

**Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen  
bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der  
linearen Biegetheorie**

**Anwendung der verbesserten Kollokation (diskretisiertes  
Fehlerquadratminimum) als Randverfahren**

Von der Universität Stuttgart (Technische Hochschule)  
zur Erlangung der Würde  
eines Doktor-Ingenieurs ( Dr.-Ing. )  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
Dipl. -Ing. EKKEHARD RAMM  
geboren zu Osnabrück



Hauptberichter: Prof. Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer  
Mitberichter: Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. E. h. U. Wegner  
Tag der Einreichung: 22. November 1971  
Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1972

Herrn Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und die großzügige Unterstützung während meiner Assistentenzeit.

Herrn Professor Dr. phil. Dr. -Ing. E. h. U. Wegner gilt mein besonderer Dank für wertvolle Hinweise und die Übernahme des Korreferats.

Ekkehard Ramm

## Inhaltsverzeichnis

Schrifttumsverzeichnis	Seite	6
Bezeichnungen		17
1. Einleitung		21
1.1 Überblick über das Schrifttum		21
1.2 Aufgabenstellung der Arbeit		29
2. Die Ausgangsgleichungen		30
2.1 Geometrie der Kugelschale		31
2.2 Schnitt-, Verschiebungs- und Belastungsgrößen am Element		32
2.3 Die statischen Gleichungen		33
2.4 Die Werkstoffgleichungen		34
2.5 Die geometrischen Gleichungen		35
2.6 Die Elastizitätsgleichungen		36
2.7 Die Definitionsgleichungen für eine Spannungsfunktion $\xi$		37
3. Herleitung der Differentialgleichungen für die Normalverschiebung $w$ und die Spannungsfunktion $\xi$		39
3.1 Die konstitutiven Gleichungen		39
3.2 Die Querkräfte in Abhängigkeit der Normalverschiebung und der Belastung		42
3.3 Verträglichkeitsbeziehung		43
3.4 1. Differentialgleichung für $w$ und $\xi$ (Gleichgewicht)		44
3.5 2. Differentialgleichung für $w$ und $\xi$ (Verträglichkeit)		45
3.6 Trennung der Veränderlichen		45
3.7 Grenzübergänge		47
3.7.1 Grenzübergang zum ebenen Tragwerk		47
3.7.2 Grenzübergang zur Membran		48

4.	Lösung der homogenen Differentialgleichungen	51
4.1	Lösung der Differentialgleichung (4.1) für $w$	51
4.1.1	Aufspaltung in drei Differentialgleichungen	51
4.1.2	Überführung in gewöhnliche Differentialgleichungen	52
4.1.3	Überführung in Legendre - Differentialgleichungen	53
4.1.4	Überführung in hypergeometrische Differentialgleichungen	57
4.1.5	Lösungen der Differentialgleichung $L(w) = 0$ (Fall $j = 2$ )	61
4.1.6	Lösungen der Differentialgleichungen $L(w) - (1 \pm 2 \kappa^2 i) w = 0$ (Fall $j = 3, 4$ )	63
4.2	Lösung der Differentialgleichung (4.2) für $\xi$	66
4.2.1	Zusammenhänge zwischen $\xi$ und $w$	67
4.2.2	Homogene Differentialgleichung $L(\xi) = 0$ (Fall $j = 1$ )	68
4.3	Zusammenstellung der Lösungen und ihre physikalische Deutung	69
4.4	Zusammenhang mit den Schnitt- und Verschiebungs- größen	73
4.5	Einige analytische Näherungslösungen	82
4.5.1	Zur Lösung für flache Kugelschalen	83
4.5.2	Die Näherungslösung nach Aas Jakobsen	87
4.5.3	Die Näherungslösung nach Geckeler	88
4.5.4	Zusammenstellung der verschiedenen Lösungsfunk- tionen	90
4.6	Der Sonderfall Rotationssymmetrie ( $m = 0$ )	90
5.	Die Partikularlösung	93
5.1	Allgemein	93
5.2	Beispiel: Schneelast	97
6.	Die Erfüllung der Randbedingungen	101
6.1	Überblick	101
6.2	Die Kollokationsmethoden	105
6.2.1	Die normale Kollokation	105
6.2.2	Die verbesserte Kollokation (diskretisiertes Fehler- quadratminimum)	107

6.3	Rotationssymmetrische Berandung	117
6.4	Nicht rotationssymmetrische Berandung	118
6.4.1	Geometrie der im Grundriß polygonal begrenzten Schale	120
6.4.2	Transformation der Schnitt- und Verschiebungsgrößen am Rand	123
6.4.3	Die Kollokation bei im Grundriß polygonal begrenzten Schalen	129
7.	Zahlenbeispiele	131
7.1	Vorbemerkungen	131
7.2	Die eingespannte Kugelschale über quadratischem Grundriß	132
7.3	Die Kugelschale über quadratischem Grundriß bei Binderscheibenrandbedingungen	139
7.4	Die Kugelschale über dreieckigem Grundriß bei Binderscheibenrandbedingungen	145
8.	Zusammenfassung und Ausblick	151
Anhang 1:	Prozedur HYREI zur Berechnung der hypergeometrischen Reihen	153
Anhang 2:	Rekursive Bestimmung der hypergeometrischen Reihenlösungen	155

Schrifttumsverzeichnis

Allgemeine Grundlagen der Schalentheorie

- [1] Flügge, W.: Stresses in Shells.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New  
York, 3. Auflage, 1966.
- [2] Kraus, H.: Thin Elastic Shells.  
J. Wiley, New York, London, Sydney, 1962.
- [3] Novoshilov, V. V.: Thin Shell Theory.  
P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands,  
2. Auflage, 1964.
- [4] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwen-  
dung in der Technik.  
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [5] Gravina, P. B. J.: Theorie und Berechnung der Rotationsscha-  
len.  
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidel-  
berg, 1961.
- [6] Hampe, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentrag-  
werke. - Insbesondere Band 3: Kegelschale,  
Kugelschale.  
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin, 2. Auf-  
lage, 1966.
- [7] Szmodits, K.: Statik der Schalenkonstruktionen.  
B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig,  
1966.

Kugelschalen mit rotationssymmetrischer Belastung und Berandung

- [8] Szmodits, K.: Design Tables for Spherical Shells.  
IASS-Bulletin Nr. 19 (Okt. 1964) S. 33/46.

- [9] Williams, H.E.: Some Exact Solutions of the Problem of Axisymmetric Bending of Thin Spherical Shells.  
ASME-Publication 64 - WA/AV - 7 (1964).
- [10] Geckeler, J.W.: Zur Theorie der Elastizität flacher rotationssymmetrischer Schalen.  
Ingenieur-Archiv 1 (1930) S. 255/270.
- [11] Reissner, E.: Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells.  
J. Math. Phys. 25 (1946) I, S. 80/ 85,  
II, S. 279/ 301,  
Corrections: 27 (1948) S. 240.
- [12] Gradowczyk, M.H.: Some Remarks on the Theory of Shallow Spherical Shells.  
Ingenieur-Archiv 32 (1963) 5, S. 297/303.
- [13] Galletly, G.D.: Influence Coefficients for Hemispherical Shells with Small Openings at the Vertex.  
Trans. ASME, J. Appl. Mech. 22 (1955) 1,  
S. 20/24.
- [14] Leckie, F.A.: Asymptotic Solutions for the Spherical Shell Subjected to Axially Symmetric Loading.  
Proc. Symposium 'Nuclear Reactor Containment Buildings and Pressure Vessels', Glasgow, S. 286/297, Butterworth, London, 1960.
- [15] Hoff, N.J.: General Formulas for Influence Coefficients of Thin Spherical Shells.  
J. Aerospace Sci. 29 (1962) S. 174/79 und S. 225.

- [16] Lachance, L.,      Limitations of Shallow Shell Equations for  
Popof, E.P.:      Spherical Shells.  
Proc. IASS-Symposium on Shell Structures  
in Engineering Practice, Budapest, 1965.
- [17] Stern, P.,      On the Bending of Spherical Shells.  
Tsui, E.Y.W.:      Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 92 (1966)  
EM 3, S. 53/66.
- [18] Dill, H.-P.:      Beitrag zur Genauigkeitsabschätzung ver-  
schiedener Näherungslösungen der Biege-  
theorie der dünnwandigen Kugelschale.  
Wiss. Zeitschrift TU Dresden 16 (1967) 5,  
S. 1445/1451.

Kugelschalen mit rotationssymmetrischer Brandung unter nichtrota-  
tionssymmetrischer Belastung

- [19] Havers, A.:      Asymptotische Biegetheorie der unbelaste-  
ten Kugelschale.  
Ingenieur-Archiv 6 (1935), S. 282/312.
- [20] Aas Jakobsen, A.: Beitrag zur Theorie der Kugelschale auf  
Einzelstützen.  
Ingenieur-Archiv 8 (1937), S. 275/294.
- [21] Sokolovskij, V.: On the Design of a Spherical Shell.  
Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie  
des Sciences de l'URSS 16 (1937) 1, S. 19/24.
- [22] Leckie, F.A.,      A Critical Study of the Solutions for the  
Penny, R.K.:      Asymmetric Bending of Spherical Shells.  
Proc. 'World Conference on Shell Struc-  
tures', S. 631/638, San Francisco, 1962.  
National Academy of Sciences - National  
Research Council, Washington, Publ. No.  
1187 (1964).

- [23] Johnson, D.E.: Nonsymmetric Bending Deformation of Spherical Shells.  
Trans. ASME, J. Appl. Mech. 31 (1964) 2, S. 344/345.
- [24] Berry, J.G.: On Thin Hemispherical Shells Subjected to Concentrated Edge Moments and Forces.  
Proc. 3rd Midwest Conf. on Solid Mechanics 1955, Purdue University Experimental Research Series, No. 129, S. 25/44.
- [25] Tsuboi, Y., Akino, K.: Theory of Antisymmetrical Bending of Spherical Thin Shells.  
Aus Proc. of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft 1959, S. 235/245.
- [26] Tsuboi, Y., Akino, K.: Theories and Applications of Antisymmetrical Bending State for Spherical Shell and Cylindrical Shell.  
Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 11, No. 2, Sept. 1961.
- [27] Ichino, I, Takahashi, H.: Theory of Nonsymmetrical Bending State for Spherical Shell.  
Bulletin of JSME (Japan Soc. Mech. Eng.) 7 (1964) 25, S. 28/35.
- [28] Elias, Z.M.: Analysis of Spherical Shells with Stress Functions.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 90 (1964) EM 6, S. 135/163.
- [29] Tsuboi, Y., Akino, K.: Design and Construction of Reinforced Concrete Shell Structure of Non-Uniform Thickness Supported on Roller System.  
Abhandl. IVBH 15 (1955) S. 199/230.

- [30] Reissner, E.: A Note on Membrane and Bending Stresses in Spherical Shells.  
J. Soc. Indust. Appl. Math. 4 (1956) 4,  
S. 230/240.
- [31] Reissner, E.: On the Determination of Stresses and Displacements for Unsymmetrical Deformations of Shallow Spherical Shells.  
J. Math. Phys. 38 (1959) S. 16/35.
- [32] Wan, F.Y.M.: Membrane and Bending Stresses in Shallow Spherical Shells.  
Int. J. Solids Structures 3 (1967) S. 353/366.
- [33] Windels, R.: Biegetheorie der Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender.  
Ingenieur-Archiv 25 (1957) S. 164/173.
- [34] Langendonck, T. v.: Spherical Domes Under Unsymmetrical Loading.  
Abhandl. IVBH 20 (1960) S. 179/202.
- [35] Heuck, K.: Die näherungsweise Berechnung der Randstörungen beliebig belasteter Rotationsschalen.  
Beton- und Stahlbetonbau 53 (1958) 11, S. 280/282.
- [36] Gondikas, P.,  
Salvadori, M.G.: Wind Stresses in Domes.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 86 (1960).
- [37] Salvadori, M.G.,  
Lichtenstein, S.: Elastically Supported Spherical Segments under Antisymmetrical Loads.  
Aus 'Topics in Applied Mechanics', E. Schwerin - Gedächtnisband 1965, Elsevier Publishing Company.

- [38] Panc, V.: Das Randstörungsproblem der antimetrisch belasteten Kugelschale.  
Ingenieur-Archiv 31 (1962) S. 405/420.
- [39] Werner, D.: Ein Vergleich der Schnittkraftverteilung bei antimetrisch und symmetrisch belasteten Rotationsschalen.  
Wiss. Zeitschr. TU Dresden 16 (1967) 4, S. 1073/1078.
- [40] Zagustin, A.,  
Young, D. H.: Thin Spherical Shell Segments with Symmetric and Antimetric Loading.  
Proc. 'World Conference on Shell Structures', S. 619/630, San Francisco 1962.
- [41] Goldberg, J. E.,  
Bogdanoff, J. L.,  
Alspaugh, D. W.: Stresses in Spherical Domes under Arbitrary Loading Including Thermal and Shrinkage Effects.  
Proc. of the IASS-Symposium 'Non Classical Shell Problems', Warschau 1963, S. 116/138, North-Holland-Publ.-Comp., Amsterdam.
- [42] Kalnins, A.: Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Nonsymmetrical Loads.  
Trans. ASME, J. Appl. Mech. 31 (1964) 3, S. 467/476.
- [43] Wunderlich, W.: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen.  
Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau der TU Hannover, Heft 4, 1966.
- [44] Petri, R.: Die Berechnung von Rotationsschalen und prismatischen Schalen beliebiger Querschnittsform für allgemeine Belastung.  
Dissertation D 17, TH Darmstadt, 1968.

Kugelschalen mit nichtrotationssymmetrischer Belastung und Berandung

- [45] Aas Jakobsen, A.: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß.  
Abhandl. IVBH, 1937/38, S. 1/17.
- [46] Lederer, F.: Kugelschalen über vieleckigem Grundriß.  
Proc. of the Symposium on Shell Research,  
Delft 1961. North-Holland-Publ.-Comp.,  
Amsterdam.
- [47] Csonka, P.: Membranschalen.  
Bauingenieur-Praxis, Heft 16, Verlag W.  
Ernst und Sohn, Berlin, München, 1966.
- [48] Doganoff, I.: Berechnung von Kugelschalen über recht-  
eckigem Grundriß.  
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1962.
- [49] Zimmer, V.H.: a) Ein Beitrag zur Berechnung der rand-  
versteiften Kugelschale über rechtecki-  
gem Grundriß.  
Wiss. Z. Techn. Uni. Dresden 16 (1967)  
4, S. 1083/1092.
- b) Die randversteifte flache Kugelschale  
über rechteckigem Grundriß.  
Bauplanung - Bautechnik 23 (1969) 7,  
S. 340/344.
- c) Schnittkraftdiagramme für flache Kugel-  
schalen über rechteckigem Grundriß.  
Bauplanung - Bautechnik 23 (1969) 8,  
S. 399/401.
- d) Die flache Kugelschale über rechtecki-  
gem Grundriß.  
Wiss. Z. Techn. Uni. Dresden 18 (1969)  
5, S. 983/991.

- e) Berechnungsverfahren für flache Kugelschalen über rechteckigem Grundriß.  
Bauplanung - Bautechnik 24 (1970) 11,  
S. 553/556.
- [50] Krstić, M.: Berechnung der elastischen sphärischen Schale über gleichseitigem Dreiecksgrundriß.  
Bautechnik 4 (1961) S. 134/136.
- [51] Oravas, G. -A.: Stress and Strain in Thin Shallow Spherical Calotte Shells.  
Abhandl. IVBH 17 (1957) S. 139/160.
- [52] Walkinshaw, D.S.,  
Riley, G.E., On Thin Shallow Elastic Shells over Poly-  
Siddal, J.N., gonal Bases.  
Oravas, G. -A.: Abhandl. IVBH 28, II (1968) S. 175/192.
- [53] Oravas, G. -A.: Analysis of Thin Elastic Shallow Segmental Shells.  
Abhandl. IVBH 18 (1958) S. 201/214.
- [54] Conway, H.D., Application of the Point-Matching Method  
Leissa, A.W.: to Shallow-Spherical-Shell-Theory.  
Trans. ASME, J. Appl. Mech. 29 (1962) 4,  
S. 745/747.
- [55] Kupfer, H.: Spannungszustand von Kugelschalen mit lotrecht gestützten Rändern über beliebigem Grundriß, erläutert am Beispiel der Schalenkuppel des Auditorium maximum der Universität Hamburg.  
Proc. of the Coll. 'Simplified Calculation Methods of Shell Structures', Brüssel 1961,  
S. 191/205, North-Holland-Publ. -Comp.,  
Amsterdam, 1962.

- [56] Beck, H. Die tragende Konstruktion der Festhalle der Farbwerke Hoechst AG.  
Bauingenieur 38 (1963) 3, S. 95/106.
- [57] Zerna, W., Krätzig, W., Twelmeier, H.: Zur Festigkeitsuntersuchung des Schalentragerwerks der städtischen Bühnen Dortmund.  
Beton- und Stahlbetonbau 59 (1964) 9, S. 193/202.
- [58] Röntsch, G.: Modelluntersuchungen für die Projektierung der Kuppel des Hauses der sozialistischen Kultur in Dresden.  
Proc. IASS-Symposium, Leningrad 1966.

#### Kollokationsverfahren

- [59] Hain, H.: Zur Ermittlung der Auflagerkraft-Einflussflächen schiefwinkliger Platten.  
Dissertation TH Hannover, 1963, veröffentlicht in: Abh. der Braunsch. Wiss. Gesellschaft 15 (1963) S. 80/132.
- [60] Hoppe, H.: Über Erfahrungen mit Kollokationsverfahren bei zweidimensionalen Randwertaufgaben.  
ZAMM 47 (1967) T 52/54.
- [61] Leissa, A.W., Claussen, W.E., Hulbert, L.E., Hopper, A.T.: A Comparison of Approximate Methods for the Solution of Plate Bending Problems.  
AIAA-J. 7 (1969) 5, S. 920/928.
- [62] Brandes, K.: Die Lagerung des kreiszylindrischen Rohres auf einer kreisförmigen starren Schneide (Lösung eines gemischten Randwertproblems mit Hilfe einer speziellen Kollokationsmethode).  
Dissertation TU Berlin, 1968.

- [63] Hulbert, L.E., Analysis of Stresses in Shallow Spherical  
Simonon, F.A.: Shells with Periodically Spaced Holes.  
Trans. ASME, J. Eng. Ind. 92 (1970)  
S. 834/840.

Mathematik

- [64] Sauer, R., Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs.  
Szabó, J.: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New  
York.
- a) Teil I:  
Doetsch, G., Schäfer, F.W., Tietz, H.:  
Bd. 139 der Grundlehren der mathem.  
Wiss. in Einzeldarstellungen. 1967.
- b) Teil II:  
Collatz, L., Nicolovius, R., Törnig, W.:  
Bd. 140 der Grundlehren der mathem.  
Wiss. in Einzeldarstellungen. 1969.
- [65] Bieberach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialglei-  
chungen.  
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidel-  
berg, New York, 2. Auflage, 1965.  
Bd. 66 der Grundlehren der mathem. Wiss.  
in Einzeldarstellungen.
- [66] Kamke, E.: Differentialgleichungen.  
Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig  
KG, Leipzig, 6. Auflage, 1959.
- [67] Magnus, W., Formulas and Theorems for the Special  
Oberhettinger, F., Functions of Mathematical Physics.  
Soni, R.P.: Bd. 52 der Grundlehren der mathem. Wiss.  
in Einzeldarstellungen.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New  
York, 3. Auflage, 1966.

- [68] Jahnke, E., Tafeln höherer Funktionen.  
Emde, F., B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart, 6. Auf-  
Lösch, F.: lage, 1960.
- [69] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differential-  
gleichungen.  
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidel-  
berg, 2. Auflage, 1955.
- [70] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und  
Physiker.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New  
York, 5. Auflage, 1965.
- [71] Zurmühl, R.: Matrizen.  
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidel-  
berg, 4. Auflage, 1964.
- [72] Schwarz, H.R.,  
Rutishauser, H., Numerik symmetrischer Matrizen,  
Stiefel, E.: B. G. Teubner - Verlag, Stuttgart, 1968.
- [73] Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach  
der Methode der kleinsten Quadrate nebst  
Anwendung in der Geodäsie.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New  
York, 3. Auflage, 1969.

Bezeichnungen

Geometrie

$\varphi, \vartheta$	Hauptkrümmungskordinaten (Bild 2.1)
$\psi, \delta$	Hauptkrümmungskordinaten, tangential und normal zum Rand (Bild 6.7)
R [m]	Radius der Mittelfläche
h [m]	Dicke der Schale
a [m]	Radius des Rand (klein) kreises
$\vartheta_o$ [1]	halber Sektorwinkel
$\varphi_u$ [1]	Winkel des unteren Randbreitenkreises
$\gamma$ [1]	Winkel zwischen der Randnormalen und einem Meridian (Bild 6.7)

(Bild 6.5)

Material- und Steifigkeitswerte, Schalenparameter

E	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Elastizitätsmodul
G	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Schubmodul
$\mu$	[1]	Querdehnungszahl
$D = \frac{Eh}{1-\mu^2}$	$[\frac{Mp}{m}]$	Dehnsteifigkeit
$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	[Mpm]	Biegesteifigkeit
$k = 12 \frac{R^2}{h^2}$	[1]	} Schalenparameter
$\kappa = \sqrt{\frac{R^2}{h^2} 3(1-\mu^2)}$	[1]	

Statische und kinematische Größen (Bild 2.3)

$\sigma_\varphi, \sigma_\vartheta, \tau_{\varphi\vartheta}$	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Spannungen
$N_\varphi, N_\vartheta, N_{\varphi\vartheta}, N_{\vartheta\varphi}$	$[\frac{Mp}{m}]$	Normal- und Schubkräfte
$M_\varphi, M_\vartheta, M_{\varphi\vartheta}, M_{\vartheta\varphi}$	$[\frac{Mpm}{m}]$	Biege- und Drillmomente

$Q_{\varphi}, Q_{\vartheta}$	$[\frac{Mp}{m}]$	Querkräfte
$\overline{N}_{\varphi\vartheta}, \overline{Q}_{\varphi}$	$[\frac{Mp}{m}]$	(Kirchhoffsche) Ersatzkräfte
$\Phi$	$[Mpm]$	Spannungsfunktion definiert durch (2.10)
$p_{\varphi}, p_{\vartheta}, P$	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Flächenbelastungen
$\Omega$	$[\frac{Mp}{m}]$	Belastungsfunktionen } definiert durch } (2.11) (3.7c, 3.11a)
$P_1, P_2$	$[m]$	
$\epsilon_{\varphi}, \epsilon_{\vartheta}, \gamma_{\varphi\vartheta}$	$[1]$	Verzerrungen ( $^0 \hat{=}$ der Mittelfläche)
$\kappa_{\varphi}, \kappa_{\vartheta}, \kappa_{\varphi\vartheta}$	$[\frac{1}{m}]$	Krümmungsänderungen, Verwindung
$u_{\varphi}, u_{\vartheta}, w$	$[m]$	Verschiebungen der Mittelfläche
$\beta_{\varphi}, \beta_{\vartheta}$	$[1]$	Neigungsänderungen der Meridian- und Ringtangente

Weitere Abkürzungen

$(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi}$  Ableitung nach der Koordinate  $\varphi$

$(\cdot)'' = \frac{\partial(\cdot)'}{\partial\vartheta}$  Ableitung nach der Koordinate  $\vartheta$

$\Delta(\cdot) = \frac{1}{R^2} [(\cdot)'' + \cot\varphi(\cdot)'] + \frac{(\cdot)''}{\sin^2\varphi}$  Laplace - Operator

$L(\cdot) = R^2 \Delta(\cdot) + 2(\cdot)$  linearer Operator

$m$  Harmonische des Reihengliedes ( $\overline{m} = \frac{m}{\sin\varphi}$ )

$\left. \begin{matrix} N \\ M \\ B \end{matrix} \right\}$  Anzahl der  $\left\{ \begin{matrix} \text{Ausgangsgleichungen} \\ \text{Unbekannten} \\ \text{zusätzl. Bedingungsgl.} \end{matrix} \right\}$  bei der Kollokation

Lösungsfunktionen, Integrationskonstante

$\left. \begin{matrix} P_{\nu}^m \\ Q_{\nu}^m \end{matrix} \right\} \left( P_n^m \right)$  zugeordnete Legendre-Funktionen  $\left\{ \begin{matrix} 1. \text{ Art} \\ 2. \text{ Art} \end{matrix} \right.$   
vom Grad  $\nu(n)$  und der Ordnung  $m$

$F = F(a, b, c; x)$	hypergeometrische Reihe (Parameter a, b, c; Argument x)			
$F_{\text{Re}}, F_{\text{Im}}$	Real- bzw. Imaginärteil			
$f_j^m, g_j^m$	1. und 2. Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung für den Fall j (j = 1, 2, 3, 4) und das m-te Reihenglied (m = 0, 1, 2 ... ∞)			
$C_i$	Integrationskonstante (allgemein) i = 1, 2, ... M			
$A_j^m, B_j^m$ $C_j^m, D_j^m$	<table border="0"> <tr> <td>vorläufige</td> <td rowspan="2">} Integrationskonstante für den Fall j (j = 1, 2, 3, 4) des m-ten Reihenglieds</td> </tr> <tr> <td>endgültige</td> </tr> </table>	vorläufige	} Integrationskonstante für den Fall j (j = 1, 2, 3, 4) des m-ten Reihenglieds	endgültige
vorläufige	} Integrationskonstante für den Fall j (j = 1, 2, 3, 4) des m-ten Reihenglieds			
endgültige				

Fußzeiger

$\varphi, \vartheta$ $n, t$	} Größe in oder bezogen auf die	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Lösung (im Abschnitt 4 weggelassen)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Partikularlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Anteile der homogenen Lösung (Abschnitt 4)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Membranlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Dehnungslose Verformungen</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Biegerandstörung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Größe der Lösung der homogenen Differential- gl. (Abschnitt 4)</td> <td rowspan="3"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 3, 4</td> </tr> </table> </td></tr></table></td></tr></table>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Lösung (im Abschnitt 4 weggelassen)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Partikularlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Anteile der homogenen Lösung (Abschnitt 4)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Membranlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Dehnungslose Verformungen</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Biegerandstörung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Größe der Lösung der homogenen Differential- gl. (Abschnitt 4)</td> <td rowspan="3"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 3, 4</td> </tr> </table> </td></tr></table>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table>	} Meridian- bzw. Ringrichtung	} Richtung der Randnormale bzw. -tangente	} Homogene Lösung (im Abschnitt 4 weggelassen)	} Partikularlösung	} Anteile der homogenen Lösung (Abschnitt 4)	} Homogene Membranlösung	} Dehnungslose Verformungen	} Biegerandstörung	} Größe der Lösung der homogenen Differential- gl. (Abschnitt 4)	<table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 3, 4</td> </tr> </table>	} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table>	} L ( $\varphi$ ) = 0	} L (w) = 0	} L (w) - (1 + 2 κ <sup>2</sup> i) w = 0	} j = 1	} j = 2	} j = 3, 4		
<table border="0"> <tr> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Lösung (im Abschnitt 4 weggelassen)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Partikularlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Anteile der homogenen Lösung (Abschnitt 4)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Homogene Membranlösung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Dehnungslose Verformungen</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Biegerandstörung</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">} Größe der Lösung der homogenen Differential- gl. (Abschnitt 4)</td> <td rowspan="3"> <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 3, 4</td> </tr> </table> </td></tr></table>																						<table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table>	} Meridian- bzw. Ringrichtung
	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2">} Meridian- bzw. Ringrichtung</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} Richtung der Randnormale bzw. -tangente</td> </tr> </table>	} Meridian- bzw. Ringrichtung	} Richtung der Randnormale bzw. -tangente																				
} Meridian- bzw. Ringrichtung																							
	} Richtung der Randnormale bzw. -tangente																						
} Homogene Lösung (im Abschnitt 4 weggelassen)																							
	} Partikularlösung																						
} Anteile der homogenen Lösung (Abschnitt 4)																							
	} Homogene Membranlösung																						
		} Dehnungslose Verformungen																					
} Biegerandstörung																							
	} Größe der Lösung der homogenen Differential- gl. (Abschnitt 4)	<table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} j = 3, 4</td> </tr> </table>	} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table>	} L ( $\varphi$ ) = 0	} L (w) = 0	} L (w) - (1 + 2 κ <sup>2</sup> i) w = 0	} j = 1	} j = 2	} j = 3, 4														
} <table border="0"> <tr> <td rowspan="3">} L (<math>\varphi</math>) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) = 0</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">} L (w) - (1 + 2 κ<sup>2</sup> i) w = 0</td> </tr> </table>										} L ( $\varphi$ ) = 0	} L (w) = 0	} L (w) - (1 + 2 κ <sup>2</sup> i) w = 0											
					} L ( $\varphi$ ) = 0																		
	} L (w) = 0																						
} L (w) - (1 + 2 κ <sup>2</sup> i) w = 0																							
	} j = 1																						
} j = 2																							
	} j = 3, 4																						

Kopfzeiger

m = 0, 1, 2 ... a) Funktionenanteil, nur von φ abhängig, z. B.  $w^m = w^m(\varphi)$   
 b) Exponent (mit Vorzeichen), z. B.  $\tan^{+m} \frac{\varphi}{2}$

Vektoren, Matrizen

$w^m$	Lösungsvektor (4.55 a)
$s, s^m$	Vektor der Schnitt- und Verschiebungsgrößen (4.60)

<b>c, c<sup>m</sup></b>	Vektor der Integrationskonstanten (6.10), (6.11), (4.55 b)	
<b>r</b>	Vektor mit Anteilen aus der Partikularlösung	} Kollo- kation (6.10), (6.11)
<b>f</b>	Fehlervektor	
<b>q</b>	Vektor mit Partikularanteilen der zusätzlichen Bedingungsgleichungen (6.21)	
<b>λ</b>	Vektor der Lagrange-Multiplikatoren (6.22)	
<b>I</b>	Einheitsmatrix	
<b>B<sup>m</sup></b>	Verbindungsmatrix zwischen <b>S<sup>m</sup></b> und <b>w<sup>m</sup></b> (4.61)	
<b>F<sup>m</sup></b>	Matrix mit Fundamentallösungen für w (4.55)	
<b>A</b>	Koeffizientenmatrix aus dem homogenen Anteil (6.10), (6.11)	} Kollo- kation
<b>T</b>	Gaußsche Transformation <b>T = A<sup>T</sup> · A</b>	
<b>G</b>	Diagonalmatrix mit Gewichtsfunktionen <b>g<sub>j</sub></b> (j = 1, 2, 3 . . .) (6.19 a)	
<b>P</b>	Koeffizientenmatrix der zusätzlichen Bedin- gungsgleichungen (6.21)	
<b>D</b>	Transformationsmatrix (6.36)	
<b>H</b>	Transformationsmatrix (6.46); (Tafel 6.2)	

Weiterhin bedeuten die Fußzeiger

- red eine Reduktion auf 4 Zeilen für die Bestimmung der Randbedingungen
- erg eine Ergänzung (und Reduktion) für die Randtransformationen
- R Schnitt- und Verschiebungsgrößen in Richtung der Tangente bzw. Normale zum Rand

Weitere Bezeichnungen sind im Text erläutert.

1. Einleitung

1.1 Überblick über das Schrifttum

1.1.1 Zur Theorie der Kugelschale

Die Biegetheorie dünner Kugelschalen auf der Grundlage der Theorie von Kirchhoff / Love wurde für den rotationssymmetrischen Fall erstmalig 1912 von H. Reissner behandelt. Das in einer Spannungsfunktion ( $Q_\varphi$ ) und einer Verschiebungsgröße ( $\beta_\varphi$ ) aufgestellte Differentialgleichungssystem läßt sich nach Entkopplung in eine hypergeometrische Differentialgleichung überführen, deren exakte Lösung durch hypergeometrische Reihen beschrieben wird [1, 2, 5, 6, 7]. Da diese Potenzreihen für praktische Fälle schlecht konvergieren, entstand im Laufe der Zeit eine Vielzahl von Näherungslösungen, deren bekannteste wohl die Näherung von Geckeler (1926) für steile Schalen und die ebenfalls auf Geckeler (1930) [10] zurückgehende Theorie für flache Schalen sind. Erst die Entwicklung der modernen elektronischen Rechenanlagen erlaubte die Anwendung der exakten Reihenlösung. Szmodits [7, 8] gibt für verschiedene Schalenparameter und Meridianwinkel  $\varphi$  die erforderlichen Lösungswerte an. In [9] wird der Funktionsverlauf der Reihen ausführlich diskutiert.

In Tafel 1.1 sind einige Aufsätze zum rotationssymmetrischen Problem der Kugelschale zusammengestellt, wobei in [10] bis [12] die Theorie flacher Schalen behandelt wird und in [13] bis [18] Vergleiche zwischen den einzelnen Näherungsstufen beschrieben werden. Neben den bereits erwähnten Näherungen sind dies vor allem die Anwendung der asymptotischen Integration (nach Blumenthal [5, 18], Langer [14, 17]) und ein von Szmodits [7] angegebenes Verfahren, bei dem in der Differentialgleichung die Koeffizienten für die Lösung konstant angenommen werden; s. a. [18]. Bis auf die sehr flache Zone (bis etwa  $20^\circ$ ) kann diese Methode im gesamten Schalenbereich als brauchbare Näherung verwandt werden.



Den nichtrotationssymmetrischen Fall (siehe Tafel 1.2) beschreibt erstmals umfassend Havers (1935) [19, 1], wobei er von dem in den drei Verschiebungen formulierten Differentialgleichungssystem ausgeht. Ihm gelingt eine Trennung der homogenen Lösungen in die drei Anteile: homogene Membrantheorie, dehnungslose Verschiebungen und Biegeandstörung. Während er für den Teil der Biegeandstörung die Methode der asymptotischen Integration anwendet, nimmt Aas Jakobsen [20, 3] die Koeffizienten in den Differentialgleichungen konstant an und erhält Näherungslösungen in Form gedämpfter Schwingungen, siehe auch [22, 23]. Unabhängig von Havers leitet Sokolovskij (1937) [21] ein Differentialgleichungssystem für die Verdrehungen der Meridian- und Ringtangente ab, indem er die Werkstoffgleichungen und kinematischen Beziehungen unter Verwendung der Annahmendirekt in die Gleichgewichtsbedingungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie einarbeitet. Das System ist von 6. Ordnung, da die gewählten Veränderlichen für den Fall der homogenen Membrantheorie verschwinden. Sokolovskij weist auf die hypergeometrischen Reihenlösungen hin. Wlassow [4] formuliert das Problem der nichtflachen Kugelschale in einer Spannungsfunktion und der Normalverschiebung, geht jedoch nicht auf die Lösung der auftretenden Differentialgleichungen von Legendre ein. Diesen Weg geht unabhängig hiervon auch Berry [24, 2], wobei er die Lösungen in Form von Legendre - Funktionen durch numerische Integration findet. Ein ähnlicher Rechengang wird von Tsuboi und Akino [25, 26] beschrieben; sie geben die Lösungen in Gegenbauer - Funktionen an, die über hypergeometrische Reihen definiert sind. Ichino und Takahashi [27] integrieren die Differentialgleichung numerisch nach der Methode von Runge - Kutta.

Ohne eine Lösung anzugeben, stellt Elias [28] Differentialgleichungen in Spannungs- und Verschiebungsfunktionen für eine genauere Theorie auf, in der die Schubverzerrungen berücksichtigt werden. Wegen der lange Zeit schwierig zu ermittelnden genauen Reihenlösungen

Tafel 1. 2: Kugelschalen mit rotationsymmetrischer Berandung unter nichtrotationsymmetrischer Belastung (Biegetheorie)

\*) F = Flache Schale, NF = Nicht-flache Schale

Schrift- numm- er [ ]	Autoren	Jahr	F*) NF	Lösung der Differentialgleichung - Näherungsstufen	Bemerkungen
19	Havers	1935	NF	Differentialgleichungssystem in 3 Verschieb. → Asymptotische Integration	s. a. [1]
20	Aas Jakobsen	1937	NF	Differentialgl. mit konstanten Koeffizienten	vgl. [19]
21	Sokolovskij	1937	NF	Differentialgl.-System in Verdrehungen der Meridian- und Ringtangente	
22	Leckie/Penny	1962	NF	Asymptotische Integration	s. a. [19], [20]
23	Johnson	1964	NF		s. a. [19]
24	Berry	1955	NF	Differential- gleichungs- system in der Normal- verschiebung w und einer Span- nungsfunktion $\varphi$	→ Lösungen in Form v. Legendre-Funk- tionen, durch num. Integr. gewonnen
25	Tsuboi/Akino	1959	NF		→ Lösungen in Form von Gegenbauer - Funktionen
26	Tsuboi/Akino	1961	NF		→ num. Integr. nach Runge-Kutta
27	Ichino/Takahashi	1964	NF		
28	Elias	1964	NF	Aufstellung der Differentialgleichung unter Einschluß der Schubverzerrungen	keine Lösung

29	Tsuboi/Akino	1955	F	<p>Theorie flacher Schalen</p> <p>Bessel-Differentialgl. Lösungen in Form von modifizierten Bessel-Funktionen (Kelvin)</p>	<p>anhand eines ausgeführten Bauwerks</p> <p>Schale unter tangentialer Randlast</p> <p>Fall <math>m = 1</math> ausführlich</p> <p>Randlast- oder -verschiebungsfall</p>
30	E. Reissner	1956	F		
31	E. Reissner	1959	F		
32	Wan	1967	F		
33	Windels	1957	F	<p>→ Lösungen in Form gedämpfter Schwingungen</p>	
34	Langendonck	1960	NF	<p>Näherung nach Geckeler</p> <p>Lösungen in Form gedämpfter Schwingungen</p>	<p>nur für in Umfang wenig veränderliche Lastzustände</p> <p>Fall <math>m = 1</math></p> <p>basiert auf [ 36 ]</p> <p>Fall <math>m = 1</math></p> <p>Fälle <math>m = 0, 1</math></p> <p>Fälle <math>m = 0, 1</math></p>
35	Heuck	1958	NF		
36	Gondikas/Salvadori	1960	NF		
37	Salvadori/Lichtenstein	1965	NF		
38	Panc	1962	NF		
39	Werner	1967	NF		
40	Zagustin/Young	1962	NF	numerische Integration	Fälle $m = 0, 1$
41	Goldberg u. a.	1963	NF	<p>Übertragungsverfahren → direkte Integr. mit abschnittsw. konst. Koeff.</p> <p>Stufenkörpermethode</p>	<p>für alle Rotations-schalen</p>
42	Kainins	1964	NF		
43	Wunderlich	1966	NF		
44	Petri	1968	NF		

wurden, wie im rotationssymmetrischen Fall, auch für das nichtsymmetrische Problem Näherungen entwickelt, die sich auf gewisse Schalenbereiche beschränken oder auf numerischen Verfahren beruhen. Die Theorie flacher Kugelschalen wird in [4], [29] bis [33] behandelt; sie führt in der Regel auf Lösungen in Form von modifizierten Bessel-Funktionen (Kelvin- oder Thomson-Funktionen). Die Näherung von Geckeler für steile Schalen liegt den Aufsätzen [34] bis [39] zugrunde; sie beschränkt sich auf in Umfangsrichtung nicht stark veränderliche Zustände (niedrige Reihenglieder) und wird insbesondere auf den antimetrischen Fall  $m = 1$  angewandt. Hierzu siehe auch [40]. Allgemeine Rotationsschalen werden in [41] bis [43] nach dem Übertragungsverfahren und in [44] nach der Stufenkörpermethode (M. Esslinger) behandelt.

