + \delta_{II} + \gamma_m \\ &= \frac{W_{II}}{EJ_R} f_{II}'' + \frac{P_I^* + m/2}{EJ_R} \end{aligned} \quad (6.2-20)$$

Nun wird γ zweimal nach x differenziert:

$$\gamma'' = \frac{W_{II}}{EJ_R} f_{II}^{IV} + \left(\frac{P_I^* + m/2}{EJ_R} \right)'' \quad (6.2-21)$$

Daraus folgt

$$f_{II}^{IV} = \frac{EJ_R}{W_{II}} \gamma'' - \left(\frac{P_I^* + m/2}{W_{II}} \right)'' \quad (6.2-22)$$

Dies in die zweimal nach x differenzierte Gleichung (6.2-7) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \gamma^{IV} &= - \frac{|w_{II,A}|}{E\Psi_{II}} f_{II}'' + k \frac{EJ_R |w_{II,A}|}{E\Psi_{II} \cdot W_{II}} \gamma'' \\ &\quad - \frac{k |w_{II,A}|}{E\Psi_{II} W_{II}} \left(P_I^* + \frac{m}{2} \right)'' \end{aligned} \quad (6.2-23)$$

Wenn man nun noch f_{II} durch γ entsprechend Gleichung (6.2-20) ausdrückt

$$f_{II}'' = \gamma \frac{EJ_R}{W_{II}} - \left(\frac{P_I^* + m/2}{W_{II}} \right) \quad (6.2-24)$$

und in (6.2-23) einsetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma^{IV} &= - \frac{EJ_R |w_{II,A}|}{E\Psi_{II} W_{II}} \gamma + \frac{(P_I^* + m/2) |w_{II,A}|}{E\Psi_{II} W_{II}} \\ &\quad + k \frac{EJ_R |w_{II,A}|}{E\Psi_{II} W_{II}} \gamma'' - k \frac{|w_{II,A}|}{E\Psi_{II} W_{II}} \left(P_I^* + \frac{m}{2} \right)'' \end{aligned} \quad (6.2-25)$$

Nach einer Umformung folgt daraus die endgültige Differentialgleichung des Faltwerks unter profilverformender Belastung.

(6.2-26)

$$\gamma^{IV} - k \frac{EJ_R}{EJ_{II}} \gamma'' + \frac{EJ_R}{EJ_{II}} \gamma = \frac{1}{EJ_{II}} \left[(p_x^* + \frac{m}{2}) - k (p_x^* + \frac{m}{2})'' \right]$$

mit $J_{II} = \psi_{II} \frac{W_{II}}{|\omega_{II,\Delta}|}$ (6.2-27)

$$= \psi_{II} b \frac{\int (s_{II} - \phi_{II}) ds}{|\omega_{II,\Delta}|} = - \psi_{II} \alpha \frac{\int (s_{II} - \phi_{II}) ds}{|\omega_{II,\Delta}|}$$

J_{II} ist das Wölbträgheitsmoment des Faltwerks (vgl. die analoge Beziehung in der Wölbkrafttorsion entsprechend (A.2-3)),

EJ_R = Rahmensteifigkeit des Kastens

und EJ_{II} = Wölbsteifigkeit des Faltwerks .

Mit $\lambda_{II} = \sqrt[4]{\frac{EJ_R}{4EJ_{II}}}$ lässt sich für (6.2-26) schreiben:

(6.2-29)

$$\gamma^{IV} - 4k\lambda_{II}^4 \gamma'' + 4\lambda_{II}^4 \gamma = \frac{1}{EJ_{II}} \left[(p_x^* + \frac{m}{2}) - k (p_x^* + \frac{m}{2})'' \right].$$

Die Differentialgleichung entspricht in ihrer Form ganz der Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens, bei dem die Schubverformung mitberücksichtigt wurde. Die Analogie hierzu ist im Anhang B dargestellt. Die Funktion f_{II} erhält man aus (6.2-7) und (6.2-20) durch Eliminieren von γ . Multipliziert mit W_{II} wird sie als Bimoment des Faltwerks bezeichnet:

$$B_{II} = W_{II} f_{II} = -EJ_{II} \gamma'' + kEJ_R \gamma - k(p_x^* + \frac{m}{2}). \quad (6.2-31)$$

Für die Faltwerksspannung ergibt sich mit (6.1-1)

$$\sigma_{II} = f_{II} \omega_{II} = \frac{B_{II}}{W_{II}} \omega_{II} .$$

W_{II} unterscheidet sich von J_{II} nur durch einen konstanten Faktor (siehe 6.2-27).

Der für die Berechnung von λ_{II} erforderliche Steifigkeitswert EJ_{II} ergibt sich aus dem Produkt der Gleichungen (6.2-5) und (6.2-15):

Für den Querschnitt nach Bild 6.1 errechnet sich

$$\frac{W_{II}}{|\omega_{II,A}|} = \frac{ab}{12} F_V \left[\frac{3+2(\alpha_o^* + \alpha_u^*) + \alpha_o^* \alpha_u^*}{3 + \alpha_u^*} \right] , \quad (6.2-32)$$

$$\psi_{II} = \frac{ab}{4} \frac{3 + \alpha_u^*}{6 + \alpha_o^* + \alpha_u^*} \quad (6.2-33)$$

und somit

$$J_{II} = \frac{\alpha^2 b^2}{48} F_V \left[\frac{3+2(\alpha_o^* + \alpha_u^*) + \alpha_o^* \alpha_u^*}{6 + (\alpha_o^* + \alpha_u^*)} \right] . \quad (6.2-34)$$

Die Querbiegemomente verlaufen im geschlossenen Kasten entsprechend Bild 6.3. Die Eckmomente ergeben sich aus der Rahmenrechnung für (6.2-11) zu

$$m_{s,A} = \frac{EJ_R \vartheta}{4} (1 + \varrho_2) , \quad (6.2-35)$$

$$m_{s,B} = -\frac{EJ_R \vartheta}{4} (1 - \varrho_2)$$

mit

$$\varrho_2 = \frac{1 - \frac{J_u}{J_o}}{1 + \frac{J_u}{J_o} + 6 \frac{b}{\alpha} \frac{J_u}{J_V}} .$$

Ihr Verlauf ist in Bild 6.5 dargestellt.

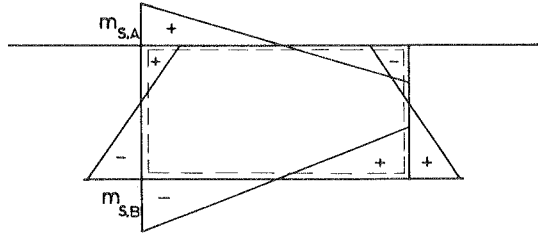


Bild 6.5 Querbiegemomente

Es sei noch darauf hingewiesen, daß infolge der Schubverformung der Drehwinkel des Faltwerks auch bei nur profilverformender Belastung von Null verschieden ist, wie im folgenden gezeigt werden wird. Der Drehwinkel des Faltwerks ergibt sich zu (vgl. Bild 6.3)

$$\varphi_{II} = \frac{\delta_o - \delta_v}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2v}{\alpha} - \frac{u_o + u_u}{b} \right) = \frac{v}{\alpha} - \frac{u_o + u_u}{2b} \quad (6.2-36)$$

Dies zweimal differenziert ergibt mit (6.2-2) nach kurzer Zwischenrechnung

$$\varphi_{II}'' = \frac{|\omega_{II}| f_{II}''}{E \alpha b} (k_v + \beta k_v - k_o - k_u \beta)$$

bzw. mit (6.2-5)

$$\varphi_{II}'' = \frac{f_{II}''}{E} \frac{|\omega_{II, \Delta}|}{2 \psi_{II}} \frac{k_v}{2(1+\beta)} \left(1 + \beta - \frac{k_o + \beta k_u}{k_v} \right)$$

Zähler und Nenner mit W_{II} multipliziert ergibt unter Berücksichtigung von (6.2-27) und (6.2-31)

$$\mathcal{G}_{II}'' = \frac{B_{II}''}{2EJ_{II}} \frac{k_v}{2(1+\beta)} \left(1+\beta - \frac{k_o + \beta k_u}{k_v} \right) . \quad (6.2-37)$$

Durch Umformen erhält man daraus

$$\mathcal{G}_{II}'' = \frac{B_{II}''}{2EJ_{II}} \bar{k} \quad (6.2-38)$$

mit

$$\bar{k} = \frac{k_v}{2} \left[1 - \frac{\alpha}{2b} \left(\frac{t_v}{t_o \alpha_o} + \frac{t_v}{t_u \alpha_u} \right) \right] . \quad (6.2-39)$$

Diese Verdrehung ist gegenüber der Verdrehung aus Torsion im allgemeinen zu vernachlässigen.

6.3 Lösung der vollständigen Differentialgleichung des biegesteifen
Faltwerks unter profilverformender Belastung

6.3.1 Einfeldträger belastet durch ein in Feldmitte in den Stegen
wirkendes Kräftepaar (Fall I)

Für den hier betrachteten Lastfall, Einzeltorsionsmoment M in Feldmitte, ist $m = 0$, so daß Gleichung (6.2-30) lautet:

$$\gamma^{IV} - 4k\lambda_{II}^4 \gamma'' + 4\lambda_{II}^4 \gamma = \frac{1}{EJ_{II}} (P_I^* - kP_I^{*''}) \quad (6.3.1-1)$$

bzw. mit $P_I^{*''} = \lambda_I^2 P_I^*$ nach Gleichung (6.2.1-8) und (4.4-7)

$$\gamma^{IV} - 4k\lambda_{II}^4 \gamma'' + 4\lambda_{II}^4 \gamma = \frac{P_I^*}{EJ_{II}} (1 - k\lambda_I^2) \quad (6.3.1-2)$$

mit λ_{II} entsprechend Gleichung (6.2-29)

und λ_I entsprechend Gleichung (4.4-2).

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{hom}} = & C_1 \text{Sinh } \lambda_1 x \text{ sin } \lambda_2 x + C_2 \text{Cosh } \lambda_1 x \text{ cos } \lambda_2 x + \\ & + C_3 \text{Sinh } \lambda_1 x \text{ cos } \lambda_2 x + C_4 \text{Cosh } \lambda_1 x \text{ sin } \lambda_2 x, \end{aligned} \quad (6.3.1-3)$$

$$\text{wobei } \lambda_1 = \lambda_{II} \sqrt{1+\alpha} \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_{II} \sqrt{1-\alpha} \quad (6.3.1-4)$$

$$\text{und } \alpha = k\lambda_{II}^2 .$$

Für die in dieser Arbeit untersuchten Querschnitte ist α stets < 1 .

Für die partikuläre Lösung findet sich

$$\delta_{\text{part}} = \frac{S}{1+S} \frac{P_I^*}{EJ_R} \quad (6.3.1-5)$$

mit

$$S = 4 \left(\frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \right)^4 (1 - k \lambda_I^2) . \quad (6.3.1-6)$$

Somit ergibt sich für den Winkel $\gamma = \delta_{\text{hom}} + \delta_{\text{part}}$:

$$\begin{aligned} \gamma = & C_1 \sinh \lambda_{I,1} x \sin \lambda_{I,2} x + C_2 \cosh \lambda_{I,1} x \cos \lambda_{I,2} x + \\ & + C_3 \sinh \lambda_{I,1} x \cos \lambda_{I,2} x + C_4 \cosh \lambda_{I,1} x \sin \lambda_{I,2} x + \frac{S}{1+S} \frac{P_I^*}{EJ_R} . \end{aligned} \quad (6.3.1-7)$$

Die Konstanten $C_1 \div C_4$ ergeben sich aus den Randbedingungen. Hierzu ist für den Schnitt $x = 0$ noch folgende Betrachtung erforderlich.

Im Schnitt $x = 0$ wirkt das als "Gesamtwölblast" P^* bezeichnete profilverformende Moment, wenn das äußere Kräftepaar entsprechend Bild 5.5 aufgeteilt wird, mit

$$P^* = \frac{M}{2b} b = \frac{M}{2\alpha} \alpha = \frac{M}{2} . \quad (6.3.1-8)$$

Die dazugehörige "Wölbquerkraft" lautet

$$Q_o^* = - \frac{P^*}{2} = - \frac{M}{4} . \quad (6.3.1-9)$$

Diese teilt sich folgendermaßen auf (vgl. Bild 4.4):

$$Q_o^* = Q_{I,o}^* + Q_{II,o}^* = \alpha \int_b T_{I,o} ds + \alpha \int_b T_{II,o} ds = - \frac{M}{4} .$$

Der Anteil der Wölbkrafttorsion wird nun umgeformt mit (4.2-11):

$$Q_{I,0}^* = \alpha \int_b T_{I,0} ds = - \frac{B'_{I,0}}{J_I} \alpha \int_b (S_I - \Phi_I) ds. \quad (6.3.1-10)$$

Mit $B'_{I,0}$ aus Bild 4.3 ergibt sich

$$Q_{I,0}^* = \frac{M \chi}{2 J_I} \alpha \int_b (S_I - \Phi_I) ds = - \frac{M}{4} \epsilon \quad (6.3.1-11)$$

mit
$$\epsilon = -2 \frac{\alpha \int_b (S_I - \Phi_I) ds}{J_I} \chi = 2 \frac{W_I}{J_I} \chi. \quad (6.3.1-12)$$

Somit verbleibt für die Faltwerkswirkung

$$Q_{II,0}^* = - \frac{M}{4} (1 - \epsilon), \quad (6.3.1-13)$$

womit die Bedingung

$$Q_o^* = Q_{I,0}^* + Q_{II,0}^* = - \frac{M}{4} = - \frac{P^*}{2} \quad (6.3.1-14)$$

erfüllt ist.

Der Einfluß der Wölbkrafttorsion, der durch den Kennwert ϵ ausgedrückt wird, kann je nach Querschnittsform sowohl negativ als auch positiv sein.

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Analogie zum elastisch gebetteten Balken (vgl. Anhang B) zu

$$1.) \quad x=0: \quad k Q_{II}^* = EJ_{II} \gamma' = -k \frac{M}{4} (1-\varepsilon) ,$$

$$2.) \quad B_{II}' = -EJ_{II} \gamma''' + k EJ_R \gamma' - k p_I^* = -\frac{M}{4} (1-\varepsilon),$$

(6.3.1-15)

$$3.) \quad x=l: \quad \gamma = 0 ,$$

$$4.) \quad B_{II} = -EJ_{II} \gamma'' + k EJ_R \gamma - k p_I^* = 0 .$$

Nach Einsetzen des Winkels γ und seiner Ableitungen nach Gleichung (6.3.1-7) erhält man für die Konstanten:

$$C_1 = -\frac{M \lambda_{II}}{4 EJ_R} \frac{\varphi_2^0 K_1 - \varphi_1^0 K_2}{\sqrt{1-\alpha}} ,$$

$$C_2 = \frac{M \lambda_{II}}{4 EJ_R} \frac{\varphi_1 K_1 + \varphi_2 K_2}{\sqrt{1+\alpha}} ,$$

(6.3.1-16)

$$C_3 = -\frac{M \lambda_{II}}{4 EJ_R} \frac{K_1 + K_2}{\sqrt{1+\alpha}} ,$$

$$C_4 = \frac{M \lambda_{II}}{4 EJ_R} \frac{K_1 - K_2}{\sqrt{1-\alpha}}$$

mit folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \frac{SC - \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} sc}{S^2 s^2 + C^2 c^2} \quad , \quad \mathring{\mathcal{G}}_1 = \frac{SC - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} sc}{S^2 s^2 + C^2 c^2} \\ \mathcal{G}_2 &= \frac{SC + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} sc}{S^2 s^2 + C^2 c^2} \quad , \quad \mathring{\mathcal{G}}_2 = \frac{SC + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} sc}{S^2 s^2 + C^2 c^2} \quad , \end{aligned} \quad (6.3.1-17)$$

wobei

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Sinh} \lambda_1 l \quad , \quad C = \operatorname{Cosh} \lambda_1 l \quad , \\ s &= \sin \lambda_2 l \quad , \quad c = \cos \lambda_2 l \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 - \varepsilon \frac{S}{1+S} \quad , \\ K_2 &= 2\alpha(1-\varepsilon) - \varepsilon \frac{S}{1+S} \frac{\lambda_I^2}{2\lambda_{II}^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.3.1-18)$$

Für den maximalen Verformungswinkel γ in $x = 0$ ergibt sich:

$$\gamma_{\max} = \frac{M \lambda_{II}}{4EJ_R} \left(\frac{\mathcal{G}_1 K_1 + \mathcal{G}_2 K_2}{\sqrt{1+\alpha}} + \varepsilon \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \frac{S}{1+S} \frac{\operatorname{Sinh} \lambda_I l}{\operatorname{Cosh} \lambda_I l} \right) \quad . \quad (6.3.1-19)$$

6.3.2 Unendlich langer Träger, belastet durch ein lotrecht in den Stegen wirkendes Kräftepaar (Fall I)

Für $\lambda_I \ell \approx 3$ und $\lambda_{II} \ell \approx 3$ können für χ, B_I und B_{II} die Ausdrücke verwendet werden, die für einen unendlich langen Träger gelten.

Ab $\lambda_{II} \ell \approx 3$ wird

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \overset{\circ}{\varphi}_1 = \overset{\circ}{\varphi}_2 \approx 1 ,$$

wie sich aus einer Grenzbetrachtung aus den Formeln (6.3.1-18) ergibt. Damit wird

$$C_2 = - C_3 = \frac{M \lambda_{II}}{4 E J_R} \frac{K_1 + K_2}{\sqrt{1 + \alpha}} , \quad (6.3.2-1)$$

$$- C_1 = C_4 = \frac{M \lambda_{II}}{4 E J_R} \frac{K_1 - K_2}{\sqrt{1 - \alpha}} .$$

Ab $\lambda_I \ell \approx 3$ wird aus (4.4-7)

$$B_I = x \frac{M}{2 \lambda_I} e^{-\lambda_I x} \quad (a)$$

bzw. (6.3.2-2)

$$B_I' = - x \frac{M}{2} e^{-\lambda_I x} . \quad (b)$$

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (6.2-18)

$$p_I^* = \frac{W_I}{J_I} \frac{x \lambda_I}{2} M e^{-\lambda_I x} \quad (6.3.2-3)$$

bzw. mit Gleichung (6.3.1-12)

$$p^* = \varepsilon \frac{\lambda_I M}{4} e^{-\lambda_I x} . \quad (6.3.2-4)$$

Der Verformungswinkel wird damit

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{M \lambda_{II}}{4EJ_R} e^{-\lambda_I x} \left(\frac{K_1 + K_2}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \lambda_2 x + \frac{K_1 - K_2}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \lambda_2 x \right) + \\ &+ \frac{M \lambda_{II}}{4EJ_R} \varepsilon \frac{S}{1+S} e^{-\lambda_I x} . \end{aligned} \quad (6.3.2-5)$$

Für das Faltwerksbimoment gilt (6.2-29)

$$B_{II} = -EJ_{II} \gamma'' + k EJ_R \gamma - k p_I^* ,$$

$$\begin{aligned} B_{II} &= \frac{M}{8\lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \left(\frac{K_1(1+2\alpha) - K_2}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \lambda_2 x - \right. \\ &\left. - \frac{K_1(1-2\alpha) + K_2}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \lambda_2 x \right) - \frac{\varepsilon M}{4\lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \frac{1}{1+S} . \end{aligned} \quad (6.3.2-6)$$

Die Gesamtspannung setzt sich nun aus den beiden Anteilen aus Wölbkrafttorsion und Profilverformung zusammen:

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = f_I \omega_I + f_{II} \omega_{II} ,$$

$$\sigma = \frac{B_I}{J_I} \omega_I + \frac{B_{II}}{W_{II}} \omega_{II} \quad (6.3.2-7)$$

mit
$$B_I = \frac{xM}{2\lambda_I} e^{-\lambda_I x} \quad (6.3.2-2) .$$

Durch Differenzieren erhält man

$$B_x' = - \frac{M}{4} e^{-\lambda_1 x} \left(K_1 \cos \lambda_2 x + \frac{\alpha K_1 - K_2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin \lambda_2 x \right) + \frac{M}{4} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} e^{-\lambda_1 x} . \quad (6.3.2-8)$$

Der gesamte Schubfluß T setzt sich aus den drei Anteilen

$$T = T_M + T_I + T_{II}$$

zusammen (nach (4.2-10) und (6.1-6) mit $W_{II} f_{II}' = B_{II}'$):

$$T = \frac{M_T}{2F_B} - \frac{B_I'}{J_I} (S_I - \phi_I) - \frac{B_{II}'}{W_{II}} (S_{II} - \phi_{II}) . \quad (6.3.2-9)$$

6.3.3 Unendlich langer Träger, belastet durch ein über ein Schott eingeleitetes Torsionsmoment (Fall II)

In der Praxis wird man nun, soweit dies möglich ist, im Lastquerschnitt ein Schott anordnen. Dies bedeutet aber, daß hierfür nur die Wölbkrafttorsion Längsspannungen liefern würde, die klassische Faltwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung dagegen nicht (vgl. Abschnitt 5, Fall b). Da nun aber der übrige Querschnitt nicht ausgesteift ist, kann sich in diesem Bereich der Querschnitt verformen. Dieser Einfluß soll nun im weiteren mit Hilfe der dargestellten Methode untersucht werden.