#### 1.1.2 Kugelschalen mit nichtrotationssymmetrischer Berandung

Ist eine Rotationsschale nicht durch einen Breitenkreis berandet, so entsteht damit ein nichtrotationssymmetrisches Problem und die Erfüllung der Randbedingungen wird im allgemeinen schwierig. Schrifttum zur nichtrotationssymmetrischen Theorie der Kugelschalen ist in Tafel 1.3 zusammengestellt. Aas Jakobsen [45] und Lederer [46] beschreiben eine Möglichkeit, wie man den Membranzustand einer im Grundriß polygonal begrenzten Kugelschale näherungsweise erfassen kann. Die nach der Membrantheorie erfüllbare Bedingung, daß die austretende Normalkraft verschwindet, wird punktweise erfüllt (Kollokation). Hierbei gibt Aas Jakobsen die Methode des Fehlerquadratminimums in der diskretisierten Form an. Von den vielen Abhandlungen von Csonka zur Membrantheorie nach Pucher sei das Buch [47] herausgegriffen.

Auf der Grundlage der von Wlassow [4] angegebenen Biegetheorie flacher Schalen berechnen Doganoff [48] und Zimmer [49] Kugelschalen über einem Rechteckgrundriß und Krstić [50] Kugelschalen über einem Dreiecksgrundriß. Ähnlich wie bei Platten

Tafel 1. 3: Kugelschalen mit nichtrotationssymmetrischer Berandung

Schrift- tums- nummer [ ]	Autoren	Jahr	MT <sup>1)</sup> BT	F <sup>2)</sup> NF	Bemerkungen
45	Aas Jakobsen	1937/ 1938	MT	NF	Randbedingungen mit verbesserter Kollokation
46	Lederer	1961	MT	NF	Randbedingungen mit normaler Kollokation
47	Csonka	1966	MT	NF	Verfahren nach Pucher
48	Doganoff	1962	BT	F	Rechteckgrundriß  - Doppelreihenlösung, s. a. [ 4 ]
49	Zimmer	1967/ 1970	BT	F	Rechteckgrundriß  - Doppelreihenlösung, auch mit Randträger
50	Krstić	1961	BT	F	Dreiecksgrundriß  - Reihenlösung
51	Oravas	1957	BT	F	} polygonaler Grundriß  
52	Oravas u. a.	1968	BT	F	
53	Oravas	1958	BT	F	Schalensegment  - Randbeding. mit normaler Koll.
54	Conway/Leissa	1962	BT	F	Quadr. Grundriß  - Randbeding. mit normaler Koll.
55	Kupfer	1961	MT (BT)	NF	nach [ 45 ], Grundriß 
56	Beck	1963	MT (BT)	NF	} Biegezustände durch Über- schlagsrech- nungen und geführte Bei- spiele
57	Zerna u. a.	1964	MT (BT)	NF	
58	Röntsch	1966	-	NF	Modelluntersuchung 

1 ) MT = Membrantheorie, BT = Biegetheorie; 2 ) F = Flache Schale, NF = Nicht-flache Schale

erfüllt der Ansatz in Form einer Doppelreihe gewisse Randbedingungen. Ebenfalls flache Schalen behandeln Oravas [51] bis [53] und Conway und Leissa [54] nach der Biegetheorie. Hierbei werden die Differentialgleichungen exakt gelöst und die Randbedingungen punktweise erfüllt (normale Kollokation).

Einige ausgeführte Bauwerke werden in [55] bis [58] beschrieben. Für sie wurden in der Hauptsache Rechnungen nach der Membrantheorie durchgeführt; die Biegezustände wurden durch Überschlagsrechnungen (z. B. Ersatzzylinder- oder Kugelverfahren) bestimmt oder Modellmessungen entnommen.

Eine geschlossene Lösung für nichtrotationssymmetrisch begrenzte Kugelschalen liegt nicht vor.

### 1.1.3 Die Erfüllung der Randbedingungen

Die Erfüllung der Randbedingungen bei kompliziert berandeten Schalen ist in der Regel außerordentlich schwierig, so daß man meistens auf Näherungsverfahren angewiesen ist.

Liegt für die Differentialgleichung eine Lösung - exakt oder näherungsweise - vor, so kann man sich auf die Bestimmung der Randgrößen beschränken. Hierzu stehen hauptsächlich folgende Verfahren zur Verfügung [64 II, 69]:

1. Die Variationsmethode von Trefftz.
2. Die Fehlerquadratminimum-Methode.
3. Die (normale) Kollokation.
4. Kombinationen der Verfahren, z. B. die Kollokation in Verbindung mit der (diskretisierten) Fehlerquadratminimum-Methode (verbesserte Kollokation).

Die Verfahren werden in den Abschnitten 6.1 und 6.2 ausführlich diskutiert und das Schrifttum über ihre Anwendung auf Platten und Schalen besprochen [45, 46], [51] bis [54], [59] bis [63].

Neben diesen Methoden sei auch auf die Verfahren hingewiesen, die weder die Differentialgleichungen noch die Randbedingungen exakt befriedigen, z. B. das Differenzenverfahren und die Methode der finiten Elemente. Während das Differenzenverfahren für komplizierte Berandungen in der Regel nicht brauchbar ist, eignet sich die Methode der finiten Elemente hierfür besonders wegen ihrer Allgemeingültigkeit in Geometrie und Belastung. Der numerische Aufwand ist jedoch gegenüber den anderen Verfahren beträchtlich. Die beiden Verfahren werden hier nicht behandelt.

## 1.2 Aufgabenstellung der Arbeit

Das Thema dieser Arbeit ist die Berechnung dünner Kugelschalen mit konstanter Wanddicke bei nichtrotationssymmetrischer Berandung. Es wird ein allgemeingültiges Verfahren beschrieben, welches nicht an gewisse Randformen gebunden ist. Um dem Problem wenigstens im Schalenbereich genau zu entsprechen, wird die exakte Lösung der Differentialgleichung auf der Grundlage der klassischen Schalentheorie nach Kirchhoff/Love bestimmt. Hierbei wird von dem Differentialgleichungssystem in der Normalverschiebung  $w$  und einer Spannungsfunktion  $\phi$  ausgegangen [24, 2] und eine Aufteilung der homogenen Lösung in die drei Anteile: homogene Membranlösung, dehnungslose Verschiebungen und Biegerandstörung vorgenommen.

Neben der exakten Lösung für die Biegerandstörung in Form von hypergeometrischen Reihen werden einige bekannte Näherungstheorien hieraus abgeleitet (Theorie flacher Schalen, Näherungen nach Geckeler und Aas Jakobsen).

Die Randbedingungen an den 'abgeschnittenen' Rändern werden punktweise bei Anwendung der diskretisierten Fehlerquadratminimum-Methode erfüllt (verbesserte Kollokation). Anhand von Beispielen sollen die Ergebnisse mit Werten aus dem Schrifttum verglichen werden. Dazu werden Programme in ALGOL aufgestellt.

## 2. Die Ausgangsgleichungen

Die zur Aufstellung der Differentialgleichungen notwendigen Ausgangsbeziehungen sollen an dieser Stelle nicht abgeleitet werden, da sie dem Schrifttum entnommen werden können, z. B. [1, 2]. In ihnen sind die bekannten Näherungen der klassischen linearen Schalentheorie im Sinne von Kirchhoff/Love (1. Approximation) enthalten, die im Sonderfall der Kugelschale mit der verschärften Theorie nach Flüge/Love (2. Approximation) zusammenfällt:

1. Kleine Verformungen im Vergleich zur Schalendicke.  
(Theorie kleiner Verschiebungen und Verzerrungen  $\cong$  geometrisch lineare Theorie.)
2. Elastisches, isotropes und homogenes Material.  
(Hookesches Werkstoffgesetz  $\cong$  physikalisch lineare Theorie.)
3. Die Schalendicke ist klein gegenüber den Flächenabmessungen der Schale.  
(Theorie dünner Schalen.)

Damit Einführung der sogenannten Bernoulli - Hypothese (Gerade- und Normalbleiben der Schalennormale nach der Verformung), Annahme vernachlässigbarer Normalspannungen in Richtung der Schalennormale ( $\sigma_z = 0$ ), jedoch gleichzeitig keine Längenänderung der Normale ( $\epsilon_z \ll 1$ ) während der Verformung.

2.1 Geometrie der Kugelschale

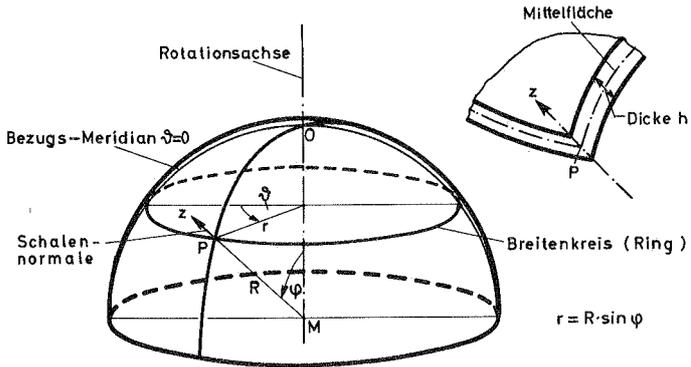


Bild 2.1: Geometrie der Kugelschale (Koordinaten)

Hauptkrümmungsradien:  $r_1 = r_2 = R$

Koordinaten:

- $\varphi$ : Winkel der Schalennormale gegen die Rotationsachse
- $\vartheta$ : Winkel der Meridianebene gegen eine Bezugsmeridianebene
- $z$ : Koordinate in Normalenrichtung, von der Mittelfläche aus gemessen

Gaußsches Krümmungsmaß:  $K_G = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{R^2} > 0$  (positiv)

Flächenelement:

$$dF = r R d\varphi d\vartheta = R^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta$$

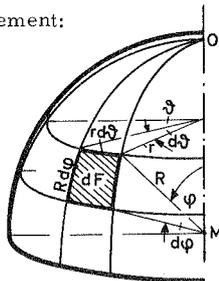
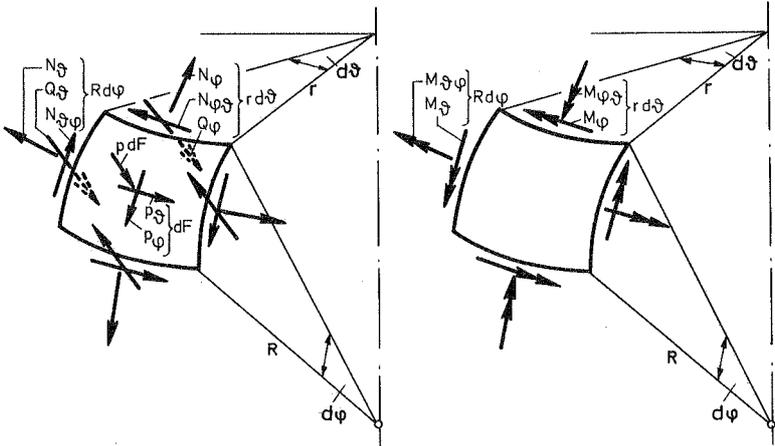


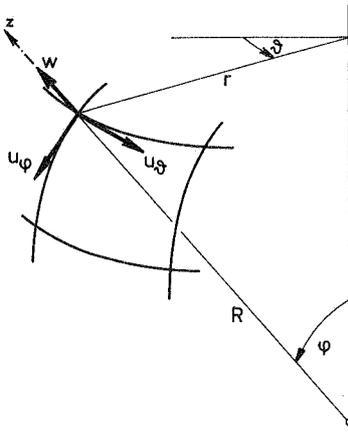
Bild 2.2: Flächenelement

2.2 Schnitt-, Verschiebungs- und Belastungsgrößen am Element

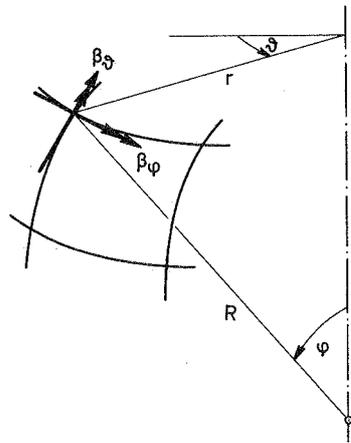


a) Schnittkräfte und Elementbelastungen

b) Schnittmomente



c) Verschiebungen der Mittelfläche

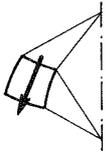
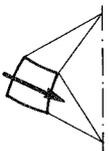
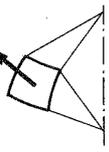
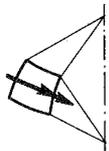
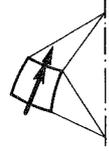


d) Verdrehungen der Tangenten an die Mittelfläche

Bild 2.3: Schnitt-, Verschiebungs- und Belastungsgrößen am Element

2.3 Die statischen Gleichungen

2.3.1 Die Gleichgewichtsbeziehungen

<p>Σ Kräfte in Richtung der Meridian- tangente</p>		$(N_{\varphi} \sin \varphi)' + N'_{\varphi \vartheta} - N_{\varphi \vartheta} \cos \varphi + Q_{\varphi} \sin \varphi + p_{\varphi} R \sin \varphi = 0$	<p>(2.1 a)</p>
<p>Σ Kräfte in Richtung der Ringtangente</p>		$(N_{\varphi \vartheta} \sin \varphi)' + N'_{\vartheta} + N_{\varphi \vartheta} \cos \varphi + Q_{\vartheta} \sin \varphi + p_{\vartheta} R \sin \varphi = 0$	<p>(2.1 b)</p>
<p>Σ Kräfte in Normalen- richtung</p>		$(Q_{\varphi} \sin \varphi)' + Q'_{\vartheta} - (N_{\varphi} + N_{\vartheta}) \sin \varphi - p R \sin \varphi = 0$	<p>(2.1 c)</p>
<p>Σ Momente um die Ringtangente</p>		$(M_{\varphi} \sin \varphi)' + M'_{\varphi \vartheta} - M_{\varphi \vartheta} \cos \varphi - Q_{\varphi} R \sin \varphi = 0$	<p>(2.1 d)</p>
<p>Σ Momente um die Meridian- tangente</p>		$(M_{\varphi \vartheta} \sin \varphi)' + M'_{\vartheta} + M_{\varphi \vartheta} \cos \varphi - Q_{\vartheta} R \sin \varphi = 0$	<p>(2.1 e)</p>

Die sechste Gleichgewichtsbedingung (Momentenbedingung um die Normale) stellt bekanntlich eine Identität dar und bringt keine wesentliche Aussage.

### 2.3.2 Die Definitionsgleichungen für die Schnittgrößen

Die Schnittgrößen sind über die Spannungen folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} N_{\varphi} \\ N_{\vartheta} \\ N_{\varphi\vartheta} = N_{\vartheta\varphi} \\ Q_{\varphi} \\ Q_{\vartheta} \end{array} \right\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left. \begin{array}{l} \sigma_{\varphi} \\ \sigma_{\vartheta} \\ \tau_{\varphi\vartheta} \\ \tau_{\varphi z} \\ \tau_{\vartheta z} \end{array} \right\} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{z}{R}\right)}_{\ll 1} dz \\
 \left. \begin{array}{l} M_{\varphi} \\ M_{\vartheta} \\ M_{\varphi\vartheta} = M_{\vartheta\varphi} \end{array} \right\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left. \begin{array}{l} \sigma_{\varphi} \\ \sigma_{\vartheta} \\ \tau_{\varphi\vartheta} \end{array} \right\} \cdot z \underbrace{\left(1 + \frac{z}{R}\right)}_{\ll 1} dz
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

In der klassischen Schalentheorie werden die Krümmungsterme  $z/R$  gegenüber 1 vernachlässigt.

### 2.4 Die Werkstoffgleichungen

Der physikalisch linearen Theorie liegt das Hookesche Werkstoffgesetz zugrunde (mit  $\sigma_z = 0$ ,  $\gamma_{\varphi z} = \gamma_{\vartheta z} = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{\varphi} + \mu \epsilon_{\vartheta}) \\
 \sigma_{\vartheta} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{\vartheta} + \mu \epsilon_{\varphi}) \\
 \tau_{\varphi\vartheta} &= G \gamma_{\varphi\vartheta}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit der Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2.3a}$$

## 2.5 Die geometrischen (kinematischen) Gleichungen

### 2.5.1 Die Verzerrungs-Krümmungs-Gleichungen

Trotz Hookeschem Werkstoffverhalten und Annahme der Bernoulli-Hypothese wird in der klassischen Schalentheorie der Verlauf der Verzerrungen über die Schalendicke linear angenommen, wobei er sich aus einem konstanten Anteil (Verzerrungen der Mittelfläche) und dem linearen Anteil (Krümmungsänderungen) zusammensetzt.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi} &= \epsilon_{\varphi}^0 + z \kappa_{\varphi} \\ \epsilon_{\vartheta} &= \epsilon_{\vartheta}^0 + z \kappa_{\vartheta} \\ \gamma_{\varphi\vartheta} &= \gamma_{\varphi\vartheta}^0 + z \kappa_{\varphi\vartheta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.5.2 Die Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen

Das kinematische Verhalten der Mittelfläche wird durch die Abhängigkeit der Verzerrungen von den Verschiebungen beschrieben:

$\epsilon_{\varphi}^0 = \frac{1}{R} (u'_{\varphi} + w)$	(2.5 a)
$\epsilon_{\vartheta}^0 = \frac{1}{R} \left( \frac{u'_{\vartheta}}{\sin\varphi} + u_{\varphi} \cot\varphi + w \right)$	(2.5 b)
$\gamma_{\varphi\vartheta}^0 = \frac{1}{R} \left( u'_{\vartheta} - u_{\vartheta} \cot\varphi + \frac{u'_{\varphi}}{\sin\varphi} \right)$	(2.5 c)

Das Verhalten außerhalb der Mittelfläche läßt sich über die Krümmungsänderungen (abgeleitete Verzerrungen) beschreiben:

$$\begin{aligned} \kappa_{\varphi} &= \frac{1}{R} \beta'_{\varphi} \\ \kappa_{\vartheta} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin\varphi} \beta'_{\vartheta} + \beta_{\varphi} \cot\varphi \right) \\ \kappa_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{R} \left[ \sin\varphi \left( \frac{\beta_{\vartheta}}{\sin\varphi} \right)' + \frac{1}{\sin\varphi} \beta'_{\varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

worin die Verdrehungen der Meridian- und Ringtangente an die Mittelfläche durch die Verschiebungen der Mittelfläche ausgedrückt werden können.

Mit  $\beta_{\varphi} = \frac{1}{R} (u'_{\varphi} - w')$  (2.7 a)

$$\beta_{\vartheta} = \frac{1}{R} \left( u'_{\vartheta} - \frac{1}{\sin\varphi} w' \right) \quad (2.7 b)$$

lauten die Gleichungen (2.6)

$$\kappa_{\varphi} = \frac{1}{R^2} (u''_{\varphi} - w'') \quad (2.8 a)$$

$$\kappa_{\vartheta} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sin\varphi} \left( u'_{\vartheta} + u_{\varphi} \cos\varphi - \frac{1}{\sin\varphi} w'' - \cos\varphi w' \right) \quad (2.8 b)$$

$$\kappa_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{R^2} \left\{ \sin\varphi \left[ \left( \frac{u_{\vartheta}}{\sin\varphi} \right)' - \left( \frac{w'}{\sin^2\varphi} \right)' \right] + \frac{1}{\sin\varphi} (u'_{\varphi} - w'') \right\} \quad (2.8 c)$$

## 2.6 Die Elastizitätsgleichungen

Durch Einführung der Gleichungen (2.3) und (2.4) in die Definitionsgleichungen (2.2) ergeben sich nach Integration die vereinfachten Elastizitätsgleichungen der klassischen Schalentheorie, in der die Membrankräfte nur von den Verzerrungen der Mittelfläche und die Momente nur von den Krümmungsänderungen abhängen.

$N_{\varphi} = D (\epsilon_{\varphi}^0 + \mu \epsilon_{\vartheta}^0)$	(2.9)
$N_{\vartheta} = D (\epsilon_{\vartheta}^0 + \mu \epsilon_{\varphi}^0)$	
$N_{\varphi\vartheta} = D \frac{1-\mu}{2} \gamma_{\varphi\vartheta}^0$	
$M_{\varphi} = K (\kappa_{\varphi} + \mu \kappa_{\vartheta})$	
$M_{\vartheta} = K (\kappa_{\vartheta} + \mu \kappa_{\varphi})$	
$M_{\varphi\vartheta} = K \frac{1-\mu}{2} \kappa_{\varphi\vartheta}$	

mit der Dehnsteifigkeit

$$D = \frac{E h}{1 - \mu^2} \quad (2.9 a)$$

und der Biegesteifigkeit

$$K = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (2.9 b)$$

2.7 Die Definitionsgleichungen für eine Spannungsfunktion  $\Phi$

Ähnlich wie in der Theorie der Scheiben wird eine Spannungsfunktion  $\Phi = \Phi(\varphi, \vartheta)$  eingeführt, die über die Membrankräfte folgendermaßen definiert ist:

$$N_{\varphi} = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\Phi''}{\sin^2 \varphi} + \Phi' \cot \varphi + \Phi + \frac{K}{R} L(w) \right] + \Omega \quad (2.10 \text{ a})$$

$$N_{\vartheta} = \frac{1}{R^2} \left[ \Phi'' + \Phi + \frac{K}{R} L(w) \right] + \Omega \quad (2.10 \text{ b})$$

$$N_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sin \varphi} \left[ \cot \varphi \Phi' - \Phi'' \right] \quad (2.10 \text{ c})$$

mit einer Belastungsfunktion  $\Omega = \Omega(\varphi, \vartheta)$ , wobei gilt

$$\Omega' = -R p_{\varphi} \quad (2.11)$$

$$\Omega'' = -R \sin \varphi p_{\vartheta}$$

Weiterhin ist mit  $L(\cdot)^*$  ein linearer Operator eingeführt, der im wesentlichen den in Kugelkoordinaten definierten Laplace-Operator  $\Delta$  enthält.

$$L(\cdot) = R^2 \Delta(\cdot) + 2(\cdot)' = (\cdot)'' + \cot \varphi (\cdot)' + \frac{(\cdot)''}{\sin^2 \varphi} + 2(\cdot) \quad (2.12)$$

Die drei Definitionsgleichungen (2.10) für  $\Phi$  erfüllen zusammen mit (3.5) für  $Q_{\varphi}$  und  $Q_{\vartheta}$  die ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen. Sie sind also nicht unabhängig voneinander.

Für weitere Rechnungen werden folgende Ausdrücke benötigt, die aus den Gleichungen (2.10, a-c) gewonnen werden:

$$R^2 (N_{\varphi} + N_{\vartheta}) = L \left( \Phi + 2 \frac{K}{R} w \right) + 2 \Omega R^2 \quad (2.13)$$

---

\*) Der Operator  $L(\cdot)$  ist identisch mit den entsprechenden Operatoren im Schrifttum.

[26]	[19]	[21]	[25]
$L(\cdot) \equiv L$	$(\cdot) \equiv H$	$(\cdot) \equiv L$	$(\cdot) \equiv H_2$
Ichino/ Takahashi	Havers	Sokolovskij	Tsuboi/ Akino

$$\begin{aligned}
 R^2 N'_\varphi &= \frac{\xi''''}{\sin^2\varphi} - \xi'' \frac{2 \cot\varphi}{\sin^2\varphi} + \xi'' \cot\varphi - \xi' \cot^2\varphi + \frac{K}{R} L'(w) + R^2 \Omega' \\
 R^2 N''_\varphi &= \frac{\xi''''}{\sin^2\varphi} - 4 \xi''' \frac{\cot\varphi}{\sin^2\varphi} + 2 \xi'' \frac{1+2 \cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} + \xi'' \cot\varphi \\
 &\quad - \xi'' \frac{1+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + 2 \xi' \frac{\cot\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{K}{R} L''(w) + R^2 \Omega'' \\
 R^2 N'''_\varphi &= \frac{\xi''''}{\sin^2\varphi} + \xi'' \cot\varphi + \xi'' + \frac{K}{R} L''(w) + R^2 \Omega''' \\
 R^2 N''''_\varphi &= \xi'''' + \xi'' + \frac{K}{R} L''(w) + R^2 \Omega'''' \\
 R^2 N''''_\varphi &= \xi'''' + \xi'' + \frac{K}{R} L''(w) + R^2 \Omega'''' \\
 R^2 (\sin\varphi N_{\varphi\varphi})'' &= \cot\varphi \xi'' - \frac{\xi''}{\sin^2\varphi} - \xi''''
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

3. Herleitung der Differentialgleichungen  
für die Normalverschiebung  $w$  und die Spannungsfunktion  $\Phi$

Durch die Gleichgewichtsbedingungen (2. 1), die kinematischen Gleichungen (2. 5) und (2. 8), die Elastizitätsgleichungen (2. 9) und die Definitionsgleichungen (2. 10) für die Spannungsfunktion  $\Phi$  sind die wesentlichen Ausgangsbeziehungen ermittelt. Aus ihnen werden entsprechend dem in Tafel 3. 1 angegebenen Schema sämtliche Größen bis auf die Normalverschiebung  $w$  und die Spannungsfunktion  $\Phi$  eliminiert. Die erste der verbleibenden zwei Differentialgleichungen stellt im wesentlichen eine Gleichgewichtsbeziehung, die zweite eine Verträglichkeitsbeziehung dar. Zusammen bilden sie ein Differentialgleichungssystem 8. Ordnung. Aus dem System läßt sich eine der beiden Größen, beispielsweise  $\Phi$ , eliminieren, so daß eine Differentialgleichung von 6. Ordnung in  $w$  übrig bleibt, die durch eine Beziehung 2. Ordnung zwischen  $\Phi$  und  $w$  ergänzt wird.

3. 1 Die konstitutiven Gleichungen

Durch die konstitutiven Gleichungen, die durch Einsetzen der kinematischen Gleichungen (2. 5) und (2. 8) in die Elastizitätsgleichungen entstehen, wird die Abhängigkeit der Schnittgrößen von den Verschiebungen der Mittelfläche beschrieben:

$$N_{\varphi} = \frac{D}{R} \left[ u'_{\varphi} + w + \mu \left( \frac{u'_{\Phi}}{\sin \varphi} + u_{\varphi} \cot \varphi + w \right) \right]$$

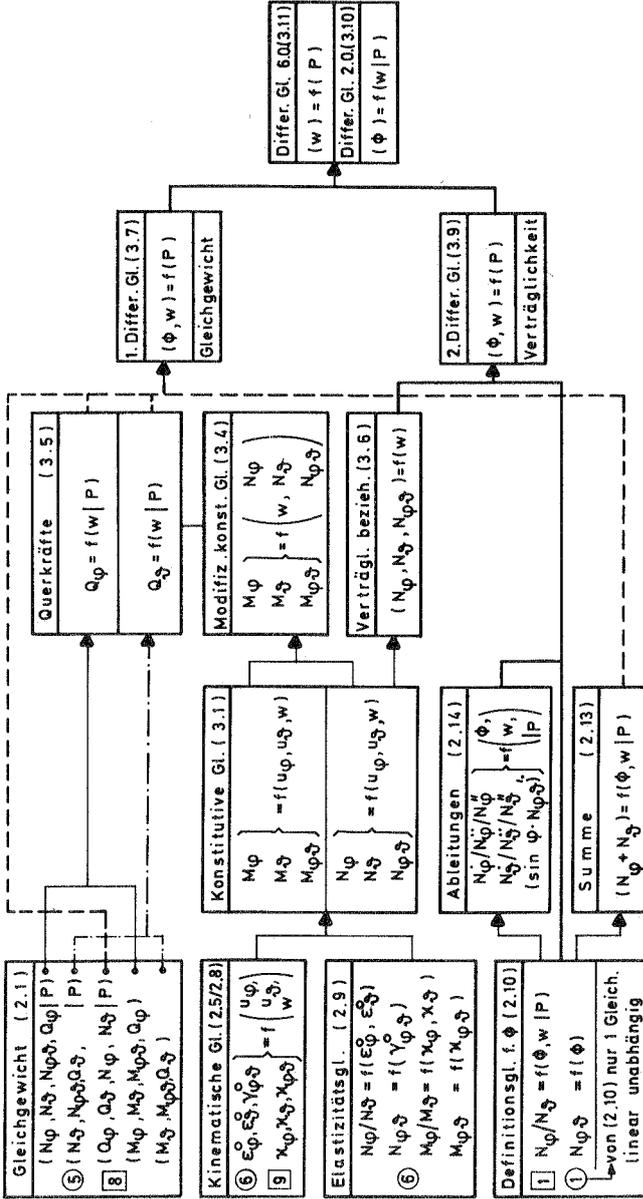
$$N_{\Phi} = \frac{D}{R} \left[ \frac{u'_{\Phi}}{\sin \varphi} + u_{\varphi} \cot \varphi + w + \mu (u'_{\varphi} + w) \right] \quad (3. 1 a)$$

$$N_{\varphi\Phi} = \frac{D}{R} \frac{1-\mu}{2} \left[ u'_{\Phi} - u_{\Phi} \cot \varphi + \frac{u'_{\varphi}}{\sin \varphi} \right]$$

$$M_{\varphi} = \frac{K}{R^2} \left[ u'_{\varphi} - w'' + \frac{\mu}{\sin \varphi} (u'_{\Phi} + u_{\varphi} \cos \varphi - \frac{w''}{\sin \varphi} - \cos \varphi w') \right]$$

$$M_{\Phi} = \frac{K}{R^2} \left[ \frac{u'_{\Phi}}{\sin \varphi} + u_{\varphi} \cot \varphi - \frac{w''}{\sin^2 \varphi} - \cot \varphi w' + \mu (u'_{\varphi} - w'') \right] \quad (3. 1 b)$$

$$M_{\varphi\Phi} = \frac{K}{R^2} \frac{1-\mu}{2} \left[ u'_{\Phi} - u_{\Phi} \cot \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} u'_{\varphi} + 2 \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} w' - \frac{2}{\sin \varphi} w'' \right]$$



**Tafel 3.1** Schema zur Herleitung der Differentialgleichungen in  $w$  und  $\phi$

○ Anzahl der Gleichungen  
 □ Anzahl der unbekanntenen Größen  
 P Belastungsanteile

Aus den Gleichungen (3.1 b) lassen sich mit (3.1 a) die Verschiebungen  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$  eliminieren, so daß die Momente außer von den Membrankräften nur von  $w$  abhängen. Hierzu werden die Gleichungen (3.1 a) zweckmäßig mit  $\frac{D}{R} = \frac{12K}{Rh^2} = \frac{K}{R^2} \cdot \frac{k}{R}$  multipliziert, worin der sehr große Wert  $k$  eingeführt wird, gegenden in Zukunft 1 vernachlässigt werden kann.

$$\boxed{k = \frac{12 R^2}{h^2}} \quad \gg 1 \quad \text{bei dünnen Schalen} \quad (3.2)$$

Weiterhin sollen die Anteile mit  $w$  in (3.1) abgetrennt werden.

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{k}{R} \left\{ \frac{K}{R^2} \left[ u'_\varphi + \mu \left( \frac{u'_\vartheta}{\sin\varphi} + u_\varphi \cot\varphi \right) \right] + \frac{K}{R^2} (1+\mu)w \right\} \\ N_\vartheta &= \frac{k}{R} \left\{ \frac{K}{R^2} \left[ \frac{u'_\vartheta}{\sin\varphi} + u_\varphi \cot\varphi + \mu u'_\varphi \right] + \frac{K}{R^2} (1+\mu)w \right\} \quad (3.3 \text{ a}) \\ N_{\varphi\vartheta} &= \frac{k}{R} \left\{ \frac{K}{R^2} \frac{1-\mu}{2} \left[ u'_\varphi - u'_\vartheta \cot\varphi + \frac{u'_\varphi}{\sin\varphi} \right] \right\} \\ M_\varphi &= \frac{K}{R^2} \left[ u'_\varphi + \mu \left( \frac{u'_\vartheta}{\sin\varphi} + u_\varphi \cot\varphi \right) \right] - \frac{K}{R^2} \left[ w'' + \mu \left( \frac{w''}{\sin^2\varphi} + \cot\varphi w' \right) \right] \\ M_\vartheta &= \frac{K}{R^2} \left[ \frac{u'_\vartheta}{\sin\varphi} + u_\varphi \cot\varphi + \mu u'_\varphi \right] - \frac{K}{R^2} \left[ \frac{w''}{\sin^2\varphi} + \cot\varphi w' + \mu w'' \right] \\ M_{\varphi\vartheta} &= \frac{K}{R^2} \frac{1-\mu}{2} \left[ u'_\varphi - u'_\vartheta \cot\varphi + \frac{u'_\varphi}{\sin\varphi} \right] + \frac{K}{R^2} \frac{1-\mu}{\sin\varphi} \left[ \cot\varphi w' - w'' \right] \end{aligned} \quad (3.3 \text{ b})$$

Durch Einsetzen der in (3.3 a) unterstrichenen Teile in die entsprechenden Terme von (3.3 b) lassen sich folgende modifizierte konstitutive Gleichungen für die Momente gewinnen:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= -\frac{K}{R^2} \left[ w'' + w + \mu (w + \cot\varphi w' + \frac{w''}{\sin^2\varphi}) \right] + \frac{R}{k} N_\varphi \\ M_\vartheta &= -\frac{K}{R^2} \left[ w + \cot\varphi w' + \frac{w''}{\sin^2\varphi} + \mu (w'' + w) \right] + \frac{R}{k} N_\vartheta \quad (3.4) \\ M_{\varphi\vartheta} &= \frac{K}{R^2} \frac{1-\mu}{\sin\varphi} \left[ \cot\varphi w' - w'' \right] + \frac{R}{k} N_{\varphi\vartheta} \end{aligned}$$

3.2 Die Querkräfte in Abhängigkeit der Normalverschiebung und der Belastung

Für  $Q_\varphi$  wird die vierte Gleichgewichtsbedingung (2.1 d) von der mit  $\frac{R}{k}$  multiplizierten ersten Bedingung (2.1 a) subtrahiert.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{k} N_\varphi - M_\varphi\right)' \sin\varphi + \left(\frac{R}{k} N_\varphi - M_\varphi\right) \cos\varphi + \left(\frac{R}{k} N_{\varphi\vartheta} - M_{\varphi\vartheta}\right)' - \left(\frac{R}{k} N_{\vartheta} - M_{\vartheta}\right) \cos\varphi \\ & + Q_\varphi \sin\varphi R \left(1 + \frac{1}{k}\right) + p_\varphi \frac{R^2}{k} \sin\varphi = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \leq 1 \end{aligned}$$

Nach Division durch  $R \sin\varphi$  werden für die Klammerausdrücke die Gleichungen (3.4) und deren Ableitungen eingeführt.

$$Q_\varphi = -\frac{K}{R^3} [w'''' + w'' \cot\varphi + w'(1 - \cot^2\varphi) + \frac{w'''}{\sin^2\varphi} - 2 \frac{\cot\varphi}{\sin^2\varphi} w''] - \frac{R}{k} p_\varphi$$

Die eckige Klammer drückt die Ableitung nach  $\varphi$  des durch (2.12) definierten Operators aus, angewandt auf  $w$ .

$$Q_\varphi = -\frac{K}{R^3} L'(w) - \frac{R}{k} p_\varphi \tag{3.5 a}$$

Entsprechend wie bei  $Q_\varphi$  wird für  $Q_\vartheta$  vorgegangen, nur daß von der zweiten und fünften Gleichgewichtsbedingung ausgegangen wird:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{k} N_{\varphi\vartheta} - M_{\varphi\vartheta}\right)' \sin\varphi + 2\left(\frac{R}{k} N_{\varphi\vartheta} - M_{\varphi\vartheta}\right) \cos\varphi + \left(\frac{R}{k} N_{\vartheta} - M_{\vartheta}\right)' \\ & + Q_\vartheta \sin\varphi R \left(1 + \frac{1}{k}\right) + p_\vartheta \frac{R^2}{k} \sin\varphi = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \leq 1 \end{aligned}$$

Mit (3.4) wird daraus nach Umordnung

$$Q_\vartheta = -\frac{K}{R^3} \frac{1}{\sin\varphi} [w'''' + \cot\varphi w'' + \frac{w'''}{\sin^2\varphi} + 2w'] - \frac{R}{k} p_\vartheta$$

oder mit (2.12)

$$Q_\vartheta = -\frac{K}{R^3} \frac{1}{\sin\varphi} L'(w) - \frac{R}{k} p_\vartheta \tag{3.5 b}$$

### 3.3 Verträglichkeitsbeziehung

Durch Elimination von  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$  aus den drei konstitutiven Gleichungen (3.1 a) für die Membrankräfte läßt sich ein Ausdruck gewinnen, der eine Verträglichkeitsaussage darstellt. Da in den Gleichungen nicht nur die absoluten Terme  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$ , sondern auch ihre Ableitungen vorkommen, ist die Berechnung folgender Vorwerte zweckmäßig:

$$\begin{aligned} N_\varphi - \mu N_\vartheta &= \frac{Eh}{R} [u'_\varphi + w] \\ (N_\varphi - \mu N_\vartheta)' &= \frac{Eh}{R} [u''_\varphi + w'] \\ (N_\varphi - \mu N_\vartheta)'' &= \frac{Eh}{R} [u'''_\varphi + w''] \\ (N_\vartheta - \mu N_\varphi)' &= \frac{Eh}{R} \left[ \left(\frac{u_\vartheta}{\sin\varphi}\right)'' + u'_\varphi \cot\varphi - \frac{u_\varphi}{\sin^2\varphi} + w' \right] \\ (N_\vartheta - \mu N_\varphi)'' &= \frac{Eh}{R} \left[ \frac{1}{\sin\varphi} (u''_\vartheta + u''_\varphi)' - 2 \cot\varphi \left(\frac{u_\vartheta}{\sin\varphi}\right)'' \right. \\ &\quad \left. - \frac{2u'_\varphi}{\sin^2\varphi} + u''_\varphi \cot\varphi + \frac{2 \cot\varphi}{\sin^2\varphi} u_\varphi + w'' \right] \\ 2(1+\mu)(\sin\varphi N_{\varphi\vartheta})'' &= \frac{Eh}{R} [(u''_\vartheta + u''_\varphi)' \sin\varphi + u'''_\varphi] \end{aligned}$$

Aus diesen 6 Gleichungen lassen sich die 6 Größen

$$u_\varphi, u'_\varphi, u''_\varphi, u'''_\varphi \quad \text{und} \quad (u''_\vartheta + u''_\varphi)', \left(\frac{u_\vartheta}{\sin\varphi}\right)''$$

eliminieren, so daß eine Gleichung verbleibt, die außer den Membrankräften nur Anteile mit  $w$  enthält:

$$\begin{aligned} 2(N_\varphi - \mu N_\vartheta) - \cot\varphi(N_\varphi - \mu N_\vartheta)' + \frac{1}{\sin^2\varphi}(N_\varphi - \mu N_\vartheta)'' + 2 \cot\varphi(N_\vartheta - \mu N_\varphi)' \\ + (N_\vartheta - \mu N_\varphi)'' - \frac{2(1+\mu)}{\sin^2\varphi}(\sin\varphi N_{\varphi\vartheta})'' = \frac{Eh}{R} L(w) \end{aligned}$$

(3.6)

3.4 1. Differentialgleichung für w und  $\Phi$  (Gleichgewicht)

Durch Einsetzen der Ausdrücke (3.5) für die Querkräfte bzw. ihre Ableitungen und (2.13) für die Summe der Normalkräfte in die dritte Gleichgewichtsbedingung (2.1 c) entsteht eine Gleichung, die neben der Belastung nur die Normalverschiebung w und die Spannungsfunktion  $\Phi$  enthält. Nach Division durch  $-\sin\varphi$  lautet sie:

$$+ \frac{K}{R^3} [L''(w) + \cot\varphi L'(w) + \frac{L''(w)}{\sin^2\varphi} + 2L(w)] + \frac{1}{R^2} L(\Phi) \\ + \frac{1}{K} \frac{1}{\sin\varphi} \underbrace{[(p_\varphi \sin\varphi)' + p_\varphi']}_{-L(\Omega) + 2\Omega} + 2\Omega + pR = 0$$

oder

$$LL(w) + \frac{R}{K} L(\Phi) = p_1(\varphi, \vartheta) \quad (3.7 a)$$

bzw.

$$L [L(w) + \frac{R}{K} \Phi] = p_1(\varphi, \vartheta) \quad (3.7 b)$$

mit einer Belastungsfunktion

$$p_1(\varphi, \vartheta) = - \frac{R^3}{K} [pR + 2\Omega (1 + \frac{1}{K}) - \frac{1}{K} L(\Omega)] \quad (3.7 c) \\ \ll 1$$

Hierin stellt  $LL(\ )$  den durch (2.12) definierten Operator L, angewandt auf sich selbst, dar; ausführlich:

$$LL(\ ) = (\ )'' + 2 \cot\varphi (\ )' + (3 - \frac{1}{\sin^2\varphi}) (\ )'' + (\frac{1}{\sin^2\varphi} + 4) \cot\varphi (\ )' \\ + \frac{(\ )''''}{\sin^4\varphi} + \frac{2}{\sin^2\varphi} (\ )'''' - 2 \frac{\cot\varphi}{\sin^2\varphi} (\ )'''' \\ + \frac{2}{\sin^4\varphi} (2 + \sin^2\varphi) (\ )'' + 4 (\ ) \quad (3.8)$$

Gleichung (3.7) stellt eine Gleichgewichtsaussage dar.

3.5 2. Differentialgleichung für w und  $\bar{\varphi}$  (Verträglichkeit)

Durch Einsetzen der Definitionsgleichungen für die Spannungsfunktion (2. 10) und der Ableitungsgleichungen (2. 14) in die Verträglichkeitsbeziehung (3. 6) entsteht ein Ausdruck, der nur  $\bar{\varphi}$  und w enthält. Der aufwendige Vorgang ist in Tafel 3. 2 schematisch zusammengestellt. Mit den Definitionen (2. 12) und (3. 8) für den Operator L ( ) läßt sich diese 2. Differentialgleichung für w und  $\bar{\varphi}$  einfach schreiben:

$$L L(\bar{\varphi}) - (1+\mu) L(\bar{\varphi}) + (1-\mu) \frac{K}{R} L L(w) - E h R L(w) + (1-\mu) R^2 L(\Omega) = 0 \quad (3.9a)$$

oder

$$L [L(\bar{\varphi}) - (1+\mu) \bar{\varphi} + (1-\mu) \frac{K}{R} L(w) - E h R w] = - (1-\mu) R^2 L(\Omega) \quad (3.9b)$$

3.6 Trennung der Veränderlichen

Aus dem Differentialgleichungssystem 8. Ordnung in w und  $\bar{\varphi}$  läßt sich eine der beiden Größen eliminieren, beispielsweise  $\bar{\varphi}$ . Hierzu wird zunächst (3. 7 a) nach  $\bar{\varphi}$  aufgelöst:

$$L(\bar{\varphi}) = \frac{K}{R} [p_1 - L L(w)] \quad (3.10)$$

und anschließend in (3. 9) eingesetzt:

$$\begin{aligned} - \frac{K}{R} L L L(w) + (1+\mu) \frac{K}{R} L L(w) + (1-\mu) \frac{K}{R} L L(w) - E h R L(w) \\ = - (1-\mu) R^2 L(\Omega) - \frac{K}{R} L(p_1) + (1+\mu) \frac{K}{R} p_1 \end{aligned}$$

oder

$$L L L(w) - 2 L L(w) + \frac{K}{R} (1-\mu^2) L(w) = p_2(\varphi, \vartheta) \quad (3.11)$$

mit einer weiteren Belastungsfunktion

$$p_2(\varphi, \vartheta) = L(p_1) - (1+\mu) p_1 + \frac{R^3}{K} (1-\mu) L(\Omega) \quad (3.11a)$$

Tafel 3.2: Herleitungsschema für Gleichung (3.9).

Einzelterm von (3.6)	$\Phi^{**}$	$\Phi^*$	$\Phi^{**}$	$\Phi^*$	$\Phi^{***}$	$\Phi^{**}$	$\Phi^*$	$\Phi^{***}$	$\Phi^{**}$	$\Phi^*$	$\Phi^{***}$	$\Phi^{**}$	$\Phi^*$	Anteile mit $K/Rw$	Anteile mit $R^2\Omega$
$2 \cdot N_{\phi} R^2$				$2 \cdot \cot \varphi$										$2L(\cdot)$	$2(\cdot)$
$-\cot \varphi \cdot N_{\phi}^* R^2$		$-\cot^2 \varphi$		$\cot^3 \varphi$		$-\cot \varphi$								$-\cot \varphi L(\cdot)$	$-\cot \varphi(\cdot)^*$
$-2\mu \cot \varphi \cdot N_{\phi} R^2$		$-2\mu \cot^2 \varphi$		$2\mu \cot^3 \varphi$		$-2\mu \cdot \cot \varphi$								$-2\mu \cot \varphi L(\cdot)$	$-2\mu \cot \varphi(\cdot)^*$
$-\mu \cdot N_{\phi}^{**} R^2$		$-\mu \cot \varphi \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$		$\cot \varphi$		$4 \cdot \mu \cdot \cot \varphi$								$-\mu L(\cdot)$	$-\mu(\cdot)^{**}$
$\frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot N_{\phi} R^2$						$\cot \varphi$								$\frac{1}{\sin^2 \varphi} L(\cdot)$	$\frac{1}{\sin^2 \varphi}(\cdot)^{**}$
$-2\mu \cdot N_{\phi} R^2$		$-2\mu$					$-2\mu$							$-2\mu L(\cdot)$	$-2\mu(\cdot)$
$\mu \cdot \cot \varphi \cdot N_{\phi}^* R^2$		$\mu \cot \varphi$		$\mu \cot \varphi$										$\mu \cot \varphi L(\cdot)$	$\mu \cot \varphi(\cdot)^*$
$2 \cot \varphi \cdot N_{\phi} R^2$		$2 \cot \varphi$		$2 \cot \varphi$										$2 \cot \varphi L(\cdot)$	$2 \cot \varphi(\cdot)^*$
$N_{\phi}^{**} R^2$		$1$												$L(\cdot)$	$(\cdot)^{**}$
$-\frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \mu \cdot N_{\phi}^* R^2$						$-\frac{\mu}{\sin^2 \varphi}$								$-\frac{\mu}{\sin^2 \varphi} L(\cdot)$	$-\frac{\mu}{\sin^2 \varphi}(\cdot)^*$
$\frac{2(1+\mu)}{\sin^2 \varphi} (\sin \varphi \cdot N_{\phi} R^2)$						$\frac{2(1+\mu)}{\sin^2 \varphi}$								$\frac{2(1+\mu)}{\sin^2 \varphi} L(\cdot)$	
$-EhR \cdot L(w)$														$-\frac{EhR^2}{K} L(\cdot)$	
$\Sigma$	$1$	$2 \cot \varphi$	$1 - \cot^2 \varphi$	$4 \cot \varphi + \cot^3 \varphi$	$2$	$\frac{2}{\sin^2 \varphi}$	$2 \cot \varphi$	$\frac{1}{\sin^4 \varphi}$	$\frac{1}{\sin^2 \varphi}$	$\frac{1}{\sin^4 \varphi}$	$\frac{1}{\sin^2 \varphi}$	$\frac{1}{\sin^4 \varphi}$	$\frac{1}{\sin^2 \varphi}$	$(1 - \mu) L(\cdot)$	$(1 - \mu) L(\cdot)$
	$0$		$-\mu$	$-\mu \cot \varphi$	$-2\mu$									$-\frac{EhR^2}{K} L(\cdot)$	
oder mit (2.12) und (3.8)	$0$	$L(\Phi) - L(\Phi)$										$(1 - \mu) \frac{K}{R} L(w)$	$(1 - \mu) R^2 L(\Omega)$		
		$-\mu L(\Phi)$										$-EhR L(w)$			

Gleichung (3.11) stellt eine inhomogene partielle Differentialgleichung 6. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten für die Normalverschiebung  $w$  dar. Durch die Differentialgleichung 2. Ordnung für  $\xi$  (3.10) wird der Zusammenhang der Lösungen von (3.11) mit der Spannungsfunktion beschrieben. Außerdem enthält sie für  $p_1 = 0$  und  $w = 0$  einen von  $w$  unabhängigen 'homogenen' Anteil für  $\xi$ .

Alternativ zu diesem Weg läßt sich aus dem Differentialgleichungssystem  $w$  eliminieren und eine Gleichung 6. Ordnung für  $\xi$  aufstellen.

Die Lösung der Differentialgleichungen (3.10) und (3.11) setzt sich gemäß der Überlagerungssätze aus einer Lösung der homogenen Differentialgleichung für die randbelastete Schale und einer Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen:

$$\begin{aligned} w &= w_H + w_P \\ \xi &= \xi_H + \xi_P \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.7 Grenzübergänge

#### 3.7.1 Grenzübergang zum ebenen Tragwerk

Ersetzt man in den Differentialgleichungen (3.7) und (3.9) gemäß (2.12)  $L(\ )$  durch den Laplace-Operator  $L(\ ) = R^2 \Delta(\ ) + 2$ , so erhält man nach Kürzung durch  $R^4$  als Gleichgewichtsaussage:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w + \frac{4}{R^2} \Delta w + \frac{4}{R^4} w + \frac{1}{KR} \Delta \xi + \frac{2}{KR^3} \xi \\ = -\frac{p}{K} - \frac{2}{KR} \Omega + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left( \frac{1}{R} \Delta \Omega + \frac{2}{R^3} \Omega \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Verträglichkeitsaussage:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \xi + \frac{(3-\mu)}{R^2} \Delta \xi + \frac{2(1-\mu)}{R^4} \xi + \frac{(1-\mu)K}{R} \Delta \Delta w \\ + \frac{Eh}{R} \underbrace{\left( \frac{4}{k(1+\mu)} - 1 \right)}_{\ll 1} \Delta w + \frac{2Eh}{R^3} \underbrace{\left( \frac{2}{k(1+\mu)} - 1 \right)}_{\ll 1} = -(1-\mu) \Delta \Omega - \frac{2(1-\mu)}{R^2} \Omega \end{aligned} \quad (3.14)$$

Durch den Grenzübergang

$$\frac{1}{R} \rightarrow 0$$

geht die Schale in ein ebenes Tragwerk über. Damit verschwinden in (3.13) und (3.14) die unterstrichenen Ausdrücke, das System entkoppelt sich, und es verbleiben als

Gleichgewichtsaussage die Plattendifferentialgleichung

$$\Delta \Delta w = - \frac{p}{K} \quad (3.15)$$

und als

Verträglichkeitsaussage die Scheibendifferentialgleichung

$$\Delta \Delta \Phi = - (1 - \mu) \Delta \Omega \quad (3.16)$$

wobei die Koordinate  $\varphi$  durch  $r = R \sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  durch 1 ersetzt wird.

$$\Delta ( ) = \frac{\partial^2 ( )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial ( )}{\partial r} + \frac{\partial^2 ( )}{\partial \varphi^2} \frac{1}{r^2} \quad (3.17)$$

Der Grenzübergang ist sinngemäß auch in den Ausgangsgleichungen vorzunehmen.

### 3.7.2 Grenzübergang zur Membran

Der Übergang zur Membran wird durch Vernachlässigung der Biegesteifigkeit  $K \rightarrow 0$  vollzogen, d. h.

$$h^3 \rightarrow 0$$

Gleichgewichtsaussage (3.7)

$$\underline{K \cdot L \cdot L(w)} + R \cdot L(\Phi) = - R^3 (pR + 2R) + \underline{\underline{\frac{R^3}{k} L(\Omega)}} \quad (3.18)$$

Modifizierte Verträglichkeitsaussage (3.11)

$$K \cdot L \cdot L \cdot L(w) - 2 K \cdot L \cdot L(w) + Eh R^2 \cdot L(w) = K p_2 \quad (3.19 a)$$

oder

$$\begin{aligned} & \underline{K \cdot L \cdot L \cdot L(w) - 2 K \cdot L \cdot L(w) + E h R^2 \cdot L(w)} \\ & = - R^3 \{ [L - (1+\mu)] [p R + 2\Omega - \frac{1}{R} L(\Omega)] - (1-\mu) L(\Omega) \} \end{aligned} \quad (3.19b)$$

Damit entfallen alle einfach unterstrichenen Ausdrücke, und bei Voraussetzung von Lasten ohne starke Veränderlichkeit können die doppelt unterstrichenen Terme vernachlässigt werden ( $\frac{1}{R} L(\Omega) \ll \Omega$ ).

Es verbleiben

als Gleichgewichtsaussage

$$L(\xi) = - R^2 (p R + 2\Omega) \quad (3.20)$$

und als Verträglichkeitsaussage

$$L(w) = - \frac{R}{Eh} \{ L(p R) + (1+\mu) [L(\Omega) - p R - 2\Omega] \} \quad (3.21)$$

Die Gleichungen sind voneinander entkoppelt und gestatten getrennt die Bestimmung von  $\xi$  und  $w$ .

In den Ausgangsgleichungen werden ebenfalls alle Terme mit  $K$  gestrichen. Damit verschwinden alle Momente und Querkräfte und aus (2.10) verbleiben:

$$\begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{\xi''}{\sin^2 \varphi} + \xi' \cot \varphi + \xi \right) + \Omega \\ N_{\vartheta} &= \frac{1}{R^2} (\xi'' + \xi) + \Omega \\ N_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sin \varphi} (\cot \varphi \xi' - \xi'') \end{aligned} \quad (3.22)$$

Diese Gleichungen beinhalten die Kräftegleichgewichtsbedingungen in Richtung der Schalentangenten nach der Membrantheorie, während durch die Differentialgleichung (3.20) die dritte Bedingung in Normalrichtungen ausgedrückt wird. Dies ist direkt aus (2.13) erkenntlich:

$$R^2 (N_{\varphi} + N_{\vartheta}) = L(\Phi) + 2 \Omega R^2 = - p R^3$$

oder

(3. 23)

$$N_{\varphi} + N_{\vartheta} - p R = 0$$

Die Lösung von (3. 20) allein führt somit auf die Schnittgrößen, wodurch die innere statische Bestimmtheit der Membrantheorie dokumentiert wird.

Das hiermit beschriebene Problem der Membrantheorie der Kugelschale wird im Schrifttum ausführlich behandelt, z. B. [1, 2, 6], wobei in der Regel direkt von den drei Gleichgewichtsbedingungen ausgegangen und die Lösung nicht über eine Spannungsfunktion gewonnen wird. Erwähnt sei jedoch die Methode von Pucher, z. B. [1], S. 165.

4. Lösung der homogenen Differentialgleichungen

Für die randbelastete Schale ohne Oberflächenlasten gehen die Gleichungen (3. 11) und (3. 10) in die homogenen Differentialgleichungen über.

$$p_{\varphi} = p_{\vartheta} = p = 0 \quad \rightarrow \quad p_1(\varphi, \vartheta) = p_2(\varphi, \vartheta) = 0$$

$$\boxed{L L L(w) - 2 L L(w) + k(1-\mu^2) L(w) = 0} \quad (4. 1)$$

$$\boxed{L(\xi) = -\frac{K}{R} L L(w)} \quad (4. 2)$$

Durch Gleichung (4. 2) wird der Zusammenhang zwischen der Normalverschiebung w und der Spannungsfunktion  $\xi$  beschrieben.

Der Index H für die homogenen Anteile wird im Abschnitt 4 weggelassen.

4. 1 Lösung der Differentialgleichung (4. 1) für w

4. 1. 1 Aufspaltung in drei Differentialgleichungen

Da L ( ) ein linearer Operator ist, läßt sich die Differentialgleichung (4. 1) in folgender Weise darstellen:

$$L [ L L - 2 L + k(1 - \mu^2) ] (w) = 0 \quad (4. 3)$$

oder

$$(L - \iota_2) (L - \iota_3) (L - \iota_4) (w) = 0 \quad (4. 4)$$

wobei  $\iota_2 = 0$  aus (4. 3) zuerkennen ist.  $\iota_3$  und  $\iota_4$  werden durch Vergleich des zweiten Teils der Gleichungen (4. 3) und (4. 4) ermittelt. \*)

$$L L(w) - \underbrace{(\iota_3 + \iota_4)}_2 L(w) + \underbrace{\iota_3 \iota_4}_{k(1-\mu^2)} w = 0 \quad \rightarrow \quad \iota_{3/4}^2 - 2 \iota_{3/4} + k(1-\mu^2) = 0$$

$$\iota_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1 - k(1-\mu^2)}$$

$$\ll k$$

$$\iota_{3/4} = 1 \pm \underbrace{\frac{2R}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}}_{2\kappa^2} i$$

---

\*) Der hier ausgesparte Fall '1' soll aus systematischen Gründen der Lösung der Differentialgleichung (4. 2) vorbehalten bleiben (Abschnitt 4. 2. 2).

$$\begin{aligned} \ell_2 &= 0 \\ \ell_3 &= +1 + 2\kappa^2 i \\ \ell_4 &= +1 - 2\kappa^2 i \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit  $\kappa^4 = 3(1 - \mu^2) \frac{R^2}{h^2}$  (4.5a)

Aus Gleichung(4.4)ist ersichtlich, daß die Differentialgleichung 6. Ordnung in drei Differentialgleichungen je 2. Ordnung aufgespalten werden kann.

Allgemein:  $j = 2, 3, 4$

$L(w) - \ell_j w = 0$	aus- führ- lich:	$w'' + w' \cot \varphi + \frac{w''}{\sin^2 \varphi} + (2 - \ell_j) w = 0$	(4.6)
-----------------------	------------------------	---	-------

Im einzelnen:

j=2	$L(w) = 0$	$w'' + w' \cot \varphi + \frac{w''}{\sin^2 \varphi} + 2w = 0$	(4.6a)
j=3	$L(w) - (1 + 2\kappa^2 i)w = 0$	$w'' + w' \cot \varphi + \frac{w''}{\sin^2 \varphi} + (1 - 2\kappa^2 i)w = 0$	(4.6b)
j=4	$L(w) - (1 - 2\kappa^2 i)w = 0$	$w'' + w' \cot \varphi + \frac{w''}{\sin^2 \varphi} + (1 + 2\kappa^2 i)w = 0$	(4.6c)

Während die Differentialgleichung (4.6 a) reell ist, sind (4.6 b) und (4.6 c) komplex; für sie sind deshalb komplexe Lösungen zu erwarten. Die Aufteilung ist ohne Schwierigkeiten möglich, da die verbleibenden Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typ sind und somit keine reellen Charakteristiken aufweisen (Diskriminante  $\delta = \frac{1}{\sin^2 \varphi} > 0$ ).

#### 4.1.2 Überführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Entkopplung der partiellen Differentialgleichungen (4.6) gelingt bekanntlich durch einen speziellen Bernoullischen Produktansatz, der einer Fourierentwicklung in Umfangsrichtung entspricht und nach M. Levy benannt wird. Hiersoll nur der wichtige zum Meridian  $\vartheta = 0$  symmetrische Fall behandelt werden (Kosinuserwicklung für w). Diese Entwicklung wird bei allen Schnitt- und Verschiebungsgrößen vorgenommen (siehe Abschnitt 4.4).

$$w(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} w^m(\varphi) \cos m\vartheta \quad (4.7)$$

$$w'' = -\sum m^2 w^m(\varphi) \cos m\vartheta \quad (4.8)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.7) und (4.8) in (4.6) gehen die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche für den Funktionsanteil  $w^m(\varphi)$  über, wobei für jedes Reihenglied gesonderte Gleichungen entstehen.

$$w^{\cdot\cdot m} + w^{\cdot m} \cot\varphi + (2 - \ell_j - \frac{m^2}{\sin^2\varphi}) w^m = 0 \quad (4.9)$$

$$j = 2, 3, 4; \quad m = 0, 1, 2, \dots \infty$$

#### 4.1.3 Überführung in Legendre-Differentialgleichungen

Durch die Transformation

$$\bar{z} = \cos\varphi \quad (4.10)$$

lassen sich die Gleichungen (4.9) in Differentialgleichungen nach Legendre überführen.

Mit (4.10) und

$$w^m = w^m[\bar{z}(\varphi)]$$

$$w^{\cdot m} = \frac{dw^m}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\varphi} = \frac{dw^m}{d\bar{z}} (-\sin\varphi)$$

$$w^{\cdot\cdot m} = \frac{d^2 w^m}{d\bar{z}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{dw^m}{d\bar{z}} \frac{d^2 \bar{z}}{d\varphi^2} = \frac{d^2 w^m}{d\bar{z}^2} \sin^2\varphi - \frac{dw^m}{d\bar{z}} \cos\varphi$$

geht (4.9) über in

$$(1 - \bar{z}^2) \frac{d^2 w^m}{d\bar{z}^2} - 2\bar{z} \frac{dw^m}{d\bar{z}} + (2 - \ell_j - \frac{m^2}{1 - \bar{z}^2}) w^m = 0 \quad (4.11)$$

$$j = 2, 3, 4$$

Diese Differentialgleichungen 2. Ordnung sind vom Typ der zugeordneten Legendre-Differentialgleichungen (Sonderfall  $m = 0$ : Legendre Differentialgleichung), [67], S. 151; [64], II, S. 85; [66], S. 455.

Ihre Normalform ist gegeben durch

$$(1 - \bar{z}^2) \frac{d^2 w^m}{d\bar{z}^2} - 2\bar{z} \frac{dw^m}{d\bar{z}} + [\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-\bar{z}^2}] w^m = 0 \quad (4.12)$$

Der Parameter  $\nu$  in (4.11) ist somit

$$\begin{aligned} \nu_j(\nu_j+1) &= 2 - \ell_j \\ \text{für } j=2 &: &= 2 &, & (4.13) \\ \text{für } j=3,4 &: &= 1 \pm 2\kappa^2 i &; \end{aligned}$$

das heißt

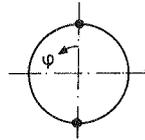
$$\begin{aligned} \nu_j^2 + \nu_j - (2 - \ell_j) &= 0 \\ \nu_j &= \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{9 - 4\ell_j} \right) \end{aligned}$$

(Die zweite Lösung mit der negativen Wurzel führt auf keine neue Aussage.)

$$\begin{aligned} \text{für } j=2 &: \ell_2 = 0 &\rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \nu_2 = 1 \\ \hline \end{array} &\text{reell} \\ \text{für } j=3,4 &: \ell_{3,4} = 1 \pm 2\kappa^2 i &\rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \nu_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5 \mp 8\kappa^2 i}) \\ \hline \end{array} &\text{konj.} \\ & & &\text{Komplex} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die zugeordneten Legendre-Differentialgleichungen haben drei reguläre singuläre Stellen

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 = 1 &\rightarrow \varphi_1 = 0^\circ \\ \bar{z}_2 = -1 &\rightarrow \varphi_2 = 180^\circ \\ (\bar{z}_3 = \infty) & \end{aligned}$$



wobei  $\bar{z}_3 = \infty$  hier ohne Bedeutung ist, da es nicht auf der Schale liegt.

Aus der Form von (4.11)

$$\frac{d^2 w^m}{d\bar{z}^2} - \frac{2\bar{z}}{1-\bar{z}^2} \frac{dw^m}{d\bar{z}} + \frac{(2-\ell_j)(1-\bar{z}^2) - m^2}{(1-\bar{z}^2)^2} w^m = 0$$

ist ersichtlich, daß der Koeffizient der 1. Ableitung einen Pol 1. Ordnung, der Koeffizient des absoluten Gliedes einen Pol 2. Ordnung besitzt. Dies sind die Bedingungen für Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse, die in der Nähe eines singulären Punktes Reihenlösungen der Form

$$w = \bar{z}^s \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{z}^n$$

aufweisen [5], S. 95 ff.

Die Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung 2. Ordnung läßt sich in der Form

$$w = C w_{\textcircled{1}} + D w_{\textcircled{2}}$$

darstellen, wobei  $w_{\textcircled{1}}$  und  $w_{\textcircled{2}}$  ein fundamentales Lösungssystem bilden.

Die hier vorliegenden Differentialgleichungen besitzen ein Fundamentalsystem von Lösungen in Form von zugeordneten Legendre-Funktionen (Kugelfunktionen) 1. und 2. Art, die zu den speziellen Funktionen der mathematischen Physik im komplexen Raum gehören und i. a. bei der Separation der dreidimensionalen Schwingungsgleichung auftreten [64], I, [67].

1. Art	$P_{\nu_j}^m(\bar{z})$
2. Art	$Q_{\nu_j}^m(\bar{z})$

vom Grad  $\nu_j$  mit der Ordnung  $m$   
mit reellem Argument  $\bar{z} = \cos \varphi$

Im Fall  $j = 2$  ist der Grad reell, bei  $j = 3, 4$  komplex.

$P_{\nu}^m$  und  $Q_{\nu}^m$  sind linear unabhängige Lösungen, da ihre Wronski-Determinante

$$\text{Wr} [P_{\nu}^m(\bar{z}), Q_{\nu}^m(\bar{z})] = \frac{\Gamma(1+\nu+m)}{\Gamma(1+\nu-m)} (1-\bar{z}^2)^{-1}$$

für  $\bar{z} \neq 1$  von Null verschieden ist [67], S. 170. Hierin bedeutet  $\Gamma$  die Gammafunktion.

Die Legendre-Funktionen 1. Art stellen für den Sonderfall der Ordnung  $m = 0$  und ganzzahligem reellem Grad  $\nu = n \geq 0$  einfache Polynome

(Legendre - Polynome) dar, die weitgehend vertafelt sind [68]

z. B.  $P_1^0 = P_1(\bar{z}) = \bar{z}$

Im allgemeinen Fall sind die Funktionen über unendliche Reihen darstellbar.

Zwischen den Lösungen der 1. Art  $P_{\nu}^m$  und der 2. Art  $Q_{\nu}^m$  läßt sich folgende Beziehung aufstellen [67], S. 170

$$Q_{\nu}^m(\bar{z}) = \frac{\pi}{2 \sin[\pi(\nu+m)]} [P_{\nu}^m(\bar{z}) \cos[\pi(\nu+m)] - P_{\nu}^m(-\bar{z})] \quad (4.15)$$

Nebender 1. Lösung  $P_{\nu}^m$  enthält  $Q_{\nu}^m$  als wesentlichen von  $P_{\nu}^m(\bar{z})$  linear unabhängigen Anteil eine zweite Legendre - Funktion 1. Art  $P_{\nu}^m(-\bar{z})$  für das negative Argument  $-\bar{z} = -\cos\varphi$ , die für sich als 2. Lösung genommen werden kann.

1. Lösung:	$P_{\nu_j}^m(\bar{z})$
2. Lösung:	$P_{\nu_j}^m(-\bar{z})$

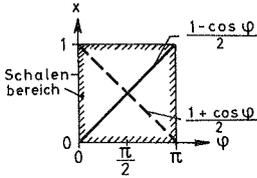
mit  $\bar{z} = \cos\varphi$   
 $j = 2, 3, 4$

Zwischen den Legendre - Funktionen und den hypergeometrischen Funktionen (Potenzreihen) besteht ein direkter Zusammenhang, da die zu ihnen gehörigen Differentialgleichungen, die Legendre - Differentialgleichung und die hypergeometrische Differentialgleichung, ebenfalls ineinander überführbar sind.

Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, die Legendre - Funktionen durch die hypergeometrischen Funktionen auszudrücken oder die Differentialgleichungen in hypergeometrische Differentialgleichungen zu transformieren und ihre Reihenlösungen zu verwenden. Dieser Weg soll im folgenden Abschnitt eingeschlagen werden.

4.1.4 Überführung in hypergeometrische Differentialgleichungen

Durch die Transformationen



$$w^m = \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} W = \left( \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)^{\frac{m}{2}} W \quad (4.16a)$$

$$x = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \quad (4.16b)$$

lassen sich die Gleichungen (4.6) in hypergeometrische Differentialgleichungen überführen. Dabei sind folgende Umformungen vorzunehmen:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \pm \frac{1}{2} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = \pm \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\frac{dW}{d\varphi} = \frac{dW}{dx} \frac{dx}{d\varphi} = \pm \frac{1}{2} \sin \varphi \frac{dW}{dx}$$

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} = \frac{d^2 W}{dx^2} \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \frac{dW}{dx} \frac{d^2 x}{d\varphi^2} = \frac{d^2 W}{dx^2} \frac{\sin^2 \varphi}{4} \pm \frac{dW}{dx} \frac{\cos \varphi}{2}$$

$$w \cdot m = \frac{d(W \tan^{-m} \frac{\varphi}{2})}{d\varphi} = \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} \left( \frac{dW}{d\varphi} \pm \frac{m}{\sin \varphi} W \right)$$

$$= \pm \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{2} \frac{dW}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} W \right)$$

$$w \cdot \cdot m = \frac{d^2}{d\varphi^2} (W \tan^{-m} \frac{\varphi}{2}) = \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \pm 2 \frac{m}{\sin \varphi} \frac{dW}{d\varphi} + \frac{m(m + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} W \right]$$

$$= \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{d^2 W}{dx^2} \frac{\sin^2 \varphi}{4} + \frac{dW}{dx} \left( \pm \frac{\cos \varphi}{2} + m \right) + \frac{m(m + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} W \right]$$

Diese Werte in (4.6) eingesetzt und durch  $\tan^{-m} \frac{\varphi}{2}$  dividiert:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} \frac{\sin^2 \varphi}{4} + \frac{dW}{dx} \left( \pm \frac{\cos \varphi}{2} + m \right) + \frac{m(m + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} W$$

$$\pm \cot \varphi \left( \frac{\sin \varphi}{2} \frac{dW}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} W \right) + (2 - \ell_j - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi}) W = 0$$

Mit (4.13) und  $\sin^2 \varphi = 4x(1-x)$  und  $\pm \cos \varphi = 1 - 2x$  geht diese Gleichung über in

$$x(1-x) \frac{d^2 W}{dx^2} + (m+1-2x) \frac{dW}{dx} + \nu_j(\nu_j+1) W = 0 \quad (4.17)$$

$j = 2, 3, 4$

Gleichung (4.17) ist eine hypergeometrische oder Gaußsche Differentialgleichung, deren Normalform lautet [67], S. 42; [64], I, S. 129; II, S. 82:

$$x(1-x) \frac{d^2 W}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dW}{dx} - abW = 0 \quad (4.18)$$

Hierin sind im Fall der Gleichungen (4.17) die Parameter gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} a + b + 1 &= 2 \\ -ab &= \nu_j (\nu_j + 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{|l} a = \nu_j + 1 \\ b = -\nu_j \\ c = m + 1 \end{array} \quad (4.19)$$

Die hypergeometrische Differentialgleichung enthält reguläre singuläre Stellen bei

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ (x_3 &= \infty) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} \text{ für } x = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \\ \varphi_2 &= \begin{cases} 180^\circ \\ 0^\circ \end{cases} \text{ für } x = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \end{aligned}$$

und gehört zur Fuchschen Klasse, deren Lösungen durch unendliche Potenzreihen in  $x$  darstellbar sind.

Diese sogenannten hypergeometrischen Reihen werden mit

$$F(a, b; c; x)$$

bezeichnet und sind definiert durch [67], S. 37; [64], I, S. 130; II, S. 84.

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad (4.20a)$$

mit dem Pochhammer-Symbol  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$ ,  $(\alpha)_0 = 1$ ,

das heißt ausführlich:

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; x) &= 1 + \frac{a b x}{c \cdot 1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\
 &+ \frac{a(a+1)\dots(a+n)b(b+1)\dots(b+n)}{c(c+1)\dots(c+n)} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}
 \tag{4.20b}$$

Die Reihe konvergiert absolut im Bereich

$$|x| < 1, \text{ d. h. für } \varphi < 180^\circ \text{ bei } x = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$$

$$\text{bzw. für } \varphi > 0^\circ \text{ bei } x = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$$

Für  $|x| = 1$  ( $\varphi = 180^\circ$  bzw.  $0^\circ$ ) ist sie divergent für  $\operatorname{Re}(a+b-c) \geq 1$   
 konvergent für  $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$ .

Hier ist  $\operatorname{Re}(a+b-c) = \nu_j + 1 - \nu_j - m - 1 = -m < 0$  für  $m \neq 0$ , d. h. die Reihe konvergiert für  $m \geq 1$  im gesamten Schalenbereich, für  $m = 0$  nur im Bereich  $\varphi < 180^\circ$  im Fall  $x = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$  bzw.  $\varphi > 0^\circ$  im Fall  $x = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$ , was hier ausreichend ist.

Fundamentalsystem von Lösungen: [65], S. 211.

Da mit  $W = F(a, b; c; x) = F(\nu_j + 1, -\nu_j; 1+m; x)$  eine Lösung der Differentialgleichungen (4.17) vorliegt, entstehen bei der Transformation nach den Gleichungen (4.16) folgende hypergeometrische Funktionen:

Bei den Transformationen  $x = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  und  $w^m = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} W$  (Entwicklung an der singulären Stelle  $\varphi = 0$ )

$$W_{j\textcircled{1}} = F(\nu_j + 1, -\nu_j; 1+m; \sin^2 \frac{\varphi}{2})
 \tag{4.21a}$$

Bei den Transformationen  $x = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$  und  $w^m = \tan^{-m} \frac{\varphi}{2} W = \cot^{+m} \frac{\varphi}{2} W$  (Entwicklung an der singulären Stelle  $\varphi = 180^\circ$ )

$$W_{j\textcircled{2}} = F(\nu_j + 1, -\nu_j; 1+m; \cos^2 \frac{\varphi}{2})
 \tag{4.21b}$$

$W_{j\textcircled{1}}$  und  $W_{j\textcircled{2}}$  bilden zusammen für jedes  $j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (4.17), was sich über den unten angegebenen Zusammenhang mit den Legendre-Funktionen zeigen

läßt. Für die gesuchten Funktionen  $w^m$  liegen über die Transformationen (4.16 a) folgende linear unabhängigen Lösungen vor:

$$w^m j_{\textcircled{1}}(\varphi) = \tan^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} F(\nu_j + 1, -\nu_j; 1+m; \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = \tan^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} F^m \quad (4.22a)$$

$$w^m j_{\textcircled{2}}(\varphi) = \cot^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} F(\nu_j + 1, -\nu_j; 1+m; \cos^2 \frac{\varphi}{2}) \equiv \cot^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} \overline{F}^m \quad (4.22b)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \infty \quad j = 2, 3, 4$$

Lösung  $w_{\textcircled{1}}^m$  ( $w_{\textcircled{2}}^m$ ) ist bei  $\varphi = 0$  ( $\varphi = 180^\circ$ ) regulär, bei  $\varphi = 180^\circ$  ( $\varphi = 0$ ) nicht regulär.

Im Fall  $j = 2$  sind die Reihen reell, für  $j = 3, 4$  wegen komplexem  $\nu_{3/4}$  komplex. Sie werden jeweils in Real- und Imaginärteil aufgespalten, wobei jeder für sich über den Produktansatz (4.7)  $w = w^m \cos m \vartheta$  eine linear unabhängige Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung (4.1) ist. Dies wird im Abschnitt 4.1.6 gezeigt.

#### Zusammenhang mit den Legendre - Funktionen

Zwischen den Legendre - Funktionen 1. Art  $P_{\nu}^m(\cos \varphi)$  und den hypergeometrischen Funktionen bestehen folgende Beziehungen: [67], S. 169

$$P_{\nu_j}^m(\cos \varphi) = (-1)^m \frac{\Gamma(1+\nu_j+m)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+\nu_j-m)} \tan^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} F(\nu_j+1, -\nu_j; 1+m; \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (4.23a)$$

worin  $\Gamma$  die Gammafunktion bedeutet.

Ersetzt man gemäß Abschnitt 4.1.3  $z = \cos \varphi$  durch  $-z = -\cos \varphi$ , so geht Gleichung (4.23 a) über in

$$P_{\nu_j}^m(-\cos \varphi) = (-1)^m \frac{\Gamma(1+\nu_j+m)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+\nu_j-m)} \cot^{\dagger m} \frac{\varphi}{2} F(\nu_j+1, -\nu_j; 1+m; \cos^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (4.23b)$$

Die Gleichungen (4.23) stimmen bis auf einen konstanten Faktor mit dem fundamentalen Lösungssystem (4.22) überein.

4.1.5 Lösungen der Differentialgleichung  $L(w) = 0$  (Fall  $j = 2$ )

Im Fall  $j = 2$  der Gleichung (4.9), der aus der Ausgangsdifferentialgleichung (4.6 a)  $L(w) = 0$  hervorgeht, ergeben sich nach (4.22) mit  $v_j = 1$  folgende Lösungen:

$$w_{2\textcircled{1}}^m = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} F(2, -1; 1+m; \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (4.24a)$$

$$w_{2\textcircled{2}}^m = \cot^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} F(2, -1; 1+m; \cos^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (4.24b)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Für den hier enthaltenen Sonderfall mit ganzzahligem negativem Parameter  $b = -1$  bricht die mit (4.20) definierte hypergeometrische Reihe nach dem zweiten Reihenglied ab, da alle weiteren Glieder den Faktor  $b + 1$  enthalten.

$$F(2, -1; 1+m; x) = 1 + \frac{2(-1)x}{1+m} \frac{1}{1!} + \underbrace{\frac{2(2+1)(-1)(-1+1)}{(1+m)(2+m)} \frac{x^2}{1!} + \dots}_0$$

Für 
$$x = \begin{cases} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{cases} = \frac{1}{2} (1 \mp \cos \varphi)$$

ist 
$$F(2, -1; 1+m; \frac{1 \mp \cos \varphi}{2}) = 1 - \frac{1 \mp \cos \varphi}{m+1} = \frac{m \pm \cos \varphi}{m+1} \quad (4.25)$$

Die Lösungen (4.24) nehmen damit folgende einfache Form an:

$w_{2\textcircled{1}}^m = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \frac{m + \cos \varphi}{m + 1}$	(4.26a)
--	---------

$w_{2\textcircled{2}}^m = \cot^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \frac{m - \cos \varphi}{m + 1}$	(4.26b)
--	---------

$$m = 2, 3, \dots, \infty$$

Bei  $m = 0$  und  $m = 1$  sind die Lösungen (4.26) allerdings nicht mehr linear unabhängig.

	für $m = 0$	für $m = 1$
Aus (4.26a) :	$\cos \varphi$	$\frac{1}{2} \sin \varphi$
Aus (4.26b) :	$-\cos \varphi$	$\frac{1}{2} \sin \varphi$

Eine zweite linear unabhängige Lösung läßt sich über die Beziehung

$$w_{2\textcircled{2}} = w_{2\textcircled{1}} \int \frac{e^{-\int p d\varphi}}{w_{2\textcircled{1}}^2} d\varphi$$

ermitteln, die aus der Wronski-Determinante folgt. Hierin ist  $p(\varphi)$  der Koeffizient der 1. Ableitung in der Differentialgleichung (4.9):  
 $p = \cot\varphi$ ; [65].