Den Lösungsansatz für das Faltwerk (6.3.1-7) formen wir nun um zu

$$\begin{aligned} \gamma = & e^{-\lambda_1 x} (C_1^* \cos \lambda_2 x + C_2^* \sin \lambda_2 x) + \\ & + e^{+\lambda_1 x} (C_3^* \cos \lambda_2 x + C_4^* \sin \lambda_2 x) + \frac{S}{1+S} \frac{P_I^*}{EJ_R} \cdot \end{aligned} \quad (6.3.3-1)$$

Da wir einen unendlich langen Träger betrachten wollen, ergibt sich aus $x \rightarrow \infty : \gamma = 0$

$$C_3^* = C_4^* = 0 .$$

Somit lautet der Lösungsansatz

$$\gamma = e^{-\lambda_1 x} (C_1^* \cos \lambda_2 x + C_2^* \sin \lambda_2 x) + \frac{S}{1+S} \varepsilon \frac{\lambda_I M}{4EJ_R} e^{-\lambda_1 x} . \quad (6.3.3-2)$$

Die Konstanten ergeben sich aus den Randbedingungen für $x = 0$ (vgl. (6.3.1-15)):

$$\begin{aligned} 1) \quad x = 0 : \gamma &= 0, \\ 2) \quad EJ_{II} \gamma' &= R \left[-EJ_{II} \gamma''' + R (EJ_R \gamma' - P_I^*) \right], \end{aligned} \quad (6.3.3-3)$$

zu

$$\begin{aligned} C_1^* &= - \frac{S}{1+S} \varepsilon \frac{\lambda_I M}{4EJ_R} , \\ C_2^* &= \varepsilon \frac{\lambda_I M}{4EJ_R} K^* \end{aligned} \quad (6.3.3-4)$$

$$\text{mit } K^* = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}(1+2\alpha)} \left(\frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \cdot \frac{4\alpha^2 + S(1+\alpha)}{1+S} + \frac{S}{1+S} \sqrt{1+\alpha} \right) . \quad (6.3.3-5)$$

Somit lässt sich für γ schreiben:

$$\gamma = \varepsilon \frac{\lambda_I M}{4 E J_R} \left[e^{-\lambda_I x} \left(-\frac{S}{1+S} \cos \lambda_2 x + K_1^* \sin \lambda_2 x \right) + \frac{S}{1+S} e^{-\lambda_I x} \right] \quad (6.3.3-6)$$

Für das Bimoment des Falterwerks ergibt sich durch Einsetzen von γ und seiner Ableitungen in (6.2-31)

$$B_{II} = \frac{\varepsilon M}{8 \lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \left[(K_1^* + K_3^* \alpha) \sin \lambda_2 x + (K_2^* + K_3^* \sqrt{1-\alpha^2}) \cos \lambda_2 x \right] - \frac{\varepsilon M}{4 \lambda_I} \frac{1}{1+S} e^{-\lambda_I x} \quad (6.3.3-7)$$

mit

$$K_1^* = \frac{S}{1+S} \left[\sqrt{1-\alpha^2} + \alpha + \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} (1 + R \lambda_I^2) \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha} (1+2\alpha)} \right],$$

$$K_2^* = \frac{S}{1+S} \left[\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha + \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} (1 + R \lambda_I^2) \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha} (1+2\alpha)} \right], \quad (6.3.3-8)$$

$$K_3^* = 4 \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \frac{x^2}{\sqrt{1-\alpha} (1+2\alpha)(1+S)}.$$

Durch Differenzieren erhält man

$$B_{II}' = -\frac{M}{8} \varepsilon \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \left\{ \left[\sqrt{1+\alpha} (K_1^* + K_3^*) + \sqrt{1-\alpha} K_2^* \right] \sin \lambda_2 x + \left[\sqrt{1-\alpha} (K_3^* - K_1^*) + \sqrt{1+\alpha} K_2^* \right] \cos \lambda_2 x \right\} + \frac{M}{4} \frac{\varepsilon}{1+S} e^{-\lambda_I x}. \quad (6.3.3-9)$$

Für die Normalspannungen und den Schubfluß gelten die Gleichungen (6.3.2-7) und (6.3.2-9) mit B_{II} und B_{II}' nach (6.3.3-7) und (6.3.3-9).

6.3.4 Sonderfall des doppelsymmetrischen Rechteckkastens ohne Konsolen

Für doppelsymmetrische Querschnitte ohne Konsolen hat Dabrowski in [1] gezeigt, daß, wenn λ_I mit χ_3 nach (A.3-4) ermittelt wird,

$$k = \frac{1}{\lambda_I^2} \quad \text{ist} \quad (6.3.4-1)$$

und damit (6.3.1-5) und (6.3.1-6) zu Null wird, d.h.

$$S = \gamma_{part} = 0. \quad (6.3.4-2)$$

Damit verschwindet auch die rechte Seite der Differentialgleichung (6.3.1-1).

Für den Einfluß der Wölbkrafttorsion, der durch ε ausgedrückt wird, ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{1 - \frac{bt_0}{at_v}}{1 + \frac{bt_0}{at_v}} = \sqrt{\chi_3}, \quad (6.3.4-3)$$

d.h. je nachdem, ob bt_0 größer oder kleiner als at_v ist, wird $\varepsilon \cong 0$ (siehe Bild 6.6).

Für Fall I ergibt sich mit (6.3.1-18)

$$\begin{aligned} K_1 &= 1, \\ K_2 &= 2\alpha(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Somit wird das Bimoment des faltwerks aus (6.3.2-6)

$$\begin{aligned} B_{II} &= \frac{M}{8\lambda_I} e^{-\lambda_I x} \left(\frac{1+2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \lambda_2 x - \frac{1-2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \lambda_2 x \right) - \\ &- \frac{\varepsilon M}{4\lambda_I} e^{-\lambda_I x}. \end{aligned} \quad (6.3.4-4)$$

Für die Spannung lässt sich zusammenfassen

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{B_{II}}{W_{II}} \omega_{II} + \frac{B_I}{J_I} \omega_I \\ &= \frac{\omega_I}{W_{II}} \left\{ \frac{M}{8\lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \left(\frac{1+2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \lambda_2 x - \frac{1-2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \lambda_2 x \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon M \omega_{II}}{4\lambda_I W_{II}} e^{-\lambda_I x} + \frac{x M \omega_I}{2\lambda_I J_I} e^{-\lambda_I x} \quad (6.3.4-5) \end{aligned}$$

Da nach Gleichung (6.3.1-12) $\varepsilon = 2 \frac{W_I}{J_I} \chi$ ist und bei geschloss-

senen Kästen ohne Konsolen wegen der Affinität der Spannungsverteilung aus Profilverformung und Wölbkrafttorsion $\frac{W_I}{\omega_I} = \frac{W_{II}}{\omega_{II}}$

ist, heben sich die beiden letzten Summanden gegenseitig auf, und es bleibt

$$W_{II} \frac{\sigma}{\omega_{II}} = W_{II} f = \frac{M}{8\lambda_{II}} e^{-\lambda_I x} \left(\frac{1+2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \lambda_2 x - \frac{1-2\alpha\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \lambda_2 x \right), \quad (6.3.4-6)$$

was mit dem Ergebnis in [11] übereinstimmt. Nur bei diesem Sonderfall des Rechteckkastens ohne Konsolen lassen sich also die beiden Bimomente zu einem zusammenfassen: $B = B_I + B_{II} = W_{II} f$.

Die zusätzliche Verdrehung infolge Profilverformung ergibt sich aus (6.2-38). Nach einer Zwischenrechnung findet sich für doppelsymmetrische Kästen ohne Konsolen:

$$\bar{k} = \varepsilon k$$

und mit (6.2-29) und (6.3.1-4)

$$\varphi_{II}'' = \frac{B_{II}''}{2EJ_{II}} \varepsilon k = \alpha \varepsilon \frac{2\lambda_{II}^2}{EJ_R} B_{II}''.$$

Wird nun außerdem der Einfluß der Schubspannung auf die Profilverformung vernachlässigt, so ergibt sich mit $\alpha = 0$ und

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{II}$$

sowie $K_1 = 1$ und $K_2 = 0$

für das Bimoment des faltwerks aus (6.3.2-10)

$$B_{II} = \frac{M}{8\lambda_{II}} e^{-\lambda_{II}x} (\cos \lambda_{II}x - \sin \lambda_{II}x). \quad (6.3.4-7)$$

Die dazugehörige Differentialgleichung lautet
(mit $k = p_I^* = 0$ in Gleichung (6.3.1-1))

$$\gamma^{IV} + 4\lambda_{II}^4 \gamma = 0. \quad (6.3.4-8)$$

Dies ist die homogene Differentialgleichung eines biegesteifen faltwerks, wie sie sich aus der klassischen faltwerkstheorie bei Vernachlässigung der Schubverformung ergibt.

Wird für Fall II in Abschnitt 6.3.3 ebenfalls ein doppelsymmetrischer Kasten ohne Konsolen betrachtet, so wird mit $\varrho = 0$

$$K_1^* = K_2^* = 0,$$

$$K_3^* = 4 \frac{\lambda_{II}}{\lambda_{II}} \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2} (1+2\alpha)}$$

und damit

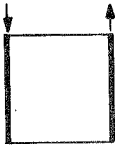
$$B_{II} = \frac{\varepsilon M}{8\lambda_{II}} \frac{4\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2} (1+2\alpha)} \frac{\lambda_{II}^2}{\lambda_{II}^2} (\alpha \sin \lambda_2 x + \sqrt{1-\alpha^2} \cos \lambda_2 x) - \frac{\varepsilon M}{4\lambda_{II}} e^{-\lambda_{II}x}. \quad (6.3.4-9)$$

Weiter wird $\alpha \frac{\lambda_{II}^2}{\lambda_{II}^2} = k \lambda_{II}^2 = 1$, und es ergibt sich

$$W_{II} f = B_I + B_{II} = \frac{\varepsilon M}{2\lambda_{II}} \frac{\alpha \sqrt{1+\alpha}}{(1+2\alpha)} (\cos \lambda_2 x + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin \lambda_2 x). \quad (6.3.4-10)$$

Würde hier nun der Einfluß der Schubverformung vernachlässigt, so würde mit $\beta = \alpha = 0$ auch das Bimoment und damit die Normalspannungen verschwinden. Dies wäre wiederum der Fall der klassischen Faltwerkstheorie.

Quadrat: $a = b$



$$\frac{t_o}{t_v} < 1$$
$$\varepsilon > 0$$



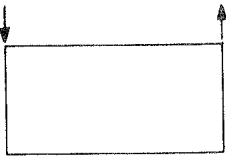
$$\frac{t_o}{t_v} = 1$$
$$\varepsilon = 0$$

(wölbfrei)



$$\frac{t_o}{t_v} > 1$$
$$\varepsilon < 0$$

Rechteck: $t_o = t_v$

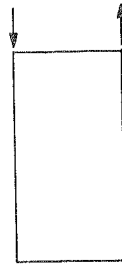


$$\frac{b}{a} < 1$$
$$\varepsilon > 0$$



$$\frac{b}{a} = 1$$
$$\varepsilon = 0$$

(wölbfrei)



$$\frac{b}{a} > 1$$
$$\varepsilon < 0$$

Bild 6.6 Einfluß der Wölbkrafttorsion auf die Profilverformung am Beispiel doppel-symmetrischer Kastenprofile

7. Praktische Berechnung der Querschnittskennwerte und der Spannungsverteilung

Die Querschnittskennwerte der Faltwerksberechnung sind für den betrachteten Querschnitt (s. Bild 6.1) in allgemeiner Form in Abschnitt 6 angegeben. Darüber hinaus sind aber noch die Querschnittskennwerte der Wölbkrafttorsion erforderlich. Deren Berechnung kann grundsätzlich nach [2] mit der Ergänzung für den Schubverformungsfaktor nach [15] durchgeführt werden. Für das Aufstellen von Programmen für elektronische Rechenanlagen eignet sich aber besser die Darstellung nach [4].

Die Kennwerte der Wölbkrafttorsion müssen nun allerdings noch ergänzt werden im Hinblick auf die profilverformenden Kräfte, die über den Wert ε in die Gleichungen von Abschnitt 6 eingehen.

Nach (6.3.1-12) ist

$$\varepsilon = 2 \frac{W_I}{J_x} \chi ,$$

worin nach Gleichung (6.2-15)

$$W_I = -\alpha \int_b (S_x - \Phi_x) ds = b \int_{\alpha_0} (S_x - \Phi_x) ds = b \int_{\alpha_u} (S_x - \Phi_x) ds$$

ist. Hierbei ist nun zu beachten, daß nach (4.2-16) für

$$\Phi_x = \Phi_s - \frac{J_x}{2F_B}$$

einzusetzen ist.

Obwohl für W_I nur ein Integral, z.B. über die Stegwand, nötig wäre, empfiehlt es sich über den gesamten Querschnitt zu integrieren, womit eine gute Kontrolle der Rechnung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen möglich ist.

Wird der Schubverformungsfaktor α nicht nach Heilig, sondern nach Umanskij/Benscoter bestimmt, so ergeben sich für doppel-symmetrische Kastenquerschnitte ohne offene Teile relativ einfache Ausdrücke für ε und α (siehe (6.3.4-3)).

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Algol-Programme aufgestellt. Das eine liefert für einen allgemeinen einzelligen Viereckkasten mit einem offenen Element an jeder Ecke (s. Bild 7.1) die

Querschnittswerte aus Wölbkrafttorsion (bis einschließlich $\int (S_I - \phi_I) ds$) sowie die Spannungen für den hier behandelten Lastfall für einen Stab endlicher Länge, wie sie sich aus der Berücksichtigung der verschiedenen Schubverformungsfaktoren α ergeben.

Als Eingabedaten werden nur die geometrischen Querschnittswerte und die Stablänge benötigt.

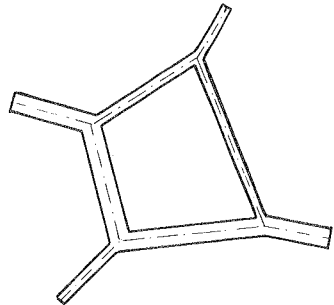


Bild 7.1

Das andere Programm liefert für ein nicht ausgesteiftes Profil nach Bild 6.1 die Querschnittswerte für Profilverformung sowie die Spannungen für den hier behandelten Lastfall für einen unendlich langen Balken. Als Eingabedaten sind außer den geometrischen Größen noch die Querschnittswerte W_I , J_I und α aus Wölbkrafttorsion erforderlich sowie ω_x und $(S_I - \phi_I)$ für die Punkte, für die die Spannungsverteilung über die Stablängsachse ermittelt werden soll. Sämtliche numerischen Rechnungen wurden auf dem TR4-Rechner des Recheninstituts der Technischen Hochschule Stuttgart durchgeführt.

8. Theoretische Ergebnisse

8.1 Untersuchte Querschnittsformen

Insgesamt wurden 3 Querschnittsformen untersucht, deren Abmessungen in Bild 8.1 dargestellt sind. Ausgehend von einem nicht wölb-freien Rechteckhohlkasten (Modell 1) wurden die beiden anderen Profile so gewählt, daß die an den Kanten des Kastens angeschlossenen offenen Teile einerseits einen großen, andererseits einen kleinen Anteil zu den Wölbsteifigkeiten EJ_I und EJ_{II} liefern (bei gleichbleibender Torsionssteifigkeit GJ_B und Rahmensteifigkeit EJ_R). So wurde für Modell 2 die Form eines Doppel-T-Trägers gewählt mit dem Hohlkasten als Steg und für Modell 3 ein im Brückenbau üblicher Kastenträger mit auskragenden Gehwegkonsolen. Für diese Querschnitte sind in Bild 8.2 die den Normal- bzw. Schubspannungen aus Wölbkrafttorsion proportionalen orthogonalisierten Querschnittsfunktionen ω_I , $(S_I - \Phi_S)$ bzw. $(S_I - \Phi_I)$ sowie die für die Querschottbeanspruchung bzw. Profilverformung maßgebenden Integrale über die einzelnen Querschnittsscheiben $\int (S_I - \Phi_I) ds$ dargestellt. In Tabelle 1 sind die Querschnittswerte sowie die Werte α und λ_I entsprechend den verschiedenen Theorien zusammengestellt.

In Bild 8.3 sind demgegenüber die den Normal- bzw. Schubspannungen aus Profilverformung proportionalen normierten Querschnittsfunktionen $\omega_{II}/|\omega_{IIA}|$ und $(S_{II} - \Phi_{II})/|\omega_{IIA}|$ dargestellt, und zwar für eine einen positiven Verformungswinkel bewirkende Kräftegruppe. In Tabelle 2 sind die Querschnittswerte für das Faltnetz unter profilverformender Beanspruchung und die Konstanten für den hier untersuchten Lastfall zusammengefaßt. Für die Konstanten erhält man für dasselbe Modell unterschiedliche Werte, abhängig von der jeweiligen Theorie, nach der die Wölbkraftberechnung durchgeführt wurde. So wurden die Werte entsprechend den Theorien von Heilig und Bescoter/Umanskiy angegeben. Außerdem wurden die Konstanten berechnet ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion ($\epsilon = 0$). Dies entspricht dem reinen Verformungslastfall unter Berücksichtigung der Schubdeformation.