Mit  $e^{-\int p d\varphi} = e^{-\int \cot\varphi d\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}$

ist  $w_{2\textcircled{2}} = w_{2\textcircled{1}} \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi w_{2\textcircled{1}}^2}$

und damit

Für $m = 0$	$w_{2\textcircled{1}}^0 = \cos\varphi$	(4. 27a)
-------------	--	----------

	$w_{2\textcircled{2}}^0 = \cos\varphi \ln \tan \frac{\varphi}{2} + 1$	(4. 27b)
--	---	----------

Für $m = 1$	$w_{2\textcircled{1}}^1 = \sin\varphi$	(4. 27c)
-------------	--	----------

	$w_{2\textcircled{2}}^1 = \cot\varphi - \sin\varphi \ln \tan \frac{\varphi}{2}$	(4. 27c)
--	---	----------

Die Gesamtlösung lautet somit

$w_2^m = A_2^m f_2^m + B_2^m g_2^m$	(4. 28a)
-------------------------------------	----------

mit den Integrationskonstanten  $A_2^m$  und  $B_2^m$  und den Abkürzungen

$m = 0$	$f_2^0 = \cos\varphi$	$g_2^0 = \cos\varphi \ln \tan \frac{\varphi}{2} + 1$	(4.28b)
$m = 1$	$f_2^1 = \sin\varphi$	$g_2^1 = \cot\varphi - \sin\varphi \ln \tan \frac{\varphi}{2}$	(4.28b)
$m \geq 2$	$f_2^m = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} (m + \cos\varphi)$	$g_2^m = \cot^{+m} \frac{\varphi}{2} (m - \cos\varphi)$	(4.28b)

4.1.6 Lösungen der Differentialgleichung  $L(w) - (1 \pm 2 \kappa^2 i) w = 0$   
 (Fall  $j = 3, 4$ )

Die Lösungen der Differentialgleichungen (4.6 b) und (4.6 c)  $L(w) - (1 \pm 2 \kappa^2 i) w = 0$  sind mit dem Entkopplungsansatz (4.7)  $w = w^m(\varphi) \cos m\varphi$  und den Gleichungen (4.22) gegeben. Die dort erhaltenen hypergeometrischen Funktionen  $F(a, b; c; x)$  weisen komplexe Parameter  $a = \nu_{3/4} + 1$ ,  $b = -\nu_{3/4}$  auf. Die Reihen werden in einen Realteil  $F_{\text{Re}}$  und einen Imaginärteil  $F_{\text{Im}}$  aufgespalten, die je für sich Lösungsbestandteile der reellen Differentialgleichung 4. Ordnung

$$L L(w) - 2 L(w) + \kappa(1 - \mu^2) w = 0 \quad (4.29)$$

sind.

$F(a, b; c; x) =$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{abx}{c \cdot 1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1) \cdot 2!} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n)b(b+1)\dots(b+n)x^{n+1}}{c(c+1)\dots(c+n)(n+1)!} \dots \\ &= 1 + a_o \frac{x}{1!} + a_o a_1 \frac{x^2}{2!} + a_o a_1 a_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + a_o a_1 \dots a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \dots \\ &= 1 + C_o \frac{x}{1!} + C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + C_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \dots \\ &= 1 + \underbrace{A_o \frac{x}{1!} + A_1 \frac{x^2}{2!} + A_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + A_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Realteil } F_{\text{Re}}} \dots \\ &\quad + i \underbrace{(B_o \frac{x}{1!} + B_1 \frac{x^2}{2!} + B_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + B_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})}_{\text{Imaginärteil } F_{\text{Im}}} \dots \\ &= F_{\text{Re}} + i F_{\text{Im}} \end{aligned} \quad (4.30a)$$

worin

$$C_n = A_n + i B_n = a_o \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_n = C_{n-1} a_n = (A_{n-1} + i B_{n-1}) a_n \quad (4.30b)$$

Mit (4.19)

$$a_n = \frac{(a+n)(b+n)}{c+n} = \frac{(\nu_j+1+n)(-\nu_j+n)}{m+1+n} = \frac{n(n+1) - \nu_j(\nu_j+1)}{m+1+n}$$

Für den Fall  $j = 3, 4$  ist nach (4.5) und (4.13):  $\nu_{3,4}(\nu_{3,4} + 1) = 1 \mp 2\kappa^2 i$

$$a_n = \frac{n(n+1) - 1 \pm 2\kappa^2 i}{m+1+n} = \frac{n(n+1) - 1}{m+1+n} \pm i \frac{2\kappa^2}{m+1+n} \quad (4.31a)$$

mit dem Anfangswert ( $n = 0$ )

$$a_0 = -\frac{1}{m+1} \pm i \frac{2\kappa^2}{m+1} \quad (4.31b)$$

Rekursive Bestimmung der Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  des  $(n+1)$ -ten Reihengliedes aus den Koeffizienten  $A_{n-1}$  und  $B_{n-1}$  des  $n$ -ten Reihengliedes:

Mit (4.30) und (4.31a) ist:

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= (A_{n-1} + iB_{n-1})a_n = (A_{n-1} + iB_{n-1}) \left( \frac{n(n+1) - 1}{m+1+n} \pm i \frac{2\kappa^2}{m+1+n} \right) \\ &= A_{n-1} \frac{n(n+1) - 1}{m+1+n} \mp B_{n-1} \frac{2\kappa^2}{m+1+n} + i(B_{n-1} \frac{n(n+1) - 1}{m+1+n} \mp A_{n-1} \frac{2\kappa^2}{m+1+n}) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich folgende Rekursionsformeln:

$$A_n = A_{n-1} \frac{n(n+1) - 1}{m+n+1} (\mp) B_{n-1} \frac{2\kappa^2}{m+n+1} \quad (4.32a)$$

$$B_n = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} A_{n-1} \frac{2\kappa^2}{m+n+1} + B_{n-1} \frac{n(n+1) - 1}{m+1+n} \quad (4.32b)$$

mit den Anfangswerten ( $n = 0$ )

$$A_0 = -\frac{1}{m+1} \quad (4.32c)$$

$$B_0 = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \frac{2\kappa^2}{m+1} \quad (4.32d)$$

Der Fall  $j = 4$  (unteres Vorzeichen) führt auf keine neue Lösung, da Real- und Imaginärteile bei  $j = 3$  für sich bereits Lösungen der Differentialgleichung sind.

$$F_{\text{Re}} = 1 + A_0 \frac{x}{1!} + A_1 \frac{x^2}{2!} + A_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + A_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad (4.33a)$$

$$F_{\text{Im}} = B_0 \frac{x}{1!} + B_1 \frac{x^2}{2!} + B_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + B_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad (4.33b)$$

Neben diesen Reihen werden auch die ersten Ableitungen nach  $x$  benötigt:

$$\frac{d}{dx} F(a, b; c; x) = \frac{a b}{c} F(a+1, b+1; c+1; x)$$

$\frac{d F_{\text{Re}}}{dx} = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + A_n \frac{x^n}{n!} + \dots$	(4.34a)
$\frac{d F_{\text{Im}}}{dx} = B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + B_n \frac{x^n}{n!} + \dots$	(4.34b)

Im Anhang 1 ist die in ALGOL geschriebene Prozedur HYREI angegeben, mit der die vier Reihen (4.33) und (4.34) für den Fall  $x = \sin^2 \varphi$  (1. Lösung) berechnet werden können.

In der Prozedur wird außerdem der Ausdruck  $T = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2}$  für die 1. Gesamtlösung mitberechnet.

Außer dieser exakten Lösung wurde die Differentialgleichung 4. Ordnung (4.29) in ein Differentialgleichungssystem von 4 Gleichungen 1. Ordnung umgewandelt und mit einer Integrationsprozedur (DIFFSY) auf einer Rechenanlage (TR 4) numerisch integriert. Hierbei wurden für ein Anfangsargument  $x_0 \cong \varphi_0$  die Reihenlösungen als Anfangswerte eingegeben und die Ergebnisse an weiteren Stellen  $x_k \cong \varphi_k$  miteinander verglichen. Die Lösungen stimmten weitgehend überein, die numerische Integration benötigte jedoch erwartungsgemäß ein Vielfaches an Rechenzeit.

Zwischen den Reihenlösungen zu verschiedenen Harmonischen  $m$  bestehen Beziehungen, die eine rekursive Bestimmung erlauben. Sie sind im Anhang 2 angegeben, da sie nicht unbedingt benötigt werden. Beispielsweise lassen sich Real- und Imaginärteil  $F_{\text{Re}}^m$  und  $F_{\text{Im}}^m$  für die Harmonische  $m$  aus den Werten  $F_{\text{Re}}^{m-1}$ ,  $F_{\text{Im}}^{m-1}$ ,  $F_{\text{Re}}^{m-2}$  und  $F_{\text{Im}}^{m-2}$  des  $(m-1)$ -ten und  $(m-2)$ -ten Reihengliedes bestimmen.

Nach (4. 22a) liegt damit folgende erste Lösung vor ( $j = 3, 4$ )

$$w_{3,4}^m \textcircled{1} = A_3^m w_{3\textcircled{1}}^m + A_4^m w_{4\textcircled{1}}^m \quad (4. 35a)$$

mit den Integrationskonstanten  $A_3^m$  und  $A_4^m$  und

$$w_{3,4}^m \textcircled{1} = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} F^m = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} (F_{\text{Re}}^m + i F_{\text{Im}}^m) \quad (4. 35b)$$

d. h.

$$w_{3,4}^m \textcircled{1} = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} \left[ \underbrace{(A_3^m + A_4^m)}_{C_3^m} F_{\text{Re}}^m + i \underbrace{(A_3^m - A_4^m)}_{C_4^m} F_{\text{Im}}^m \right] \quad (4. 35c)$$

oder nach Einführung der endgültigen Integrationskonstanten  $C_3^m$  und  $C_4^m$

$$w_{3,4}^m \textcircled{1} = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} [C_3^m F_{\text{Re}}^m + C_4^m F_{\text{Im}}^m] \quad (4. 35d)$$

Die zweite Lösung  $w_{3,4}^m \textcircled{2}$  ist sinngemäß zu bestimmen.

Mit den Abkürzungen

$f_3^m = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} F_{\text{Re}}^m$	bzw.	$g_3^m = \cot^{+m} \frac{\varphi}{2} \overline{F}_{\text{Re}}^m$	
$f_4^m = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2} F_{\text{Im}}^m$		$g_4^m = \cot^{+m} \frac{\varphi}{2} \overline{F}_{\text{Im}}^m$	

(4. 36a)

lautet dann die Gesamtlösung

$w_{3,4}^m = C_3^m f_3^m + C_4^m f_4^m + D_3^m g_3^m + D_4^m g_4^m$

(4. 36b)

#### 4. 2 Lösung der Differentialgleichung (4. 2) für $\Phi$

Die Differentialgleichung (4. 2)

$$L(\Phi) = -\frac{K}{R} L L(w)$$

beschreibt einmal die Abhängigkeit der Spannungsfunktion  $\Phi$  von den Lösungen  $w$  der Differentialgleichung (4. 1) (inhomogener Fall mit 'rechter' Seite  $-\frac{K}{R} L L(w)$ ), zum anderen existieren außer diesen Zusammenhängen zwei neue Lösungen von  $\Phi$  für den homogenen Fall

$$L(\Phi) = 0 \quad (4. 37a)$$

4.2.1 Zusammenhänge zwischen  $\Phi$  und  $w$

Die Differentialgleichung (4.37 a) läßt sich auch schreiben

$$L \left[ \Phi + \frac{K}{R} L(w) \right] = 0 \quad (4.37b)$$

Durch den inneren Anteil

$$\Phi = - \frac{K}{R} L(w) \quad (4.38)$$

wird der Zusammenhang mit den Lösungen  $w$  ausgedrückt. Über (4.6) läßt sich in (4.38)  $L(w)$  durch  $\iota_j w$  ( $j = 2, 3, 4$ ) ersetzen,

$$\Phi_j = - \frac{K}{R} \iota_j w \quad (4.39)$$

Im einzelnen:

$$j = 2 : \iota_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_2 = 0 \quad (4.39a)$$

$$j = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} : \iota_3 = 1 + 2\underline{\mu}^2 i \quad \rightarrow \quad \Phi_3 = - \frac{K}{R} (1 + 2\underline{\mu}^2 i) w_3 \quad (4.39b)$$

Im Fall  $j = 2$  tritt somit keine zugehörige Spannungsfunktion auf.

Nach Einführung des Entkopplungsansatzes

$$\boxed{\Phi(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m(\varphi) \cos m\vartheta} \quad (4.40)$$

läßt sich für den Fall  $j = 3, 4$  mit Gleichung (4.35 c) für  $w^m$  der Zusammenhang zur ersten Lösung angeben

$$\Phi_{3,4}^m = - \frac{K}{R} (1 + 2\underline{\mu}^2 i) \tan^{\frac{+m\varphi}{2}} \frac{A_3^m}{4} (F_{Re}^m + i F_{Im}^m) \quad (4.41a)$$

oder

$$\Phi_{3,4}^m = - \frac{K}{R} \tan^{\frac{+m\varphi}{2}} \{ (A_3^m + A_4^m) F_{Re}^m + i (A_3^m - A_4^m) F_{Im}^m + 2\underline{\mu}^2 [(A_3^m - A_4^m) i F_{Re}^m - (A_3^m + A_4^m) F_{Im}^m] \}$$

Führt man die endgültigen Integrationskonstanten  $C_3^m$  und  $C_4^m$  und die Abkürzungen (4.36 a) ein und erweitert sinngemäß um die zweite Lösung, dann erhält man:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\phi}_{3,4}^m &= -\frac{K}{R} [C_3^m (f_3^m - 2\kappa^2 f_4^m) + C_4^m (f_4^m + 2\kappa^2 f_3^m) + \\ &+ D_3^m (g_3^m - 2\kappa^2 g_4^m) + D_4^m (g_4^m + 2\kappa^2 g_3^m)] \end{aligned}} \quad (4.41b)$$

Für spätere Umformungen wird ein weiterer Zusammenhang zwischen  $w_{3/4}$  und  $\bar{\phi}_{3/4}$  benötigt. Eliminiert man mit Hilfe von (4.29)  $L L(w)$  sowie durch (4.38)  $L(w)$  aus Gleichung (4.2), so verbleibt folgender Ausdruck

$$(L - 2) (\bar{\phi}_{3,4}) = E h R w_{3,4} \quad (4.42)$$

#### 4.2.2 Homogene Differentialgleichung $L(\bar{\phi}) = 0$ (Fall $j = 1$ )

Die im Abschnitt 4.1.5 angegebenen Lösungen der Differentialgleichung  $L(w) = 0$  (Fall  $j = 2$ ) können zusammen mit (4.40) im homogenen Fall  $L(\bar{\phi}) = 0$  sinngemäß übernommen werden ( $\rightarrow$  Fall  $j = 1$ )

$$\boxed{\bar{\phi}_1^m = -\frac{K}{R} (A_1^m f_2^m + B_1^m g_2^m)} \quad (4.43)$$

worin  $f_2^m$  und  $g_2^m$  durch (4.28 b) bereits definiert sind.

Wie sich aus dem Abschnitt 4.4 entnehmen läßt, verschwindet die Lösung (4.43) in den Gleichungen für die Schnitt- und Verschiebungsgrößen im Fall  $m = 0$  identisch, da sie mit dem Faktor  $m$  behaftet ist. Hierdurch ist es für  $m = 0$  unnötig, die Lösung (4.43) mitzuführen. Das dadurch beschriebene rotationssymmetrische Problem ist bekanntlich von 6. Ordnung und besitzt nur 6 linear unabhängige Lösungen.

Unabhängig davon ist jedoch zu beachten, daß neben den Lösungen  $f_2^m$  (4.28 b) für  $\bar{\phi}$  im Falle  $m = 0$  und  $m = 1$  (in  $\bar{\phi}$ ) mehrdeutige Lösungen  $\bar{f}_2^m$  für  $\bar{\phi}$  existieren, die zu weiteren (eindeutigen) mechanisch sinnvollen Ausdrücken führen.

$$\begin{aligned} \bar{f}_2^0 &= \bar{\phi} \cos \varphi & \text{für } m = 0 \\ \bar{f}_2^1 &= \bar{\phi} \tan \bar{\phi} \sin \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} & \text{für } m = 1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Durch sie werden zusammen mit  $g_2^0$  und  $g_2^1$  Zustände beschrieben, wie sie durch äußere Kraft- bzw. Momentenresultierende auf der Schale entstehen.

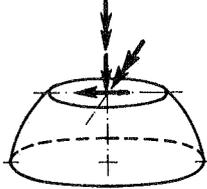


Bild 4.1: Äußere Kraft- bzw. Momentenresultierende

Diese Zustände sollen hier nicht behandelt werden, da sie i. a. nur bei Rohranschlüssen an Kugelbehältern von Interesse sind; siehe hierzu [27].

#### 4.3 Zusammenstellung der Lösungen und ihre physikalische Deutung

Die Gleichungen (4.28), (4.38) und (4.42) stellen zusammen mit (4.7) und (4.40) die Lösungen der homogenen Differentialgleichungen (4.1) oder (4.6) und (4.2) dar. Entsprechend der Ordnung des Problems sind es für jede Harmonische  $m$  8 linear unabhängige Lösungen mit den jeweils 8 Integrationskonstanten.

Fall $j = 1 : A_1^m$	$B_1^m$	für $L(\bar{\varphi}) = 0$
Fall $j = 2 : A_2^m$	$B_2^m$	für $L(w) = 0$
Fall $j = 3 : C_3^m$	$D_3^m$	} für $L(w) - (1 + 2\kappa^2 i) w = 0$
Fall $j = 4 : C_4^m$	$D_4^m$	

Aus Gründen der physikalischen Bedeutung der einzelnen Lösungen ist es sinnvoll, die Integrationskonstanten  $A_1^m$  und  $B_1^m$  in den Lösungen (4.28) und (4.42) der Differentialgleichungen  $L(\bar{\varphi}) = 0$  und  $L(w) = 0$  folgendermaßen in neue Konstante  $C_1^m$  und  $D_1^m$  zu transformieren:

$A_1^m = C_1^m \cdot \kappa(1 - \mu)$	$B_1^m = D_1^m \cdot \kappa(1 - \mu)$	(4.45)
$A_2^m = C_1^m + C_2^m$	$B_2^m = D_1^m + D_2^m$	

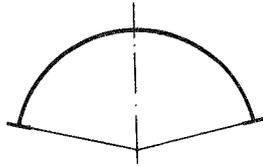
Untersucht man die Lösungsfunktionen genauer, so stellt man fest, daß sich die Lösungen der Differentialgleichungen  $L(w) = 0$  und  $L(\xi) = 0$  auf den gesamten Schalenbereich erstrecken können, während die hypergeometrischen Reihenlösungen stark abklingenden Charakter aufweisen und dem Verlauf gedämpfter Schwingungen ähnlich sind.

Aus den Zusammenhängen mit den Schnittgrößen (siehe Abschnitt 4.4) läßt sich demnach folgender physikalischer Hintergrund der Lösungen entnehmen (vergleiche z. B. [1; 3; 19; 20]).

- ① Die 4 m hypergeometrischen Reihenlösungen der Differentialgleichungen (4.6 b) und (4.6 c) beschreiben die Biegerandstörungen einer Schale, wobei durch die Lösungen  $f_3^m$  und  $f_4^m$  mit den Konstanten  $C_3^m$  und  $C_4^m$  eine Randstörung am unteren Rand, durch die Lösungen  $g_3^m$  und  $g_4^m$  mit den Konstanten  $D_3^m$  und  $D_4^m$  am oberen Rand der Schale ausgedrückt wird. Sie enthalten den bei Schalen bekannten Effekt nach Art gedämpfter Schwingungen, daß eine am Rand eingeleitete Störung mit zunehmender Entfernung vom Rand abklingt und einen stark oszillierenden Verlauf in den Schnitt- und Verschiebungsgrößen hervorruft.
- ② Die mit den Konstanten  $C_1^m$  und  $D_1^m$  behafteten 2 m Lösungen  $f_2^m$  und  $g_2^m$  der Differentialgleichung  $L(\xi) = 0$  beschreiben einen homogenen Membranzustand. Die Funktionen rufen nur Dehnkräfte und Membranverschiebungen, jedoch keine Querkräfte und Momente hervor. (Vergleiche Abschnitt 3.7.2, 'krümmungslose' Verformungen.)
- ③ Die mit den Konstanten  $C_2^m$  und  $D_2^m$  versehenen 2 m Lösungen  $f_2^m$  und  $g_2^m$ , die neben den homogenen Membranlösungen aus der Differentialgleichung  $L(w) = 0$  hervorgehen, beschreiben einen reinen Biegezustand. Sie rufen keine Dehnkräfte (und auch keine Querkräfte), jedoch Momente hervor. Wegen des reinen Krümmungszustandes wird dieser Fall auch mit dem Begriff 'dehnungslose Verformungen' umschrieben.

Da die Lösungsfunktionen  $g_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) für  $\varphi = 0$  singular sind, muß für geschlossene Kugelschalen gelten:

$$D_j^m = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$



In Tafel 4.1 sind die endgültigen Lösungen zusammengestellt, wobei von den Lösungen in  $w$  ausgegangen und  $\xi$  als hiervon abhängige Funktion betrachtet wird.

Tafel 4.1: Zusammenstellung der homogenen Lösungen.

Lösungsart	zugehörige homogene Differentialgleichung	zugehörige Lösung	mit den Lösungsfunktionen
Fall M	Fall j = 1 $L(\phi_M) = 0$	$\phi_M = -\frac{\text{EhR}}{1+\mu} \sum_{m=1}^{\infty} (C_1^m \cdot f_2^m + D_1^m \cdot g_2^m) \cos m\vartheta$ (4.46b)	$m = 0: f_2^m = \cos \varphi$
Homogene Membranlösung	Fall j = 2 $L(w_D/M) = 0$	<p>zugehörige Verschiebung:</p> $w_M = \sum_{m=1}^{\infty} (C_1^m \cdot f_2^m + D_1^m \cdot g_2^m) \cos m\vartheta$ (4.46a) $w_D = \sum_{m=0}^{\infty} (C_2^m \cdot f_2^m + D_2^m \cdot g_2^m) \cos m\vartheta$ (4.47a) <p>zugehörige Spannungsfunktion:</p> $\phi_D = 0$ (4.47b)	$m = 1: f_2^m = \sin \varphi$ $g_2^m = \cot \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \ln \tan \frac{\varphi}{2}$ $m \geq 2: f_2^m = \tan^m \frac{\varphi}{2} (m + \cos \varphi)$ $g_2^m = \cot^m \frac{\varphi}{2} (m - \cos \varphi)$
Fall B	Fall j = 3,4 $L(w_B) - (1 \mp 2\chi \cdot i) w_B = 0$	$w_B = \sum_{m=0}^{\infty} (C_3^m \cdot f_3^m + C_4^m \cdot f_4^m + D_3^m \cdot g_3^m + D_4^m \cdot g_4^m) \cos m\vartheta$ (4.48a)	$f_3^m = \tan^m \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{F^m}{R}$ $f_4^m = \tan^m \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{F^m}{R}$ $g_3^m = \cot^m \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{F^m}{R}$ $g_4^m = \cot^m \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{F^m}{R}$
Biegerandstörungen	$\left[ \phi_B = -\frac{K}{R} L(w_B) \right]$	<p>zugehörige Spannungsfunktion: (4.48 b)</p> $\phi_B = -\frac{K}{R} \sum_{m=0}^{\infty} [C_3^m (f_3^m - 2\chi \cdot f_4^m) + C_4^m (f_4^m + 2\chi \cdot f_3^m) + D_3^m (g_3^m - 2\chi \cdot g_4^m) + D_4^m (g_4^m + 2\chi \cdot g_3^m)] \cos m\vartheta$	$F_{Re}^m$ und $F_{Im}^m$ nach (4.33)

Gesamtlösung:	(4.49a)	aus (4.46):	$\phi_M = -\frac{K}{R} \cdot \delta_0 \cdot (1 - \mu) w_M$ (4.50)
	(4.49b)	mit: aus (4.38):	$\phi_B = -\frac{K}{R} \cdot L(w_B)$ (4.51a)
		aus (4.42):	$(L - 2i)\phi_B = \text{EhR} \cdot w_B$ (4.51b)

$w = w_M + w_D + w_B$
$\phi = \phi_M + \phi_B$

4.4 Zusammenhang mit den Schnitt- und Verschiebungsgrößen

Die Abhängigkeit sämtlicher Schnitt- und Verschiebungsgrößen von den homogenen Lösungsfunktionen soll nur für geschlossene Kugelschalen angegeben werden ( $D_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Der zweite Funktionsanteil für offene Schalen läßt sich analog ableiten.

Entsprechend den Entkopplungsansätzen (4.7) und (4.40) für  $w$  und  $\bar{\varphi}$  werden für alle wesentlichen Größen ebenfalls Fourierreihenentwicklungen vorgenommen. Es wird nur der zu  $\vartheta = 0$  symmetrische Anteil behandelt.

$$\begin{pmatrix} w \\ \bar{\varphi} \\ u_\varphi \\ N_\varphi \\ N_\vartheta \\ M_\varphi \\ M_\vartheta \\ Q_\varphi \\ \beta_\varphi \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w^m \\ \bar{\varphi}^m \\ u_\varphi^m \\ N_\varphi^m \\ N_\vartheta^m \\ M_\varphi^m \\ M_\vartheta^m \\ Q_\varphi^m \\ \beta_\varphi^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_\vartheta \\ N_{\varphi\vartheta} \\ M_{\varphi\vartheta} \\ Q_\vartheta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_\vartheta^m \\ N_{\varphi\vartheta}^m \\ M_{\varphi\vartheta}^m \\ Q_\vartheta^m \end{pmatrix} \cdot \sin m\vartheta \quad (1) \quad (4.52)$$

Hierbei ist der mit der Hochzahl  $m$  gekennzeichnete Funktionenanteil nur von  $\varphi$  abhängig.

Entsprechend läßt sich auch der durch (2.12) definierte Operator  $L$  aufspalten. Er enthält die Entwicklung nach  $\cos m\vartheta$ , da er nur auf  $\bar{\varphi}$  und  $w$  angewandt wird.

$$L(\ ) = \sum_{m=0}^{\infty} L^m(\ ) \cos m\vartheta \quad (4.53a)$$

mit

$$L^m(\ ) = (\ )^{m..} + \cot \varphi (\ )^m + \left(2 - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi}\right) (\ )^m \quad (4.53b)$$

Bei Kenntnis der Normalverschiebung  $w$  (4.49) und damit über (4.50) und (4.51) der Spannungsfunktion  $\Phi$  lassen sich zusammen mit (4.52) sämtliche homogene Anteile der Schnitt- und Verschiebungsgrößen aus den Ausgangsgleichungen bestimmen. Dabei werden außer  $w$  und  $\Phi$  auch die ersten und zweiten Ableitungen nach  $\varphi$  benötigt, wobei sich die zweiten Ableitungen mit Hilfe der Differentialgleichungen ausdrücken lassen.

$$\begin{aligned}
 \text{Aus (4.6 a)} \quad w_M'' &= -\cot \varphi w_M' - \frac{w_M''}{\sin^2 \varphi} - 2w_M \\
 \text{Aus (4.38)} \quad w_B'' &= -\cot \varphi w_B' - \frac{w_B''}{\sin^2 \varphi} - 2w_B - \frac{R}{K} \Phi_B \\
 \text{Aus (4.37)} \quad \Phi_M'' &= -\cot \varphi \Phi_M' - \frac{\Phi_M''}{\sin^2 \varphi} - 2\Phi_M \\
 \text{Aus (4.42)} \quad \Phi_B'' &= -\cot \varphi \Phi_B' - \frac{\Phi_B''}{\sin^2 \varphi} + E h R w_B
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Faßt man die von  $\varphi$  abhängigen Anteile von  $w$ , die zur weiteren Lösung benötigt werden, für ein Reihenglied in einem Vektor  $\mathbf{w}^m$  zusammen und definiert daneben einen weiteren Vektor  $\mathbf{c}^m$  der Integrationskonstanten, so lassen sich beide durch eine Matrix  $\mathbf{F}^m$  miteinander verbinden (Tafel 4.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} w_M^m \\ w_M^m \\ \int w_D^m d\varphi \\ w_D^m \\ w_D^m \\ w_B^m \\ w_B^m \\ L^m(w_B^m) \\ L^m(w_B^m) \end{array} \right\} = \mathbf{w}^m \tag{4.55a}$$

$\mathbf{w}^m = \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{c}^m$   
 $(9,1) \quad (9,4) \quad (4,1)$

$\left\{ \begin{array}{l} C_1^m \\ C_2^m \\ C_3^m \\ C_4^m \end{array} \right\} = \mathbf{c}^m \tag{4.55b}$

Tafel 4.2: Matrix  $F^m$

$\triangleq (4.55c)$

	Anteile Homogene Membranlös.	Anteile Dehnungslose Verformungen	Anteile Biege- randstörung	
	$C_1^m$	$C_2^m$	$C_3^m$	$C_4^m$
$w_M^m$	$f_2^m$	0	0	0
$w_M^{m*}$	$f_2^{m*}$	0	0	0
$\int w_D^m d\varphi$	0	$f_1^m$	0	0
$w_D^m$	0	$f_2^m$	0	0
$w_D^{m*}$	0	$f_2^{m*}$	0	0
$w_B^m$	0	0	$f_3^m$	$f_4^m$
$w_B^{m*}$	0	0	$f_3^{m*}$	$f_4^{m*}$
$L^m(w_B^m)$	0	0	$(f_3^m - 2\kappa^2 \cdot f_4^m)$	$(f_4^m + 2\kappa^2 \cdot f_3^m)$
$L^{m*}(w_B^m)$	0	0	$(f_3^{m*} - 2\kappa^2 \cdot f_4^{m*})$	$(f_4^{m*} + 2\kappa^2 \cdot f_3^{m*})$

wobei aus (4.28 b):  $f_1^m = \int_{\varphi} f_2^m d\varphi = \int_{\varphi} \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} (m + \cos \varphi) d\varphi = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi$

$$f_2^m = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \cdot (m + \cos \varphi)$$

$$f_2^{m*} = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \left[ \frac{m}{\sin \varphi} (m + \cos \varphi) - \sin \varphi \right]$$

aus (4.36 b):  $f_3^m = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \cdot F_{Re}^m$

$$f_4^m = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \cdot F_{Im}^m$$

$$f_3^{m*} = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{dF_{Re}^m}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left( \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \right) F_{Re}^m =$$

$$= \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{2} \cdot \frac{dF_{Re}^m}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} \cdot F_{Re}^m \right)$$

$$f_4^{m*} = \tan^{\frac{m}{2}} \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{2} \cdot \frac{dF_{Im}^m}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} \cdot F_{Im}^m \right)$$

mit  $x = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$

Die aufwendige Ermittlung der Zusammenhänge der Schnitt- und Verschiebungsgrößen mit den Anteilen von  $\mathbf{w}^m$  soll nicht im einzelnen gezeigt werden. Sie ist in einer Übersicht Tafel (4.3) schematisch zusammengestellt, worin die Ausgangsbeziehungen und die notwendigen Gleichungen angegeben sind.

Lediglich auf die Bestimmung der Verschiebungen  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$  soll eingegangen werden, da hierbei Integrationen vorzunehmen sind. Man führt zunächst die im Schema angegebenen Gleichungen (4.49) bis (4.51) in die Ausgangsbeziehungen (2.5 a/b) für  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$  ein. Für  $u_\varphi$  erhält man

$$u_\varphi' = - \frac{(1+\mu)}{E h R} (\xi_B'' + \xi_M'') - w_D$$

und nach Integration über  $\varphi$

$$u_\varphi = - \frac{(1+\mu)}{E h R} (\xi_B' + \xi_M') - \int w_D d\varphi + u_\varphi^*(\vartheta)$$

worin  $u_\varphi^*$  eine nur noch von  $\vartheta$  abhängige Integrationskonstante darstellt. Schließlich wird noch der Produktansatz (4.52) eingeführt und  $\xi$  durch  $w$  ersetzt:

$$u_\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1-\mu)k} L^m \cdot (w_B^m + w_M^m - \int w_D^m d\varphi + E_1^m) \right\} \cos m\vartheta \quad (4.56)$$

Entsprechend wird bei  $u_\vartheta$  vorgegangen, nur daß dort eine Integration über  $\vartheta$  vorgenommen und  $u_\varphi$  nach (4.56) eingesetzt wird.

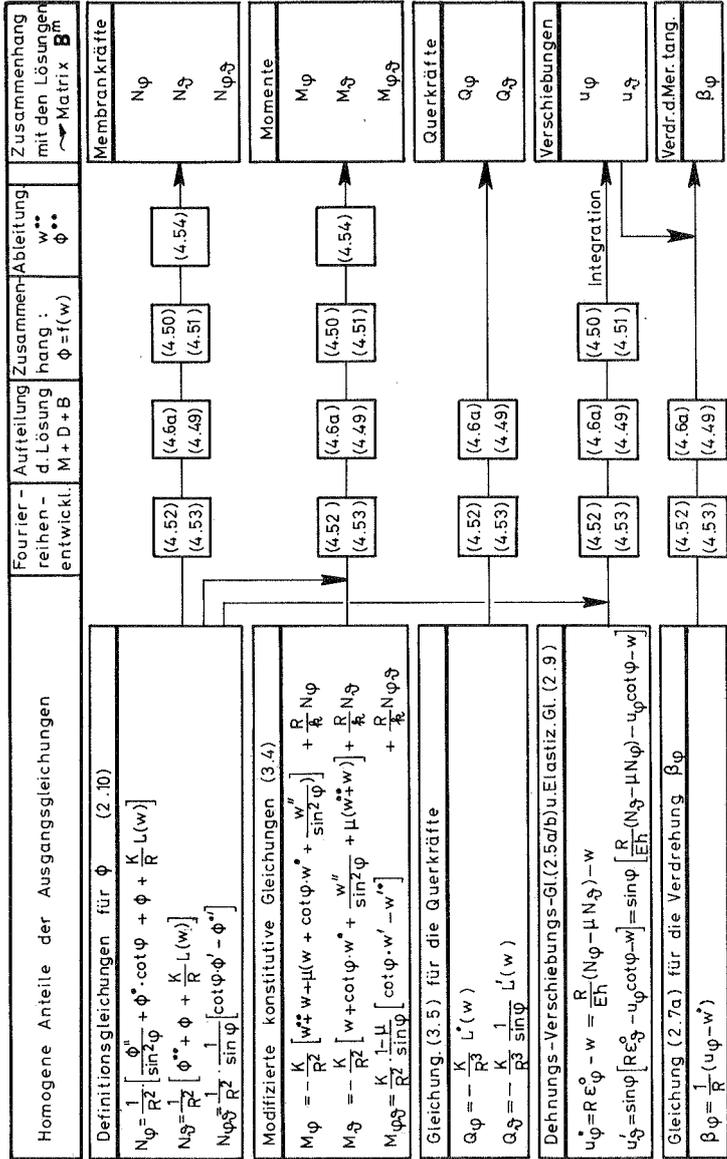
$$u_\vartheta = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \frac{m}{\sin\varphi} w_M^m - \frac{\sin\varphi}{m} w_D^m + \frac{\cos\varphi}{m} \int w_D^m d\varphi - \frac{1}{(1-\mu)k} \frac{m}{\sin\varphi} L(w_B) \right\} \sin m\vartheta + u_\vartheta^*(\varphi, \vartheta) + u_\vartheta^{**}(\varphi) \quad (4.57)$$

mit

$$u_\vartheta^*(\varphi, \vartheta) = - \cos\varphi \int_\vartheta u_\varphi^* d\vartheta = - \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_1^m}{m} \sin m\vartheta \quad (4.57a)$$

Die Integrationskonstante  $u_\vartheta^{**}$  ist nur von  $\varphi$  abhängig, d. h. konstant über den Umfang. Die Verschiebung ist nur für  $m = 0$  möglich.

Tafel 4.3: Schema zur Ableitung der Schnitt- und Verschiebungsgrößen.



$u_{\varphi\vartheta}^*$  und  $u_{\varphi\vartheta}^{**}$  sind nicht beliebig wählbar, da  $u_{\varphi}$  und  $u_{\vartheta}$  über die dritte Verzerrungs-Verschiebungsgleichung (2.5 c) miteinander gekoppelt sind:

$$\gamma_{\varphi\vartheta}^0 = \frac{1}{R} (u_{\vartheta}' - u_{\vartheta} \cot\varphi + \frac{u_{\varphi}'}{\sin\varphi}) = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\varphi\vartheta}$$

Nach Einsetzen von (4.56) / (4.57) für  $u_{\varphi} / u_{\vartheta}$  und  $N_{\varphi\vartheta}$  folgt daraus

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{m^2-1}{m \sin\varphi} \int_{\varphi} w_D^m d\varphi - \frac{\sin\varphi}{m} w_D^m + \frac{\cos\varphi}{m} w_D^m + \frac{E^m}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{m} - m \right) \right\} \sin m\vartheta}_{+ u_{\vartheta}^{**'} - \cot\varphi u_{\vartheta}^{**}} = 0 \quad (4.58a)$$

Setzt man hier die Lösungsfunktion  $w_D$  nach (4.55 c) ein, so ist der unterstrichene Teil für sich Null. Damit verbleibt nach Zusammenfassung der beiden letzten Ausdrücke

$$\sum_{m=0}^{\infty} E_1^m \left( \frac{1}{m} - m \right) \sin m\vartheta + \sin^2\varphi \left( \frac{u_{\vartheta}^{**}}{\sin\varphi} \right)' = 0 \quad (4.58b)$$

d. h. links ein nur von  $\vartheta$ , rechts nur von  $\varphi$  abhängiger Ausdruck, so daß jeder für sich Null werden muß. Für alle  $m \neq 1$  verschwindet der linke Teil nur, wenn  $E_1^m = 0$  (für  $m = 0$ :  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin m\vartheta}{m} = 1$ ); für  $m = 1$  ist er identisch Null. Daraus folgt  $E_1^1 \equiv E_1 \neq 0$

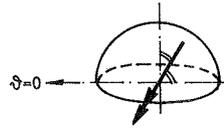
$$\begin{aligned} u_{\varphi}^* &= E_1 \cos\vartheta \\ u_{\vartheta}^* &= -E_1 \sin\varphi \sin\vartheta \quad (\text{aus (4.57 a)}) \end{aligned} \quad (4.59a)$$

Der rechte Term von (4.58 b) ist direkt integrierbar und ergibt mit einer Integrationskonstanten  $E_2$

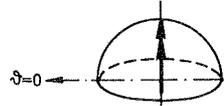
$$u_{\vartheta}^{**} = E_2 \sin\varphi \quad (4.59b)$$

Durch (4.59) werden zwei Starrkörperverschiebungen beschrieben:

$u_{\varphi}^*/u_{\vartheta}^*$  ( $E_1$ ): Rotation der Schale  
um eine Achse  $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$



$u_{\vartheta}^{**}$  ( $E_2$ ): Rotation der Schale  
um die Rotationsachse



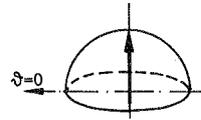
Neben diesen Starrkörperrotationen sind in den Lösungen (4.47 a) für  $w_D$  im Falle  $m = 0$  und  $m = 1$  weitere zwei Starrkörperverschiebungen enthalten (Sonderfall dehnungsloser Verschiebungen).

$m = 0$  :

$$w_D = C_2^0 f_2^0 = C_2^0 \cos \varphi$$

$$u_{\varphi D} = - \int_{\varphi} w_D d\varphi = -C_2^0 \sin \varphi$$

Translation  
der Schale in  
Richtung der  
Rotationsachse  
(4.59 c)



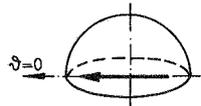
$m = 1$  :

$$w_D = C_2^1 f_2^1 \cos \vartheta = C_2^1 \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$u_{\varphi D} = - \int_{\varphi} w_D d\varphi = +C_2^1 \cos \varphi \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned} u_{\vartheta D} &= -\sin \varphi \int (u_{\varphi} \cot \varphi + w) d\vartheta \\ &= -C_2^1 \sin \vartheta \end{aligned}$$

Translation  
der Schale in  
Richtung der  
Achse  $\vartheta = 0$   
(4.59 d)



Die Starrkörperverschiebungen (4.59) sind von untergeordneter Bedeutung und sollen im weiteren nicht mitgeführt werden.

Ordnet man die von  $\varphi$  abhängigen Anteile sämtlicher interessierender Größen in einem Vektor  $\mathbf{S}^m$  an, so wird der Zusammenhang mit dem Lösungsvektor  $\mathbf{w}^m$  für ein Reihenglied über eine Matrix  $\mathbf{B}^m$  beschrieben, die in Tafel 4.4 zusammengestellt ist. Nach Multiplikation mit den entsprechenden trigonometrischen Funktionen  $\sin m\varphi$  bzw.  $\cos m\varphi$  geht  $\mathbf{S}^m$  in den endgültigen Vektor  $\mathbf{S}$  für ein Reihenglied über.

$$\left. \begin{array}{l} \phi^m \\ N_{\varphi}^m \\ N_{\phi}^m \\ N_{\varphi\phi}^m \\ M_{\varphi}^m \\ M_{\phi}^m \\ M_{\varphi\phi}^m \\ Q_{\varphi}^m \\ Q_{\phi}^m \\ N_{\varphi\phi}^m \\ Q_{\varphi}^m \\ E u_{\varphi}^m \\ E u_{\phi}^m \\ E w^m \\ E \beta_{\varphi}^m \end{array} \right\} = \mathbf{S}^m \quad (4.60)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \\ \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} \triangleq$$

von  $\varphi$  abhängiger  
 Funktionalanteil  
 eines Reihenglieds  
 als jeweiliger Faktor  
 $\mathbf{S}^m \rightarrow \mathbf{S}$

$\mathbf{S}^m = \mathbf{B}^m \cdot \mathbf{w}^m$ <small>(15,1)    (15,9)    (9,1)</small>	(4.61)
--	--------

Tafel 4.4: Matrix  $B^m$

	M		D		B		Anteile		
	Homog.	Membraniös.	Dehnungslos	Verformungen	$w_B^m$	$w_D^m$	$w_B^m$	$w_D^m$	
$\phi^m$	$-R^2 \cdot k$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{R^2}{1-\mu}$	$L^m(w_B^m)$
$N_{\phi}^m$	$-k \cdot (1-\bar{m}^2)$	$-k \cdot \cot \varphi$	0	0	0	0	0	$-\frac{\bar{m}^2}{1-\mu}$	$-\frac{\cot \varphi}{1-\mu}$
$N_{\phi}^m$	$k \cdot (1-\bar{m}^2)$	$k \cdot \cot \varphi$	0	0	$k \cdot (1+\mu)$	0	0	$-\frac{\bar{m}^2}{1-\mu}$	$\frac{\cot \varphi}{1-\mu}$
$N_{\phi}^m$	$k \cdot \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$-k \cdot \bar{m}$	0	0	0	0	0	$\frac{\bar{m}}{1-\mu} \cot \varphi$	$-\frac{\bar{m}}{1-\mu}$
$M_{\phi}^m$	0	0	0	$R \cdot (1-\bar{m}^2)$	$R \cdot \cot \varphi$	$R \cdot (1-\bar{m}^2)$	$R \cdot \cot \varphi$	$-\frac{R \cdot (1-\bar{m}^2)}{1-\mu}$	$-\frac{R}{k \cdot (1+\mu)}$
$M_{\phi}^m$	0	0	0	$-R \cdot (1-\bar{m}^2)$	$-R \cdot \cot \varphi$	$R \cdot (\mu + \bar{m}^2)$	$-R \cdot \cot \varphi$	$-\frac{R}{1-\mu} \cdot (\mu + \frac{\bar{m}^2}{k})$	$\frac{R}{k \cdot (1-\mu)}$
$M_{\phi}^m$	0	0	0	$-R \cdot \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$R \cdot \bar{m}$	$-R \cdot \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$R \cdot \bar{m}$	$\frac{R}{k \cdot (1+\mu)} \cdot \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$-\frac{R}{k \cdot (1-\mu)} \cdot \bar{m}$
$Q_{\phi}^m$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{1-\mu}$
$Q_{\phi}^m$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\bar{m}}{1-\mu}$	0
$N_{\phi}^m$	$k \cdot \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$-k \cdot \bar{m}$	0	$-\bar{m} \cdot \cot \varphi$	$\bar{m}$	$-\bar{m} \cdot \cot \varphi$	$\bar{m}$	$\frac{\bar{m}}{1-\mu} \cot \varphi$	$-\frac{\bar{m}}{1-\mu}$
$Q_{\phi}^m$	0	0	0	$-\bar{m}^2 \cdot \cot \varphi$	$\bar{m}^2$	$-\bar{m}^2 \cdot \cot \varphi$	$\bar{m}^2$	$\frac{\bar{m}^2}{k \cdot (1+\mu)} \cot \varphi$	$\frac{1}{1-\mu} \cdot (1 + \frac{\bar{m}^2}{k})$
$E_{\phi}^m$	0	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu)$	$-\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu)$	0	0	0	0	0	$\frac{R \cdot (1+\mu)}{h \cdot (1-\mu)}$
$E_{\phi}^m$	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu) \cdot \bar{m}$	0	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu) \cdot \frac{\cos \varphi}{\bar{m}}$	$-\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu) \cdot \frac{1}{\bar{m}}$	0	0	0	$-\frac{R \cdot (1+\mu)}{h \cdot (1-\mu)} \cdot \bar{m}$	0
$E_{\phi}^m$	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu)$	0	0	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu)$	0	$\frac{R}{h} \cdot k \cdot (1+\mu)$	0	0	0
$E_{\phi}^m$	0	0	$-\frac{k}{h} \cdot (1+\mu)$	0	$-\frac{k}{h} \cdot (1+\mu)$	0	$-\frac{k}{h} \cdot (1+\mu)$	0	$\frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{h}$

In  $\mathbf{B}^m$  wurde die folgende Abkürzung benutzt

$$\overline{m} = \frac{m}{\sin \varphi} \quad (4.61a)$$

und der Faktor  $\frac{K}{R^3} (1 - \mu)$  herausgezogen.

Die in  $\mathbf{S}^m$  mitenthaltenen Größen  $\overline{N}_{\varphi\vartheta}$  und  $\overline{Q}_{\varphi}$  stellen die Ersatzschub- bzw. -querkraft dar, die bei der Einarbeitung der Randbedingungen benötigt werden (siehe Abschnitt 6). Durch Einsetzen von (4.55) in (4.61) läßt sich der Zusammenhang sämtlicher Größen mit den Integrationskonstanten beschreiben

$$\mathbf{S}^m = \mathbf{B}^m \cdot \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{c}^m \quad (4.62)$$

$(15,1)$	$(15,9)$	$(9,4)$	$(4,1)$
----------	----------	---------	---------

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten werden aus  $\mathbf{S}^m$  und damit auch aus  $\mathbf{B}^m$  die jeweils 4 Zeilen mit den 4 Randgrößen ausgewählt, in denen die Randbedingungen formuliert werden. Bei inhomogenen Randbedingungen (federnde Lagerung) sind Zeilenkombinationen notwendig.

Damit verbleibt ein reduzierter Matrizenausdruck

$$\mathbf{S}_{\text{red}}^m = \mathbf{B}_{\text{red}}^m \cdot \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{c}^m \quad (4.63)$$

$(4,1)$	$(4,9)$	$(9,4)$	$(4,1)$
---------	---------	---------	---------

#### 4.5 Einige analytische Näherungslösungen

Von den vielen im Schrifttum behandelten numerischen und analytischen Näherungslösungen sollen nur die drei bekanntesten Methoden herausgegriffen werden:

1. Die Lösung für flache Kugelschalen.
2. Die Lösung nach Aas Jakobsen.
3. Die Lösung nach Geckeler.

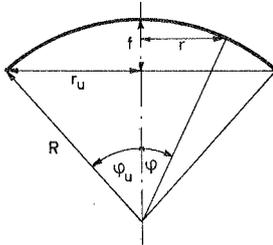
4.5.1 Zur Lösung für flache Kugelschalen

Für den flachen Kugelschalenbereich ( $\varphi \lesssim 30^\circ$ ) wird in den Ausgangsgleichungen die Koordinate  $\varphi$  durch den Abstand  $r$  von der Rotationsachse ersetzt und die mathematische Näherung

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\cos \varphi \approx 1$$

eingeführt.



$$\varphi \rightarrow r$$

$$r = R \sin \varphi \approx R \varphi \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial ( )}{\partial \varphi} = ( )' \approx R \frac{\partial ( )}{\partial r}$$

Bild 4.2: Geometrie der flachen Kugelschale

Darüber hinaus werden aus numerischen Gründen physikalische Näherungen getroffen:

- a) In den Gleichgewichtsbedingungen (2.1 a) und (2.1 b) werden die Querkräfte nicht berücksichtigt.
- b) In den Gleichungen (2.7) für die Verdrehungen der Meridian- und Ringtangente  $\beta_\varphi$  und  $\beta_\vartheta$  werden die Einflüsse der Tangentialverschiebungen  $u_\varphi$  und  $u_\vartheta$  vernachlässigt. Damit sind die Krümmungsänderungen  $\kappa_\varphi$ ,  $\kappa_\vartheta$  und  $\kappa_{\varphi\vartheta}$  nur noch von  $w$  abhängig.
- c) Die Definitionsgleichungen (2.10) für die Spannungsfunktion  $\bar{\Phi}$  lassen sich aus diesen Gründen wesentlich vereinfachen.

$$N_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \Omega$$

$$N_\vartheta = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \Omega \quad (4.65)$$

$$N_{r\vartheta} = - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left( \frac{\bar{\Phi}}{r} \right)$$

d) Der durch (2.12) definierte Operator  $L(\ )$  kann bei Vernachlässigung des letzten Terms durch den Laplace-Operator in Polarkoordinaten ersetzt werden.

$$\frac{1}{R^2} L(\ ) \approx \Delta(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \phi^2} \quad (4.66)$$

Leitet man mit Berücksichtigung dieser Bedingungen die Differentialgleichungen für  $w$  und  $\phi$  wie im Abschnitt 3 ab, so erhält man

$$\boxed{K \Delta \Delta(w) + \frac{1}{R} \Delta(\phi) = -\frac{1}{R} 2 \Omega - p} \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (4.67a)$$

$$\boxed{\Delta \Delta(\phi) - \frac{Eh}{R} \Delta(w) = -(1-\mu) \Delta(\Omega)} \quad (\text{Verträglichkeit}) \quad (4.67b)$$

Die beiden Ausdrücke lassen sich auch direkt mit (4.66) aus den entsprechenden allgemeinen Differentialgleichungen (3.7) und (3.9) gewinnen, wobei die Näherungen dort berücksichtigt werden :

$$\text{in (3.7 c)} \quad \frac{1}{K} L(\Omega) \ll 2 \Omega$$

$$\text{in (3.9 b)} \quad (1 + \mu) \phi \ll L(\phi)$$

$$(1 - \mu) \frac{K}{R} L(w) = \frac{1}{K(1+\mu)} Eh R L(w) \ll Eh R w$$

Im homogenen Fall entstehen durch die Trennung der Veränderlichen zu (4.1) und (4.2) analoge Gleichungen:

$$\boxed{\Delta \Delta \Delta(w) + \frac{K(1-\mu^2)}{R^2} \Delta(w) = 0} \quad (4.68a)$$

$$\boxed{\Delta(\phi) = -RK \Delta \Delta(w)} \quad (4.68b)$$

die wie (4.6) zu trennen sind in

$$\text{Fall } j = 1 \quad \Delta(\phi) = 0 \quad (4.69a)$$

$$\text{Fall } j = 2 \quad \Delta(w) = 0 \quad (4.69b)$$

$$\text{Fall } j = 3/4 \quad \Delta(w) + \frac{2K^2}{R^2} i w = 0 \quad (4.69c)$$

Nach Einführung des Fouriersatzes

$$\begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_{m \neq 0}^{\infty} \begin{Bmatrix} w^m(r) \\ \phi^m(r) \end{Bmatrix} \cos m\phi$$

entsteht für jedes Reihenglied  $m$  jeweils eine gewöhnliche Differentialgleichung, die auch direkt aus (4.9) mit  $\cot \varphi \approx \frac{1}{\varphi}$  und  $\sin \varphi = \varphi$  gewonnen werden kann.

In Tafel 4.5 sind die Differentialgleichungen und ihre zugehörigen Lösungen zusammengestellt, wobei wie bei der 'exakten' Lösung eine Aufteilung in die drei Fälle: homogene Membranlösung (M), Lösung der dehnungslosen Verformungen (D) und Biege- randstörung (B) vorgenommen wird. Für den Fall  $j = 3, 4$  oder B geht Gleichung (4.69) nach der Entkopplung in eine Bessel'sche Differentialgleichung über, deren Lösungen Kelvinfunktionen (modifizierte Besselfunktionen, auch Thomsonfunktionen \*) genannt sind.

Die Theorie flacher Schalen - oft auch nach Wlassow und Marguerre benannt - wird im Schrifttum sehr häufig behandelt. Für den Sonderfall der Kugelschalen geht sie für den rotationssymmetrischen Fall wohl auf Geckeler [10] zurück. Reissner [11; 30; 31] hat sie auf nichtrotationssymmetrische Zustände erweitert (s. auch [12; 29; 32; 33]). Sie soll hier nicht weiter behandelt werden; lediglich soll analog zum Abschnitt 3.7 auf folgende Grenzbetrachtungen anhand der Differentialgleichungen (4.67) hingewiesen werden:

1	Grenzübergang zum ebenen Tragwerk: $\frac{1}{R} \rightarrow 0$
$K \Delta \Delta(w) + \frac{1}{R} \Delta(\phi) = -\frac{1}{R} 2\Omega - p \rightarrow \text{Platte: } \Delta \Delta(w) = -\frac{p}{K}$ $\Delta \Delta(\phi) - \frac{Eh}{R} \Delta(w) = -(1-\mu) \Delta(\Omega) \rightarrow \text{Scheibe: } \Delta \Delta(\phi) = -(1-\mu) \Delta(\Omega)$	
2	Grenzübergang zur Membran: $h^3 \rightarrow 0$ ( $K \rightarrow 0$ )
$\left. \begin{aligned} K \Delta \Delta(w) + \frac{1}{R} \Delta(\phi) &= -\frac{1}{R} 2\Omega - p \\ \Delta \Delta(\phi) - \frac{Eh}{R} \Delta(w) &= -(1-\mu) \Delta(\Omega) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Membrantheorie} \\ \rightarrow \text{vgl. (4.69 a) } \Delta(\phi) = 0 \end{array}$	

\*) Sir William Thomson = Lord Kelvin

Tafel 4.5: Zusammenstellung der homogenen Lösungen für flache Kugelschalen.

Lösungsart	zugehörige allg. Fall j=1	zugehörige homogene Differentialgl. entkoppelt	zugehörige Lösung	Bemerkungen zur Lösung
Fall M Homogene Membranlösung	$\Delta(\phi_M) = 0$	$\frac{\partial^2 \phi_M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_M}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi_M = 0$	$w_M = -\frac{EhR}{1+\mu} \sum_{m=1}^{\infty} (C_1^m r^m + D_1^m r^{-m}) \cos m\theta$ $\phi_M = \sum_{m=1}^{\infty} (C_1^m r^m + D_1^m r^{-m}) \cdot \cos m\theta \quad (4.70)$	Im Fall M wird die Lösung für $m=0$ nicht benötigt.
Fall D Dehnungslose Verformungen	$\Delta(w_D) = 0$	$\frac{\partial^2 w_D}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_D}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} w_D = 0$	$w_D = C_2^0 + D_2^0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (C_2^m r^m + D_2^m r^{-m}) \cdot \cos m\theta$ $\phi_D = 0$ zugehörige Spannungsfunktion: (4.71)	→ [66], S.436
Fall B Biegestörung	Fall j=3,4 $\Delta(w_B) + \frac{2\chi^2}{R^2} w_B = 0$	$\frac{\partial^2 w_B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_B}{\partial r} - \left( \frac{m^2}{r^2} + \frac{2\chi^2}{R^2} i \right) w_B = 0$ (*)	$w_B = \sum_{m=0}^{\infty} (C_3^m \text{bei}_m \bar{r} + C_4^m \text{bei}_m \bar{r} + D_3^m \text{kei}_m \bar{r} + D_4^m \text{kei}_m \bar{r}) \cdot \cos m\theta$ zugehörige Spannungsfunktion: $\phi_B = -\frac{K}{R} 2\chi^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-C_3^m \text{bei}_m \bar{r} + C_4^m \text{bei}_m \bar{r} - D_3^m \text{kei}_m \bar{r} + D_4^m \text{kei}_m \bar{r}) \cdot \cos m\theta$	Mit der Transformation $\bar{r} = \frac{\sqrt{2}\chi}{R} r$ geht die Differentialgl. (*) in eine Besselsche Differentialgleichung über. [67] S.149.

#### 4.5.2 Die Näherungslösung nach Aas Jakobsen

Eine Näherung, die sich nur auf die entkoppelten homogenen Differentialgleichungen (4.9) für die Biegerandstörungen (Fall  $j = 3, 4$ ) beschränkt, geht auf Aas Jakobsen [20; 3] zurück.

$$w^{m..} + w^{m.} \cot \varphi + (1 \mp i) 2 \kappa^2 i - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} w^m = 0 \quad (4.73)$$

Der Lösung liegt die Kenntnis zugrunde, daß die Randstörungen nach Art gedämpfter Schwingungen sehr schnell abklingen. Dadurch scheint es gerechtfertigt, in (4.73) die veränderlichen Koeffizienten konstant zu setzen, wobei für den variablen Winkel  $\varphi$  der Randwinkel  $\varphi_R$  angenommen wird. Diese Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten läßt sich mit dem Euler-Ansatz  $w^m = e^{\lambda \varphi}$  lösen und führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \lambda \cot \varphi_R + (1 \mp i) 2 \kappa^2 i - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi_R} = 0 \quad (4.74)$$

mit den Lösungen

$$\lambda = -\frac{\cot \varphi_R}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{4m^2-1}{\sin^2 \varphi_R} + \frac{1}{2} \cot^2 \varphi_R - \frac{3}{4}\right) + 2\kappa^2 i}_{b \cdot 2\kappa^2}} \quad (4.74a)$$

sowie der Abkürzung

Aas Jakobsen vernachlässigt die unterstrichenen Terme und beschränkt sich damit auf nicht zu flache Schalen. Nach Trennung von Real- und Imaginärteil geht der Ausdruck über in

$$\lambda_{1,2,3,4} = \underbrace{-\frac{\cot \varphi_R}{2} \pm \kappa \sqrt{b^2 + 1} + b}_{\kappa_1} \pm i \underbrace{\kappa \sqrt{b^2 + 1} - b}_{\kappa_2 = \kappa_4} \quad (4.74b)$$

3

Mit den Abkürzungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2 = \kappa_4$  entstehen die 4 Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \kappa_1 \pm \kappa_2 i \\ \lambda_{3,4} &= \kappa_3 \pm \kappa_4 i \end{aligned} \quad (4.74c)$$

Wendet man schließlich noch die Euler-Relation

$$e^{\frac{(\kappa_1 \pm \kappa_2)\varphi}{4}} = e^{\frac{\kappa_1 \varphi}{4}} (\cos \frac{\kappa_2 \varphi}{4} \pm i \sin \frac{\kappa_2 \varphi}{4}) \quad (4.75)$$

auf die Funktion  $w^m = e^{\lambda\varphi}$  an, so erhält man für jedes Reihenglied  $m$  folgende 4 linear unabhängige Lösungen

$$w_B^m = e^{\kappa_1 \varphi} (C_3^m \cos \kappa_2 \varphi + C_4^m \sin \kappa_2 \varphi) + e^{\kappa_3 \varphi} (D_3^m \cos \kappa_4 \varphi + D_4^m \sin \kappa_4 \varphi) \quad (4.76)$$

Der Ausdruck beschreibt eine vom unteren ( $C_3^m/C_4^m$ ) und eine vom oberen Schalenrand ( $D_3^m/D_4^m$ ) ausgehende Randstörung. Die Lösungen haben die Form gedämpfter Schwingungen, wobei jedoch die Argumente der trigonometrischen und der Exponentialfunktionen unterschiedlich sind.

Für den Sonderfall  $m = 0$  (Rotationssymmetrie) hat Szmodits in [7] diesen Weg beschrieben (siehe auch Abschnitt 4.6). Eigene Rechnungen haben eine ausgezeichnete Annäherung an die 'exakte' Lösung bis in Bereiche mit einem Randwinkel  $\varphi_R = 10 - 20^\circ$  ergeben. Erwartungsgemäß weicht die Lösung im sehr flachen Bereich stark ab, da dort der anfangs konstant angenommene Kotangens des Randwinkels stark variiert. Um die Gültigkeit der Lösung auch auf diesen Bereich auszudehnen, geben Leckie und Penny in [22] Korrekturwerte für die Argumente in (4.76) an.

#### 4.5.3 Die Näherungslösung nach Geckeler

Die 1926 von Geckeler angegebene Näherung, siehe z.B. [1, 2, 5, 6, 7], für rotationssymmetrische Belastung läßt sich auch auf nicht rotationssymmetrische Zustände ausdehnen. Sie ist als Sonderfall in der Theorie von Aas Jakobsen enthalten, wenn man in der Differentialgleichung (4.73) die Vernachlässigungen trifft

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & w^m \cdot \cot \varphi \ll w'' \\ \text{II.} \quad & 1 - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \ll 2\kappa^2 \end{aligned}$$

d. h. wenn man in den Wurzeln (4.74 b) der charakteristischen Gleichung neben  $\cot \varphi_R$  auch b gleich Null setzt:

$$\rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_4 = \kappa \quad \text{und} \quad \kappa_3 = -\kappa$$

Damit lautet die Lösung in der bekannten Form

$$\begin{aligned} w_B^m = & e^{\kappa \varphi} (C_3^m \cos \kappa \varphi + C_4^m \sin \kappa \varphi) \\ & + e^{-\kappa \varphi} (D_3^m \cos \kappa \varphi + D_4^m \sin \kappa \varphi) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Die Näherung I. ist möglich, da bei gedämpften Schwingungen mit dem Parameter  $\kappa$  eine Ableitung um den Faktor  $\kappa$  kleiner ist als die nächst höhere Ableitung. Sie setzt weiterhin nicht flache, d. h. sogenannte steile Schalen ( $\varphi \lesssim 45^\circ$ ) voraus, bei denen  $\cot \varphi$  im Randbereich nicht zu große Werte annimmt. Die Näherung II. verlangt darüber hinaus, daß sich die Lösung nur auf niedrige Reihenglieder beschränkt. Da der Faktor  $2\kappa^2$  umso größer wird, je kleiner der Wert  $\frac{h}{R}$  ist, kann man bei dünneren Schalen höhere Reihenglieder mit der Theorie von Geckeler behandeln als bei nicht zudünnen. Mit den Werten  $\kappa \approx 5$  bis 30 bei Schalen mit dem Verhältnis  $\frac{R}{h} \approx 15$  bis 600, die nach der Theorie dünner Schalen behandelt werden können, ergibt sich etwa als größtes Reihenglied  $m = 1$  bis 5. Neben der angegebenen Lösung  $w_B^m$  für die Biegerandstörung ist es sinnvoll, entsprechende Vernachlässigungen auch in den Beziehungen für die Schnitt- und Verschiebungsgrößen vorzunehmen (z. B.  $2\kappa^2 \gg 1$ ).

Die Theorie von Geckeler für nicht rotationssymmetrische Zustände gibt v. Langendonck in [34] an. Sie wird für den Sonderfall  $m = 1$  auch in [36 bis 39] zugrunde gelegt. Ausgehend von einer über die Näherungen von Love/Kirchhoff hinausgehenden Theorie von Zerna behandelt Heuck in [35] beliebig belastete Rotationschalen ohne Fourierentwicklung in Umfangsrichtung, indem er sich auf Zustände beschränkt, die in dieser Richtung wenig veränderlich sind. Dies ermöglicht eine der Geckeler-Lösung ähnliche Näherung, bei der die nicht rotationssymmetrischen Fälle wie rotationssymmetrische behandelt werden.

#### 4.5.4 Zusammenstellung der verschiedenen Lösungsfunktionen

In Tafel 4.6 sind die einzelnen Lösungsfunktionen für geschlossene Kugelschalen zusammengestellt.

#### 4.6 Der Sonderfall Rotationssymmetrie (m = 0)

Die Biegetheorie dünner rotationssymmetrisch belasteter Kugelschalen konstanter Wanddicke wurde bekanntlich 1912 von H. Reissner erstmalig behandelt (siehe z. B. [5]), wobei ein Differentialgleichungssystem in einer Spannungsfunktion (Querkraft  $Q_\varphi$ ) und einer Verschiebungsfunktion (Verdrehung der Meridiantangente  $\beta_\varphi$ , häufig mit  $\chi$  bezeichnet) aufgestellt wird. Nach Elimination einer Variablen, z. B.  $\beta_\varphi$ , entsteht im homogenen Fall ein Paar komplexer Differentialgleichungen 2. Ordnung für  $Q_\varphi$  zur Beschreibung der Biegerandstörungen

$$Q_\varphi'' + \cot \varphi Q_\varphi' - \cot^2 \varphi Q_\varphi + 2 \kappa^2 i Q_\varphi = 0 \quad (4.78)$$

Diese Gleichung läßt sich in eine hypergeometrische Differentialgleichung mit entsprechenden Potenzreihenlösungen überführen, siehe z. B. [2; 5].

Da selbst in diesem Sonderfall die hypergeometrischen Reihen für Parameter praktisch vorkommender Schalen schlecht konvergieren, hatte die 'exakte' Lösung bis zum Einsatz moderner Rechenanlagen nur theoretischen Wert, was zu einem umfangreichen Ausbau von Näherungslösungen führte, z. B. der Theorie flacher und steiler Schalen (Geckeler). Erst in den letzten zehn Jahren hat die genaue Lösung an Bedeutung gewonnen. So gibt Szmodits in [7, 8] für verschiedene Parameter  $\frac{R}{h}(\kappa)$  und Winkel  $\varphi$  für geschlossene Kugelschalen Tafeln der notwendigen Reihenlösungen an (siehe auch [9]).

Die Erzeugung der genauen Lösungsfunktionen ermöglichte daneben auch einen Vergleich mit den bestehenden Näherungen [13 bis 18], die häufig für den praktischen Gebrauch einfacher zu handhaben sind.

Tafel 4.6: Verschiedene Lösungsfunktionen für geschlossene Kugelschalen.

Lösungsstufe	Homogene Membraniösung Dehnungslose Verformungen		Biegeandstörung			Anwendungsbereich	
	$f_1^m = \int_{\varphi}^m f_2^m d\varphi$	$f_2^m$	$f_3^m$	$f_4^m$	$f_3^m$	$f_4^m$	
"Exakte" Lösung $x = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$			$*F_{Re}$	$*F_{Im}$	$*(\frac{\sin \varphi}{2} \cdot \frac{dF_{Re}^m}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} \cdot F_{Re}^m)$	$*(\frac{\sin \varphi}{2} \cdot \frac{dF_{Im}^m}{dx} + \frac{m}{\sin \varphi} \cdot F_{Im}^m)$	keine Beschränkung
Lösung nach Aas Jakobsen $\chi_1, \chi_2$ aus (4.74b)	$*\sin \varphi$	$\tan^m \frac{\varphi}{2} **(m + \cos \varphi) * \frac{f^m}{\sin \varphi} (m + \cos \varphi) -- \sin \varphi$	$*\cos \chi_2 \varphi$	$*\sin \chi_2 \varphi$	$*(\chi_1 \cdot \cos \chi_2 \varphi -- \chi_2 \cdot \sin \chi_2 \varphi)$	$*(\chi_1 \cdot \sin \chi_2 \varphi ++ \chi_2 \cdot \cos \chi_2 \varphi)$	Beschränkung auf nicht sehr flache Schalen
Lösung nach Geckeler $\chi$ aus (4.50)			$*\cos \chi \varphi$	$*\sin \chi \varphi$	$*\chi \cdot (\cos \chi \varphi -- \sin \chi \varphi)$	$*\chi \cdot (\sin \chi \varphi ++ \cos \chi \varphi)$	Beschränkung auf steile Schalen und niedrige Reihenglieder
Lösung für flache Kugelschalen $\varphi \rightarrow r$ $T = \sqrt{2} \chi \cdot \frac{r}{R}$	$\frac{1}{R(m+1)} \cdot r^{m+1}$	$f^m$	$be_{mT}$	$bei_{mT}$	$\chi \cdot (be_{m-1T} ++ bei_{m-1T}) -- \frac{mR}{r} be_{mT}$	$\chi \cdot (bei_{m-1T} -- bei_{m-1T}) -- \frac{mR}{r} bei_{mT}$	Beschränkung auf flache Schalen

Der Zustand der Rotationssymmetrie ist als Sonderfall  $m = 0$  in der allgemeinen Lösung enthalten. Das Problem reduziert sich dann auf die 6. Ordnung. Neben den 4 Lösungen für die Biege- und Torsionsstörungen mit den Konstanten  $C_3^0, C_4^0, D_3^0, D_4^0$  existiert eine Starrkörperverschiebung mit  $C_2^0$  und eine Lösung mit  $D_2^0$  für eine äußere Resultierende (jeweils in Richtung der Rotationsachse). Der Lösungsanteil mit  $C_1^0/D_1^0$  entfällt in diesem Fall. Die Biege- und Torsionsstörungen werden durch die Differentialgleichung (4.9) beschrieben ( $j = 3, 4$ ), wobei  $m = 0$  gesetzt wird ( $w_B^0 \equiv w$ ).

$$w'' + w' \cot \varphi + (1 \mp 2 \kappa^2 i) w = 0 \quad (4.79)$$

Die Gleichung wird einmal nach  $\varphi$  abgeleitet

$$w''' + w'' \cot \varphi - (\cot^2 \varphi \pm 2 \kappa^2 i) w' = 0 \quad (4.80)$$

Um den Zusammenhang mit (4.78) aufzuzeigen wird die Beziehung (3.5 a) herangezogen

$$Q_\varphi = - \frac{K}{R^3} [w''' + w'' \cot \varphi + w' (1 - \cot^2 \varphi)] \quad (4.81a)$$

Mit (4.80) wird daraus

$$Q_\varphi = - \frac{K}{R^3} (1 \mp 2 \kappa^2 i) w' \quad (4.81b)$$

d. h.  $Q_\varphi \sim w'$

Unter Verwendung dieser Beziehung geht (4.80) über in

$$Q_\varphi'' + \cot \varphi Q_\varphi' - (\cot^2 \varphi \pm 2 \kappa^2 i) Q_\varphi = 0 \quad (4.82) \equiv (4.78)$$

womit der Zusammenhang mit der für den rotationssymmetrischen Fall üblicherweise verwandten Differentialgleichung (4.78) hergestellt ist.

5. Die Partikularlösung

5.1 Allgemein

Für die oberflächenbelastete Schale wird der homogenen Lösung eine Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichungen

$$L L L(w) - 2 L L(w) + \kappa(1-\mu^2) L(w) = p_2 \quad (5.1) \equiv (3.11)$$

$$L(\varphi) = \frac{K}{R} [p_1 - L L(w)] \quad (5.2) \equiv (3.10)$$

hinzugefügt.

Durch eine Fourierentwicklung der Partikularlösung und der Belastungen und Belastungsfunktionen entsprechend zu (4.52)

$$\left\{ \begin{array}{c} w_P \\ \varphi_P \\ p \\ p_\varphi \\ \Omega \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \right\} (\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} w_P^m \\ \varphi_P^m \\ p^m \\ p_\varphi^m \\ \Omega^m \\ p_1^m \\ p_2^m \end{array} \right\} (\varphi) \cdot \cos m\vartheta \quad (5.3)$$

$$p_\vartheta(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} p_\vartheta^m(\varphi) \sin m\vartheta$$

werden (5.1) und (5.2) in gewöhnliche inhomogene Differentialgleichungen überführt:

$$L^m L^m L^m(w_P^m) - 2 L^m L^m(w_P^m) + \kappa(1-\mu^2) L^m(w_P^m) = p_2^m \quad (5.4)$$

$$L^m(\varphi_P^m) = \frac{K}{R} [p_1^m - L^m L^m(w_P^m)] \quad (5.5)$$

Nach Abschnitt 4.1 läßt sich der homogene Teil der Differentialgleichung (5.4) in drei Differentialgleichungen 2. Ordnung aufteilen, deren Lösungen zugeordnete Legendre-Funktionen sind, u. a. 1. Art  $P_n^m$  vom Grad  $v = n$  und der Ordnung  $m$ .

Es gilt analog zu (4.9) und (4.10) ([67], S. 151)

$$P_n^{m..} + \cot \varphi P_n^{m.} - \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} - n(n+1) \right] P_n^m = 0 \quad (5.6a)$$

oder mit (4.53 b)

$$L^m(P_n^m) = -[n(n+1) - 2] P_n^m = -\bar{n} P_n^m \quad (5.6b)$$

wobei

$$P_n^m = P_n^m(z), \quad z = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \bar{n} = [n(n+1) - 2]$$

Durch wiederholte Anwendung des Operators  $L^m$  und Einsetzen von (5.6 b) erhält man

$$L^m L^m(P_n^m) = \bar{n}^2 P_n^m \quad (5.6c)$$

$$L^m L^m L^m(P_n^m) = -\bar{n}^3 P_n^m \quad (5.6d)$$

Sowohl die Partikularlösung als auch die Belastungsfunktionen werden nun für jedes Reihenglied  $m$  in Legendre - Funktionen  $P_n^m$  entwickelt ( $n = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$ ).

$$\left\{ \begin{matrix} w_P^m \\ \ddot{P}^m \\ p_1^m \\ p_2^m \end{matrix} \right\} (\varphi) = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} a_n^m \\ b_n^m \\ c_n^m \\ d_n^m \end{matrix} \right\} \cdot P_n^m(z = \cos \varphi) \quad (5.7)$$

Hierin sind  $a_n^m$ ,  $b_n^m$ ,  $c_n^m$  und  $d_n^m$  konstante Koeffizienten.  $c_n^m$  und  $d_n^m$  werden durch verallgemeinerte Fourieranalyse aus der Orthogonalbeziehung für die zugeordneten Legendre funktionen  $P_n^m$  gewonnen ([67], S. 198).

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(z) P_\ell^m(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \neq n \\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})} & \text{für } \ell = n \end{cases} \quad (5.8a)$$

Nach Multiplikation mit  $c_n^m$  bzw.  $d_n^m$  gilt im Fall  $\ell = n$

$$\left\{ \begin{array}{c} c_n^m \\ d_n^m \end{array} \right\} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{cc} c_n^m & P_n^m \\ d_n^m & P_n^m \end{array} \right\} P_n^m(z) dz \quad (5.8b)$$

oder mit (5.7)

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} c_n^m \\ d_n^m \end{array} \right\} = (n+\frac{1}{2}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{c} p_1^m(\varphi) \\ p_2^m(\varphi) \end{array} \right\} P_n^m(z = \cos \varphi) dz} \quad (5.9)$$

Die hier einzuführenden Legendre - Funktionen  $P_n^m$  1. Art sind bei ganzzahligem  $n$  und  $m$  als die  $m$ -te Ableitung der Legendre - Polynome  $P_n$  von Grad  $n$  definiert ([67], S. 174).

$$P_n^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \quad n \geq m$$

$$P_n^m(z) = 0 \quad n < m$$

Sind die Koeffizienten  $c_n^m$  und  $d_n^m$  der Belastungsfunktionen über (5.9) für jedes  $m$  und  $n$  bestimmt, so lassen sich mit Hilfe der Differentialgleichungen (5.4) und (5.5) die Koeffizienten  $a_n^m$  und  $b_n^m$  der Partikularlösung ermitteln. Hierzu wird (5.7) eingesetzt und (5.6) beachtet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-\bar{n}^3 - 2\bar{n}^2 - k(1-\mu^2)\bar{n}] a_n^m P_n^m = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^m P_n^m$$

$$\rightarrow \boxed{a_n^m = - \frac{d_n^m}{\bar{n} [\bar{n}^2 + 2\bar{n} + k(1-\mu^2)]}} \quad (5.11a)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{n} b_n^m P_n^m = \frac{K}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^m - \bar{n}^3 a_n^m) P_n^m$$

$$\rightarrow \boxed{b_n^m = \frac{K}{R} \left( -\frac{c_n^m}{\bar{n}} + \bar{n} a_n^m \right)} \quad (5.11b)$$

Mit den Reihenlösungen (5.3) und (5.7) liegt damit bei Berücksichtigung von (5.9) und (5.11) eine geschlossene Partikularlösung vor.

Über die Ausgangsgleichungen lassen sich sämtliche inhomogene Anteile der Schnitt- und Verschiebungsgrößen aus den Partikularlösungen  $w_P$  und  $\mathfrak{z}_P$  gewinnen.

Für die meisten praktisch vorkommenden verteilten Schalenbelastungen können die Ergebnisse aus der Membrantheorie als Partikularlösung herangezogen werden, da sie die inhomogenen Differentialgleichungen exakt oder bei Berücksichtigung der üblichen Vereinfachungen (z. B. wegen  $\mathfrak{k} \gg 1$ ) genügend genau erfüllt. Dies setzt allerdings voraus, daß

1. die Lasten mit hoher Veränderlichkeit und
2. flache 'plattenähnliche' Schalen

ausgeschlossen werden; d. h.  $m$  und  $n$  müssen klein sein. Dann können in den Bestimmungsgleichungen (5. 11) folgende Vernachlässigungen getroffen werden:

$$\text{In (5. 11a): } \bar{n}^2 + 2 \bar{n} \ll \mathfrak{k} (1 - \mu^2) \quad \rightarrow \quad a_n^m \approx - \frac{d_n^m}{\bar{n} \mathfrak{k} (1 - \mu^2)} \quad (5. 12a)$$

$$\text{In (5. 12b): } \bar{n} a_n^m \approx - \frac{d_n^m}{\mathfrak{k} (1 - \mu^2)} \ll - \frac{c_n^m}{\bar{n}} \quad \rightarrow \quad b_n^m \approx - \frac{K}{R} \frac{c_n^m}{\bar{n}} \quad (5. 12b)$$

Hierdurch werden die Ergebnisse für  $w_P$  und  $\mathfrak{z}_P$  entkoppelt und entsprechen direkt der Membranlösung aus den Gleichungen (3. 20)

$$L(\mathfrak{z}) = \frac{K}{R} p_1$$

und (3. 21)

$$L(w) = \frac{p_2}{\mathfrak{k} (1 - \mu^2)}$$

Dazu wird (5. 6 b) eingeführt. In  $p_1$  und  $p_2$  werden die Ausdrücke mit  $\frac{1}{\mathfrak{k}}$  vernachlässigt.

In den Fällen mit hoher Veränderlichkeit der Belastung kann ein reiner Biegezustand als Partikularlösung zugrunde gelegt werden. Er entspricht dem im Abschnitt 4 für den homogenen Fall angegebenen Zustand der dehnungslosen Verformungen.