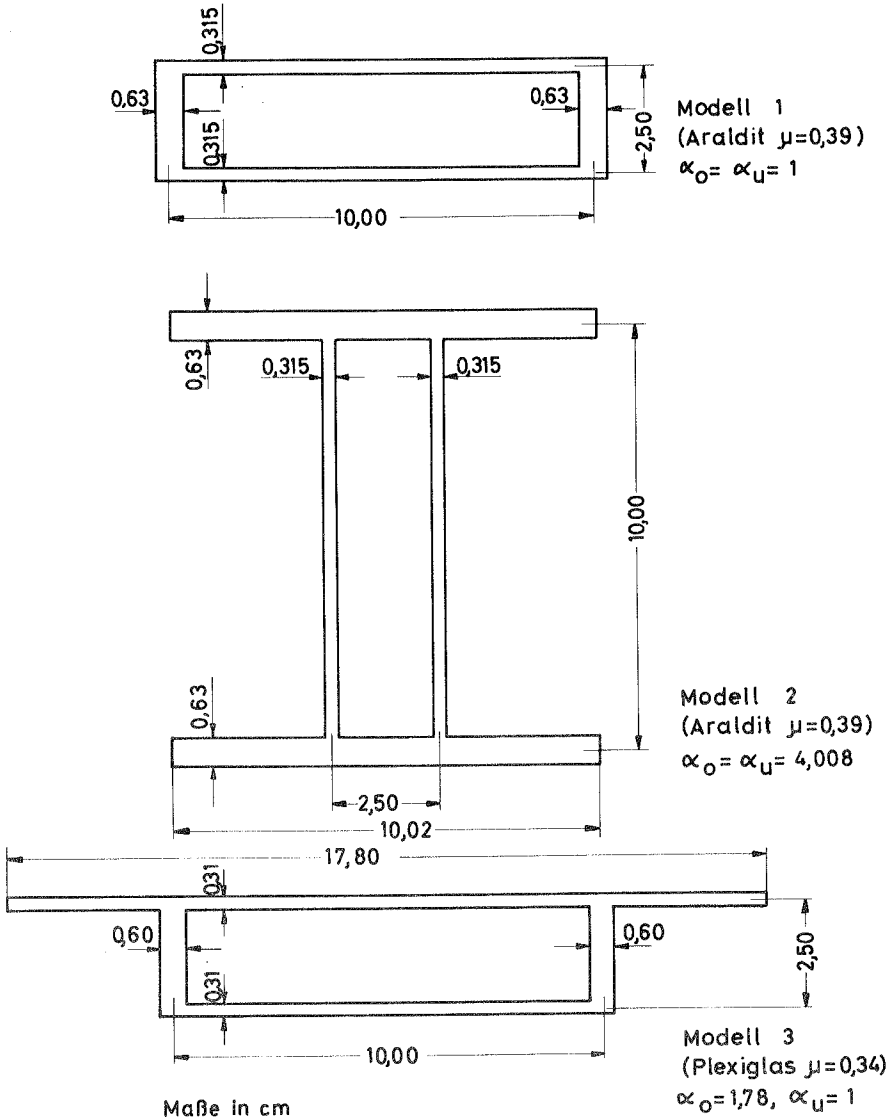


Bild 8.1 Untersuchte Querschnittsformen

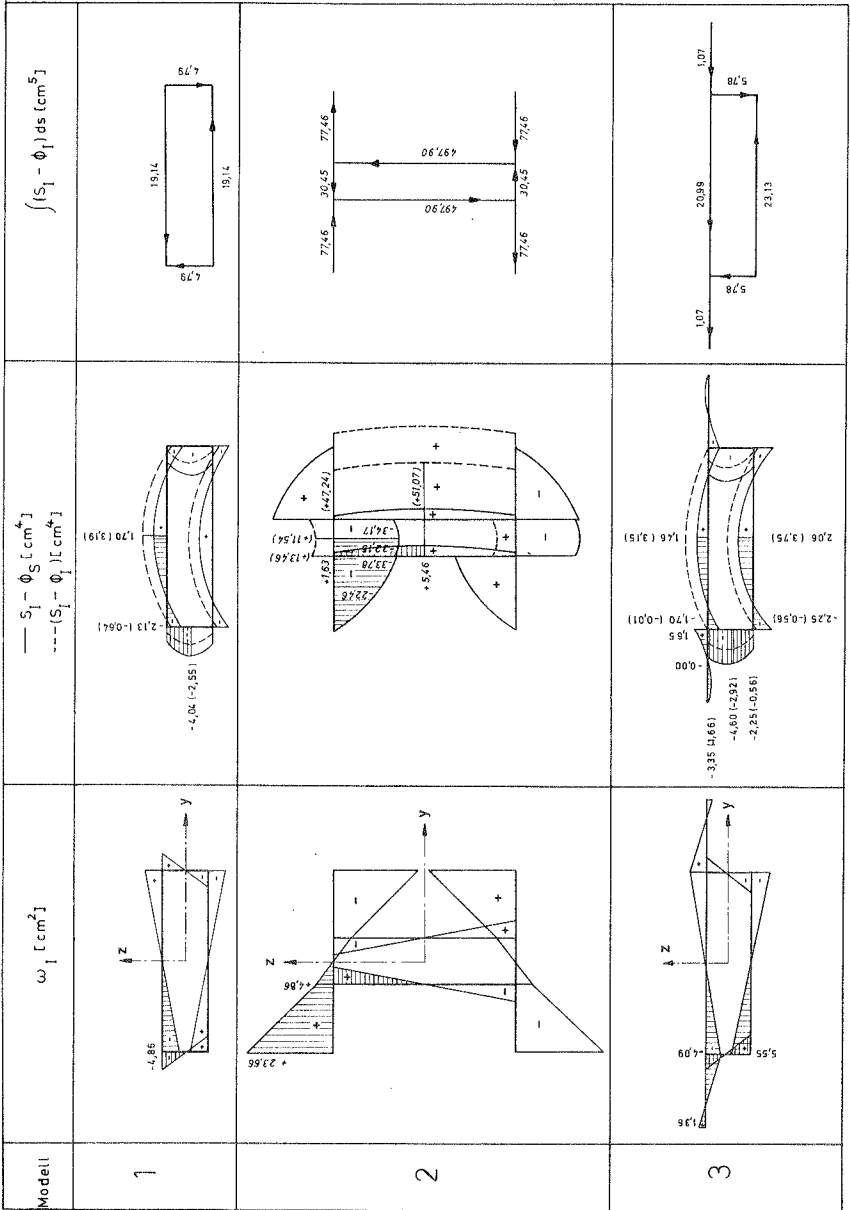
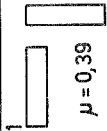
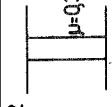
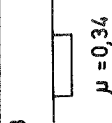


Bild 8.2 Querschnittsfunktionen aus Wölbkrafttorsion

Modell	J_I	J_B	$\lambda_{I_{\infty}}$	J_V	λ_{I_0}	α_1	λ_{I_1}	α_2	λ_{I_2}	α_3	λ_{I_3}
	cm ⁶	cm ⁴	$\sqrt{\frac{GJ_B}{EJ_I}}$ 1/cm	cm ⁴	$\sqrt{\frac{G(\alpha_1 \alpha_2)}{EJ_I}}$ 1/cm	1	$\sqrt{\alpha_1 \lambda_{I_0}}$ 1/cm	1	$\sqrt{\alpha_2 \lambda_{I_1}}$ 1/cm	1	$\sqrt{\alpha_3 \lambda_{I_2}}$ 1/cm
Klassische Wölbkrafttorsion											
Heilig											
Dshanelidze - Panovko											
Benscoter - Urmanskij											
1  $\mu = 0,39$	74,436	35,000	0,4113	0,625	0,4149	0,452	0,2789	0,456	0,2778	0,605	0,3199
2  $\mu = 0,39$	2280,57	35,000	0,0743	1,878	0,0763	0,862	0,0708	0,868	0,0692	0,892	0,0702
3  $\mu = 0,34$	84,446	34,317	0,389	0,636	0,3930	0,454	0,2647	0,458	0,2636	0,617	0,3058

Tab.1 Querschnittswerte für Wölbkrafttorsion

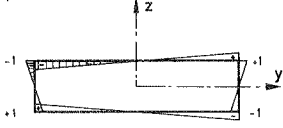
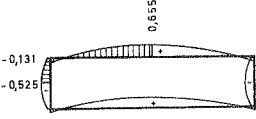
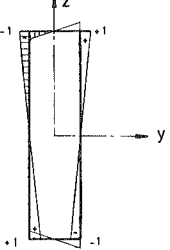
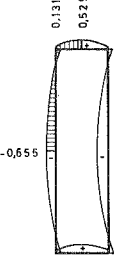
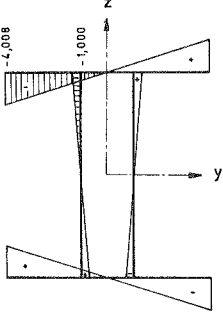
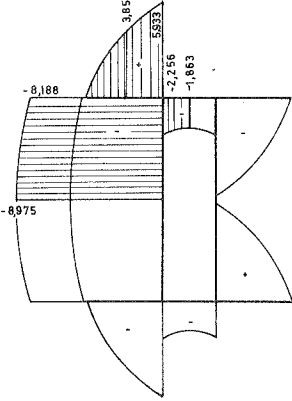
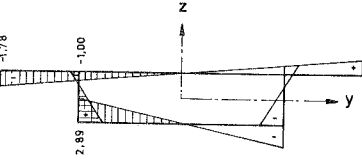
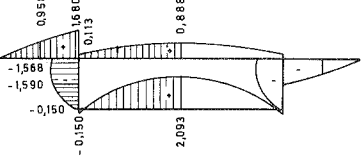




Modell	$\frac{\omega_{II}}{ \omega_{RA} } [1]$	$\frac{(S_{II} - \phi_{II})}{ \omega_{II,A} } [cm^2 I]$
<p>1 quer</p>		
<p>1 hoch</p>		
<p>2</p>		
<p>3</p>		

Bild 8.3 Querschnittsfunktionen aus Profilverformung

Modell	Wölbkraft-torsion	$\frac{W_{II}}{ \omega_{IIA} }$	J_R	J_{II}	R	λ_{II}	α	λ_1	λ_2	ϵ	K_1	K_2	K^*	K_1^*	K_2^*	K_3^*	
																	cm ⁴
1 quer 	nach:																
	Heilig	9,844	0,0715	30,762	9,773	0,08731	0,0745	0,0905	0,0840	0,0092	0,9947	0,0354	0,1185	0,0132	0,0547	0,0636	
	Bensc.									0	1	0,0331	0,0736	0	0	0,0736	
1 hoch 	ohne Wölbkraft-torsion																
	Heilig	9,844	0,0715	30,762	9,773	0,08731	0,0745	0,0905	0,0840	0,0092	1,0053	0,2626	0,1185	0,0132	0,0547	0,0636	
	Bensc.									0	1	0,2649	0,0736	0	0	0,0736	
2 	ohne Wölbkraft-torsion																
	Heilig																
	Bensc.	21,825	0,0715	680,703	198,235	0,04025	0,3212	0,0463	0,0332	0,0101	1,0097	1,2831	0,5605	0,0208	0,0304	0,5265	
3 	ohne Wölbkraft-torsion																
	Heilig																
	Bensc.	33,634	0,0651	54,005	13,596	0,0741	0,0747	0,0768	0,0713	0,0012	0,9992	0,0519	0,0804	0,0018	0,0084	0,0719	
	ohne Wölbkraft-torsion																

Tab.2 Querschnittswerte und Konstanten für Profilverformung

8.2 Längsverteilung der Bimomente, deren Ableitungen und des Verformungswinkels

Für den behandelten Lastfall wurden die charakteristischen Funktionen für einen nach beiden Seiten unendlich langen Stab mit einem äußeren Torsionsmoment von 100 cmkp berechnet. Die Werte wurden in Abhängigkeit von x/ℓ entlang der positiven x -Achse aufgetragen. Für ℓ wurden 60 cm gewählt, was der halben Länge der Versuchsmodelle entsprach.

Die Bilder 8.4 und 8.5 zeigen die Verteilung des Bimomentes B_I bzw. dessen Ableitung B'_I , wobei die klassische Theorie der Wölbkrafttorsion den verfeinerten Theorien mit Berücksichtigung der Verformungen infolge der sekundären Schubspannungen nach Heilig bzw. nach Bescoter/Umanskij gegenübergestellt wurde. Der Unterschied ergibt sich aus den verschiedenen α -Werten, die über λ_I das Abklingverhalten der Kurven beeinflussen. Außerdem ist der maximale Wert an der Momenteneinleitungsstelle nach den verfeinerten Theorien kleiner als nach der klassischen Theorie. Dieser Unterschied geht bei B_I mit $\sim\sqrt{\alpha}$ und bei B'_I mit α ein. So ist der Einfluß der Verformungen der sekundären Schubspannungen (vgl. Tab. 1) bei geschlossenen Hohlkästen (Modell 1) bzw. bei geschlossen-offenen Querschnitten, deren offene Teile nur einen geringen Anteil zum J_I liefern (Modell 3), relativ groß. Profile entsprechend Modell 2 verhalten sich dagegen ähnlich wie offene Querschnitte, d.h: geringer Einfluß der sekundären Schubverformung und langsames Abklingen der Wölbkrafttorsion. Die α -Werte nach Heilig sind im allgemeinen etwas kleiner als die nach Bescoter/Umanskij.

In den Bildern 8.6 und 8.7 sind die Bimomente B_{II} bzw. deren Ableitungen B'_{II} aus Profilverformung für den Fall dargestellt, daß das positive Drehmoment über ein in Richtung der Stegscheiben lotrecht wirkendes Kräftepaar eingeleitet wird und somit positiv gerichtete Verformungskräfte auf den Kasten wirken (Fall I). Der Wölbkrafteinfluß wurde mit den Werten für α und λ_I

nach Bescoter/Umanskij ermittelt. Diesen Funktionen wurden jene aus der reinen Profilverformung (unter Berücksichtigung des Schubverformungseinflusses) mit $\epsilon = 0$ gegenübergestellt.

Die Bilder 8.8 und 8.9 zeigen B_{II} und B'_{II} für den Fall, daß das Torsionsmoment über ein Querschott eingetragen wird, der Kastenträger im übrigen Bereich aber unausgesteift ist (Fall II). Der Wölbkrafteinfluß wurde ebenfalls nach Bescoter/Umanskij ermittelt.

Vergleicht man nun B_I und B_{II} , so sieht man aus deren Verlauf einen wesentlichen Unterschied zwischen Wölbkrafttorsion und Profilverformung. Während B_I entsprechend einer ϵ^x -Funktion mehr oder weniger schnell auf Null abklingt, ändert B_{II} zunächst das Vorzeichen und schwingt sich dann erst allmählich auf Null ein.

Für die Beanspruchung in Querrichtung ist die maßgebende Funktion des EJ_R -fachen Verformungswinkels γ in Bild 8.10 für den unausgesteiften Querschnitt und in Bild 8.11 für den Fall, daß das Torsionsmoment über ein Querschott eingeleitet wird, dargestellt. Der Verformungswinkel γ ist proportional den Quermomenten $m_{S,A}$ und $m_{S,B}$ in den Kanten (Rahmenecken) des geschlossenen Kastens (siehe (6.2-32)). Während γ beim unausgesteiften Querschnitt sein Maximum unter der Last hat, wobei zu beachten ist, daß dort wegen der Berücksichtigung der Schubverformung $\gamma'_0 \neq 0$ ist, verläuft γ beim zweiten Fall von Null an in der ausgesteiften Lasteinleitungsstelle über ein Maximum, das allerdings wesentlich kleiner ist als beim unausgesteiften Querschnitt.

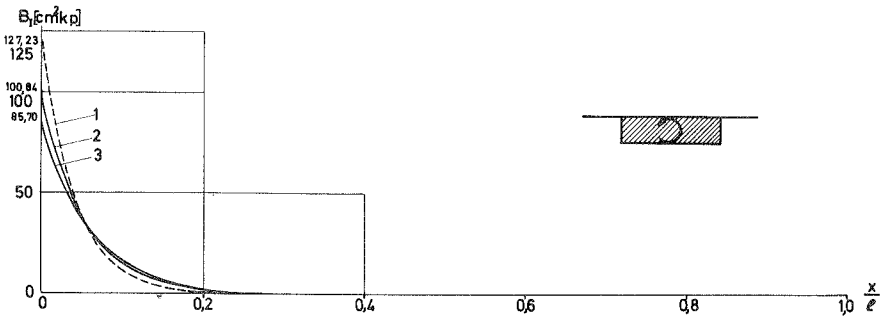
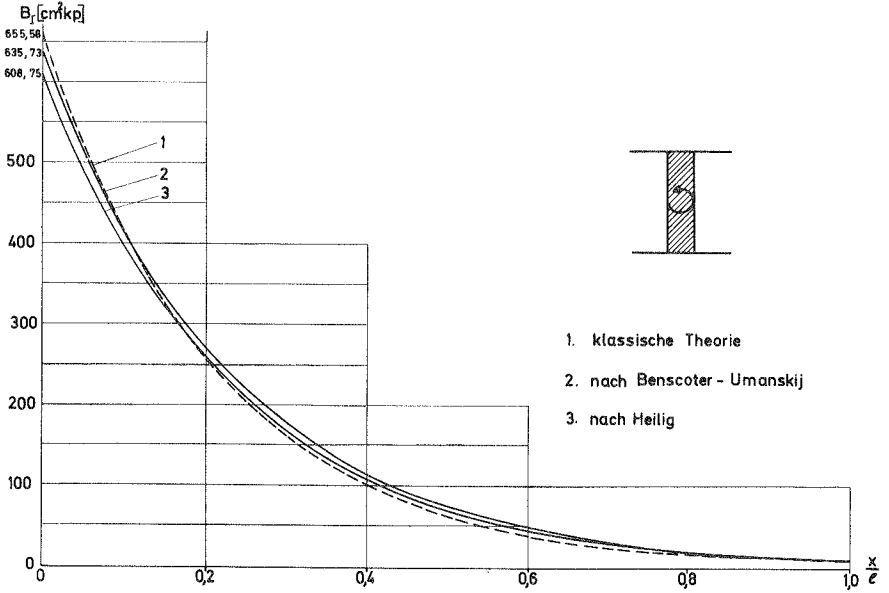
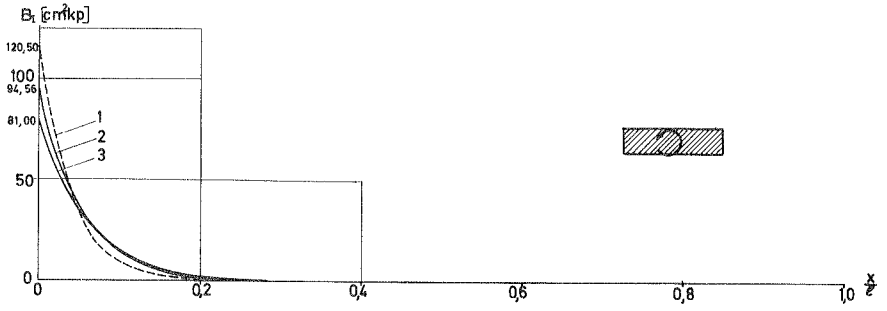


Bild 8.4 Bimoment B_T aus Wölbkrafttorsion (starrer Querschnitt)