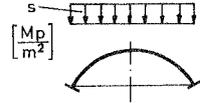
5.2 Beispiel: Schneelast

Das in 5.1 angegebene allgemeine Verfahren zur Auffindung einer Partikularlösung soll am einfachen Beispiel der rotationssymmetrisch verteilten Schneelast gezeigt werden [ $m = 0 \rightarrow (\ )^0 \equiv (\ )$ ].

$$p = s \cos^2 \varphi$$

$$p_\varphi = s \sin \varphi \cos \varphi$$

$$p_\vartheta = 0$$



$$\Omega' = -R p_\varphi = -\frac{R s}{2} \sin 2\varphi \quad (\text{nach (2.11)})$$

$$\Omega = \frac{R s}{4} \cos 2\varphi$$

Mit (2.12):  $L(\Omega) = \Omega'' + \Omega' \cot \varphi + 2\Omega = \frac{R s}{2} (1 - 4 \cos^2 \varphi)$

Nach (3.7c):  $p_1 = -\frac{R^3}{K} [pR + 2\Omega - \underbrace{\frac{1}{R} L(\Omega)}_{\ll \Omega}] \approx -\frac{R^4 s}{K} (2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2})$

$$L(p_1) = p_1'' + \cot \varphi p_1' + 2p_1 = \frac{R^4 s}{K} (8 \cos^2 \varphi - 3)$$

Nach (3.11a):  $p_2 = L(p_1) - (1+\mu)p_1 + \frac{R^3}{K} (1-\mu)L(\Omega) = \frac{R^4 s}{K} [4(2+\mu)\cos^2\varphi - (3+\mu)]$

Die Belastungsfunktionen lassen sich mit  $z = \cos \varphi$  abkürzend ausdrücken:

$$p_1 = C z^2 + \bar{C} \equiv p_1^0 \quad \text{mit} \quad \begin{Bmatrix} C \\ \bar{C} \\ D \\ \bar{D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ +\frac{1}{2} \\ 4(2+\mu) \\ -(3+\mu) \end{Bmatrix} \cdot \frac{R^4 s}{K}$$

$$p_2 = D z^2 + \bar{D} \equiv p_2^0$$

Es ist ersichtlich, daß für die Entwicklung in Legendre-Funktionen  $P_n^0 \equiv P_n$  (hier Legendre-Polynome) nur Ausdrücke mit absoluten und quadratischen Potenzen in  $z$  auftreten dürfen, d. h.

$$P_0 = 1$$

und  $P_2 = \frac{1}{2} (3 z^2 - 1)$

Dies zeigt sich auch formal über die Bestimmungsgleichung (5.9):

$$\begin{aligned} c_n^o &= (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{+1} p_1^o P_n^o(z) dz \\ &= (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{+1} (C z^2 + \bar{C}) P_n(z) dz \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist nur bei geradem n von Null verschieden, da die Polynome  $P_n$  mit  $n = 1, 3, 5 \dots$  Argumente mit geradem Exponenten aufweisen ([67], S. 228).

$$\begin{aligned} \text{Für } n = 0: \quad c_0^o &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (C z^2 + \bar{C}) 1 dz = \frac{C}{3} + \bar{C} \\ n = 1: \quad c_1^o &= 0 \\ n = 2: \quad c_2^o &= \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} (C z^2 + \bar{C}) \frac{1}{2} (3 z^2 - 1) dz = \frac{2}{3} C \\ n > 2: \quad c_n^o &= 0 \end{aligned}$$

Entsprechend folgt:

$$\begin{aligned} d_0^o &= \frac{D}{3} + \bar{D} & d_1^o &= 0 \\ d_2^o &= \frac{2}{3} D & d_n^o &= 0 \quad \text{für } n > 2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{Bmatrix} c_0^o \\ c_2^o \\ d_0^o \\ d_2^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3}(2+\mu) \\ \frac{1}{3}(\mu-1) \end{Bmatrix} \cdot \frac{\mathbb{R}^4_{\mathbb{S}}}{\mathbb{K}}$$

was auch direkt aus einem Koeffizientenvergleich folgt.

Aus (5.11) werden die Koeffizienten der Partikularlösungen errechnet:

$$n = 0 \rightarrow \bar{n} = -2 : \quad a_0^o = + \frac{d_0^o}{2k(1-\mu^2)}$$

$$b_0^o = \frac{K}{R} \left( \frac{c_0^o}{2} - 2 a_0^o \right) = \frac{K}{R} \left( \frac{c_0^o}{2} - \frac{d_0^o}{k(1-\mu^2)} \right)$$

$$\ll \frac{c_0^o}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow \bar{n} = 4 : \quad a_2^o = - \frac{d_2^o}{4 \left[ 24 + k(1-\mu^2) \right]}$$

$$\ll k$$

$$b_2^o = \frac{K}{R} \left( -\frac{c_2^o}{4} + 4 a_2^o \right) = \frac{K}{R} \left( -\frac{c_2^o}{4} - \frac{d_2^o}{\left[ 24 + k(1-\mu^2) \right]} \right)$$

$$\ll \frac{c_2^o}{4}$$

Vernachlässigt man hierin wegen  $k \gg 1$  gewisse Terme, so erhält man entsprechend (5.12):

$$\begin{Bmatrix} a_0^o \\ a_2^o \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \frac{\mu+1}{2} \\ -\frac{2(2+\mu)}{3} \end{Bmatrix} \cdot \frac{R^2 s}{Eh}$$

$$\begin{Bmatrix} b_0^o \\ b_2^o \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -\frac{1}{12} \\ +\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \cdot R^3 s$$

und damit als Partikularlösung:

$$w_P = a_0^o P_0 + a_2^o P_2$$

$$w_P = \frac{s R^2}{Eh} \left[ \frac{1+\mu}{2} - (2+\mu) \cos^2 \varphi \right]$$

$$\Phi_P = b_0^o P_0 + b_2^o P_2$$

$$\Phi_P = \frac{R^3 s}{2} \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \right)$$

Die Ausdrücke stimmen erwartungsgemäß mit der Membranlösung überein. Schnitt- und Verschiebungsgrößen gewinnt man durch Einsetzen der Lösungen in die Ausgangsgleichungen, wobei ebenfalls die oben getroffenen Näherungen ( $k \gg 1$ ) berücksichtigt werden.

Normalkräfte aus (2.10) bzw. (3.22):

$$N_{\varphi} = \frac{1}{R^2} (\Phi' \cot \varphi + \Phi) + \Omega = -\frac{1}{2} R s$$

$$N_{\vartheta} = \frac{1}{R^2} (\Phi'' + \Phi) + \Omega = -\frac{1}{2} R s \cos 2\varphi$$

$$N_{\vartheta\varphi} = 0$$

Momente und Querkräfte aus (3.4) bzw. (3.5) haben die Größenordnung  $\mathcal{O}\left(\frac{N}{k}\right)$  und können somit vernachlässigt werden.

6. Die Erfüllung der Randbedingungen

6.1 Überblick

Die klassische Theorie dünner Schalen erlaubt entsprechend ihrer Ordnung 8 nur die Erfüllung von 4 Randbedingungen pro Rand. Dies erfordert die Zusammenfassung der fünf austretenden Schnittgrößen zu vier Randgrößen, was bekanntlich zur Einführung von zwei Ersatzschnittgrößen führt:

Ersatzschubkraft :	$\bar{N}_{nt} = N_{nt} + \frac{M_{nt}}{r_t}$	(6.1)
--------------------	--	-------

Ersatzquerkraft :	$\bar{Q}_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s_t}$	(6.2)
-------------------	--	-------

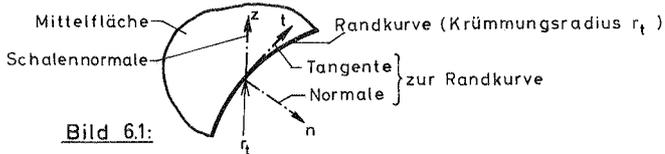


Bild 6.1:

Die Wirkung des austretenden Drillmomentes wird näherungsweise der Schub- und der Querkraft zugeschlagen. Den nunmehr vier statischen Randgrößen stehen vier geometrische gegenüber:

statische Randgröße	Vorzeichen	geometrische Randgröße
$N_n$		$u_n$
$\bar{N}_{nt}$		$u_t$
$\bar{Q}_n$		w
$M_n$		$\beta_n$

Bei elastischer Lagerung (z. B. mit Randträger) sind zueinander gehörige Größen gekoppelt.

In diesem Abschnitt sollen geschlossene Kugelschalen behandelt werden.

Mit den bisher beschriebenen Reihenlösungen, z. B. in  $w$  bei geschlossenen Kugelschalen ( $D_j = 0$ )

$$w(\varphi, \vartheta) = w_P(\varphi, \vartheta) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_j^m w_j^m(\varphi) \cos m\vartheta \quad (6.3)$$

oder allgemein

$$w(\varphi, \vartheta) = w_P(\varphi, \vartheta) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(\varphi, \vartheta) \quad (6.3a)$$

mit den Freiwerten

$$\text{(Integrationskonstanten)} \quad c_{4m+j} = C_j^m \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

ist ein vollständiges Funktionensystem gegeben, worin  $w_P$  die inhomogene und alle  $w_i$  die homogene Differentialgleichung erfüllen. Im Sinne der Annahmen liegt somit eine exakte Lösung vor, d. h. alle inneren Tragwerksbedingungen (Gleichgewicht und Verträglichkeit) werden durch (6.3) erfüllt.

Damit kann man sich auf ein Randverfahren zur Bestimmung der Randbedingungen beschränken. Die Erfüllung dieser Bedingungen gelingt nur in wenigen Sonderfällen 'exakt', z. B. bei rotationsymmetrischer Beanspruchung. In allen anderen Fällen ist man auf ein Näherungsverfahren angewiesen. Hierbei sind die Freiwerte  $c_i$  der Reihenlösungen so zu bestimmen, daß die Randbedingungen möglichst genau erfüllt werden. Hierzu stehen vor allem folgende Minimalbedingungen der Variationsrechnung oder der Ausgleichsrechnung zur Verfügung [64, II; 69]:

1. Die Methode von Trefftz

in Anwendung auf das Castiglianosche Prinzip vom Minimum des Komplementärpotentials  $\bar{w}$ :

Der Funktionsansatz entspricht (6.3a):

$$\bar{w} = w_P + \sum_{i=1}^M c_i w_i \quad (6.4)$$

Das vorliegende Variationsproblem wird dabei in eine entsprechende Aufgabe für die Randbedingungen transformiert.

Die Minimalbedingung führt auf ein lineares Gleichungssystem für die M Freiwerte  $c_i$  ( $i = 1, 2 \dots M$ ).

2. Die Fehlerquadratmethode ('least squares method') als Randverfahren.

Es wird gefordert, daß das mit  $p_K$  gewichtete Mittel des Fehlerquadrates  $f_K^2$  über  $\ell$  Ränder zu einem Minimum wird.

$$Q = \sum_{K=1}^{\ell} \int_{S_K} p_K (\varphi, \vartheta) f_K^2 (\varphi, \vartheta; c_1, \dots, c_M) ds = \text{Min} \quad (6.5)$$

mit  $f_K$ : Abweichung von den geforderten Randbedingungen (Fehlerfunktion)

Die Minimalbedingung führt auf M Bestimmungsgleichungen für die Freiwerte  $c_i$

$$\frac{\partial Q}{\partial c_i} = 2 \sum_{K=1}^{\ell} \int_{S_K} p_K f_K \frac{\partial f_K}{\partial c_i} ds = 0 \quad (i = 1, 2 \dots M) \quad (6.6)$$

3. Die Kollokation ('point matching method')

Es werden M Bedingungsgleichungen an Punkten  $P_K (\varphi_K, \vartheta_K)$  für die Randgrößen aufgestellt, so daß dort der Fehler  $f$  verschwindet.

$$f_i (\varphi_K, \vartheta_K; c_1, \dots, c_M) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots M) \quad (6.7)$$

Dies sind  $N = M$  Bestimmungsgleichungen für die gleiche Anzahl unbekannter Freiwerte  $c_i$ .

4. Die Kombination einzelner Verfahren, insbesondere die verbesserte Kollokation als Kombination der Methode vom Fehlerquadratminimum mit der Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimum, 'least-square-point-matching technique').

Dabei werden mehr Bedingungsgleichungen (N) an Punkten  $P_K$  ( $\varphi_K, \vartheta_K$ ) formuliert als unbekannte Freiwerte  $c_i$  vorliegen ( $N > M$ ). Der Ausgleich des überbestimmten Gleichungssystems erfolgt im Sinne des Fehlerquadratminimums:

$$Q = \sum_{j=1}^N [f_j(\varphi_K, \vartheta_K; c_1, \dots, c_M)]^2 = \text{Min} \quad (6.8)$$

Die Minimalbedingung führt wiederum auf M Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{\partial Q}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots M) \quad (6.9)$$

Während die Variationsmethoden (Trefftz) den direkten physikalischen Zusammenhang mit dem Elastizitätsproblem aufweisen (dimensionsgerechte Energieausdrücke), fehlt dieser bei den Fehlerabgleichsprinzipien (nicht dimensionsgleiche Ausdrücke). Dieser Nachteil zeigt sich besonders bei der Frage der Gewichtung einzelner Fehlerausdrücke, wodurch eine Dimensionsangleichung erreicht werden kann.

Die Methoden von Trefftz und vom Fehlerquadratminimum haben als Integralverfahren den Vorteil geringerer numerischer Fehleranfälligkeit. Diesen Vorzug weist auch die verbesserte Kollokation auf, da sie als diskretisiertes Integralverfahren angesehen werden kann.

Durch die Auswertung der bei Trefftz und bei der Fehlerquadratmethode auftretenden Integralausdrücke entstehen vor allem bei komplizierten Rändern - wie z. B. bei nicht rotationssymmetrisch berandeten Schalen - fast unüberwindliche Schwierigkeiten; insbesondere dann, wenn die Randkurve nicht mehr analytisch formulierbar ist. Dieser Nachteil tritt bei den Kollokationsmethoden wegen der punktwweisen Formulierung der Randbedingungen nicht auf. Ihr Einsatz ist vergleichsweise einfach, setzt jedoch wegen der normalerweise auftretenden großen Gleichungssysteme ebenso die Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung voraus.

Die Kollokationsmethoden haben dagegen den Charakter von Versuchsverfahren, bei denen über wichtige Fragen (nach der Gewichtung, der Lage der Punkte, der Konvergenz u. a.) keine allgemein gültigen Angaben gemacht werden können. Sie können erst aufgrund numerischer Erfahrungen beantwortet werden. Diese Unsicherheiten der Methode sind jedoch bei dem hier vorliegenden Fall der reinen Randkollokation nicht derartig gravierend wie bei einer Gebietskollokation oder einer gemischten Anwendung. Beispielsweise lassen sich Punkte auf einer Randkurve leichter gleichmäßig verteilen als auf einer Fläche.

Aus den hier angegebenen Gründen soll zur Erfüllung der Randbedingungen bei nicht rotationssymmetrisch berandeten Kugelschalen, z. B. über polygonalem Grundriß, die Methode der Kollokation angewandt werden. Dabei wird insbesondere die verbesserte Form im Sinn des Fehlerquadratminimums benutzt. Das Verfahren wird im folgenden Abschnitt ausführlich behandelt, wobei auch die normale und die verbesserte Form miteinander verglichen werden.

## 6.2 Die Kollokationsmethoden

### 6.2.1 Die normale Kollokation

Beschränkt man sich im Ansatz auf  $m_r$  Reihenglieder, d. h. pro Rand auf insgesamt  $4 m_r = M$  Freiwerte (Integrationskonstante), so formuliert man an  $n = m$  Kollokationspunkten der Randkurve die jeweiligen 4 Randbedingungen. Es werden also  $N = 4 n$  Bestimmungsgleichungen aufgestellt, ebensoviele wie Unbekannte vorliegen.

Anzahl der Gleichungen	$N = M$	Anzahl der Unbekannten
Anzahl der Kollokationspunkte	$n = m_r$	Anzahl der Reihenglieder

Das zugehörige lineare Gleichungssystem sei mit

$$\underset{(M,M)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(M,1)}{\mathbf{c}} + \underset{(M,1)}{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$



3. Eine Verdichtung der Punkte (bei gleichzeitiger Erhöhung der Anzahl der Freiwerte) kann
- a) zu linear abhängigen Gleichungen führen [60],
  - b) die Abweichungen vom Sollverlauf wesentlich vergrößern [59].

Damit scheidet die normale Kollokationsmethode in der Regel als brauchbares Verfahren zur Erfüllung der Randbedingungen aus, obwohl sie wiederholt auch bei komplizierten Aufgaben benutzt wurde, vor allem bei Plattenproblemen, z. B. [59 bis 61]. Flache Kugelschalen über polygonalem Grundriß behandeln Oravas u. a. in [51; 52], über quadratischem Grundriß Conway und Leissa [54], wobei jedoch keine Vergleiche mit vorliegenden Ergebnissen angegeben werden. Kugelsegmente werden in [53] berechnet.

6.2.2 Die verbesserte Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimum)

6.2.2.1 Beschreibung des Verfahrens

Eine wesentliche Verbesserung der normalen Kollokationsmethode läßt sich erreichen, wenn man mehr Bedingungsgleichungen (Kollokationspunkte) aufstellt als unbekannte Integrationskonstante (Reihenglieder) mitgenommen werden.

Anzahl der Gleichungen	$N > M$	Anzahl der Unbekannten
Anzahl der Kollokationspunkte	$n > m_r$	Anzahl der Reihenglieder

Damit ist das Gleichungssystem überbestimmt ( $N-M$  Freiheitsgrade), so daß die Randbedingungen in den Kollokationspunkten nicht mehr exakt erfüllt werden können.

$$\underset{(N,M)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(M,1)}{\mathbf{c}} + \underset{(N,1)}{\mathbf{r}} = \underset{(N,1)}{\mathbf{f}} \quad (6.11)$$



Da weiterhin gilt  $\frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{I}$  (Einheitsmatrix) folgt aus (6.13)

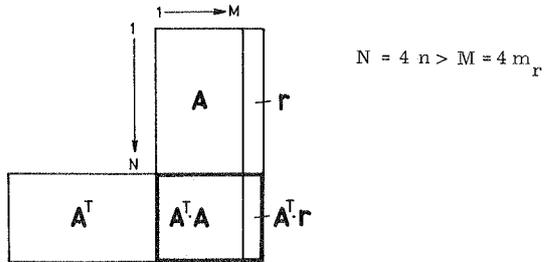
$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{c}} = 2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{c} + 2 \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

oder

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \text{(M,N)} \quad \text{(N,M)} \quad \text{(M,1)} \quad \text{(M,N)} \quad \text{(N,1)} \end{matrix}} \quad (6.17)$$

Dies bedeutet, daß das ursprüngliche, überbestimmte Gleichungssystem nach Multiplikation mit der Transponierten der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  in ein bestimmtes Gleichungssystem übergeht.

Schema für die verbesserte Kollokation:



mit der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_{(N,M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{10} & & & \mathbf{A}_{1m} \\ & & & \\ & & \mathbf{A}_{sm} & \\ & & & \\ \mathbf{A}_{n0} & & & \mathbf{A}_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ \\ m \end{matrix}$$

und den Untermatrizen  $\mathbf{A}_{sm(4,4)}$  ( $s = 1, 2, \dots, n; m = 0, 1, \dots, m_r$ )

		Reihenglied m			
		$C_1^m$	$C_2^m$	$C_3^m$	$C_4^m$
Kollokationspunkt s ( $\varphi_s, \vartheta_s$ )	Randbedingung				
	1.				
	2.				
	3.			$\mathbf{A}_{sm(4,4)}$	
	4.				

Für die Programmierung ist es dabei nicht erforderlich,  $\mathbf{A}$  vollständig abzuspeichern, da das dyadische Produkt  $\mathbf{a}_j^T \cdot \mathbf{a}_j$  jeder einzelnen Zeile  $\mathbf{a}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) direkt in die Matrix  $\mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  eingeschrieben werden kann. Hierdurch wird der Speicherplatzbedarf unabhängig von der Anzahl  $N$  der aufgestellten Bedingungsgleichungen bzw. der Kollokationspunkte. Weiterhin läßt sich die Symmetrie von  $\mathbf{T}$  ausnutzen, was beispielsweise die Anwendung des numerisch günstigen Cholesky-Verfahrens zur Gleichungsauflösung gestattet.

Die einzelnen Fehler  $f_i$  an den Kollokationspunkten lassen sich aus (6.11) gewinnen. In (6.17) ist der Sonderfall der normalen Kollokation mit  $M = N$  enthalten.

Die Methode der verbesserten Kollokation läßt sich als Diskretisierung der allgemeinen Fehlerquadratmethode deuten; wenn man in (6.5) das Integral durch eine Summe ersetzt (Betrachtung für einen Rand und  $p = 1$ )

$$Q = \int f^2 ds = \text{Min} \quad \xrightarrow{\text{Diskretisierung}} \quad Q = \sum_{j=1}^N f_j^2 \Delta s_j = \text{Min} \quad (6.18)$$

Die zu jedem Punkt  $P_j$  gehörende endliche Randstrecke  $\Delta s_j$  läßt sich als Gewichtsfunktion auffassen. Eine Verdichtung der Punkte entspricht demnach einer kleineren Gewichtung der einzelnen Aussage.

#### 6.2.2.2 Bisherige Anwendung des Verfahrens

Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadratsumme in der diskretisierter Form geht auf Gauß und Legendre zurück, die es unabhängig voneinander am Ende des 18. bzw. Anfang des 19. Jahrhunderts beschrieben haben. Sie wird seitdem als Gaußsches Prinzip in der Ausgleichsrechnung beim sogenannten Ausgleich vermittelnder Beobachtungen angewandt, insbesondere in der Geodäsie. Dort liegen gewöhnlich mehr Beobachtungen als zu bestimmende Meßgrößen vor, so daß Fehlbeträge (Residuen)  $f_i$  in den Bestimmungsgleichungen (Fehlergleichungen (6.11)) zugelassen werden. Der Ausgleich im Sinne des Fehlerquadratminimums führt auf die (Gaußschen) Normalgleichungen (6.17).

Neben diesen Verfahren sei noch das Tschebyscheffsche Prinzip erwähnt, bei dem das Maximum der Fehlerbeträge minimalisiert wird [70; 72; 73].

Das Verfahren der verbesserten Kollokation wird erst in jüngster Zeit auf mechanische Probleme angewandt, da durch die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung die Auflösung großer Gleichungssysteme ermöglicht wurde. Die Anwendung als Gebiets- und Randverfahren auf Platten behandelt Hoppe in [60], ein Vergleich mit anderen Näherungsmethoden ist in [61] beschrieben. Bereits 1938 benutzte Aas Jakobsen [45] das Verfahren zur Berechnung von im Grundriß polygonal begrenzten Kugelschalen nach der Membrantheorie, um die Randbedingungen zu verbessern (Verschwinden der austretenden Normalkraft). Es wurden jedoch wenig Reihenglieder mitgenommen. Das Randwertproblem bei der Lagerung eines Rohres auf einer starren Schneid löst Brandes [62] mit Hilfe der verbesserten Kollokation. Die Randbedingungen an Löchern in einer flachen Kugelschale werden in [63] mit dem Verfahren näherungsweise erfüllt.

### 6.2.2.3 Einzelheiten bei der Anwendung des Verfahrens

Die folgenden wichtigen Fragen bei der Anwendung der verbesserten Kollokation sind in der Regel problemabhängig. Es sind deshalb keine allgemein gültigen Aussagen zu machen; vielfach können erst Vergleichsrechnungen eine Antwort geben (siehe Abschnitt 7: Beispiele).

#### 1. Anzahl der Kollokationspunkte (Gleichungen)

In der Ausgleichsrechnung ist häufig ein Vielfaches an Gleichungen (Meßwerten) gegenüber der Anzahl der unbekanntenen Freiwerte notwendig.

$$N = \rho M \quad \text{z.B.} \quad \rho > 3$$

Im Gegensatz hierzu hat sich bei der Anwendung auf mechanische Probleme gezeigt, daß häufig schon die doppelte Anzahl eine ausreichend genaue Erfüllung der Bedingungen bewirkt [60 bis 63].

$$\boxed{N \approx 2M} \quad (\rho \approx 2)$$



Die Multiplikation einer Bedingungsgleichung (Zeile  $\mathbf{a}_j$ ) mit dem ganzzahligen Faktor  $g_j$  ist demnach gleichbedeutend mit der  $g_j^2$ -fachen Formulierung dieser Bedingung in einem Punkt oder näherungsweise in der engeren Umgebung des Punktes. Das entspricht jedoch einer Verdichtung der Kollokationspunkte an dieser Stelle. Für  $\mathbf{G}^2 = \mathbf{I}$  (Einheitsmatrix) geht (6.20) in den Fall ohne Gewichtung (6.17) über.

Zur Wahl der Gewichtungsfaktoren liegen bisher wenig Aussagen vor. Bei den hier behandelten Problemen der verbesserten Randkollokation hat sich eine Gewichtung als nicht notwendig erwiesen. Sie ist dagegen bei der Anwendung als gemischtes Verfahren (Rand- und Gebietskollokation) unumgänglich, da es sich dann um Bedingungsgleichungen mit völlig unterschiedlichem Charakter handelt.

### 3. Nebenbedingungen

Es kann in manchen Fällen sinnvoll sein, außer den Ausgangsgleichungen (6.11) gewisse Nebenbedingungen an die Lösung zu stellen. In der Ausgleichsrechnung tritt dieser Fall als 'vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen' auf; [73], S. 270. Neben der Möglichkeit, mit Hilfe der Bedingungsgleichungen die Anzahl der Unbekannten in den Fehlergleichungen zu reduzieren, wird dort vielfach die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren (Korrelaten) auf die Extremalaufgabe (6.8)  $Q = \text{Min}$  angewendet. Sind mit

$$\underset{(B,M)}{\mathbf{P}} \cdot \underset{(M,1)}{\mathbf{c}} + \underset{(B,1)}{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (B < M) \quad (6.21)$$

B zusätzliche Bedingungsgleichungen für die M Unbekannten  $c_i$  gegeben, so werden diese mittels Lagrangescher Multiplikatoren  $2 \lambda_b$  ( $b = 1, \dots, B$ ) der Funktion  $Q$  (6.12) zugeschlagen.

$$\bar{Q} = Q + 2 \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{q}) = \text{Min} \quad (6.22)$$

mit dem Vektor  $\boldsymbol{\lambda}_{(1, B)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_B\}$

Die Minimalbedingung für die Lagrangesche Funktion  $\bar{Q}$  besagt

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{c}} + 2 \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

oder mit (6.17)

$$\underset{(MN)}{\mathbf{A}^T} \cdot \underset{(NM)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(M,1)}{\mathbf{c}} + \underset{(MN)}{\mathbf{A}^T} \cdot \underset{(N,1)}{\mathbf{r}} + \underset{(M,B)}{\mathbf{P}^T} \cdot \underset{(B,1)}{\boldsymbol{\lambda}^T} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

Zusammen mit (6.21) ergeben sich damit  $B + M$  lineare Gleichungen für die unbekannt Größen  $c_1, \dots, c_M; \lambda_1, \dots, \lambda_B$ . Der wohl wichtigste Fall von Nebenbedingungen bei mechanischen Problemen ist die Forderung, einen Teil der Randbedingungen exakt zu erfüllen, den Rest im Sinne des Fehlerquadratminimums:

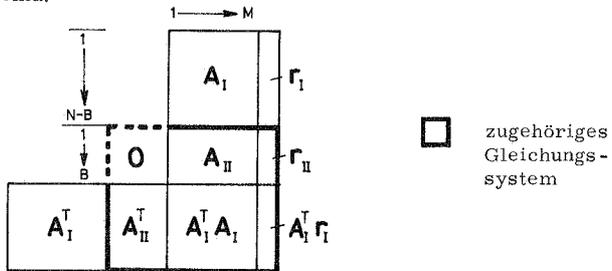
Normalgleichungen:

$$\mathbf{A}_I^T \cdot \mathbf{A}_I \cdot \mathbf{c} + \mathbf{A}_I^T \cdot \mathbf{r}_I + \mathbf{A}_{II}^T \boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\mathbf{A}_{II} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{r}_{II} = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

mit dem Schema:



#### 4. Sonderfall: Rotationssymmetrische Berandung

Bei rotationssymmetrischer Berandung mit einem Randwinkel  $\varphi = \varphi_R$  geht der homogene Teil des Ansatzes (6.3) in ein trigonometrisches

Funktionensystem über, da er am Rand nur vom Umfangswinkel  $\vartheta$  abhängt.

$$w_H \Big|_{\varphi=\varphi_R} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_j^m w_j^m \Big|_{\varphi=\varphi_R} \cos m\vartheta$$

oder

$$w_H \Big|_{\varphi=\varphi_R} = \sum_{m=0}^{\infty} w^m \Big|_{\varphi=\varphi_R} \cos m\vartheta \quad (6.27)$$

Werden nun die Randbedingungen im Sinne der verbesserten Kollokation punktwise erfüllt, so liegt der Fall der diskretisierten Fourieranalyse (Schemaverfahren) vor, bei der die Fourierkoeffizienten  $w^m$  ebenfalls über das Fehlerquadratminimum bestimmt werden [70]. Diese Wirkung lässt sich auch numerisch zeigen, wenn man bei gleicher Anzahl  $m$  der mitgenommenen Reihenglieder die normale Fourierentwicklung einer Randbedingung mit dem Verlauf aus der punktwisen Formulierung (verbesserte Kollokation) vergleicht und dort die Anzahl der Punkte immer mehr erhöht. Bild 6.3 zeigt den homogenen Randlastfall  $N_\varphi$  am Rand für eine Kugelschale unter Eigengewicht auf 6 Einzelstützen, dessen Fourierentwicklung durch

$$\frac{N_\varphi}{q} = \frac{2}{\epsilon} \sum_{m=6, 12, \dots} \frac{\sin m \epsilon}{m} \cos m\vartheta$$

gegeben ist. Schon bei der vierfachen Anzahl der Gleichungen ( $N = 4M$ ) lässt sich der Unterschied zur Fourierentwicklung zeichnerisch nicht mehr darstellen.

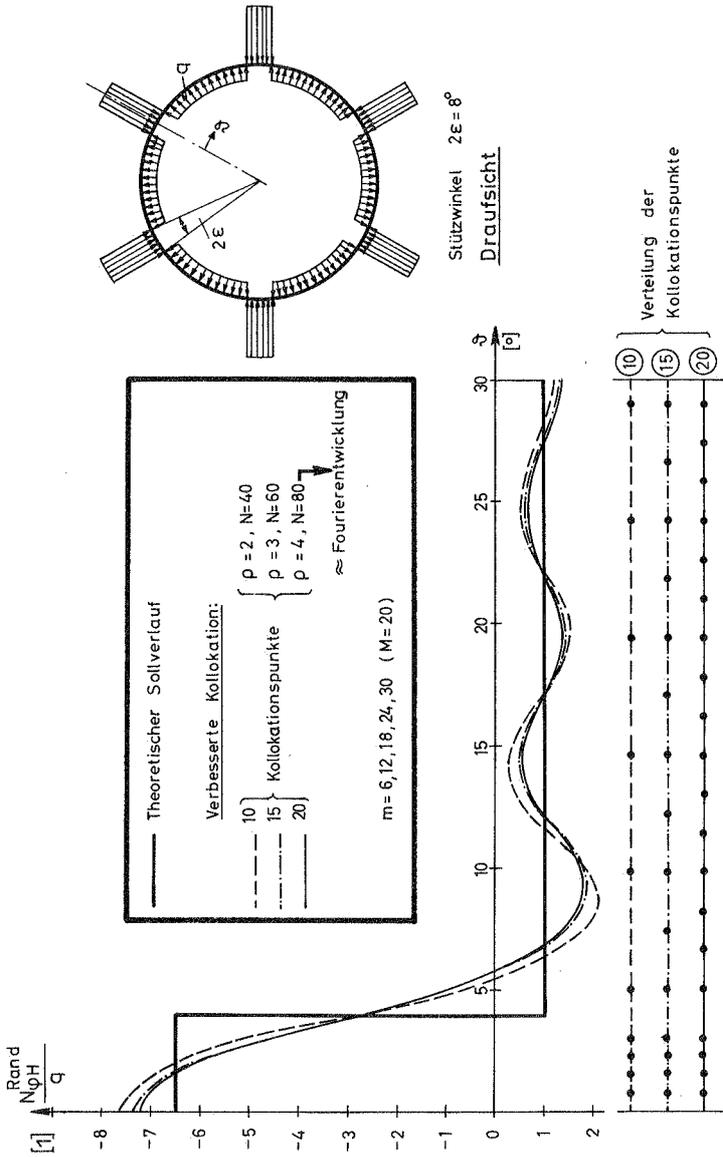


Bild 6.3: Homogener Randlastfall einer Kugelschale auf 6 Stützen: Verlauf bei 5 Reihengliedern  $m$  ( $M=20$ )

## 5. Beurteilung der Ergebnisse

In der Ausgleichsrechnung treten bei der Auflösung der Normalgleichungen (6.17) häufig numerische Schwierigkeiten auf, da die Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind. Im vorliegenden Fall der reinen Randkollokation trat dieses Problem nicht auf, obwohl in den Elementen der Matrix  $\mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  wegen der verschiedenen Reihenglieder sehr große Unterschiede vorlagen. Diese ließen sich jedoch durch eine Normierung beseitigen.

Für den Fall schlecht konditionierter Normalgleichungen gibt Schwarz in [72] ein Verfahren zur Lösung der Fehlergleichungen (6.11) unter Vermeidung der Normalgleichungen an, welches eine größere numerische Stabilität aufweisen soll.

Für den Sonderfall der rotationssymmetrischen Berandung ist die Konvergenz wegen der Fourierentwicklung in Umfangsrichtung offensichtlich. Im allgemeinen Fall kann die Konvergenz aufgrund von strengen Abschätzungen erhärtet werden. Dies ist jedoch nicht Aufgabe dieser Arbeit. Für praktische Belange ist es in der Regel ausreichend, den maximalen Fehler jeder Randgröße zu bestimmen. Die Unterschiede in den Fehlern der einzelnen Randgrößen können dann als Grundlage für eine Gewichtung bei einer erneuten Rechnung dienen.

### 6.3 Rotationssymmetrische Berandung

Bei einer rotationssymmetrischen Berandung gehen die durch (6.1) und (6.2) definierten Ersatzschnittgrößen für  $n \rightarrow \varphi$  und  $t \rightarrow \vartheta$  ( $r_t = R$ ;  $ds_t = R \sin \varphi d\vartheta$ ) über in

$$\bar{N}_{\varphi\vartheta} = N_{\varphi\vartheta} + \frac{M_{\varphi\vartheta}}{R} \quad (6.28)$$

$$\bar{Q}_{\varphi} = Q_{\varphi} + \frac{M'_{\varphi\vartheta}}{R \sin \varphi} \quad (6.29)$$

Die Randbedingungen werden bei nicht rotationssymmetrischer Belastung in einer Fourierreihe entsprechend den Schnitt- und Verschiebungsgrößen (4.52) entwickelt. Dadurch können 4 Bedingungengleichungen für jedes Reihenglied getrennt formuliert werden, mit denen die jeweiligen 4 Integrationskonstanten  $C^m$  (bzw. 8 Konstanten bei offenen Schalen) bestimmt werden. Der Anteil aus der homogenen Lösung ist mit (4.63) gegeben.

Neben dieser direkten Bestimmung der Konstanten aus den Bedingungengleichungen ist es auch üblich, ein baustatisches Verfahren (Kraft- oder Verschiebungsgrößenverfahren) für die Berechnung der statisch unbestimmt gelagerten Schale zu verwenden, dies besonders dann, wenn die Schale an andere Bauteile angeschlossen ist.

Anstelle der analytischen Formulierung des Randwertproblems ist es auch möglich, die Randbedingungen punktweise mit Hilfe der verbesserten Kollokation einzuarbeiten. Der Aufwand ist jedoch bei rotationssymmetrischer Berandung unnötig.

#### 6.4 Nicht rotationssymmetrische Berandung

Liegt eine Schale mit nicht rotationssymmetrischer Berandung vor, so scheidet eine exakte Lösung des Randwertproblems in der Regel aus. Als Näherungslösung soll hier die Methode der verbesserten Kollokation benutzt werden, die wegen der punktweisen Aufstellung der Randbedingungen auch auf komplizierte Berandungen anwendbar ist. Als Beispiel wird eine im Grundriß polygonal begrenzte Kugelschale gewählt, bei der die Randkurve (Kleinkreis) analytisch formulierbar ist. Hierdurch wird die Allgemeingültigkeit des Verfahrens nicht eingeschränkt, nur ist es nicht notwendig die Geometrie punktweise zu erfassen. Im Bild 6.4 sind einige Kugelschalen über einem regelmäßigen Vieleck dargestellt ( $e$ : Anzahl der Ecken).

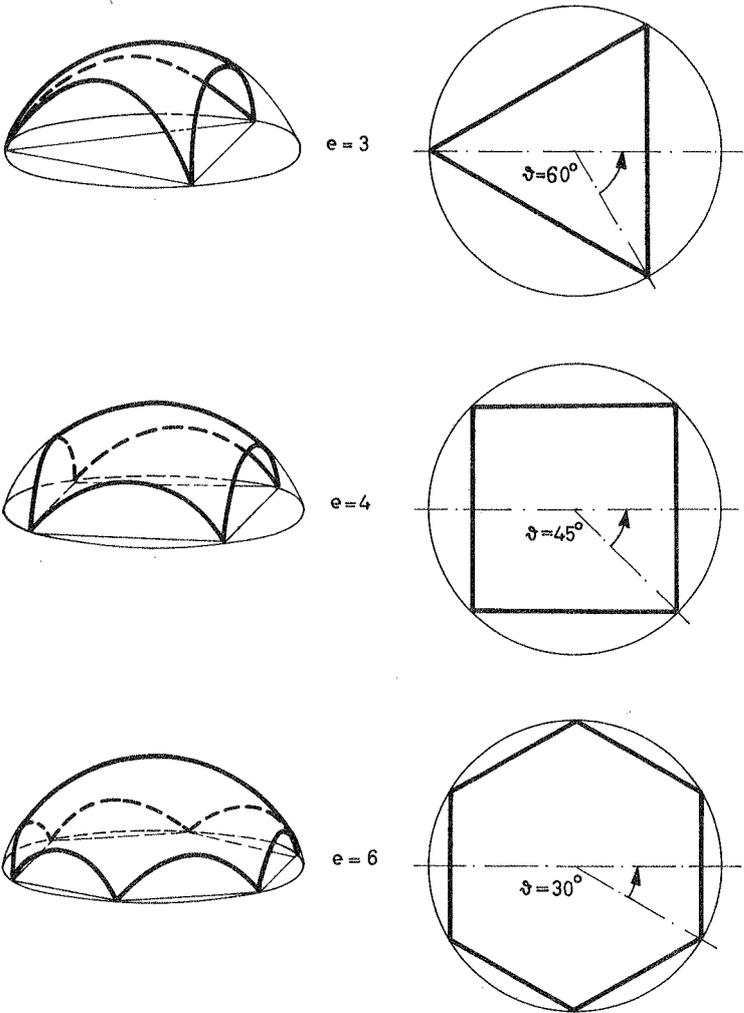


Bild 6.4: Schalen über regelmäßigem Vieleck .

6.4.1 Geometrie der im Grundriß polygonal begrenzten Schale

Eine Kugelschale sei durch ebene Schnitte begrenzt, die im gewählten Sonderfall auf der Grundrißfläche senkrecht stehen und im Grundriß ein regelmäßiges Vieleck erzeugen. Die Eckpunkte E liegen auf einem Breitenkreis  $\varphi = \varphi_u$ ; bei e Ecken beträgt der halbe Sektorwinkel  $\vartheta_0 = \frac{180^\circ}{e}$ . Die Randkurven sind Kleinkreise mit dem Radius a (Bild 6.5 und 6.6).

$$a = R\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_u \cos^2 \vartheta_0} \quad (6.30)$$

Der Umfangswinkel  $\vartheta$  werde vom Eckmeridian ( $\vartheta = 0$ ) aus gemessen.