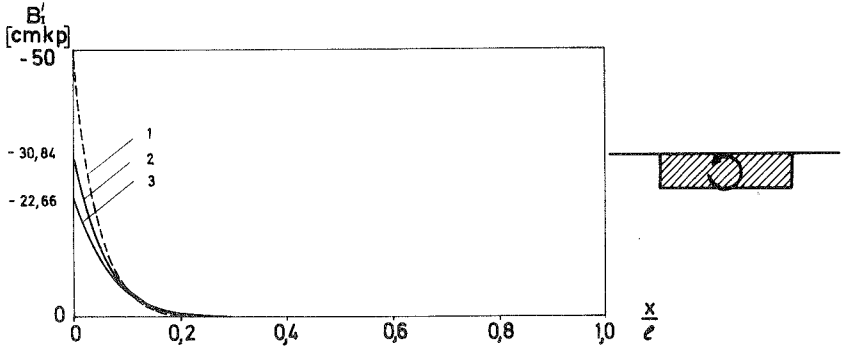
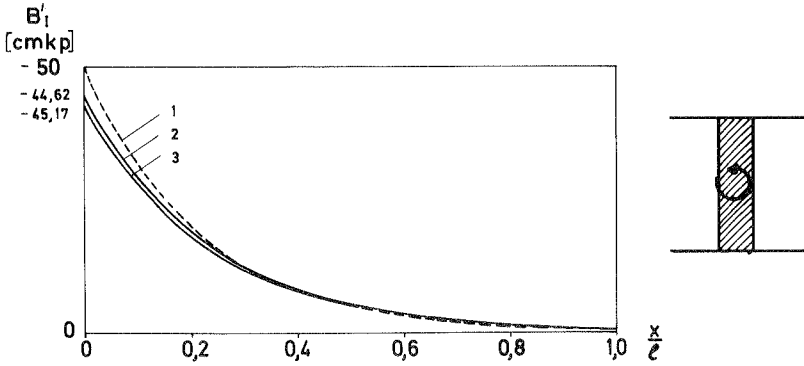
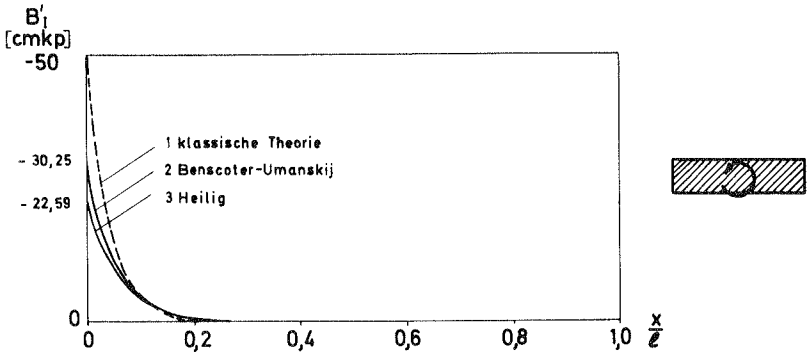


Bild.8.5 B'_I aus Wölbkrafttorsion (starrer Querschnitt)

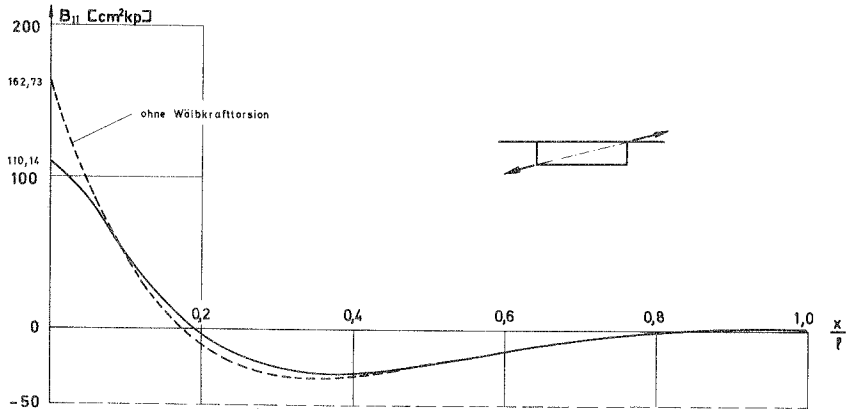
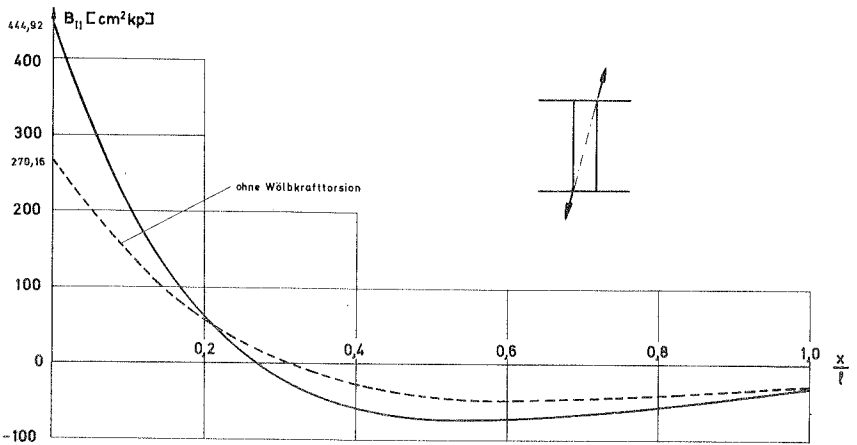
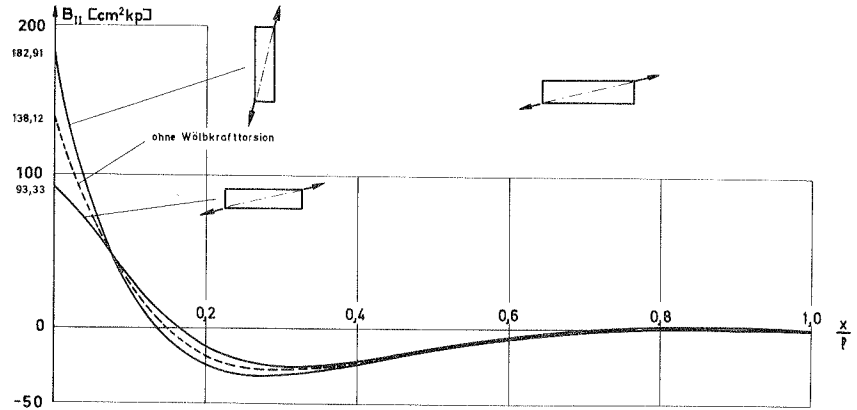


Bild 8.6 Bimoment B_{II} aus Profilverformung
(Fall I: kein Schott)

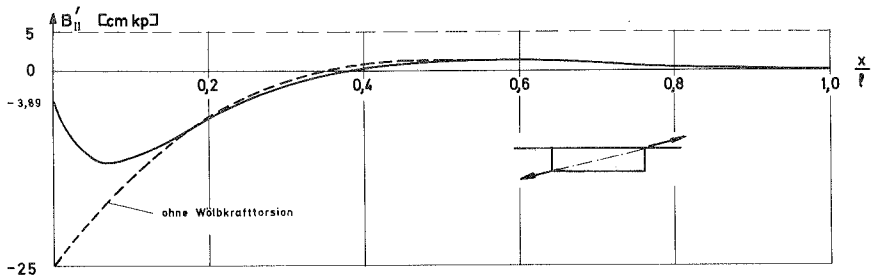
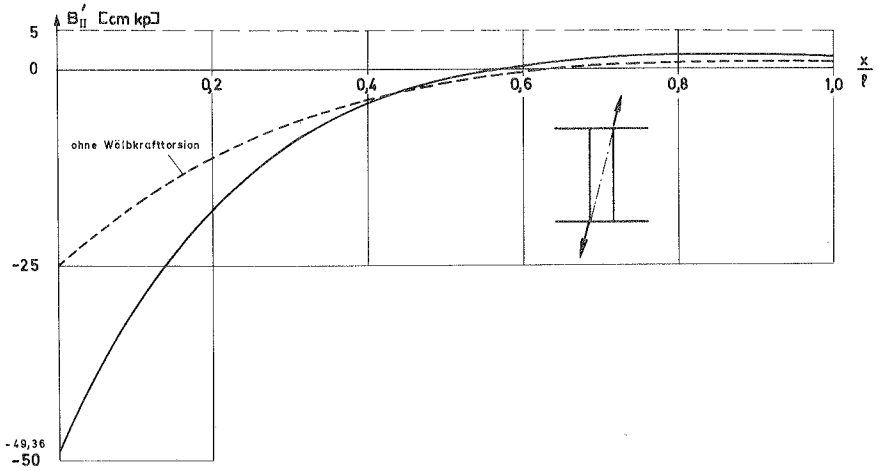
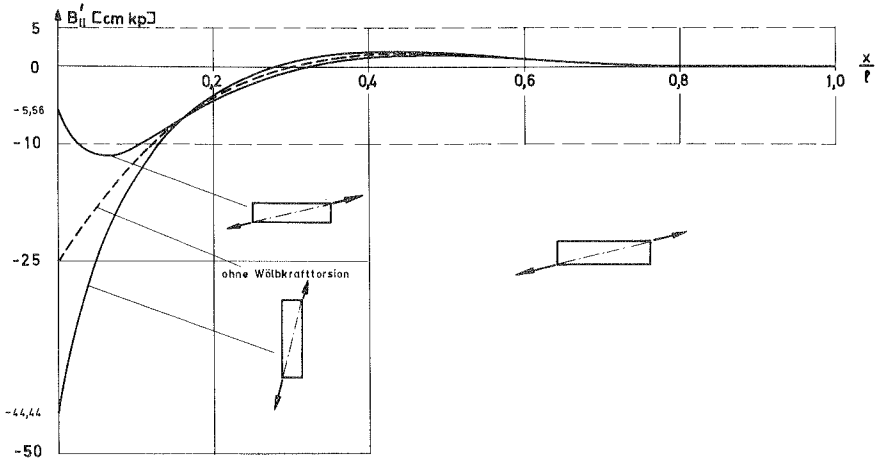


Bild 8.7 B'_{II} aus Profilverformung (Fall I: kein Schott)

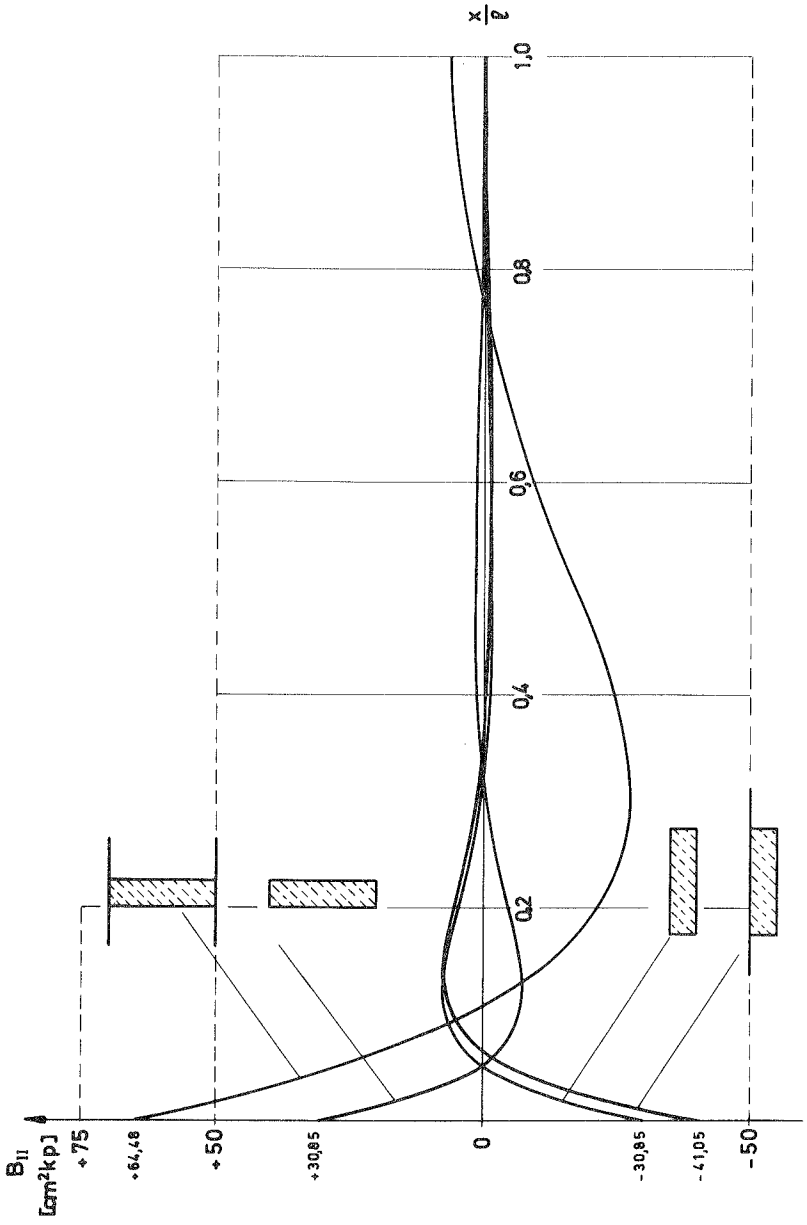


Bild 8.8 Bimoment B_{II} aus Profilverformung (Fall II : ein Schott in Feldmitte)

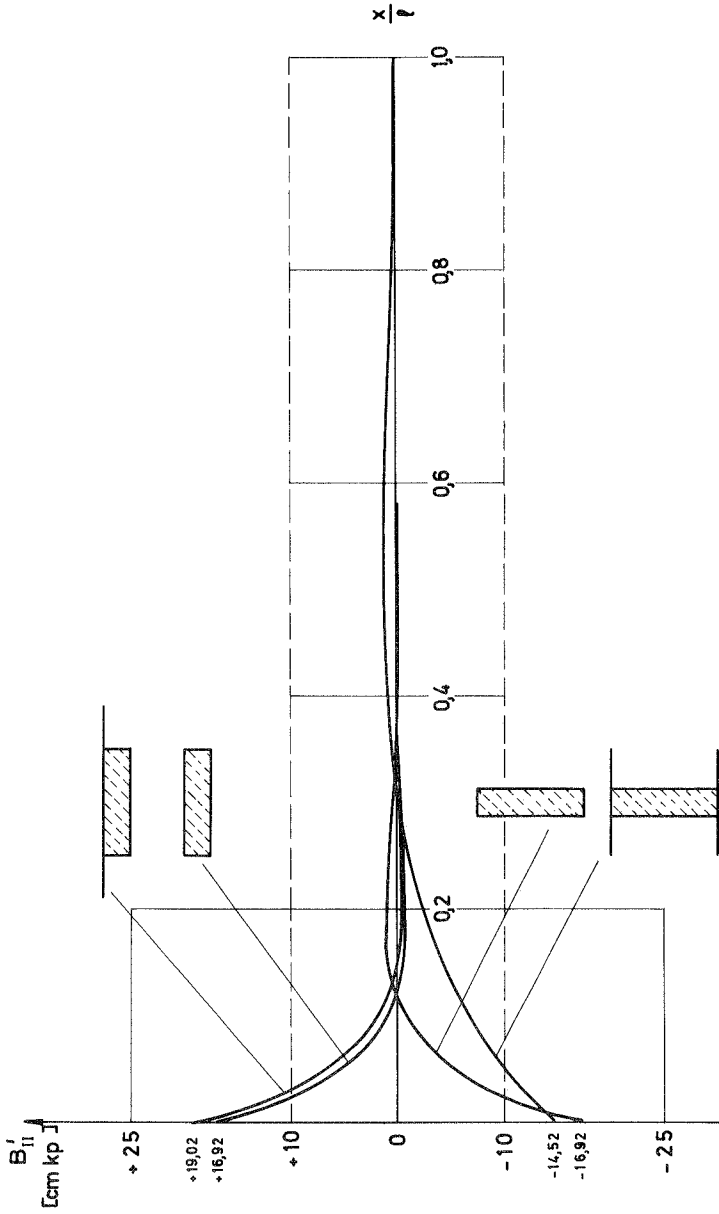


Bild 8.9 B'_{II} aus Profilverformung (Fall II: ein Schott in Feldmitte)

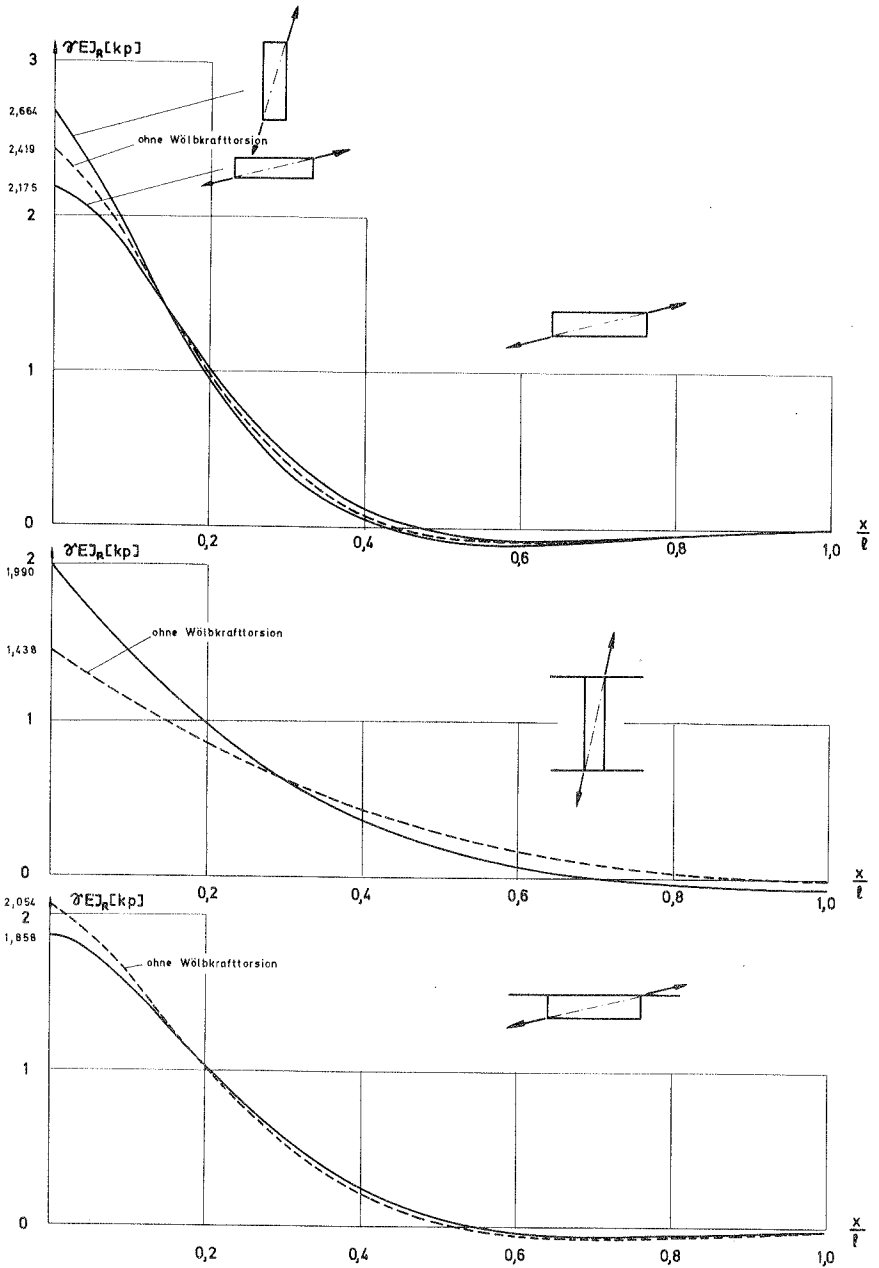


Bild 8.10 EJ_R -facher Verformungswinkel (Fall I: kein Schott)

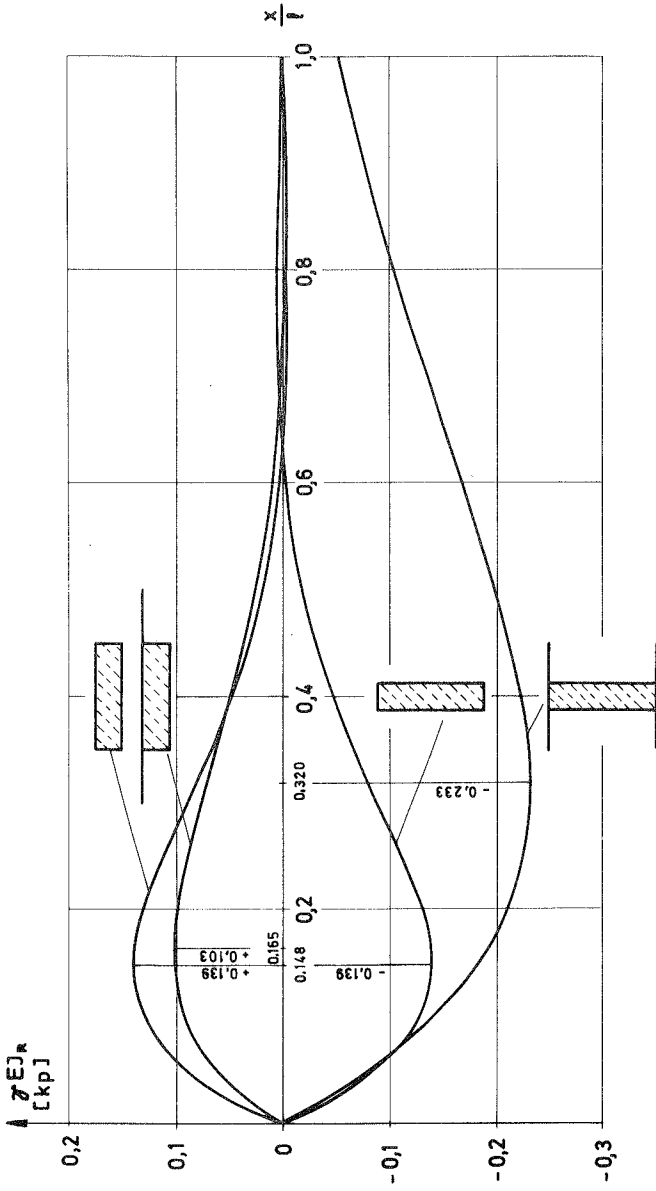


Bild 8.11 EJ_R -facher Verformungswinkel (Fall II: ein Schott in Feldmitte)

8.3 Längsverteilung der Normalspannungen

Die Bimomente allein stellen noch kein Maß für die Beanspruchung des Balkens dar. Ein solches erreicht man erst durch die Darstellung der Spannungsverteilung. Die Normalspannungen lassen sich nun analog zur Biegetheorie, in der

$$\sigma = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Trägheitsmoment}} \times \text{Faserabstand}$$

gilt, ermitteln aus

$$\sigma = \frac{B_I}{J_I} \omega_I + \frac{B_{II}}{W_{II}} \omega_{II} .$$

Da nun aber die ω_I - bzw. die ω_{II} -Verteilung über den Querschnitt im allgemeinen nicht affin zueinander ist (vergl. Bild 8.2 und 8.3) und B_I und B_{II} einen unterschiedlichen Längsverlauf haben, ergibt sich für jede Querschnittsfaser auch eine qualitativ andere Spannungsverteilung entlang des Stabes. Nur beim Sonderfall des doppelsymmetrischen Rechteckkastens (Modell 1) sind die beiden Querschnittsfunktionen ω_I und ω_{II} affin. Hier ist also der Normalspannungsverlauf in einer Kante des Querschnitts charakteristisch für den gesamten Querschnitt.

So wurde in Bild 8.12 der Spannungsverlauf in Kante B für Modell 1 dargestellt, wobei vor allem der Unterschied gezeigt werden soll, der sich ergibt, wenn der Träger bei nicht ausgesteiftem Profil über die hohe Achse ($\varepsilon < 0$) oder aber flach liegend ($\varepsilon > 0$) beansprucht wird. Ein Vergleich mit den Spannungsfunktionen, wie sie sich aus der Wölbkrafttorsion bzw. aus der reinen Profilverformung ergeben, die ebenfalls in Bild 8.12 dargestellt sind, zeigt deutlich die gegenseitige Beeinflussung bzw. Überlagerung von Wölbkrafttorsion und Profilverformung bei nur teilweise oder überhaupt nicht ausgesteiften Querschnitten. Bei einem wölbfreien Querschnitt ($\varepsilon = 0$) würden die in Bild 8.12 mit 3 bezeichneten Kurven mit 4 zusammenfallen sowie die Kurven 1 und 2 verschwinden.

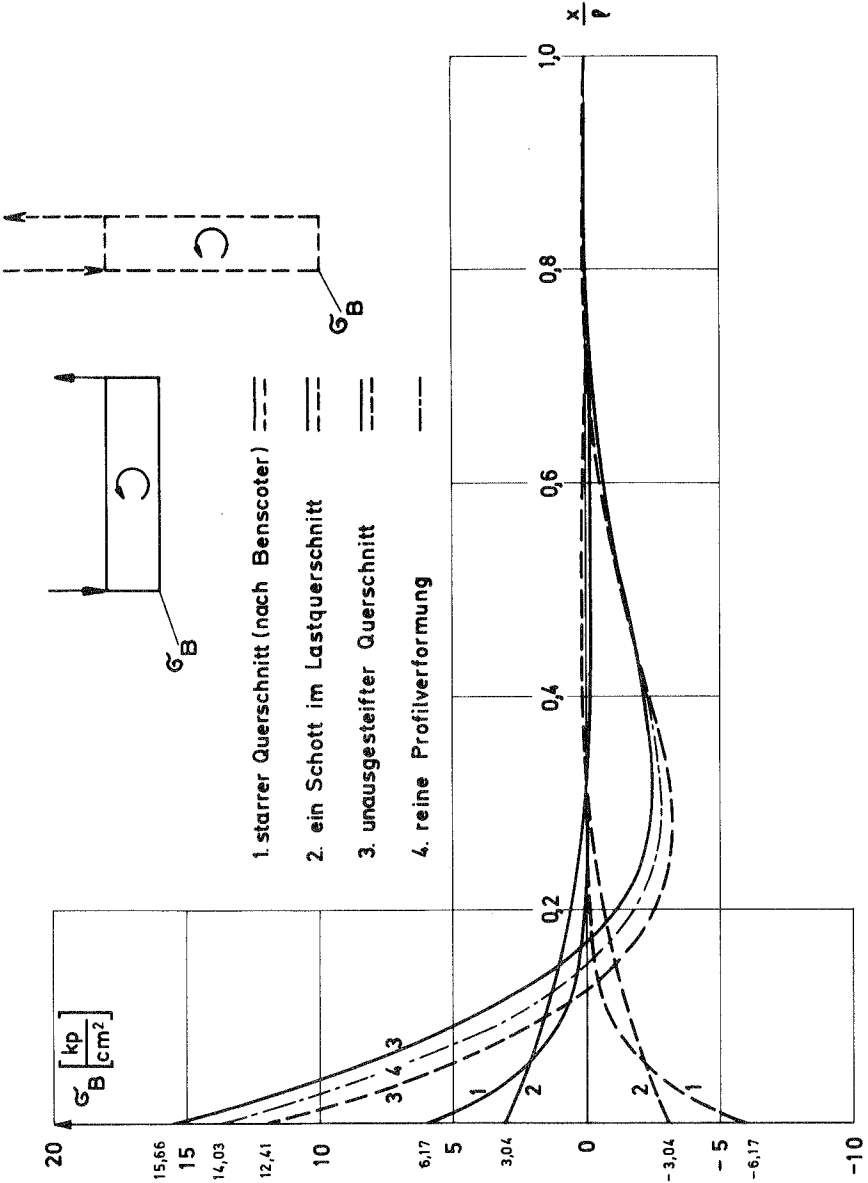
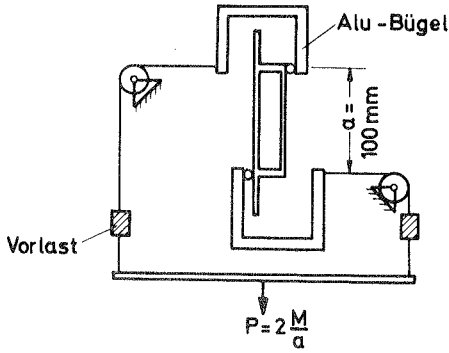
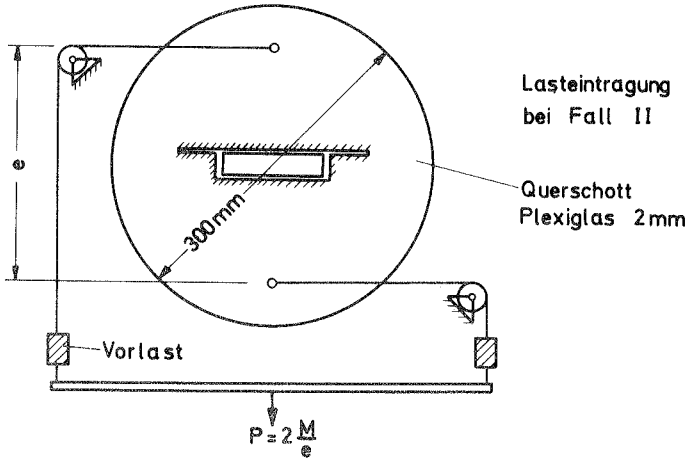


Bild 8.12 Normalspannungsverteilung für einen Kastenquerschnitt (Modell 1)



Lasteintragung bei Fall I



Lasteintragung bei Fall II

Querschott Plexiglas 2 mm

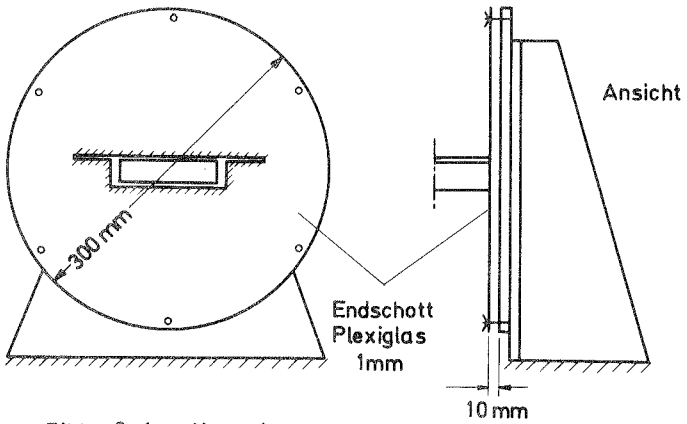


Bild 9.1 Versuchsanordnung

9. Experimentelle Spannungsanalyse

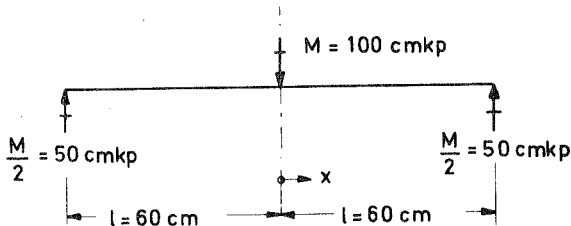
9.1 Versuchsprogramm

Die experimentelle Spannungsanalyse wurde mit Hilfe von elektrischen Dehnmessstreifen (DMS) durchgeführt. Als Modellwerkstoff wurde für Modell 1 und 2 Araldit, für Modell 3 Plexiglas verwendet. Die Länge der Modelle betrug jeweils $2 \times 60 = 120$ cm. Für den Lastfall "Torsionsmoment M in Feldmitte" wurde folgendes Versuchsprogramm durchgeführt:

Fall I (ohne Queraussteifung) : Modell 1 und 3

Fall II (mit Schott in Feldmitte): Modell 1, 2 und 3 *)

In Bild 9.1 ist die Versuchsanordnung der Momenteneinleitung sowie die Ausführung der Endquerschotte am Modell 3 dargestellt. Bild 9.2 zeigt die Systemskizze der Versuchsbalken. Der E-Modul wurde unmittelbar am Modell durch einen Biegeversuch ermittelt.



Fall I und II

Bild 9.2 Systemskizze

*) Die experimentellen Untersuchungen am Modell 3 wurden von Herrn cand.ing. H. Raiszadeh im Rahmen einer Diplomarbeit durchgeführt.

9.2 Versuchsdurchführung und -auswertung

An einem Modell wurden bis zu 100 Meßpunkte untersucht. Um den vollständigen Spannungszustand zu erfassen, waren diese größtenteils mit DMS-Rosetten (5 mm-Meßbasis) beklebt. Die Durchführung eines solchen Meßprogramms war nur möglich durch die Verwendung einer automatischen Meßanlage, die in [16] beschrieben ist. Damit wurde jede Meßstelle bei Unter- und Oberlast abgetastet und die Meßwerte unmittelbar auf Lochstreifen gestanzt. Zur Erhöhung der Genauigkeit wurde viermal periodisch be- und entlastet. Der eigentliche Meßwert ergab sich durch Mittelbildung aus den vier Differenzwerten. Dies erfolgte über eine elektronische Rechenanlage. Hierfür sowie für die vollständige Auswertung der gemessenen Dehnungen wurde ein Algol-Programm erstellt. Damit ließen sich aus den Dehnungen die Koordinatenspannungen ermitteln. Diese wiederum konnten einerseits in Hauptspannungen und deren Richtungen, andererseits in Plattenmomente und Scheibenkräfte umgerechnet werden, da die einzelnen Querschnittsscheiben beidseitig mit Rosetten beklebt waren. Diese Rechnungen wurden ebenfalls auf dem TR 4-Rechner des Recheninstitutes der TH Stuttgart durchgeführt.

9.3 Versuchsergebnisse

In den folgenden Bildern 9.4 - 9.11 sind die für die Kanten der Querschnitte errechneten Normalspannungen (σ_x) bzw. Querbiegemomente (m_s) den gemessenen gegenübergestellt. Der experimentelle Wert ergibt sich aus einer Extrapolation vom eigentlichen Meßpunkt zur jeweiligen Kante unter Annahme einer linearen Spannungsverteilung (s. Bild 9.3). In den Bildern für die Quermomente m_s sind auch die experimentellen Werte für die Plattenmomente in Längsrichtung (m_x) eingetragen, die sich aus den unterschiedlichen σ_x -Spannungen auf der Außen- und Innenseite des Kastens ergeben. Diese Längsmomente in den Wandscheiben ergeben sich aus der Querdehnungsbehinderung. Die damit verbundene erhöhte Quersteifigkeit des Kastens wurde in der Herleitung der Differentialgleichung nur annähernd in (6.2-12) durch den Faktor $1/(1-\mu^2)$ erfaßt. Die m_x -Momente lassen sich näherungsweise aus den μ -fachen m_s -Momenten ($m_x \approx \mu m_s$) errechnen, wie in [17] vorgeschlagen und auch hier wieder durch die Versuche be-

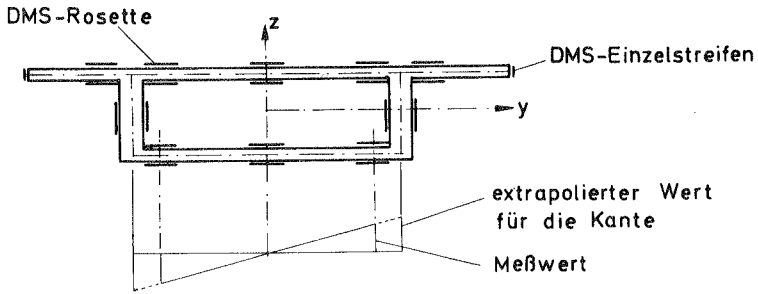


Bild 9.3 Beispiel eines vollbesetzten Meßquerschnitts

stätigt wurde.

In diesem Zusammenhang sei auf die experimentelle Untersuchung eines unausgesteiften Rechteckkastens mit konstanter Wandstärke hingewiesen, über die in [17] berichtet wird. Der dort untersuchte Lastfall entspricht dem hier betrachteten Fall I. Bei dem Vergleich mit der Theorie nach Wlassow scheint aber dort der Einfluß der Wölbkrafttorsion, der über die Randbedingung eingeht, nicht berücksichtigt worden zu sein. Außerdem geht nicht klar hervor, ob bei der dort angewandten Meßmethode (Johansson-Extensometer) der Kasten stets in der gleichen Richtung verformt wurde. Die dort gemessenen σ_x -Spannungen sind kleiner als die für reine Profilverformung errechneten. Dies würde mit der hier dargestellten Theorie übereinstimmen, sofern die Kräfte über die hohe Achse eingeleitet wurden.

Abschließend ist in den Bildern 9.12 - 9.13 der in der Mitte der Kastenwände vorhandene über die Wanddicke konstante Schubfluß dargestellt. Der rechnerische Grenzwert am Balkenende ergibt sich, wenn J_V vernachlässigt wird, zu

$$T_{\varrho} = T_M = \frac{M_T}{2F_B} = - \frac{M}{4F_B} = - 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}} .$$

Bei dem in den Bildern eingetragenen Grenzwert ist J_V mitberücksichtigt.