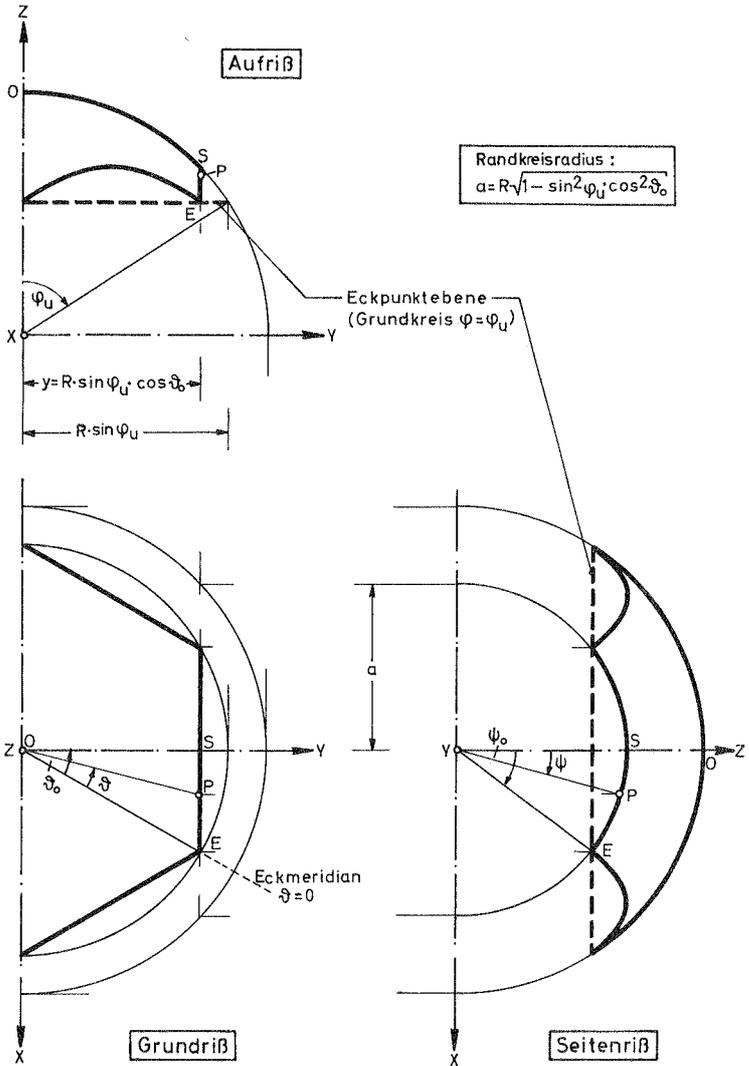
Um die Randbedingungen in einem Randpunkt P aufzustellen, ist es erforderlich, die in  $\varphi$  und  $\vartheta$  dargestellten Schnitt- und Verschiebungsgrößen in die Richtungen der Tangente (t) und Normale (n) zur Randkurve zu transformieren. Hierzu wird ein neues Koordinatensystem  $\delta, \psi$  so eingeführt, daß der Randkreis mit einer Koordinatenlinie  $\delta = \text{konst}$  zusammenfällt. Tangente und Normale an die Randkurve in P fallen dann mit den Tangenten an die Koordinatenlinien zusammen. Die Koordinatenlinien  $\varphi, \vartheta$  und  $\delta, \psi$  sind um den Winkel  $\gamma$  gegeneinander geneigt.

Aus dem Dreieck OPQ der Einheitskugel (Bild 6.7) lassen sich mit den Sätzen der sphärischen Trigonometrie folgende Beziehungen aufstellen:

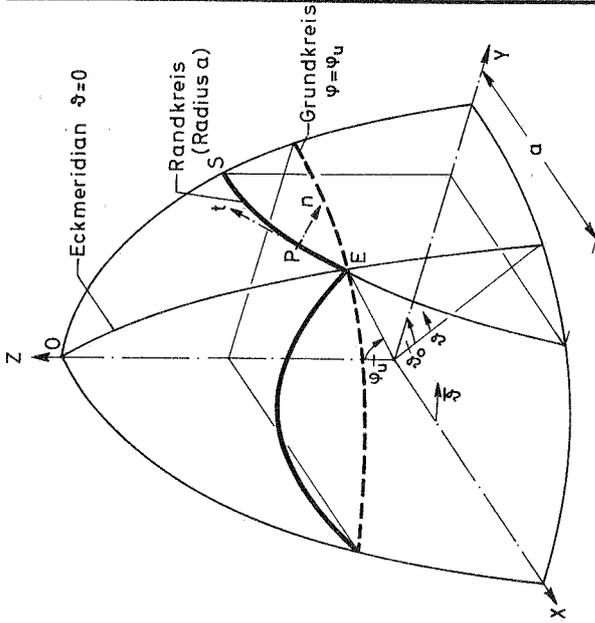
$\cos \varphi = \cos \delta \cos \psi$	(6.31a)
$\tan \bar{\vartheta} = \frac{\tan \delta}{\sin \psi}$	(6.31b)
$\sin \gamma = \frac{\cos \bar{\vartheta}}{\cos \delta}$	(6.32a)
oder $\cot \gamma = \cos \varphi \tan \bar{\vartheta}$	(6.32b)

mit  $\cos \delta = a_0 = \frac{a}{R} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_u \cos^2 \vartheta_0} = \text{konst.}$  (6.33)

und  $\bar{\vartheta} = 90^\circ - (\vartheta_0 - \vartheta)$  (6.34)

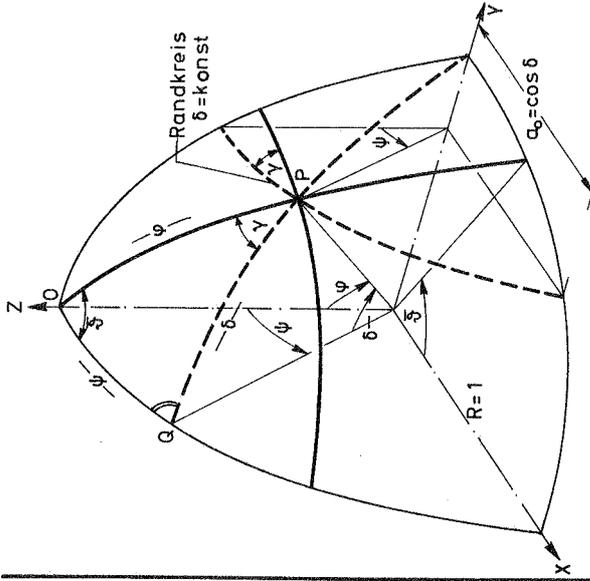


**Bild 6.5:** Kugelschale über einem Vieleck ( $e=6$ )



$$\bar{\alpha} = 90^\circ - (\alpha_0 - \delta)$$

**Bild 6.6:** Sektor einer Kugelschale über einem Vieleck.



Koordinatenlinien:  $\psi, \delta$  um  $X, Y$  gegeneinander  
 $\delta, \psi$  ander gedreht

**Bild 6.7:** Sektor der Einheitskugel  $R=1$ .

Die Gleichungen (6.31) gestatten die Ermittlung der Koordinaten  $\varphi$  und  $\vartheta$  eines Randpunktes P ( $\delta = \text{konst}$ ) aus der vorgegebenen Randkoordinate  $\psi$ , gemessen vom Scheitel des Randes. Mit (6.32) läßt sich der zugehörige Transformationswinkel  $\gamma$  bestimmen.

Neben den Koordinaten  $\varphi$  und  $\vartheta$  wird ihre Ableitung nach dem Randwinkel  $\psi$  benötigt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \sin(\vartheta_0 - \vartheta) \quad (6.35a)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = -\cot \varphi \cos(\vartheta_0 - \vartheta) \quad (6.35b)$$

#### 6.4.2 Transformation der Schnitt- und Verschiebungsgrößen am Rand

Mit der Transformationsmatrix (Bild 6.8) **D**

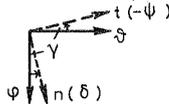


Bild 6.8: Drehtransformation

$$\mathbf{D}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

werden sämtliche Schnitt- und Verschiebungsgrößen wie folgt in Richtung tangential bzw. normal zur Randkurve transformiert:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_n & N_{nt} \\ N_{tn} & N_t \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^T \cdot \begin{bmatrix} N_\varphi & N_{\varphi\vartheta} \\ N_{\vartheta\varphi} & N_\vartheta \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \\ \begin{bmatrix} M_n & M_{nt} \\ M_{tn} & M_t \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^T \cdot \begin{bmatrix} M_\varphi & M_{\varphi\vartheta} \\ M_{\vartheta\varphi} & M_\vartheta \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \\ \begin{bmatrix} Q_n \\ Q_t \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^T \cdot \begin{bmatrix} Q_\varphi \\ Q_\vartheta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^T \cdot \begin{bmatrix} u_\varphi \\ u_\vartheta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_t \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^T \cdot \begin{bmatrix} \beta_\varphi \\ \beta_\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Dabei werden die Membrankräfte und Momente wegen  $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$  einer Ähnlichkeitstransformation unterworfen, w bleibt unverändert.

Die Ersatzkräfte sind durch (6.1) und (6.2) definiert, wobei für  $r_t$  der Radius a des Randkleinkreises und  $s_t = a \psi$  einzusetzen ist:

$$\bar{N}_{nt} = N_{nt} + \frac{M_{nt}}{a} \quad (6.38)$$

$$\bar{Q}_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{a \partial \psi} \quad (6.39)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial \psi} = \frac{\partial M_{nt}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \quad (6.40a)$$

bzw. mit (6.35)

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial \psi} = M'_{nt} \sin(\vartheta_o - \vartheta) - M'_{nt} \cot \varphi \cos(\vartheta_o - \vartheta) \quad (6.40b)$$

Dazu wird in

$$M_{nt} = (-M_\varphi + M_\vartheta) \sin \gamma \cos \gamma + M_{\varphi\vartheta} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \quad (6.41)$$

$\gamma$  mit (6.32b) und (6.34) durch  $\varphi$  und  $\vartheta$  ausgedrückt. Beachtet man ferner, daß für jedes Reihenglied m gilt:

$$\begin{Bmatrix} M'_\varphi \\ M'_\vartheta \end{Bmatrix} = -m \tan m \vartheta \cdot \begin{Bmatrix} M_\varphi \\ M_\vartheta \end{Bmatrix}$$

$$M'_{\varphi\vartheta} = m \cot m \vartheta M_{\varphi\vartheta}$$

so geht (6.40b) nach Ausführung der Ableitungen für jedes Reihenglied über in

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial \psi} = \left[ -\frac{1}{2} (M'_\varphi + M'_\vartheta) \sin 2\gamma + M'_{\varphi\vartheta} \cos 2\gamma \right] \sin(\vartheta_o - \vartheta) \quad (6.42)$$

$$(-M_\varphi + M_\vartheta) \cos(\vartheta_o - \vartheta) b_1 + M_{\varphi\vartheta} \cos(\vartheta_o - \vartheta) b_2$$

mit den Abkürzungen:

$$b_1 = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} [\cos 2\gamma (\sin^2 \varphi + \cot^2 \varphi \sin \gamma) - m \tan m \vartheta \cos \gamma \cos \varphi] \quad (6.42a)$$

$$b_2 = -\frac{1}{\sin \varphi} [2 \sin \gamma \sin 2\gamma (\sin^2 \varphi + \cot^2 \varphi \sin \gamma) + m \cot m \vartheta \cos 2\gamma \cos \varphi] \quad (6.42b)$$

Um sämtliche Transformationen durchführen zu können, wird der mit (4.60) definierte Vektor um  $\beta_{\vartheta}^m$  und die Ableitungen  $M_{\varphi}^m$ ,  $M_{\vartheta}^m$  und  $M_{\varphi\vartheta}^m$  ergänzt und die nicht erforderlichen Größen  $\xi^m$ ,  $\bar{N}_{\varphi\vartheta}^m$  und  $\bar{Q}_{\varphi}^m$  weggelassen ( $\mathbf{S}^m \rightarrow \mathbf{S}_{\text{erg}}^m$ ).

$$\left. \begin{array}{l} N_{\varphi}^m \\ N_{\vartheta}^m \\ N_{\varphi\vartheta}^m \\ M_{\varphi}^m \\ M_{\vartheta}^m \\ M_{\varphi\vartheta}^m \\ Q_{\varphi}^m \\ Q_{\vartheta}^m \\ E u_{\varphi}^m \\ E u_{\vartheta}^m \\ E w^m \\ E \beta_{\varphi}^m \\ E \beta_{\vartheta}^m \\ M_{\varphi}^m \\ M_{\vartheta}^m \\ M_{\varphi\vartheta}^m \end{array} \right\} = \mathbf{S}_{\text{erg}}^m \quad (6.43)$$

$$\begin{array}{l} \cos m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{array}$$

von  $\vartheta$  abhängiger  
 Funktionalanteil  
 eines Reihenglieds  
 als jeweiliger Faktor  
 $\mathbf{S}_{\text{erg}}^m \rightarrow \mathbf{S}_{\text{erg}}$

(16, 1)

mit

$$\boxed{\mathbf{S}_{\text{erg}}^m = \mathbf{B}_{\text{erg}}^m \cdot \mathbf{w}^m} \quad (6.44)$$

$(16,1) \quad (16,9) \quad (9,1)$

$\mathbf{B}^m$  wird um die entsprechenden Zeilen vermindert und durch die in Tafel 6.1 angegebenen vier Zeilen erweitert. Die Schnitt- und Verschiebungsgrößen tangential und normal zum Rand werden für ein Reihenglied  $m$  im Vektor  $\mathbf{S}_R$  zusammengefaßt.

Tafel 6.1: Die vier unteren Zeilen der Matrix  $B_{\text{erg}}^m$ .

Faktor	$w_M^m$	$w_M^{m*}$	$\int w_D^m d\varphi$	$w_D^m$	$w_D^{m*}$
$E \beta_{\vartheta}^m$	0	0	$\frac{k}{h}(1+\mu) \frac{\cos \varphi}{m}$	$\frac{k}{h}(1+\mu) \left(\bar{m} - \frac{1}{\bar{m}}\right)$	0
$M_{\varphi}^{m*}$	0	0	0	$R \cdot \cot \varphi \cdot (3\bar{m}^2 - 2)$	$-R(2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2)$
$M_{\vartheta}^m$	0	0	0	$-R \cdot \cot \varphi \cdot (3\bar{m}^2 - 2)$	$R(2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2)$
$M_{\varphi \vartheta}^m$	0	0	0	$R \bar{m} (2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2 - 1)$	$-3 R \bar{m} \cdot \cot \varphi$

$w_B^m$	$w_B^{m*}$	$L^m(w_B^m)$	$L^{m*}(w_B^{m*})$
$\frac{k}{h}(1+\mu) \bar{m}$	0	$-\frac{1}{h} \frac{1+\mu}{1-\mu} \bar{m}$	0
$R \cot \varphi (3\bar{m}^2 - 1 + \mu)$	$-R(2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2)$	$R \cdot \cot \varphi \cdot \left[1 - \frac{3\bar{m}^2}{k(1-\mu)}\right]$	$\frac{R}{1-\mu} \cdot \left[-1 + \frac{\bar{m}^2 + 2 \cot^2 \varphi}{k}\right]$
$-R \cot \varphi (3\bar{m}^2 - 1 + \mu)$	$R(2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2 + 1 + \mu)$	$-R \cdot \cot \varphi \cdot \left[1 - \frac{3\bar{m}^2}{k(1-\mu)}\right]$	$\frac{R}{1-\mu} \cdot \left[\mu + \frac{\bar{m}^2 + 2 \cot^2 \varphi}{k}\right]$
$R \bar{m} \cdot (2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2 + \mu)$	$-3 R \bar{m} \cdot \cot \varphi$	$R \bar{m} \cdot \left[1 - \frac{2 \cot^2 \varphi + \bar{m}^2}{k(1-\mu)}\right]$	$\frac{R}{1-\mu} \cdot \frac{3 \bar{m} \cot \varphi}{k}$

$$\left. \begin{array}{c} N_n \\ N_t \\ N_{nt} \\ M_n \\ M_t \\ M_{nt} \\ Q_n \\ Q_t \\ \bar{N}_{nt} \\ \bar{Q}_n \\ E u_n \\ E u_t \\ E w \\ E \beta_n \end{array} \right\} = \mathbf{S}_R \quad (6.45)$$

(14, 1)

Mit den Größen in Meridian- und Ringrichtung besteht nach Durchführung der Transformation (6.37) folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\mathbf{S}_R = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_{erg}} \quad (6.46)$$

(14,1)    (14,16) (16,1)

Hierin ist  $\mathbf{H}$  eine in Tafel 6.2 definierte Transformationsmatrix. Für die Formulierung der Randbedingungen werden die jeweils 4 Randgrößen hierin ausgewählt.

$$\boxed{\mathbf{S}_{R,red} = \mathbf{H}_{red} \cdot \mathbf{S}_{erg}} \quad (6.47)$$

(4,1)    (4,16) (16,1)

Tafel 6.2.: Transformationsmatrix **H**.  $\rightarrow$  mit  $b_1$  und  $b_2$  nach (6.42a/b)

	$N_\psi$	$N_\psi\delta$	$M_\psi$	$M_\psi\delta$	$M_{\psi\delta}$	$Q_\psi$	$Q_\psi\delta$	$E_{U_\psi}$	$E_{U_\psi\delta}$	$E_w$	$E_{\beta_\psi}$	$E_{\beta_\psi\delta}$	$M_\psi^\bullet$	$M_\psi^\bullet\delta$	$M_{\psi\delta}^\bullet$
$N_n$	$\cos^2\gamma$	$\sin^2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_t$	$\sin^2\gamma$	$\cos^2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_{nt}$	$\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_n$	0	0	$\cos^2\gamma$	$\sin^2\gamma$	$\sin^2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_t$	0	0	$\sin^2\gamma$	$\cos^2\gamma$	$-\sin^2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{nt}$	0	0	$-\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\cos 2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Q_n$	0	0	0	0	0	$\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0
$Q_t$	0	0	0	0	0	$-\sin\gamma$	$\cos\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{N}_{nt}$	$-\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{2a}\sin 2\gamma$	$-\frac{1}{2a}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{a}\cos 2\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_n$	0	0	$-b_1 \cos(\xi_2 - \delta)$	$b_1 \cos(\xi_2 - \delta)$	$b_2 \cos(\xi_2 - \delta)$	$\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\frac{1}{2}\sin 2\gamma$	$\cos 2\gamma$
$E_{un}$	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0	0	0	0	0	0
$E_{ut}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\gamma$	$\cos\gamma$	0	0	0	0	0	0
$E_w$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$E_{\beta n}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0	0	0

\*  $\frac{1}{a} \sin(\xi_2 - \delta)$

6.4.3 Die Kollokation bei im Grundriß polygonal begrenzten Schalen

Bei einer Schale mit einem Grundriß in Form eines regelmäßigen Vielecks liegen von der Geometrie her Symmetrien zu den Achsen durch die Eckpunkte und die Sehnenmittelpunkte vor (Bild 6.9).

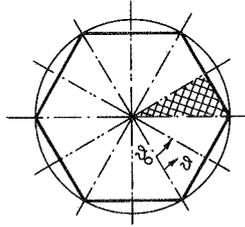


Bild 6.9: Symmetrieachsen

Weist auch die Belastung diese Symmetrien auf, z.B. bei rotations-symmetrischer Lastanordnung, so kann man sich auf die Behandlung eines Sektors mit  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \varphi_0$  beschränken, muß aber die Symmetrie im Ansatz berücksichtigen. Damit kommt bei e Eckpunkten nur jedes e-te Reihenglied in Frage ( $m = e, 2e, \dots$ ). Das bedeutet für die normale Kollokation, daß man bei Mitnahme von  $m_r$  Reihengliedern,  $n = m_r$  Punkte am Sektorrand verteilen kann. Bei der verbesserten Kollokation ist die Anzahl n der Punkte hierdurch nicht beschränkt.

Die Verteilung am Randkreis wird man zunächst gleichmäßig vornehmen, wobei der Eck- und der Sehnenmittelpunkt für manche Randgrößen aus-zusparen ist, da er durch den Ansatz mit  $\sin m\varphi$  bzw.  $\cos m\varphi$  für  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \varphi_0$  Null ergibt (Bild 6.10).

$$\psi = \frac{2s-1}{2} \Delta\psi = \frac{2s-1}{2n} \psi_0 \quad (6.48)$$

mit  $\tan \psi_0 = \tan \varphi_u \sin \varphi_0$  (Bild 6.5)

Sind stark veränderliche Randbedingungen einzuhalten, z.B. bei einer Einzelstützung, kann eine Verdichtung der Punkte sinnvoll sein.

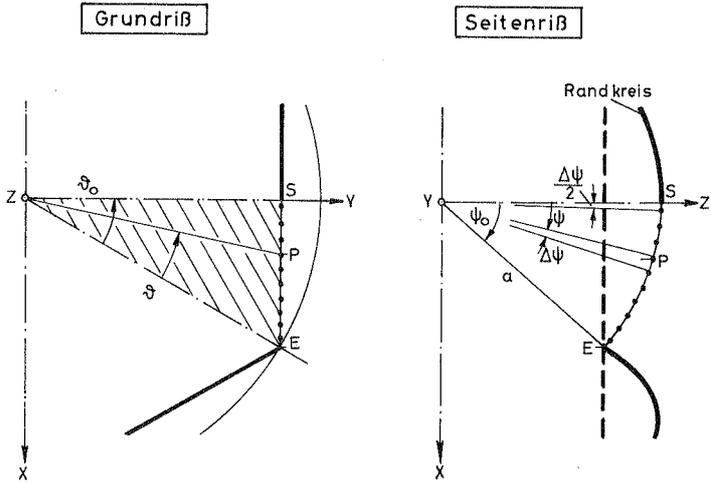


Bild 6.10: Sektor mit Kollokationspunkten

7. Zahlenbeispiele

7.1 Vorbemerkungen

Für die im folgenden angeführten Beispiele wurde ein Programm in ALGOL geschrieben und die Rechnungen auf der Rechenanlage TR 4 der Universität Stuttgart durchgeführt. Als Lastfall wird für alle Beispiele konstanter Außendruck  $p$  gewählt. Die Membran- (= Partikular-) -lösung lautet:

$$N_{\varphi_P} = N_{\phi_P} = - \frac{pR}{2}$$
$$w_P = - \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \mu)$$

In den Rechnungen werden bis zu 11 Reihenglieder ( $m = 0$  mit 3 Integrationskonstanten und  $m = e, 2e, \dots 10e$  mit je 4 Konstanten) berücksichtigt. Dabei zeigt sich, daß abgesehen vom unmittelbaren Randbereich ab dem 6. Reihenglied ( $m = 5e$ ) keine wesentlichen Veränderungen der Schnitt- und Verschiebungsgrößen auftreten; dies ist u. a. eine Folge der 'gutartigen' Belastung und der 'gleichartigen' Randbedingungen.

Für den Fall mit 11 Reihengliedern werden 20 Kollokationspunkte gleichmäßig über den Rand verteilt. Damit stehen  $4 \times 20 = 80$  Bedingungsgleichungen den  $(10 \cdot 4 + 3) = 43$  unbekanntem Integrationskonstanten gegenüber. Außerdem gilt:

1. Eine Verdichtung der Punkte im Eckbereich sowie eine Erhöhung der Anzahl der Kollokationspunkte bringen abgesehen vom unmittelbaren Randbereich keine nennenswerte Änderung.
2. Die Mitnahme der Ecke als Kollokationspunkt bewirkt dort zwar einen geringeren Randfehler, führt jedoch im sonstigen Randbereich auf sehr große Abweichungen (bis zu 400 % in den Randschnittgrößen, bezogen auf den jeweiligen Maximalwert im Schalenbereich).
3. Bei Aussparung des Eckpunktes treten erwartungsgemäß dort in allen Randgrößen die maximalen Abweichungen von den Sollwerten auf (bis zu 10 %). Sie sind jedoch wesentlich geringer

als bei Mitnahme des Eckpunktes. Außerdem sind die Randfehler außerhalb des Eckbereichs sehr klein.

4. Veränderungen der Lage der Kollokationspunkte wirken sich nur im unmittelbaren Randbereich aus.

Es ist jeweils der Fall mit 11 Reihengliedern und 20 Kollokationspunkten (ohne Eckpunkt) aufgetragen. Um die Unsicherheit der Randwerte, insbesondere in Ecknähe, anzudeuten, ist der Verlauf in diesen Bereichen in den Diagrammen gestrichelt angegeben.

Eine unterschiedliche Gewichtung der Randgrößen wird nicht vorgenommen.

## 7.2 Die eingespannte Kugelschale über quadratischem Grundriß

Die allseits eingespannte Kugelschale über quadratischem Grundriß wird von Conway und Leissa in [54] behandelt, wobei die Autoren die Theorie flacher Schalen verwenden und bei Mitnahme von drei Reihengliedern die Randbedingungen an drei Punkten exakt erfüllen (normale Kollokation). Für dieselben Abmessungen wird eine Rechnung nach dem oben beschriebenen Verfahren (Theorie nicht flacher Schalen, verbesserte Randkollokation) durchgeführt. Die Ergebnisse werden weiterhin mit denen einer Kugelschale mit kreisförmigem Grundriß (rotationssymmetrisches Problem) verglichen, deren Grundriß dem Quadrat einbeschrieben ist.

Die Schale mit ihren Abmessungen ist in Bild 7.1 dargestellt. Es handelt sich um eine verhältnismäßig dicke Schale mit dem Verhältnis  $\frac{R}{h} = 30$ .

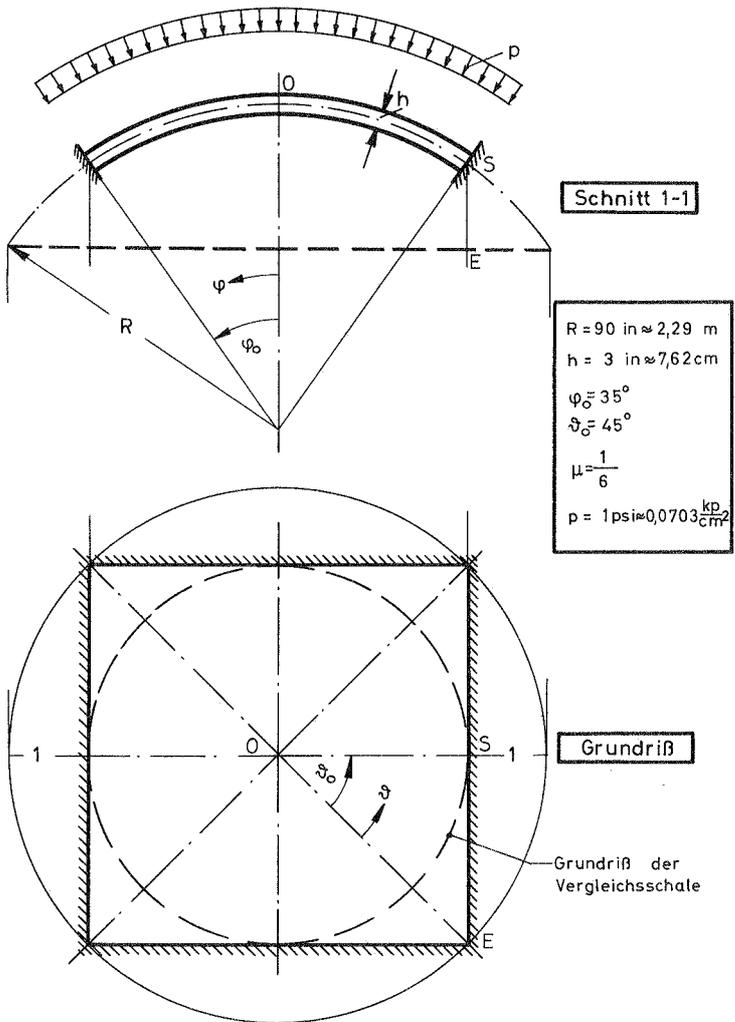
Die Randbedingungen für die Einspannung sind

$$u_n = u_t = w = \beta_n = 0$$

Sie sind in diesem Fall gleichbedeutend mit

$$u_\phi = u_\psi = w = \beta_\phi = 0$$

so daß sich eine Transformation der Randgrößen gemäß (6.47) erübrigt.



**Bild 7.1:** Eingespannte Kugelschale über quadratischem Grundriß

Die größte Abweichung einer Randverschiebungsgröße vom Sollwert Null tritt im Eckpunkt bei  $\beta_n$  auf und beträgt 3,8 % (bezogen auf den Maximalwert innerhalb der Schale). Außerhalb des Eckbereiches sind die Fehler wesentlich kleiner ( $< 0,5 \%$ ).

In den Bildern 7.2 bis 7.5 ist der Verlauf der Membrankräfte  $N_\varphi$  und  $N_\vartheta$ , des Biegemomentes  $M_\varphi$  und der Normalverschiebung  $w$  für verschiedene Meridianschnitte dimensionslos aufgetragen. Weiterhinsind die Ergebnisse von Conway/Leissa (C/L) [54] für den Scheitelschnitt  $\vartheta = \vartheta_0$  und die Größen einer einbeschriebenen Kugelschale über kreisförmigem Grundriß () angegeben.

Der Vergleich zeigt eine weitgehende Übereinstimmung aller Größen für den Scheitelschnitt  $\vartheta = \vartheta_0$  mit der einbeschriebenen Kugelschale. Dabei sind die Abweichungen teilweise wesentlich geringer, als in [54] angegeben wird. Die Eckbereiche entziehen sich weitgehend der Lastabtragung. Sowohl  $N_\varphi$  und  $N_\vartheta$  als auch die Biegemomente streben dort gegen Null. Während die Membrankräfte in den verschiedenen Meridianschnitten prinzipiell ihren Verlauf nicht ändern, trifft dies auf das Biegemoment  $M_\varphi$  im Randbereich nicht zu. Das relativ langsame Abklingverhalten ist auf das große Verhältnis  $\frac{R}{h}$  zurückzuführen.

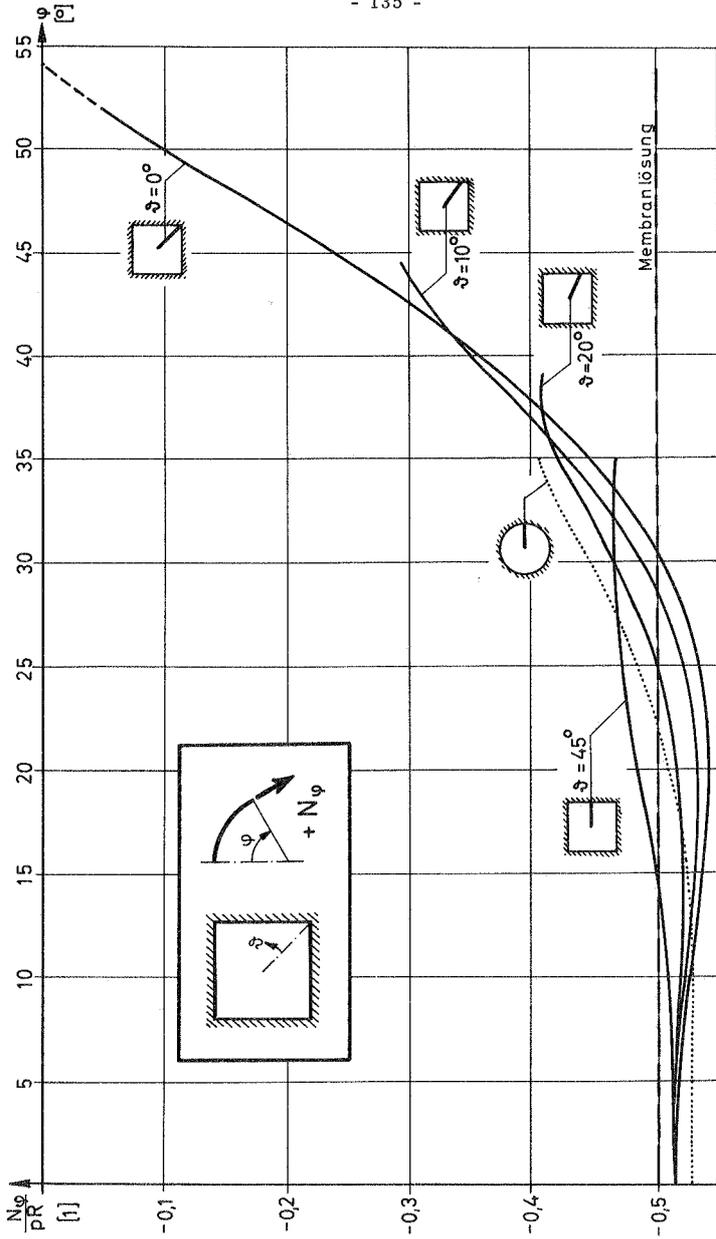


Bild 7.2: Kugelschale □ : Meridiankraft  $N_\varphi$ .

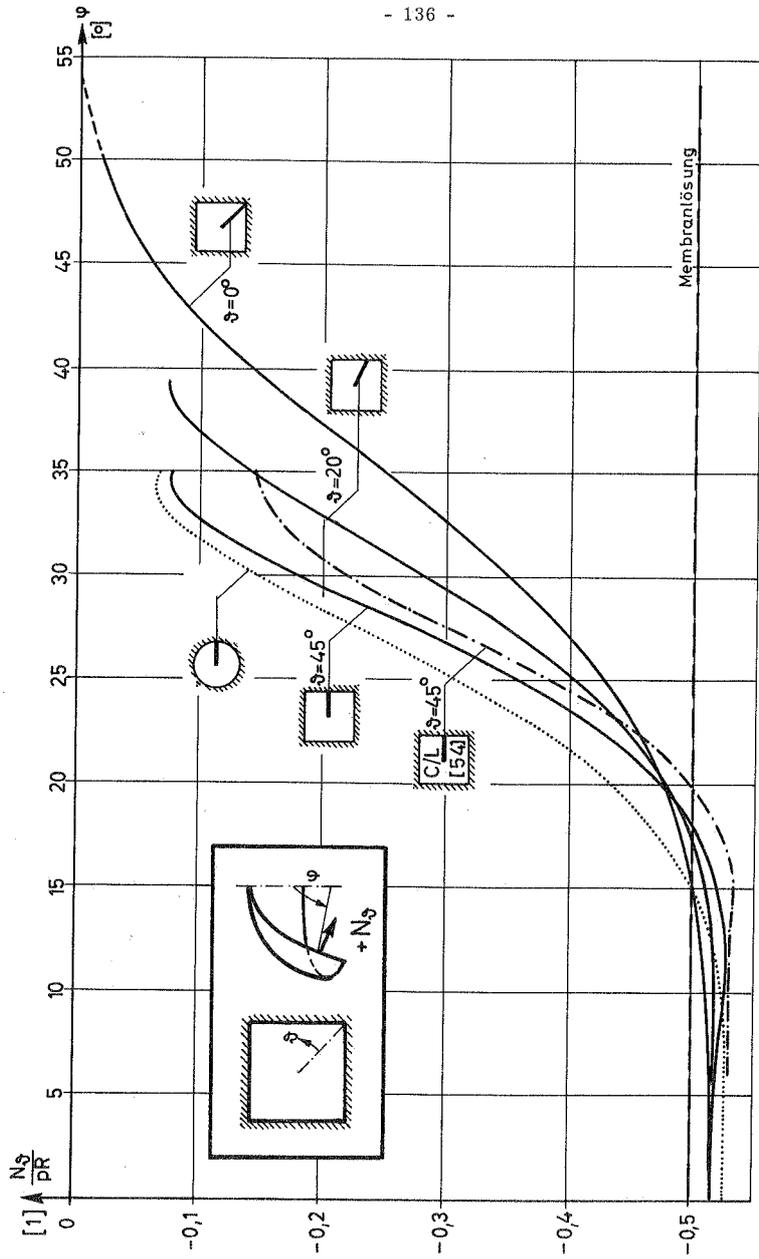


Bild 7.3: Kugelschale □ : Ringkraft  $N_\phi$ .

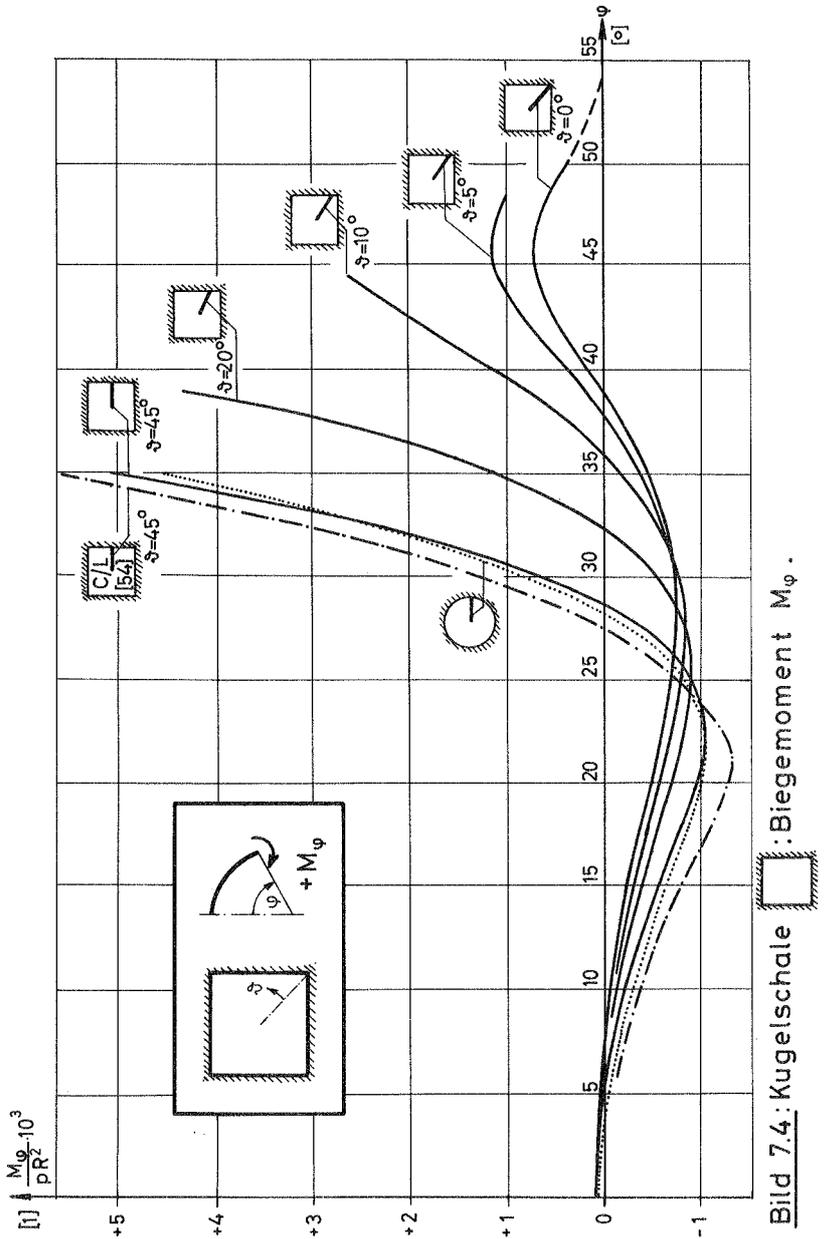


Bild 7.4: Kugelschale  : Biegemoment  $M_\varphi$ .