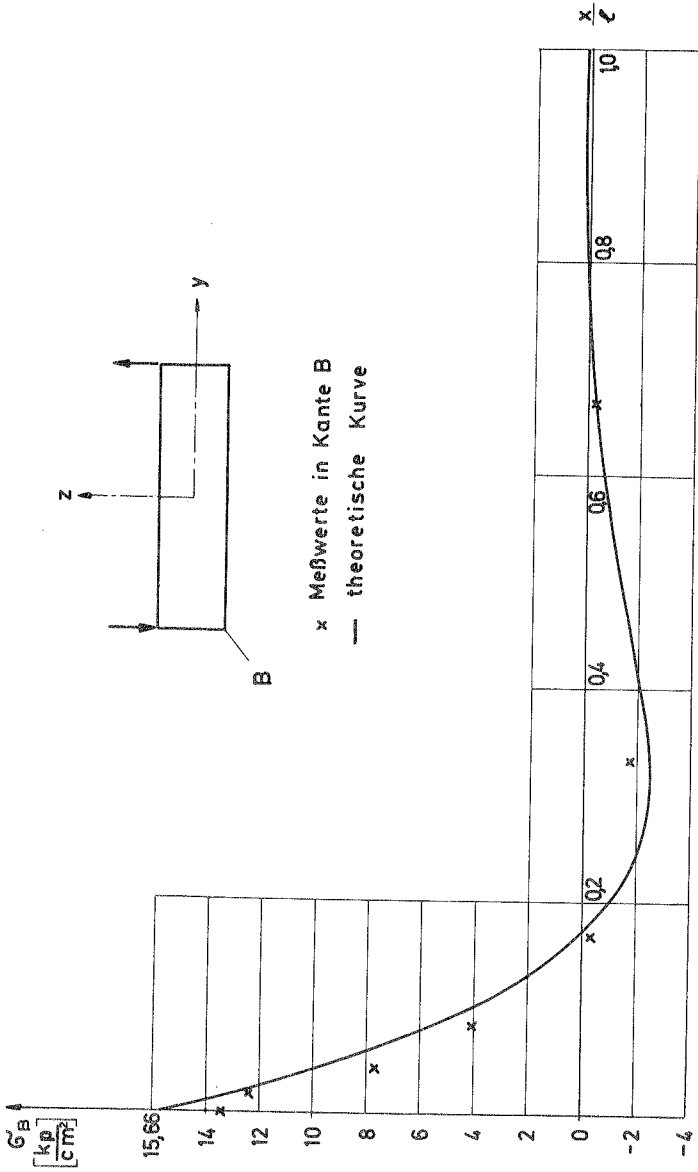


Bild 9.4 Modell 1, Fall I: Normalspannung im Punkt B

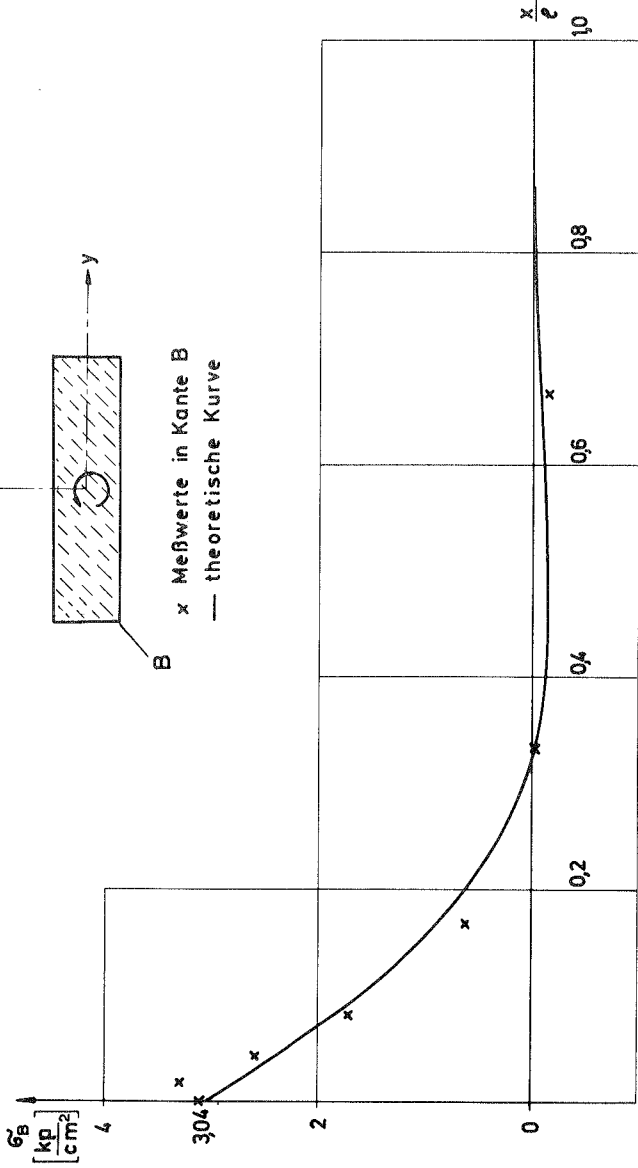


Bild 9.5 Modell 1, Fall II: Normalspannung im Punkt B

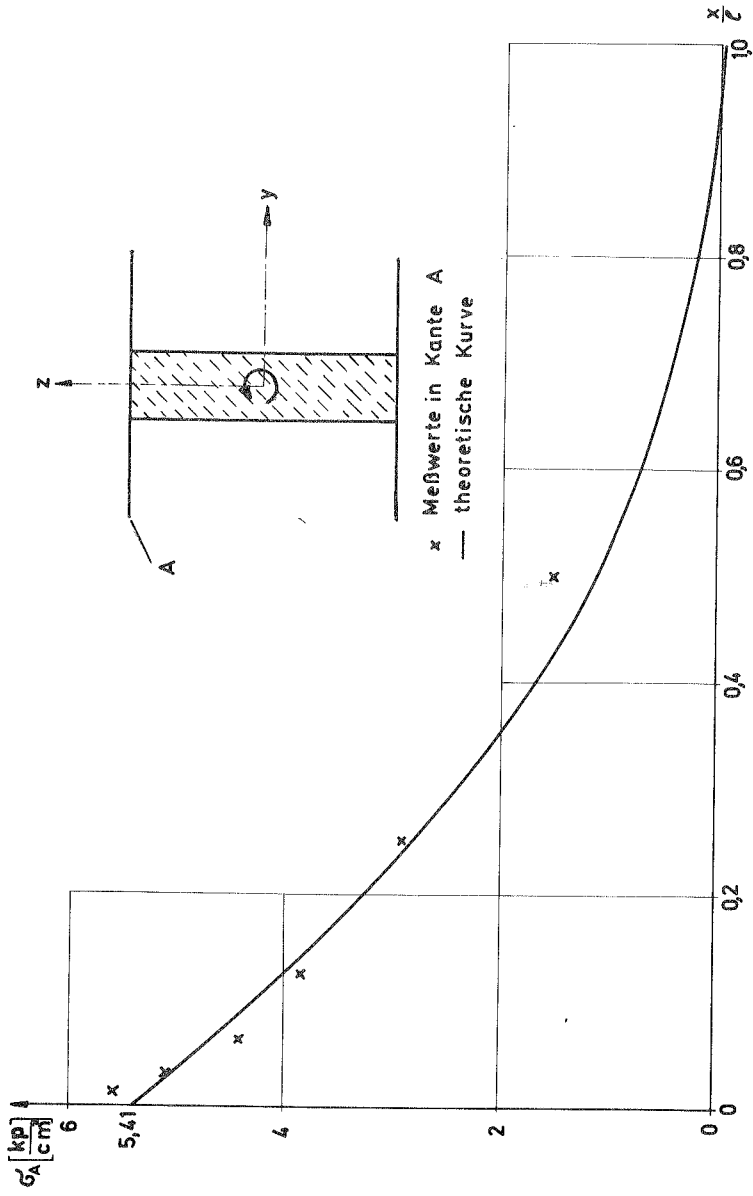


Bild 9.6 Modell 2, Fall II: Normalspannung im Punkt A

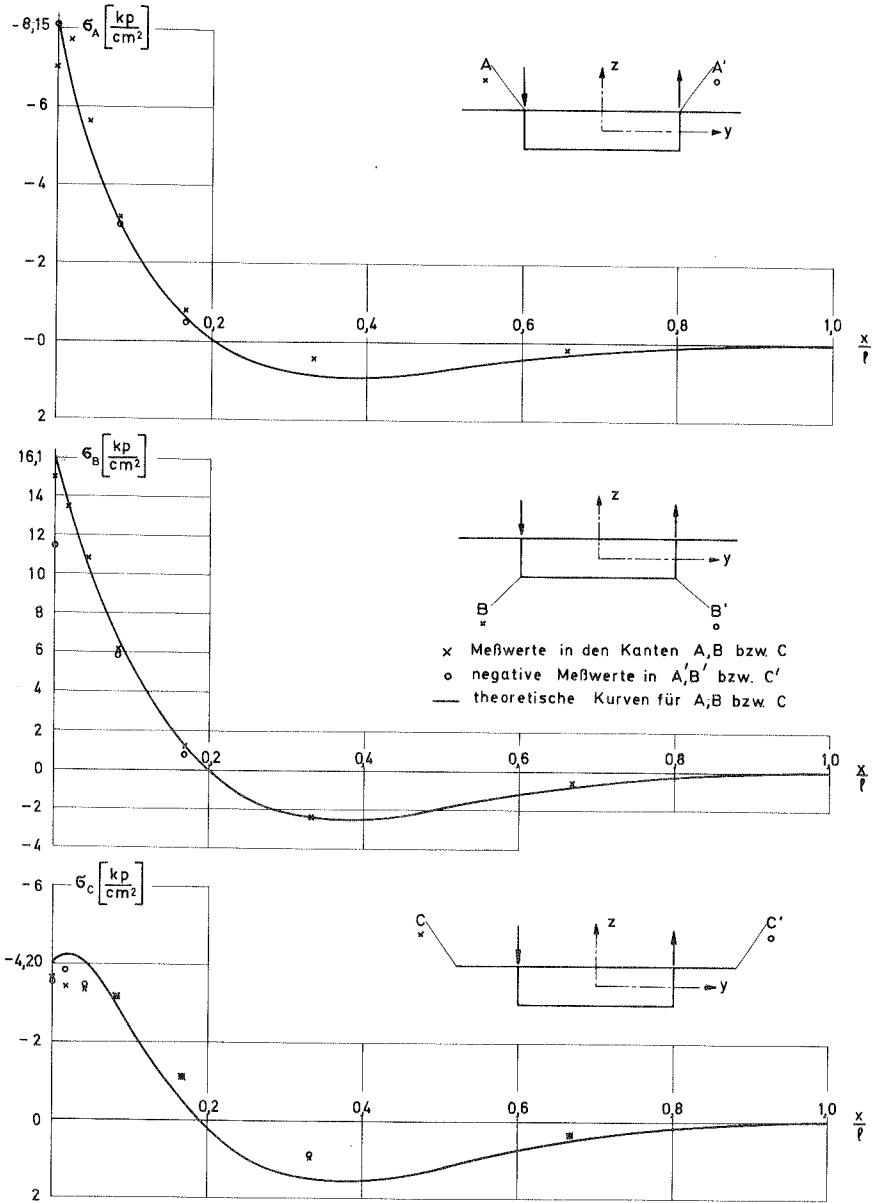


Bild 9.7 Modell 3, Fall I: Normalspannungen in den Punkten A,B und C

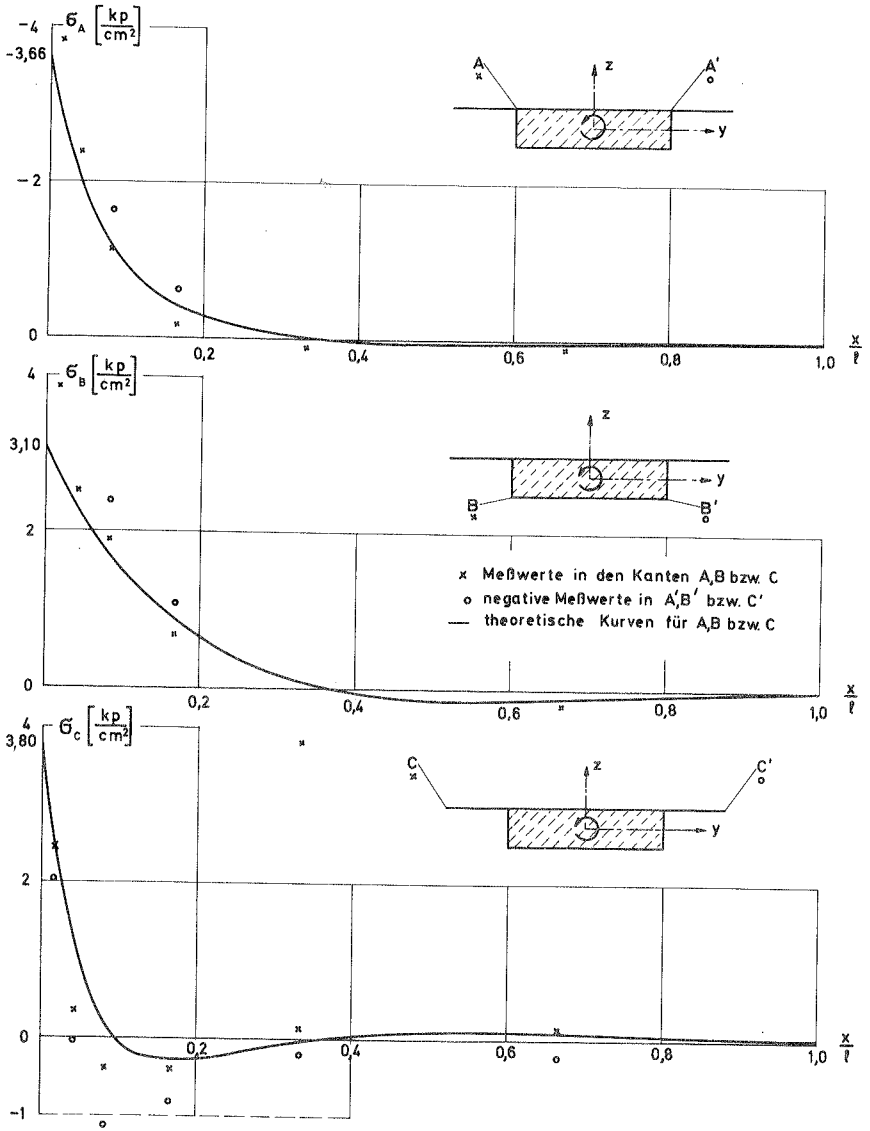


Bild 98 Modell 3, Fall II: Normalspannungen in den Punkten A, B und C

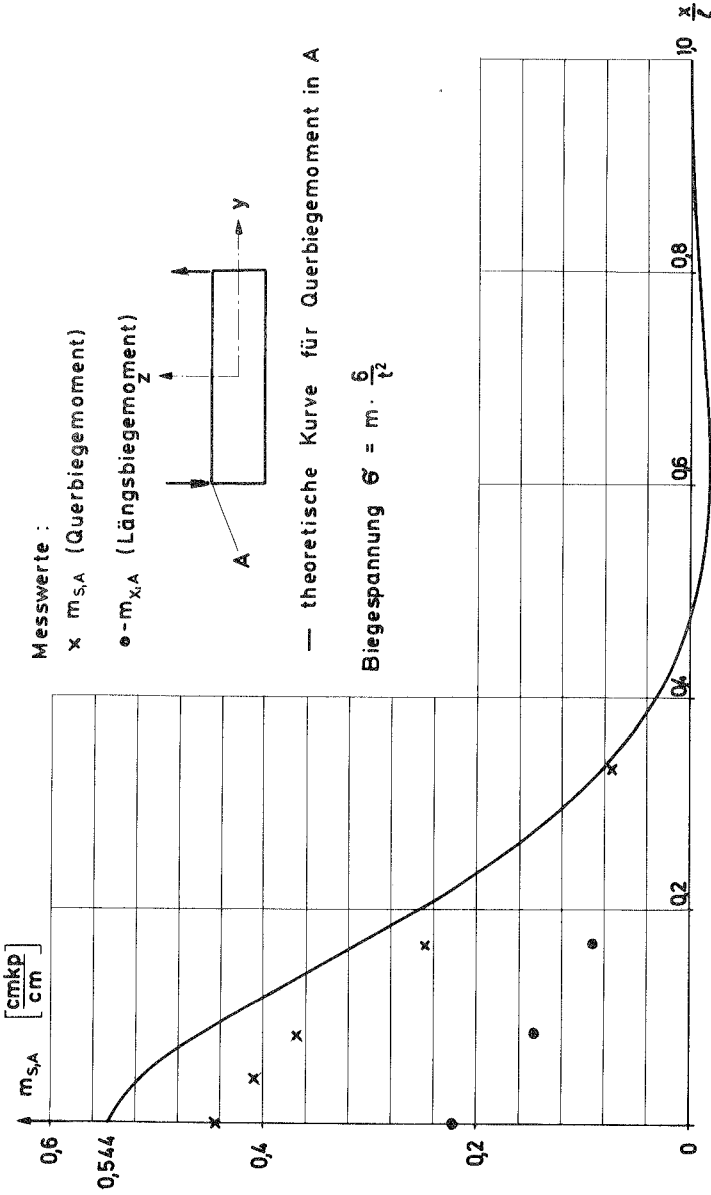


Bild 9.9 Modell 1, Fall I: Querbiegemoment in Kante A

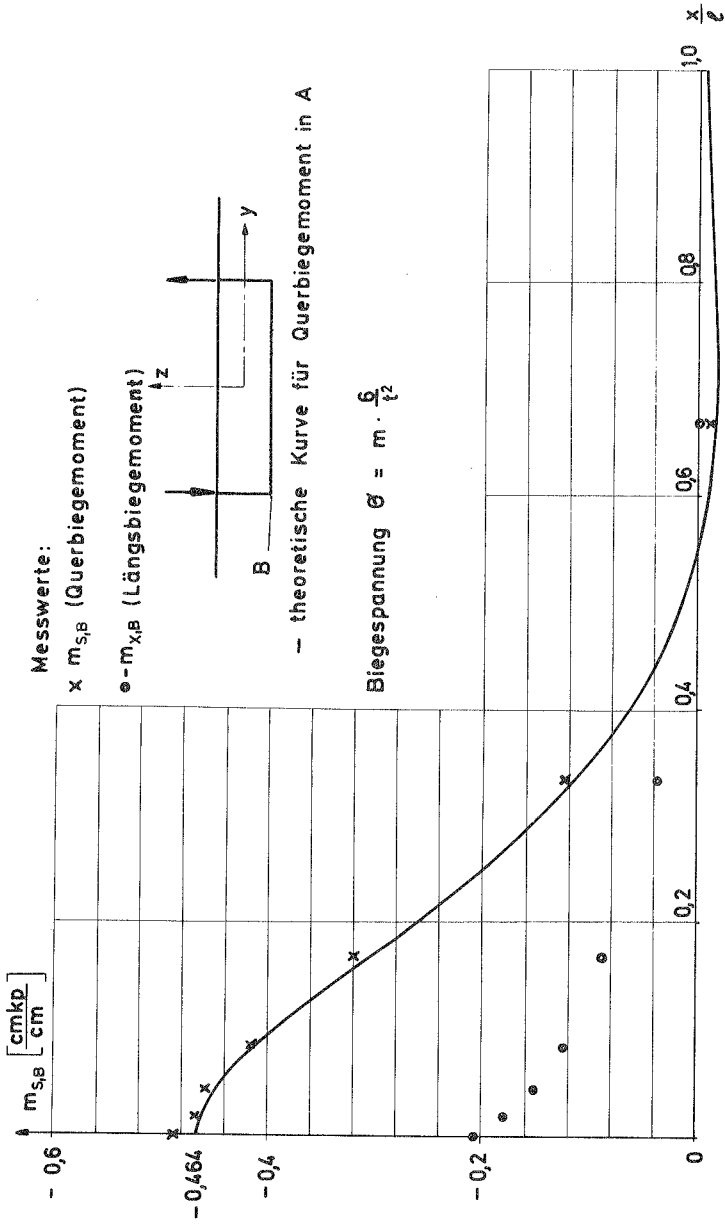


Bild 9.10 Modell 3, Fall I : Querbiegemoment in Kante B

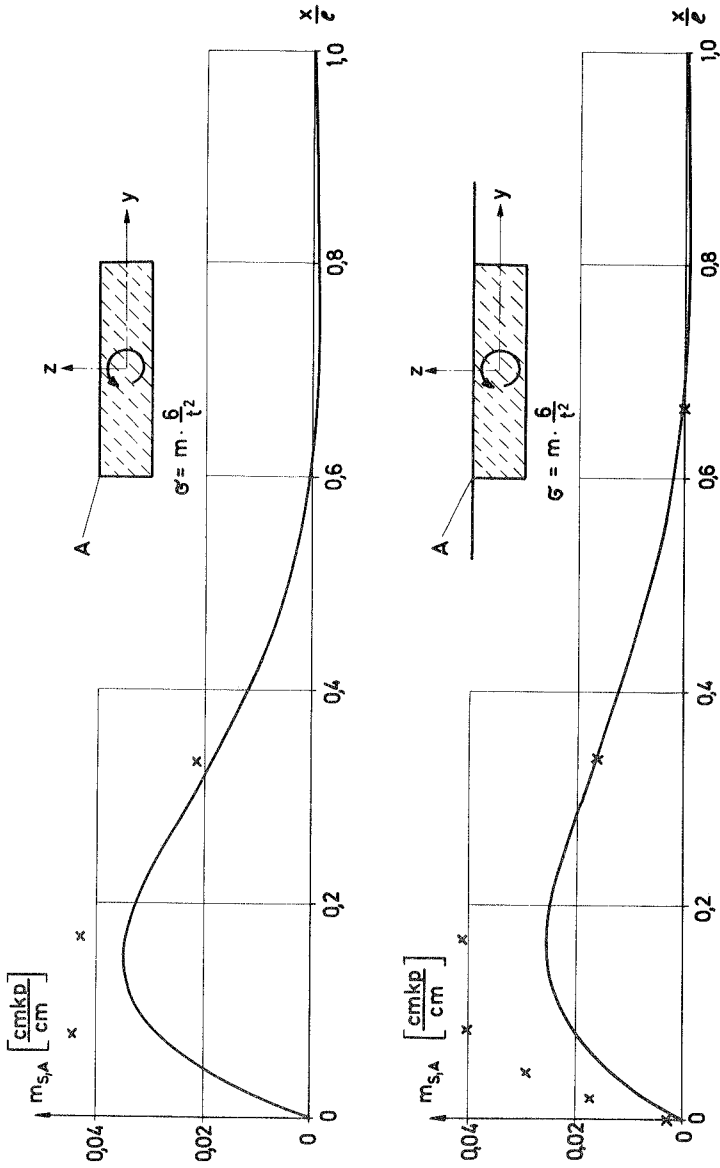


Bild 9.11 Modell 1 und 3, Fall II: Querbiegemomente in Kante A

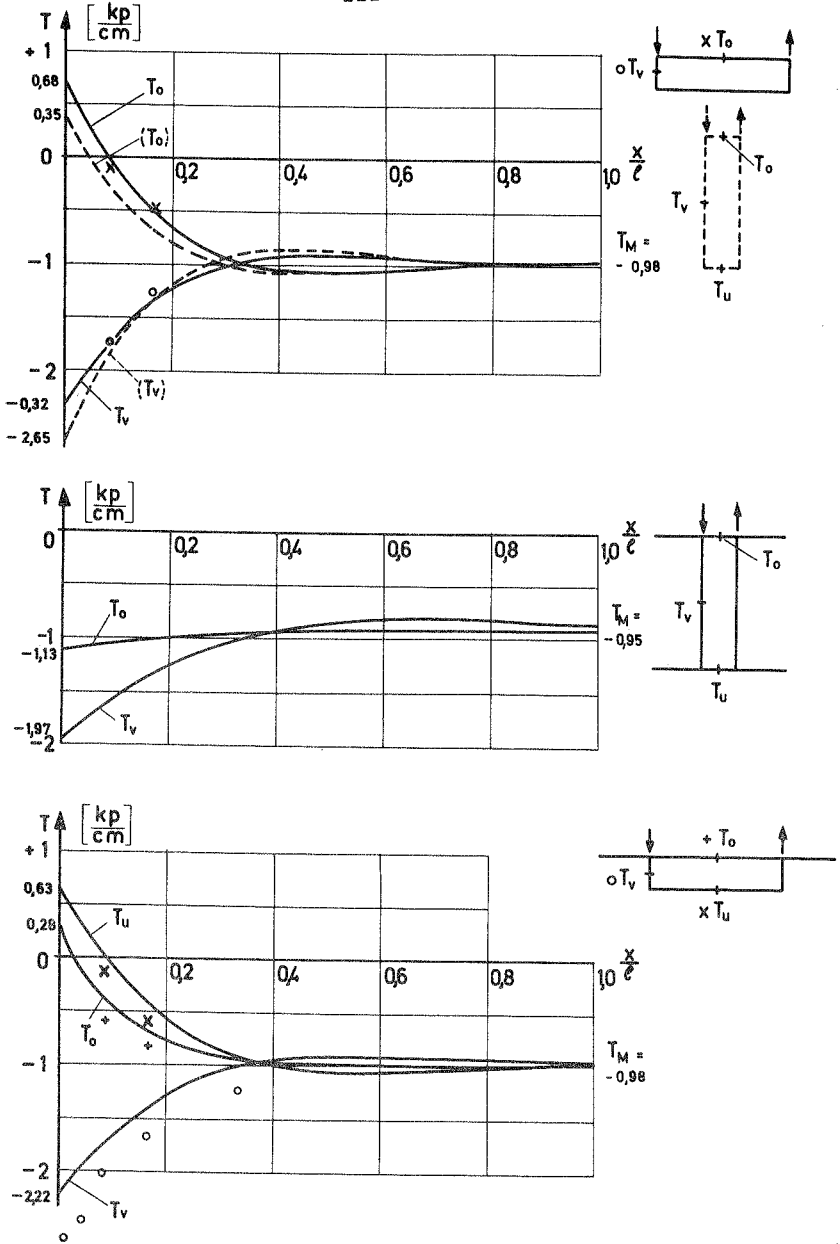


Bild 9.12 Schubfluß T , (Fall I: kein Schott)

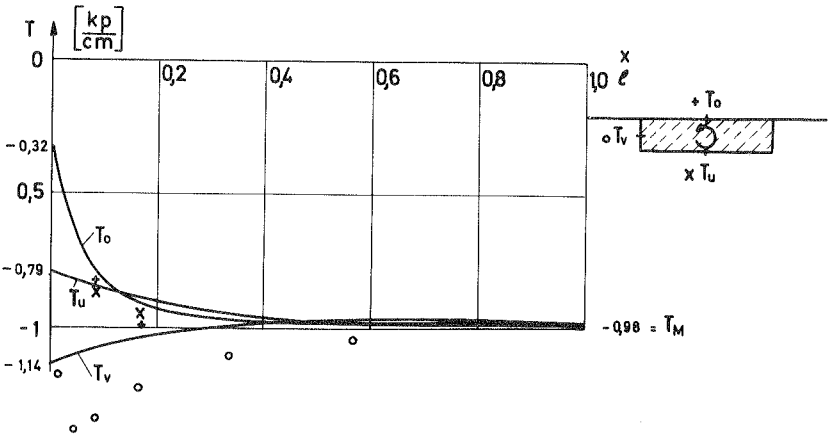
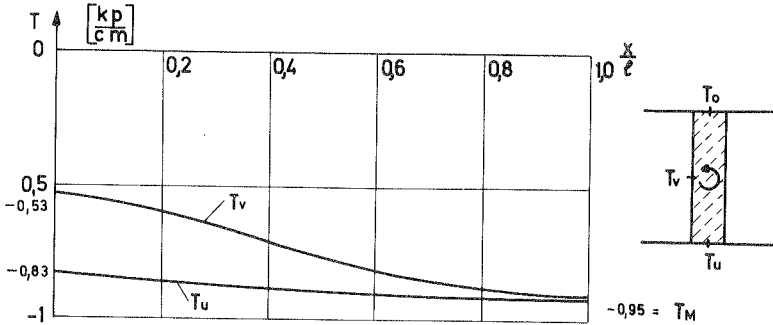
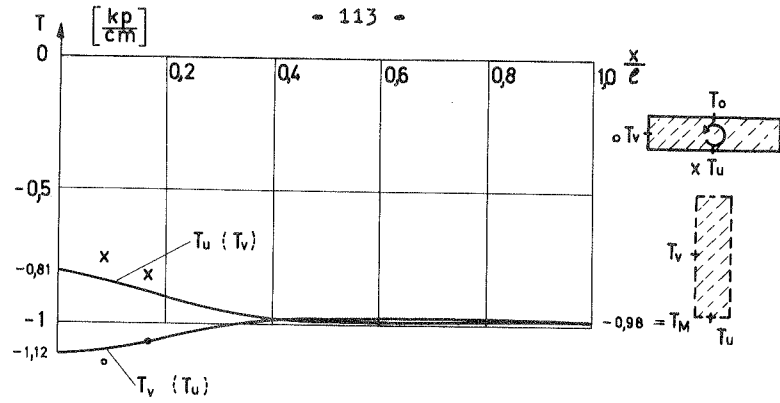


Bild 9.13 Schubfluß T_x (Fall II: ein Schott in Feldmitte)

9.4 Diskussion der Versuchsergebnisse und Hinweise für die Praxis

Wie die theoretischen Lösungen gezeigt haben, handelt es sich bei den durchgeführten Untersuchungen um verhältnismäßig komplizierte Spannungszustände, die vom Lasteintragsquerschnitt an im allgemeinen rasch abklingen. Dies ist bei dem Vergleich von den rechnerischen mit den experimentellen Werten zu berücksichtigen. Außerdem sei noch auf folgende Unterschiede hingewiesen:

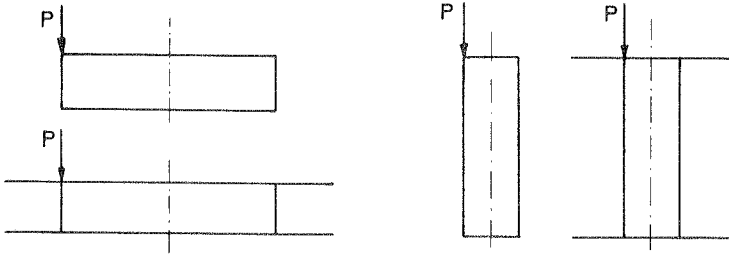
1. Die Theorie setzt für die Profilverformung eine Krafteinleitung voraus, die einer parabolischen Schubflußverteilung in der jeweiligen Scheibe entspricht. Außerdem soll das Torsionsmoment über einen konstanten Schubfluß eingeleitet werden. Dies lässt sich im Versuch, vor allem bei Fall I, nicht verwirklichen und beeinflusst somit die Spannungsverteilung im Bereich der Krafteinleitung.
2. In der Theorie für die Profilverformung wurde die Plattensteifigkeit der Kastenwände in Längsrichtung nur näherungsweise erfasst und deren Eigendrillsteifigkeit ganz vernachlässigt.
3. Die den experimentellen Werten gegenübergestellten theoretischen Kurven sind für einen unendlich langen Träger gerechnet und bis $x/\ell = 1$, mit $\ell = 60$ cm (halbe Trägerlänge), aufgetragen. Daraus folgt, daß am Trägerende teilweise (vor allem bei Modell 2 mit $\lambda_{II} \ell \approx 2,5$) die einzelnen rechnerischen Werte noch nicht voll abgeklungen sind.
4. Bei dem infolge des Schotts wesentlich steiferen Fall II sind die zusätzlichen Spannungen aus Wölbbehinderung und Profilverformung um ein mehrfaches kleiner als bei Fall I (siehe z.B. Bild 8.12). Da beim Versuch neben diesen Zusatzspannungen

gen auch die bei beiden Fällen gleich großen primären Torsionsschubspannungen an den Endschotten mitbestimmend waren bei der Wahl der Lastgröße, ergaben sich die bei beiden Fällen auf ein Moment von 100 cmkp bezogenen experimentellen Werte bei Fall II aus wesentlich kleineren Dehnungen. Dadurch geht ein absoluter Fehler im einzelnen Meßwert prozentual höher ein.

Berücksichtigt man diese Unterschiede in der theoretischen und experimentellen Spannungsanalyse, so läßt sich aus dem Vergleich der Ergebnisse eine Übereinstimmung feststellen, die die Brauchbarkeit der Berechnungsmethode für derartige in der Praxis auftretende Fälle genügend bestätigt. Dafür ist vor allem der maximale Wert unter der Last und das charakteristische Abklingverhalten des jeweiligen Spannungswertes maßgebend.

Inwieweit es nun in der Praxis nötig sein wird, derartige Spannungszustände im einzelnen zu untersuchen, hängt von verschiedenen Faktoren ab. Dabei ist grundsätzlich zu überlegen, in welchem Verhältnis die Spannungen aus Torsion zu denen aus Biegung voraussichtlich stehen werden.

So wird im Brückenbau bei geraden Trägern mit symmetrischen Querschnitten die Torsionsbeanspruchung hauptsächlich durch außermittige Verkehrslasten p hervorgerufen. Es ist also zuerst festzustellen, wie sich die Biegespannungen infolge p (σ_p) zu denen infolge ständiger Last (σ_g) verhalten. Bei gleicher Spannweite, gleichem Materialaufwand und gleicher Materialausnutzung wird das Verhältnis von σ_p/σ_g bei einem hohen Träger größer sein als bei einem flachen. Für die zusätzlichen Torsionsspannungen ist aber nicht die Verkehrslast p an sich, sondern deren Abstand von der Symmetrieachse maßgebend. Dieser wiederum wird bei flachen Trägern größer sein können als bei hohen. Es ist also nicht möglich, von dieser Betrachtungsweise her allgemeingültige Aussagen zu machen.



Grundsätzlich kann man sagen: Handelt es sich um einen nicht aus-
gesteiften Querschnitt (Fall I), wird man die Profilverformung
stets berücksichtigen müssen, schon allein deswegen, um die Bean-
spruchung des Kastens in Querrichtung erfassen zu können. Dabei
kann bei entsprechend langen Trägern mit geschlossenen Kasten-
querschnitten ohne Konsolen der Einfluß der Schubverformungen und
damit der Einfluß der Wölbkrafttorsion im allgemeinen vernachlässigt
werden, d.h. $\kappa = \alpha = \varepsilon = \zeta_x = 0$ (vgl. Bild 8.12, Kurven 3
gehen über in 4). Die Schubspannungen selbst infolge reiner Tor-
sion, die für das Gleichgewicht maßgebend sind, sind damit natür-
lich nicht verschwunden.

Ist ein derartiger Kastenträger im Lastquerschnitt durch ein
Schott ausgesteift, kann der Einfluß der Schubverformungen auf
die Spannungsverteilung ebenfalls unberücksichtigt bleiben, wo-
raus $\zeta_x = \zeta_{\bar{x}} = 0$ folgt. Die damit vernachlässigten Normal- und
Schubspannungen sind wesentlich kleiner als die für einen starren
Querschnitt nach der Theorie der Wölbkrafttorsion berechneten
(vgl. Bild 8.12, Kurven 1 und 2, und Bild 9.13), die im allge-
meinen bisher schon als vernachlässigbar galten. Andererseits ist
aber gerade für derartige Kastenprofile, sofern sie doppel-sym-
metrisch sind, eine Berechnung mit sämtlichen hier untersuchten
Einflüssen sehr einfach durchzuführen, wie sich aus Abschnitt
6.3.4 ergibt.

Bei geschlossen-offenen Profilen liegt der Fall komplizierter. Ist der Querschnitt mit Konsolen entsprechend Modell 3 ausgebildet, d. h., die offenen Teile liefern einen geringen Beitrag zur Wölbsteifigkeit, so können im allgemeinen die gleichen Vereinfachungen getroffen werden wie für reine Kastenprofile. Bei Querschnitten, deren offene Teile dagegen einen großen Einfluß auf die Wölbsteifigkeit haben, wie z.B. bei Modell 2, ist die Wölbkrafttorsion und deren Einfluß auf die Profilverformung im allgemeinen nicht mehr zu vernachlässigen.

10. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Hohlkastenträger mit Konsolen, d.h. Träger mit geschlossen-offenem Querschnitt, mit verformbarem biegesteifem Profil für den Fall untersucht, daß ein Einzeltorsionsmoment in Feldmitte angreift. Während im Stahlbau der Querschnitt im allgemeinen durch einen engen Schottabstand in seiner Form gehalten wird, werden im Stahlbeton- und Spannbetonbau meist nur wenige oder gar keine Schotte im Feld angeordnet, so daß die äußeren Kräfte nicht nur über Wölbkrafttorsion, sondern vielmehr über Querbiegung, hier mit Profilverformung bezeichnet, abgetragen werden.

In dieser Arbeit wird von einem Faltwerksansatz ausgegangen, wobei die Schubverformungen mitberücksichtigt werden. Dem Faltwerk werden aber nur die profilverformenden Kräfte zugewiesen, während das Torsionsschnittmoment von vornherein abgespalten wird und mit Hilfe der Theorie der Wölbkrafttorsion berechnet wird. Auf das Faltwerk wirken dann noch als zusätzliche profilverformende Belastung die sich in Stablängsrichtung ändernden Schubkräfte aus der Wölbkrafttorsion. Da für deren Berechnung nur die verfeinerten Theorien der Wölbkrafttorsion, welche die Verformungen aus den Wölbschubspannungen mitberücksichtigen, in Frage kommen, wird einleitend bzw. im Anhang eine kurze Darstellung dieser Theorien gegeben, da sie nur teilweise im deutschsprachigen Schrifttum zu finden sind.

Gegenüber den im allgemeinen für die Bemessung maßgebenden Biegespannungen haben die Normalspannungen aus Wölbkrafttorsion und Profilverformung nur die Bedeutung von Nebenspannungen. Da sie außerdem von der Lasteintragungsstelle an im allgemeinen rasch abklingen, wird die Lösung der charakteristischen Differentialgleichung, die in geschlossener Form für den Balken mit endlicher Länge angegeben werden kann, nur für den nach beiden Seiten unendlich langen Balken weiter untersucht. Die Ergebnisse können für die in der Praxis vorliegenden Verhältnisse im allgemeinen ohne Einschränkung angewandt werden.

In der Arbeit wird unterschieden zwischen Lasteintragung unmittelbar über den unausgesteiften Querschnitt oder über ein starres Querschott, wodurch der Querschnitt unter der Last in seiner Form erhalten bleibt. Durch Grenzbetrachtungen lassen sich die Lösungen dieser beiden Fälle auf die Theorie des auf reine Profilverformung beanspruchten Faltnetzes bzw. auf die Theorie der Wölbkrafttorsion zurückführen.

Abschließend werden die theoretischen Ergebnisse experimentellen Werten gegenübergestellt. Es werden drei charakteristische Querschnittsformen untersucht. Der Vergleich zeigt die Richtigkeit der in der Theorie getroffenen Annahmen.

Anhang

A Ableitung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

A.1 Ableitung der DGL. nach Heilig [4] (vgl. auch [15])

Aus Gleichung (4.3-1) ergibt sich

$$\varphi' = \vartheta + \vartheta_s \quad (\text{A.1-1})$$

mit
$$\vartheta_s = \frac{M_s}{\nu G J_T} ,$$

wobei ϑ_s der Anteil der Schubverformung zur Verwindung φ' ist. Die Wölbschubsteifigkeit ($\hat{=}$ Schubsteifigkeit in der Biegetheorie) $= \nu G J_T$ wird in der klassischen Theorie als unendlich groß betrachtet.

Nun wird der Formbeiwert $1/\nu$ als energetisches Mittel bestimmt. Dies geschieht durch Vergleich der Formänderungsarbeit $-dA_i$, welche die ungleichmäßig über den Querschnitt verteilten Schubspannungen am Volumelement $dF dx$ leisten, mit der äußeren Arbeit dA_a , die von je zwei virtuellen sekundären Torsionsmomenten M_s an den Enden des betrachteten Stabelementes von der Länge dx an dem über den gesamten Querschnitt konstant angenommenen Verwindungsanteil ϑ_s geleistet wird.

$$\begin{aligned} -dA_i &= \int_F \int_{\tau_s} \tau_s d\gamma dF dx = \iint_F \tau_s \frac{d\tau_s}{G} dF dx \\ &= \frac{1}{2G} \int_F \tau_s^2 dF dx , \end{aligned} \quad (\text{A.1-2})$$

$$\begin{aligned} dA_a &= \int_{\vartheta_s} M_s d\vartheta_s dx = \nu G J_T \int_{\vartheta_s} \vartheta_s d\vartheta_s dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{\nu G J_T} dx , \end{aligned} \quad (\text{A.1-3})$$

$$dA_i + dA_a = 0 . \quad (\text{A.1-4})$$

Nach Gleichung (4.2-15) ist mit $B_I' \equiv M_s$ und $\tau_s = \frac{T_s}{t}$

$$\tau_s = - \frac{M_s}{J_x t} (S_x - \phi_s) .$$

τ_s eingesetzt in (A.1-4) ergibt

$$\frac{1}{\nu} = \frac{J_T}{J_x^2} \int_F (S_x - \phi_s)^2 \frac{ds}{t} . \quad (\text{A.1-5})$$

Die Gleichungen für die einzelnen Schnittkräfte lauten zusammengefaßt mit (4.2-1), (A.1-1) und - entsprechend angewandt - (3.2-5):

$$B_x = -EJ_x \varrho' , \quad (\text{a})$$

$$\left. \begin{aligned} M_{RB} &= GJ_B \varphi' \\ M_{Pv} &= GJ_v \varphi' \end{aligned} \right\} M_P = GJ_T \varphi' , \quad (\text{b})$$

$$(\text{c})$$

$$M_s = \nu GJ_T (\varphi' - \varrho) . \quad (\text{d})$$

Das gesamte Torsionsschnittmoment ergibt sich demnach zu

$$M_T = M_P + M_s = (1 + \nu) GJ_T \varphi' - \nu GJ_T \varrho . \quad (\text{A.1-7})$$

Hieraus wird

$$\varphi' = \frac{M_T}{(1 + \nu) GJ_T} + \frac{\nu}{1 + \nu} \varrho \quad (\text{A.1-8})$$

$$\text{bzw. mit } \kappa_1 = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad \text{und} \quad 1 + \nu = \frac{1}{1 - \kappa_1} : \quad (\text{A.1-9})$$

$$\varphi' = (1 - \kappa_1) \frac{M_T}{GJ_T} + \kappa_1 \varrho . \quad (\text{A.1-10})$$

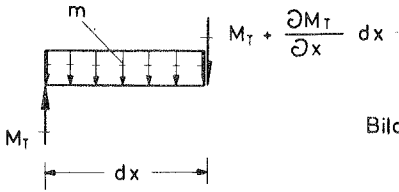


Bild A.1 Stabelement

Aus der Gleichgewichtsbedingung (Bild A.1)

$$M_T' + m = 0 \quad (\text{A.1-11})$$

und der Beziehung $B_I' \equiv M_S$ ergibt sich mit (A.1-6) und (A.1-7) ein Differentialgleichungssystem mit φ und ϑ :

$$(1+\nu) GJ_T \varphi'' - \nu GJ_T \vartheta' = -m, \quad (\text{A.1-12})$$

$$-EJ_I \vartheta'' - \nu GJ_T \varphi' + \nu GJ_T \vartheta' = 0. \quad (\text{A.1-13})$$

Nun wird (A.1-13) differenziert

$$-EJ_I \vartheta''' - \nu GJ_T \varphi'' + \nu GJ_T \vartheta' = 0. \quad (\text{A.1-14})$$

(A.1-12) und (A.1-14) addiert ergibt

$$-EJ_I \vartheta''' + GJ_T \varphi'' = -m. \quad (\text{A.1-15})$$

Wird nun (A.1-1) differenziert und für $M_S' \equiv B_I''$ die zweimal differenzierte Gleichung (A.1-6a) eingesetzt, ergibt sich die Beziehung zwischen φ und ϑ :

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \vartheta' + \frac{M_S'}{\nu GJ_T} = \vartheta' + \frac{B_I''}{\nu GJ_T} \\ &= \vartheta' - \frac{EJ_I}{\nu GJ_T} \vartheta'''. \end{aligned} \quad (\text{A.1-16})$$

Dies in (A.1-15) eingesetzt ergibt

$$EJ_x \vartheta''' - GJ_T \vartheta' + \frac{EJ_x}{\nu} \vartheta''' = m .$$

Durch Zusammenfassen erhält man

$$\left(\frac{1}{\nu} + 1\right) EJ_x \vartheta''' - GJ_T \vartheta' = m$$

und daraus die endgültige Differentialgleichung

$$\vartheta''' - \chi_1 \frac{GJ_T}{EJ_x} \vartheta' = \chi_1 \frac{m}{EJ_x} . \quad (\text{A.1-17})$$

Mit (A.1-6a) lässt sich auch schreiben

$$B_x'' - \chi_1 \frac{GJ_T}{EJ_x} B_x = - \chi_1 m . \quad (\text{A.1-18})$$

A.2 Ableitung der DGl. nach Umanskij [6]

Die schon bei der reinen Torsion verwendete allgemeine Beziehung (3.2-3) gilt auch bei der Wölbkrafttorsion

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau}{G} - \chi_T \vartheta' , \quad (\text{A.2-1})$$

bei sich hier nun τ aus $\tau_M + \tau_x$ zusammensetzt. Mit (4.2-10) gibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{M_T}{2F_B G t} - \frac{B_x'}{GJ_x t} (s_x - \phi_x) - \chi_T \vartheta' .$$

s (4.2-2) erhält man

$$B_x' = - EJ_x \vartheta'' ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{M_T}{2F_B G t} + \frac{E}{G} \frac{(s_x - \phi_x)}{t} \vartheta'' - \chi_T \vartheta' .$$

Diese Gleichung wird über den geschlossenen Querschnitt integriert, wobei zu beachten ist, daß $\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0$ wird:

$$\frac{M_T}{2F_B G} \oint \frac{ds}{t} + \frac{E}{G} \oint (S_x - \phi_x) \frac{ds}{t} \vartheta'' - 2F_B \vartheta' = 0 .$$

Multipliziert mit $\frac{2F_B G}{\oint \frac{ds}{t}}$ ergibt sich

$$M_T + E \frac{2F_B}{\oint \frac{ds}{t}} \oint (S_x - \phi_x) \frac{ds}{t} \vartheta'' - G J_B \vartheta' = 0 . \quad (\text{A.2-2})$$

Mit der Kontinuitätsbedingung $\oint \tau_x ds = 0$ lässt sich nach einiger Zwischenrechnung (s. [6]) nachweisen, daß

$$J_x = \frac{2F_B}{\oint \frac{ds}{t}} \oint (S_x - \phi_x) \frac{ds}{t} = \psi_x \oint (S_x - \phi_x) \frac{ds}{t} \quad (\text{A.2-3})$$

ist. Somit ergibt sich aus (A.2-2)

$$E J_x \vartheta'' - G J_B \vartheta' = - M_T . \quad (\text{A.2-4})$$

Nun wird der Zusammenhang zwischen dem gesamten Schubfluß und dem Torsionsschnittmoment betrachtet:

$$M_T = \int_F T \gamma_t ds = \int_F \tau \gamma_t dF , \quad (\text{A.2-5})$$

wobei sich das Integral über den gesamten geschlossen-offenen Querschnitt erstrecken muß.

Aus der allgemein gültigen Beziehung (vgl. (3.2-1))

$$\tau = G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ergibt sich mit (4.2-2) und (3.2-2)

$$\tau = G \left(-\vartheta \frac{\partial \omega_x}{\partial s} + \gamma_t \vartheta' \right)$$

und daraus mit (3.2-11)

$$\tau = G \left[-\vartheta \left(\gamma_t - \frac{\psi_x}{t} \right) + \gamma_t \vartheta' \right] .$$

Dieser Ausdruck wird nun in die Gleichgewichtsbedingung (A.2-5) eingesetzt:

$$M_T = G \left[-\mathcal{L} \left(\int_F \gamma_t^2 dF - \Psi_I \oint \tau_t ds \right) + \mathcal{L}' \int_F \gamma_t^2 dF \right] .$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.1-5) und mit

$$J_c = \int_F \gamma_t^2 dF = \text{zentrales Trägheitsmoment} \quad (\text{A.2-6})$$

$$M_T = G \left[-\mathcal{L} (J_c - J_B) + \mathcal{L}' J_c \right] . \quad (\text{A.2-7})$$

Mit $\chi_3 = 1 - \frac{J_B}{J_c}$ (A.2-8)

ergibt sich nach kurzer Umformung aus (A.2-7) (vgl. (A.1-10))

$$\mathcal{L}' = (1 - \chi_3) \frac{M_T}{G J_B} + \chi_3 \mathcal{L} . \quad (\text{A.2-9})$$

Hiermit lässt sich nun in (A.2-4) \mathcal{L}' durch \mathcal{L} ausdrücken:

$$E J_I \mathcal{L}'' - (1 - \chi_3) M_T - G J_B \chi_3 \mathcal{L} = -M_T .$$

Durch Differenzieren und Multiplizieren mit $\frac{1}{E J_I}$ ergibt sich hieraus die endgültige Differentialgleichung

$$\mathcal{L}''' - \chi_3 \frac{G J_B}{E J_I} \mathcal{L}' = \chi_3 \frac{m}{E J_I} . \quad (\text{A.2-10})$$

Diese Gleichung entspricht in ihrer Form ganz der unter A.1 abgeleiteten Gleichung (A.1-14). Sie unterscheidet sich nur im Schubverformungsfaktor χ und im J_T , das hier gleich J_B ist. Der Übergang zur klassischen Theorie erfolgt hier mit $\frac{J_B}{J_c} = 0$, womit $\chi = 1$ wird.

A.3 Vergleich der verschiedenen Theorien für die Ableitung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion

Durch Integration lässt sich aus (A.1-17) bzw. (A.2-10) mit Hilfe von (A.1-11) die allgemeine Form der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion finden:

$$E J_I \varphi'' - \chi G J_T \varphi' = - \chi M_T \quad (A.3-1)$$

Hierin ist nach Heilig [4] entsprechend (A.1-9) mit (A.1-5) für χ

$$\chi_1 = \frac{J_I^2}{J_T \left[\int_F (S_I - \phi_S)^2 \frac{ds}{t} + \frac{J_I^2}{J_T} \right]} \quad (A.3-2)$$

zu setzen.

Wird nun hier und in (A.3-1) für Querschnitte mit einem geschlossenen Teil $J_T = J_B + J_V \approx J_B$ angenommen, so erhält man mit (4.2-13) und

$$J_B = \frac{4 F_B^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

$$\chi_2 = \frac{J_I^2}{J_B \int_F (S_I - \phi_I)^2 \frac{ds}{t}}$$

bzw. nach einiger Zwischenrechnung

$$\chi_2 = \frac{J_I}{2 F_B} \frac{\int_F (S_I - \phi_I) \frac{ds}{t}}{\int_F (S_I - \phi_I)^2 \frac{ds}{t}} \quad (A.3-3)$$

Dies entspricht dem Schubverformungsfaktor nach Dsanelidze-Panovko (siehe in [6]). Es wird also dabei der St.Venant'sche Anteil im J_T vernachlässigt. Liegt dagegen ein rein offener Querschnitt mit $J_T = J_V$ vor, so lässt sich nur nach (A.3-2) der Verformungseinfluß der sekundären Schubspannungen berücksichtigen.

Benscoter [5] und Umanskij (in [6]) fanden entsprechend (A.2-7) für χ

$$\chi_3 = 1 - \frac{J_B}{J_C} \quad (\text{A.3-4})$$

mit $J_C = \int_F \chi_t^2 dF$ = zentrales Trägheitsmoment.

Hierzu gehört in (A.3-1) ebenfalls $J_T = J_B$.

Der Unterschied in der Ableitung der Differentialgleichung liegt darin, daß in Abschnitt A.1 die Verträglichkeitsbedingung (A.1-4) nur im Mittel, die Gleichgewichtsbedingung (A.1-7) aber streng erfüllt wird. Dagegen werden in Abschnitt A.2 die Verträglichkeitsbedingung (A.2-1) für jedes Element und die Gleichgewichtsbedingung (A.2-5) nur im Mittel erfüllt (vgl. Zuschrift zu [4]).

B. Die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens
unter Berücksichtigung der Schubverformung

Die Durchbiegung y eines Balkens setzt sich aus der Biegeverformung y_M und der Schubverformung y_Q zusammen. Zwischen diesen Verformungsanteilen bestehen folgende bekannte Beziehungen zwischen dem Schnittmoment M und der Querkraft Q

$$y_M'' = - \frac{M}{EJ} \quad , \quad (B-1)$$

$$y_Q' = \frac{\alpha_s Q}{GF} \quad . \quad (B-2)$$

α_s ist dabei die Schubverteilungszahl, mit welcher der Tatsache Rechnung getragen wird, daß die Schubspannung und damit die Gleitung ungleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist. Sie läßt sich aus der Bedingung ermitteln, daß an einem Balkenelement dx die Querkraft Q mit dem Mittelwert der Formänderung dieselbe Formänderungsarbeit liefert, die sich auch durch Integration über die Arbeit der Schubspannungen in den einzelnen Raumelementen des Balkenelementes ergibt.

Die beiden Verformungsanteile überlagern sich gegenseitig zu

$$y'' = y_M'' + y_Q'' = - \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_s}{GF} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad . \quad (B-3)$$

Nach zweimaliger Differentiation ergibt sich

$$y^{IV} = - \frac{1}{EJ} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\alpha_s}{GF} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \quad . \quad (B-4)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung erhält man (s. Bild B.1)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q + p \quad ,$$

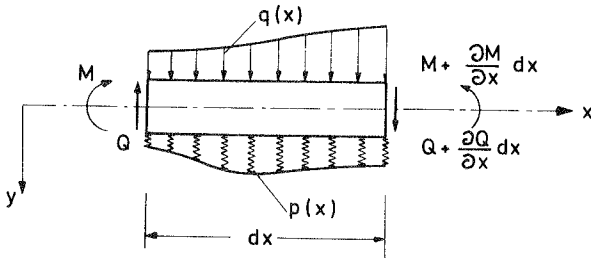


Bild B.1 Stabelement

bzw. nach zweimaligem Differenzieren

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} = -q'' + p''.$$

Eingesetzt in (B-4) ergibt dies:

$$Y^{IV} = \frac{1}{EJ} q - \frac{1}{EJ} p - \frac{x_s}{GF} q'' + \frac{x_s}{GF} p''. \quad (B-5)$$

Wird für die elastische Lagerung eine proportionale Abhängigkeit von p und y angenommen, so gilt:

$$p = K_B y$$

mit K_B = Bettungsziffer.

Wird p in (B-5) eingesetzt erhält man

$$Y^{IV} - \frac{x_s K_B}{GF} Y'' + \frac{K_B}{EJ} Y = \frac{1}{EJ} \left(q - \frac{EJ}{GF} x_s q'' \right). \quad (B-6)$$

Für die endgültige Differentialgleichung lässt sich schreiben:

$$Y^{IV} - \frac{k_s K_B}{EJ} Y'' + \frac{K_B}{EJ} Y = \frac{1}{EJ} \left(q - k_s q'' \right) \quad (B-7)$$

mit $k_s = \frac{EJ}{GF} \chi_s$. (B-8)

Die Schnittgrößen ergeben sich aus (B-3) zu

$$\begin{aligned} M &= - EJ y'' + \chi_s \frac{EJ}{GF} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= - EJ y'' + k_s (-q + p) \\ &= - EJ y'' + k_s K_B y - k_s q ; \end{aligned} \quad \text{(B-9)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q = - EJ y''' + k_s K_B y' - k_s q' . \quad \text{(B-10)}$$

Für den Lastfall Einzellast P in Feldmitte und gleichmäßig verteilte Last q (Bild B.2) werden nun die Randbedingungen formuliert.

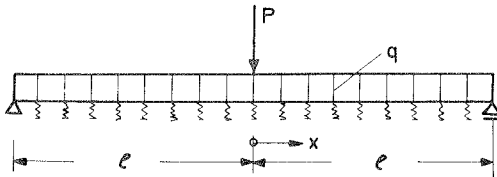


Bild B.2 Lastfall: P in Feldmitte + const q

Dabei ist zu beachten, daß wegen der Berücksichtigung der Schubverformung die Biegelinie im Symmetrieschnitt ($x = 0$) einen Knick hat, d.h.

$$\gamma_0' = \frac{\chi_s Q}{GF}$$

Somit gilt für die Randbedingungen:

$$1.) \quad x = 0 : \quad EJ y_0' = k_s Q_0 = -k_s \frac{P}{2}$$

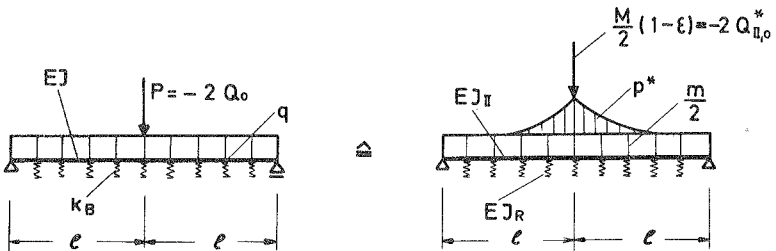
$$2.) \quad Q_0 = -EJ y_0''' + k_s K_B y_0' - k_s q' = -\frac{P}{2}$$

$$3.) \quad x = l : \quad y_l = 0$$

$$4.) \quad M = -EJ y_l'' + k_s K_B y_l - k_s q = 0$$

Die analogen Beziehungen in Abschnitt 6 lauten:

EJ	\triangleq	EJ_{II}
K_B	\triangleq	EJ_R
k_s	\triangleq	k
q	\triangleq	$p^* + \frac{m}{2}$
y	\triangleq	γ
M	\triangleq	B_{II}
Q	\triangleq	B'_{II}



L e b e n s l a u f

5. Okt. 1936 geboren in Ulm /Donau als Sohn des Handelsvertreters Adolf Steinle und dessen Ehefrau Käthe Steinle, geb. Metz

Schulbildung:

1942 - 1946 Volksschule in Ulm /Donau
1946 - 1955 Humanistisches (jetzt Humboldt-) Gymnasium in Ulm /Donau

Studium:

1955 6 Monate Baupraktikum bei Bauunternehmung R. Vogel, Ulm /Donau
WS 1955 - SS 1959 Studium des Bauingenieurwesens an der TH München
Diplom-Hauptprüfung am 11. Nov. 1959
1959 zweimonatiges Praktikum am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der TH München

Berufliche Tätigkeit:

1960 Versuchsingenieur an der Staatlichen Materialprüfungsanstalt an der TH Stuttgart
1960 - 1965 wissenschaftlicher Mitarbeiter,
ab 1965 wissenschaftlicher Assistent am Institut für Spannungsoptik und Modellmessungen (seit 1967 Institut für Modellstatik) der TH Stuttgart