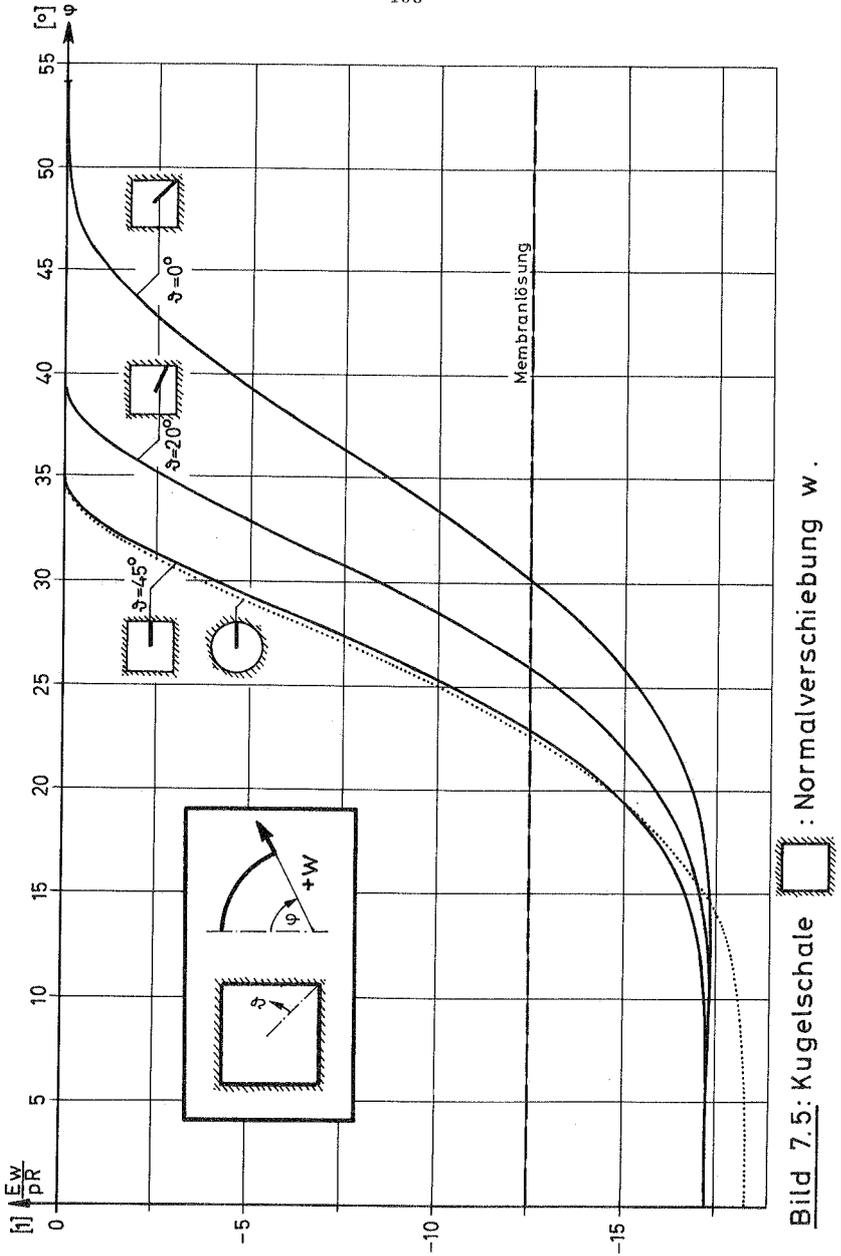


Bild 7.5: Kugelschale : Normalverschiebung w.

7.3 Die Kugelschale über quadratischem Grundriß bei Binderscheibenrandbedingungen

Es soll eine Kugelschale über quadratischem Grundriß untersucht werden, deren Ränder Binderscheibenbedingungen unterworfen sind (Schubkraftstützung)

$$\begin{aligned} N_n &= 0 \\ M_n &= 0 \\ u_t &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$



Dieser Fall wird von Zimmer [49] auf der Grundlage der Theorie flacher Schalen mit Reihenlösungen behandelt. Anhand einer in [49b] untersuchten dünnen Modellschale (GFK) mit dem Verhältnis  $\frac{R}{h} = 530$  (Bild 7.6) sollen die Ergebnisse miteinander verglichen werden. Ein Vergleich mit einer Kugelschale über kreisförmigem Grundriß ist wenig sinnvoll, da hierbei die Lastabtragung ohne Schubkräfte nur über Querkräfte und somit wesentlich ungünstiger erfolgt.

Der Verlauf der Membrankräfte  $N_\varphi$  und  $N_\theta$ , des Biegemomentes  $M_\varphi$  und der Normalverschiebung  $w$  ist für verschiedene Meridianschnitte in Bild 7.7 bis 7.10 aufgetragen und den Ergebnissen von Zimmer (Z) gegenübergestellt. Da bei der Theorie flacher Schalen im Gegensatz zu nicht flachen Schalen bei  $N_n = 0$  am Rand die Bedingung  $u_t = 0$  mit der Forderung verschwindender Randdehnung  $\epsilon_t = 0$  identisch ist, ist der Verlauf der Größen für den Meridian  $\vartheta = 0$  in diesem Fall ( $\epsilon_t = 0$ ) ebenfalls angegeben.

Die größten Randfehler treten bei  $M_n$  auf: im Eckpunkt 8,3 % und außerhalb des Eckbereichs 0,4 %, jeweils bezogen auf den Maximalwert im Schalenbereich.

Der Verlauf der Membrankräfte weicht wegen der ungünstigen Randbedingungen erwartungsgemäß stark von der Membranlösung ab. Da der Eckpunkt im Gegensatz zu den sonstigen Randpunkten unverschieblich ist, nimmt die Meridiankraft  $N_\varphi$  im Eckbereich bis zum dreifachen Wert der

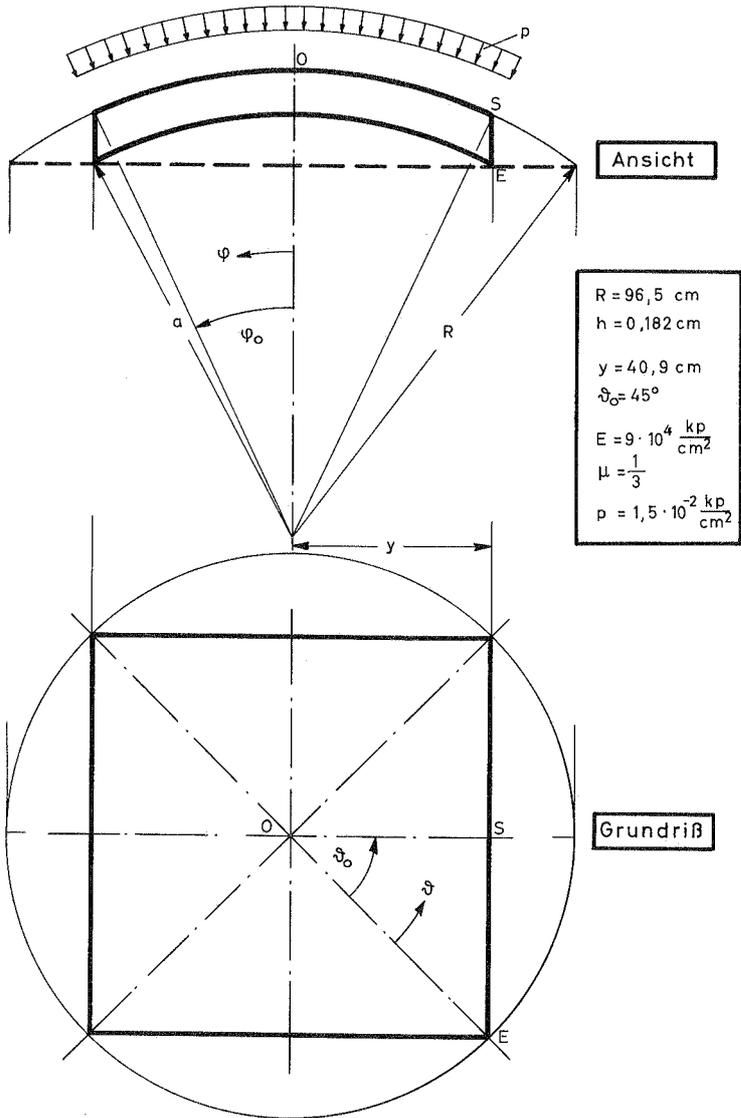


Bild 7.6: Kugelschale über quadratischem Grundriß

Membranlösung ( $-\frac{pR}{2}$ ) zu. Dies bewirkt entsprechend der dritten Gleichgewichtsbedingung, daß der Verlauf der Ringkraft  $N_{\phi}$  in den Zugbereich überschlägt. Die Biegemomente  $M_{\phi}$  haben den typischen Charakter einer Randstörung und klingen verhältnismäßig rasch ab. Die Bilder zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Zimmer [48], wobei der Fall mit  $\epsilon_t = 0$  anstelle verschwindender Tangentialverschiebung  $u_t = 0$  eine bessere Annäherung bringt. Es ist jedoch zu beachten, daß zur Ecke hin der flache Schalenbereich verlassen wird ( $\varphi > 30^\circ$ ) und die Theorie flacher Schalen ihre Gültigkeit verliert.

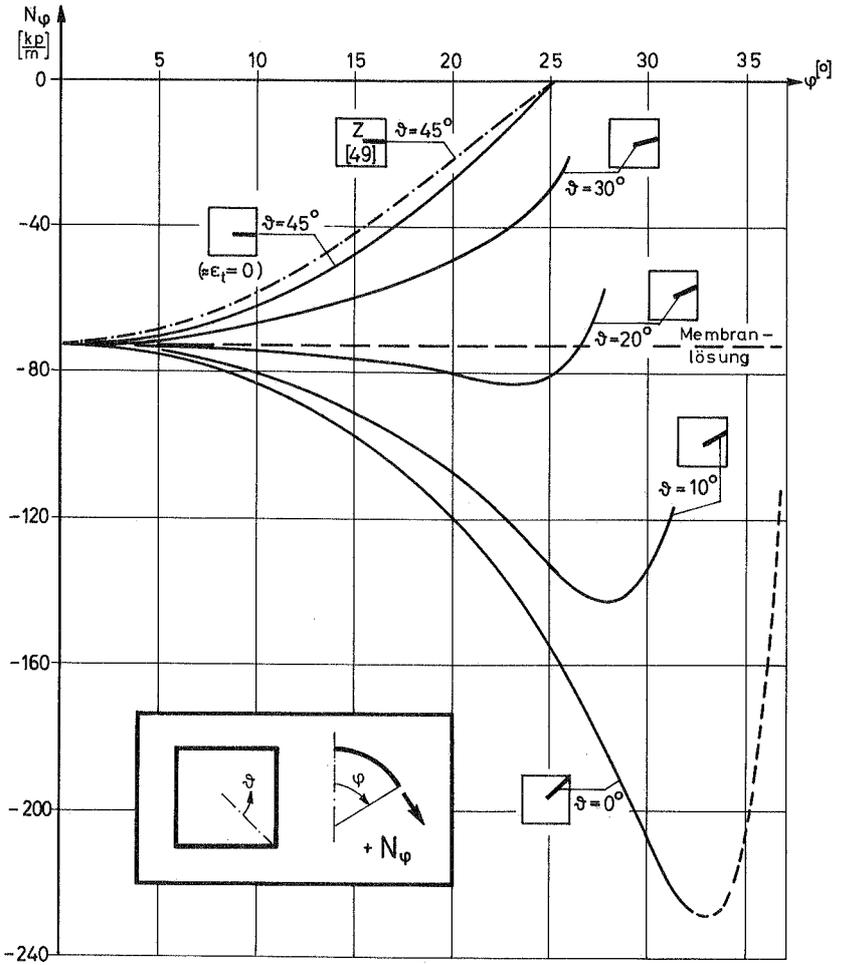


Bild 7.7 : Kugelschale  : Meridiankraft  $N_\varphi$ .

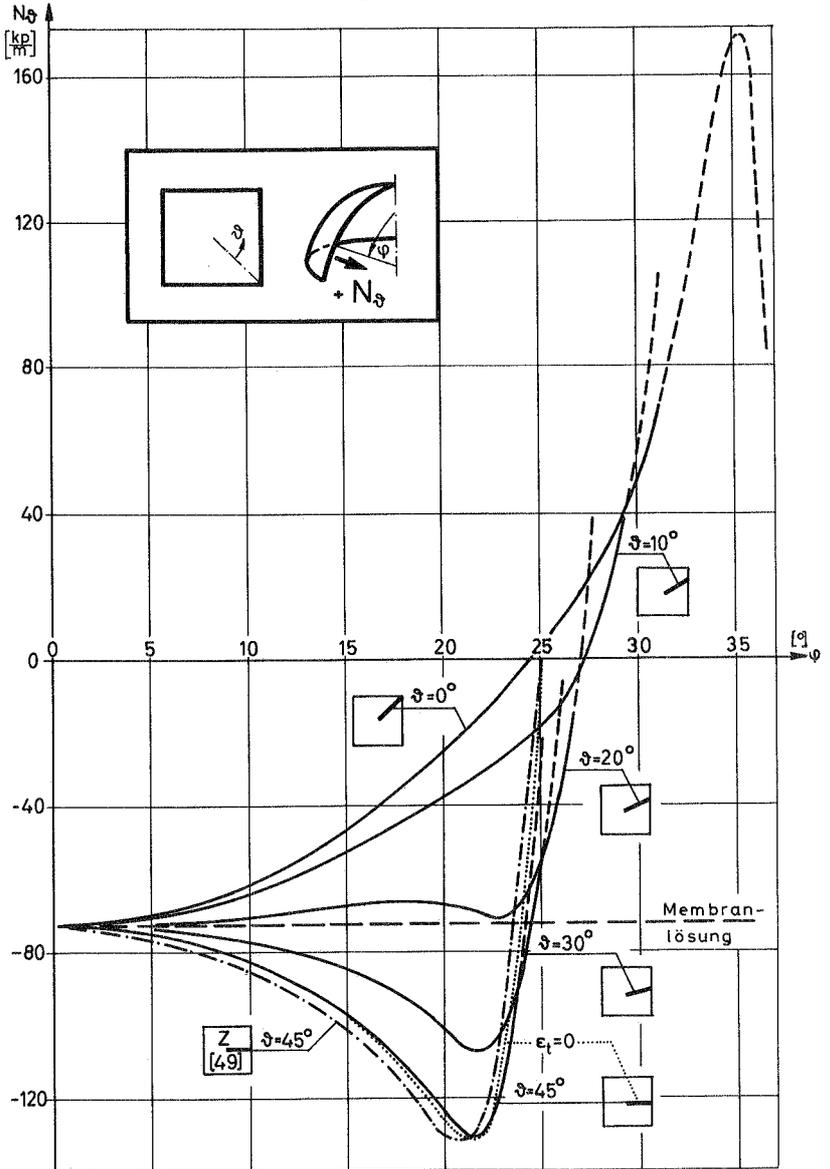
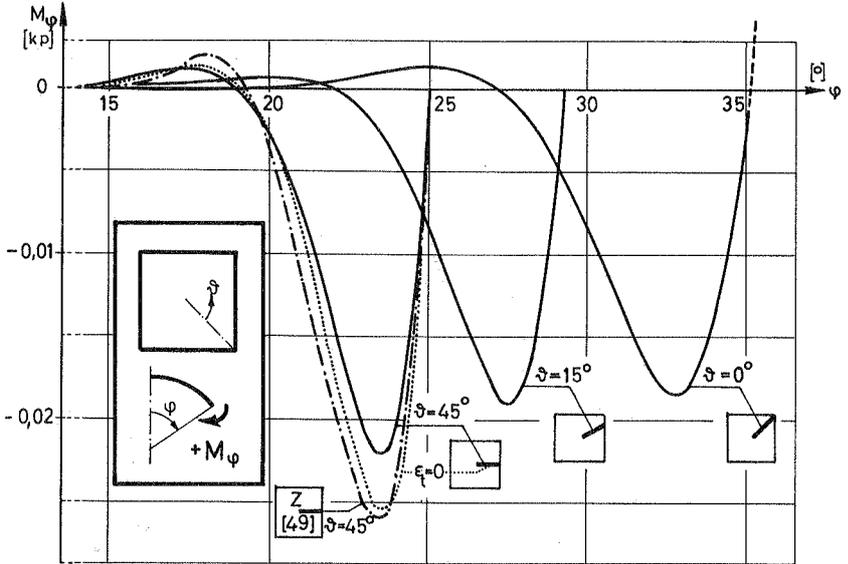
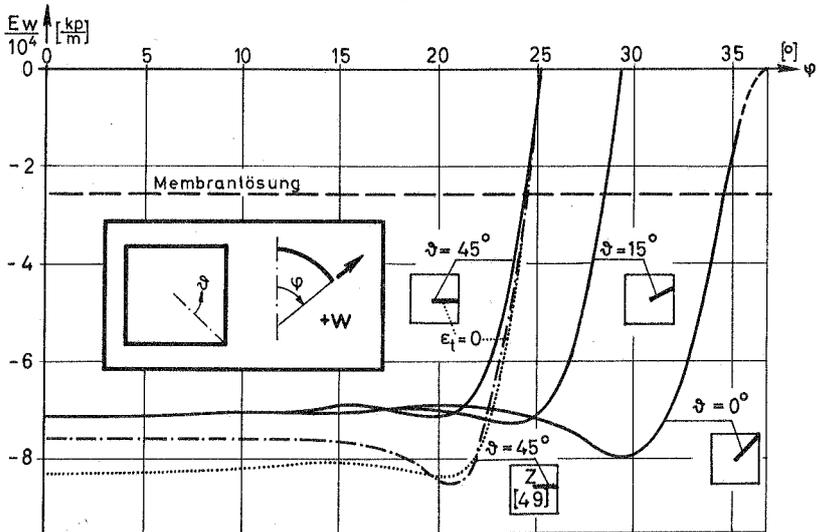


Bild 7.8: Kugelschale  : Ringkraft  $N_\phi$ .



**Bild 7.9:** Kugelschale  $\square$  : Biegemoment  $M_\varphi$ .



**Bild 7.10:** Kugelschale  $\square$  : Normalverschiebung  $w$ .

7.4 Die Kugelschale über dreieckigem Grundriß bei Binderscheibenrandbedingungen

Es soll eine Kugelschale unter Außendruck mit dem Grundriß in Form eines gleichseitigen Dreiecks (Bild 7. 11) untersucht werden, die wie das vorangegangene Beispiel am Rand Binderscheibenbedingungen aufweist.

$$\begin{aligned} N_n &= 0 \\ M_n &= 0 \\ u_t &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$



Es handelt sich um eine dünne, flache Schale mit dem Verhältnis  $\frac{R}{h} = 333$ .

Die Bilder 7. 12 bis 7. 15 zeigen prinzipiell einen ähnlichen Verlauf der Schnitt- und Verschiebungsgrößen wie bei der Schale mit quadratischem Grundriß. Der Eckbereich ist lediglich etwas weiter ausgeprägt.

In Bild 7. 16 ist der Verlauf der Randschubkraft  $N_{nt}$  über dem Randwinkel  $\psi$  aufgetragen. Der Einfluß des Drillmomentes  $M_{nt}$  auf die Ersatzschubkraft (Auflagerkraft)  $\bar{N}_{nt}$  ist verschwindend gering. Zum Eckpunkt hin nimmt die Schubkraft ab, da  $N_{\varphi\vartheta}$  dort gleich Null ist und  $N_{\varphi}$  und  $N_{\vartheta}$  ebenfalls abnehmen.

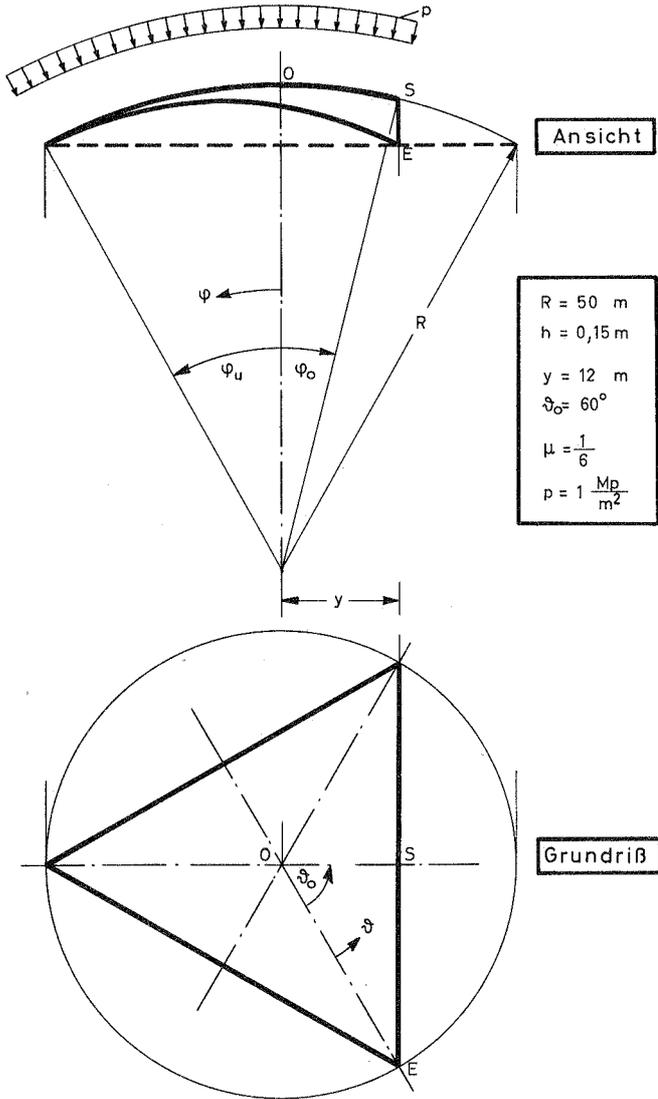


Bild 7.11: Kugelschale über dreieckigem Grundriß.

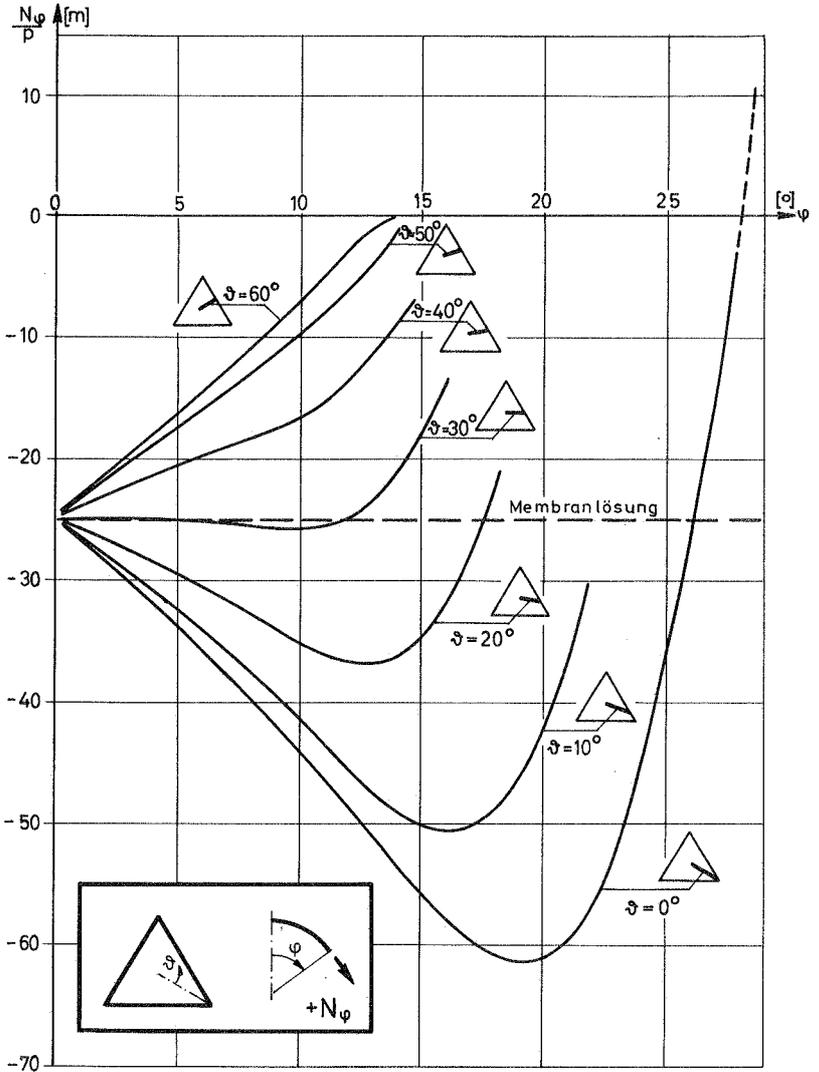


Bild 7.12: Kugelschale  $\triangle$  : Meridiankraft  $N_\varphi$ .

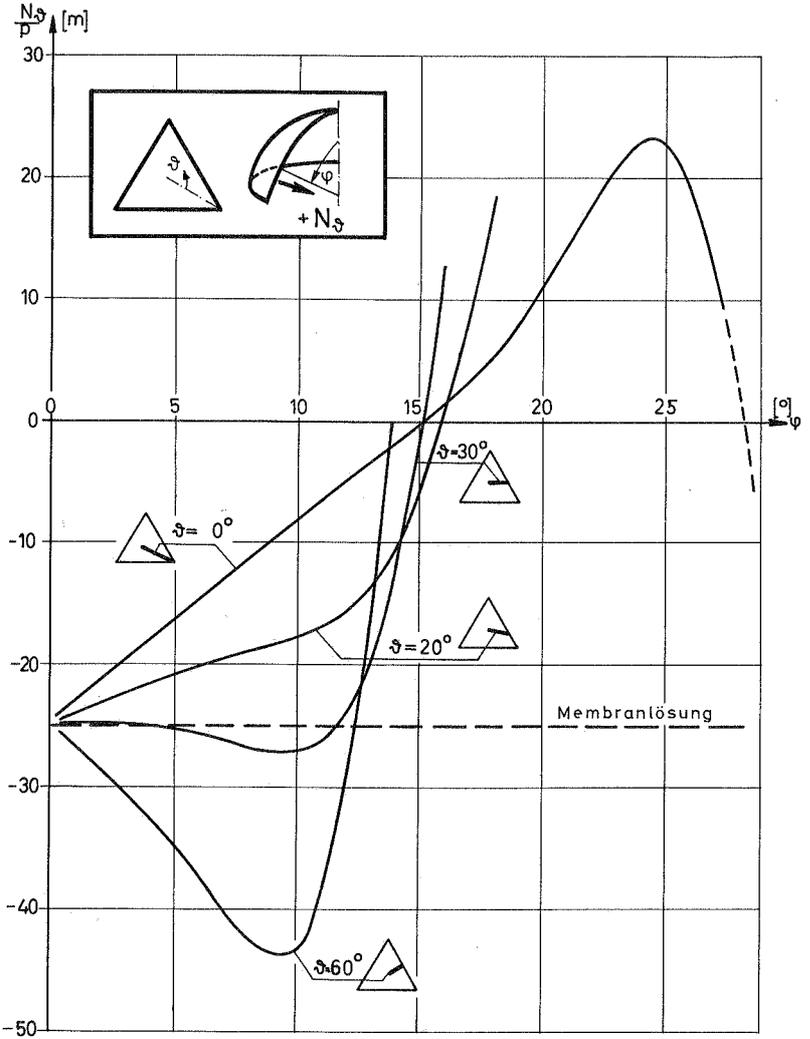


Bild 7.13: Kugelschale  : Ringkraft  $N_\phi$  .

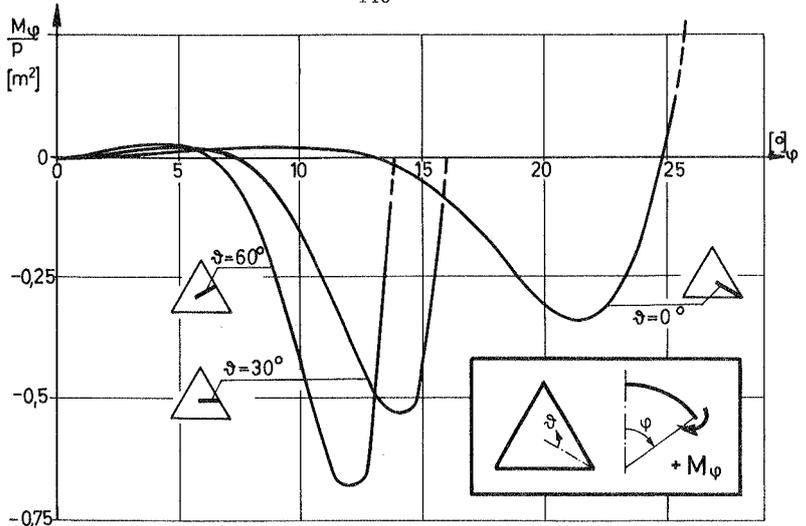


Bild 7.14: Kugelschale  $\triangle$  : Biegemoment  $M_\varphi$ .

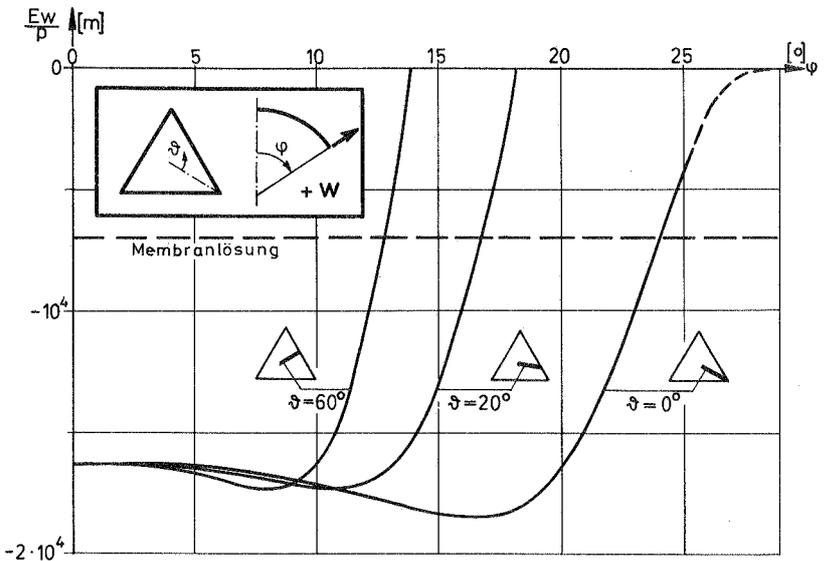


Bild 7.15: Kugelschale  $\triangle$  : Normalverschiebung  $w$ .

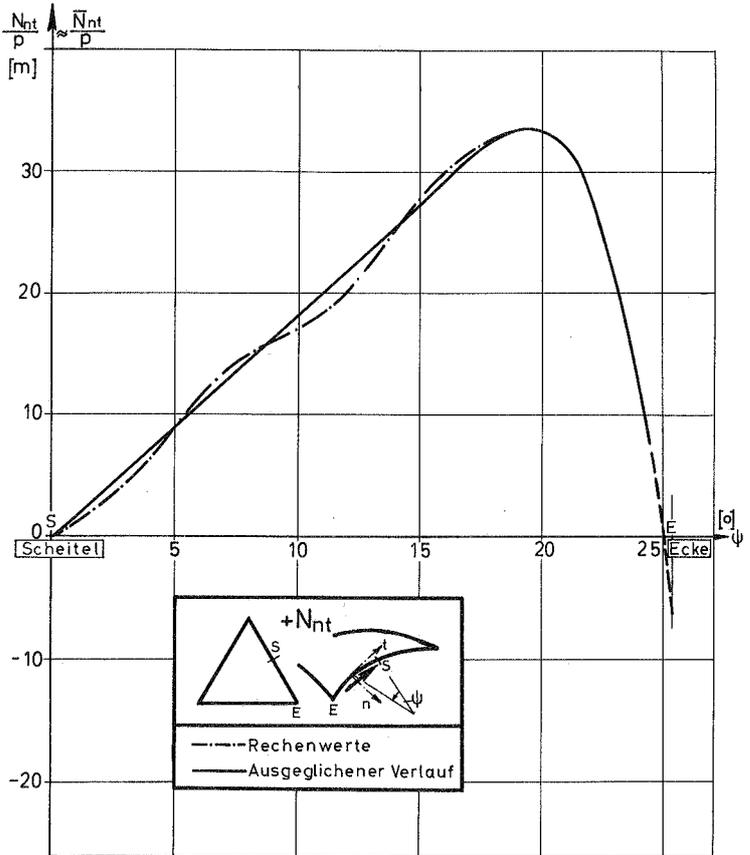


Bild 7.16: Kugelschale  $\triangle$ : Randschubkraft  $N_{nt}$ .

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden dünne Kugelschalen mit konstanter Wanddicke bei nicht rotationssymmetrischer Berandung behandelt. Neben einem Überblick über das vorliegende Schrifttum wird ein praktisches Berechnungsverfahren angegeben. Dabei werden zwei Ziele verfolgt.

### 1. Die exakte Erfüllung der Differentialgleichungen

Auf der Grundlage der klassischen linearen Schalentheorie nach Kirchhoff/Love wird ein Differentialgleichungssystem in einer Spannungsfunktion und der Normalverschiebung aufgestellt. Das System 8. Ordnung wird nach Entkopplung über die übliche Fourierreiheentwicklung aller Größen in Umfangsrichtung in vier gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung aufgespalten. Nach Transformation der homogenen Gleichungen in Legendresche bzw. hypergeometrische Differentialgleichungen werden die exakten Lösungen in Form von zugeordneten Legendre-Funktionen bzw. hypergeometrischen Reihen bestimmt. Für die teilweise langsam konvergierenden Reihenlösungen wird ein ALGOL-Programm erstellt (Anhang 1). Die Lösungen werden entsprechend ihrem physikalischen Gehalt in die homogene Membranlösung, die dehnungslosen Verformungen und die Biegerandstörungen aufgeteilt. Die Abhängigkeit sämtlicher Schnitt- und Verschiebungsgrößen von den Lösungen wird in Matrixschreibweise angegeben.

Daneben werden einige bekannte Näherungen des homogenen Problems abgeleitet (Theorie flacher Schalen, Näherungen nach Geckeler und Aas Jakobsen). Außerdem wird gezeigt, wie eine Partikularlösung bei einem allgemeinen Belastungsfall in Form von Legendreschen Funktionen ermittelt werden kann.

### 2. Die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen mit Hilfe der verbesserten Kollokation

Die Randbedingungen bei Kugelschalen mit nicht rotationssymmetrischem Rand werden punktweise aufgestellt, wobei mehr Bedingungenformuliert werden als unbekannte Freiwerte (Integrationskonstante) mitgeführt werden. Dies bedingt ein überbestimmtes lineares

Gleichungssystem, welches näherungsweise über eine Gauß-Transformation im Sinne des Fehlerquadratminimums gelöst wird (diskretisierte Fehlerquadratminimum-Methode oder verbesserte Kollokation). Abschätzungen für den Fehler können gegeben werden. Hierzu werden noch wesentliche Fragen, z. B. zur Anzahl und Anordnung der Kollokationspunkte, Gewichtung der Gleichungen, Einarbeitung von Nebenbedingungen diskutiert. Anhand von Kugelschalen mit einem Grundriß in Form eines regelmäßigen Vielecks wird die Anwendung des Verfahrens exemplarisch gezeigt.

Für die numerische Rechnung ist ein Programm in ALGOL erstellt worden.

In drei Beispielen einer Kugelschale unter Außendruck (eingespannt über quadratischem Grundriß, mit Binderscheibenbedingungen über quadratischem und dreieckigem Grundriß) wird der Verlauf einiger Schnitt- und Verschiebungsgrößen längs verschiedener Meridiane bestimmt. Die Abweichungen der Randgrößen von den vorgegebenen Sollwerten sind kleiner als 0,5 %, bezogen auf die zugehörigen Maximalwerte im Schalenbereich. Lediglich in den Eckpunkten sind die Ergebnisse unsicher.

Es zeigt sich, daß das Verfahren für die Berechnung von Schalen mit komplizierten Rändern geeignet ist. Auch inhomogene Randbedingungen lassen sich einarbeiten, nur nimmt der Aufwand in diesem Fall beträchtlich zu. Die Methode ist auch bei Scheiben und Platten wiederholt benutzt worden. Eine Anwendung der verbesserten Kollokation als Gebiets- und Randverfahren bei Schalen, deren Differentialgleichungen nicht lösbar sind, ist grundsätzlich möglich; die numerischen Schwierigkeiten werden jedoch nicht gering sein. Es erscheint dann sinnvoller, die Kollokation auf den Rand zu beschränken und für den Bereich eine geeignete Näherungslösung (z. B. ein numerisches Integrationsverfahren) zu benutzen.

Anhang 1

Prozedur HYREI zur Berechnung der hypergeometrischen Reihen

```
'PROCEDURE' HYREI (M, PHI, KK, F3, F4, F3P, F4P, T, NMAX);
'VALUE'M, PHI, KK, NMAX;
'INTEGER'M, NMAX;
'REAL'PHI, KK, F3, F4, F3P, F4P, T;

'BEGIN'
  'INTEGER'I, K;
  'REAL'K1, K2, K3, K4, SN, X;
  'INTEGER''ARRAY'S[1:4];
  'ARRAY'F, DF[1:4];

'COMMENT' VORWERTE;

'FOR'K:=1, 2, 3, 4'DO' S[K]:=1;
PHI:=PHI*3.1415926536/180;
X:=SIN(PHI*0.5);
X:=X*X;

F[1]:=1;
F[2]:=0;
F[3]:=DF[3]:=-1/(M+1);
F[4]:=DF[4]:=-KK*F[3];

'COMMENT' ERZEUGUNG DER REIHEN;

'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NMAX'DO'
'BEGIN'
  K1:=1/(M+I+1);
  K2:=(I*I+I-1)*K1;
  K3:=KK*K1;
  K4:=X/I;

  DF[1]:=DF[3]*K4;
  DF[2]:=DF[4]*K4;
  DF[3]:=DF[1]*K2-DF[2]*K3;
  DF[4]:=DF[1]*K3+DF[2]*K2;

  'FOR'K:=1, 2, 3, 4'DO'
  'BEGIN'
    'IF'S[K]'EQUAL'0'THEN''GOTO'M1;
    F[K]:=F[K]+DF[K];
    'IF'ABS(DF[K]/F[K])'NOT'GREATER' 10-9'THEN'
    'BEGIN'
      'IF'S[K]'EQUAL'2'THEN'S[K]:=0'ELSE'S[K]:=2;
    'END';
  'END'K;
M1:
  'END'K;
```

```

'IF'S[1]+S[2]+S[3]+S[4]'EQUAL'0'THEN''GOTO'M2;
'END'I;
WRITE ('EINE REIHE IST BEI N MAX NOCH NICHT ABGESCHLOSSEN');
M2:
'COMMENT' ENDGUEL TIGE LOESUNGEN;
SN:=SIN(PHI);
T:=(1/(1/X-1))'POWER'(0.5*M);
F3:=T*F[1];
F4:=T*F[2];
F3P:=T*(0.5*SN*F[3]+M*F[1]/SN);
F4P:=T*(0.5*SN*F[4]+M*F[2]/SN);
'END'HYREL;

```

Die formalen Parameter bedeuten:

$M \equiv m$ :	Harmonische $m$
$PHI \equiv \varphi$ :	Meridianwinkel $\varphi$ in Grad
$KK = 2\kappa^2$ :	Doppeltes Quadrat des Schalenparameters $\kappa$
$F3 \equiv f_3^m$	Reihenlösungen $f_3^m$ und $f_4^m$ und ihre Ableitungen $f_3^{m.}$ und $f_4^{m.}$
$F4 \equiv f_4^m$	
$F3P \equiv f_3^{m.}$	
$F4P \equiv f_4^{m.}$	
$T = \tan^{+m} \frac{\varphi}{2}$ :	Faktor der 1. Gesamtlösung
$NMAX$ :	max. Anzahl der Reihenglieder, z. B. $NMAX = 1000$ ;

Bei den Lösungen handelt es sich um alternierende Reihen, wobei jedoch das Vorzeichen nicht nach jedem Reihenglied wechselt. Beim Übergang von einem zum anderen Vorzeichen kann der Zuwachs in die Nähe von Null kommen, ohne daß die Reihe abgeschlossen ist. Wenn die normale Abfrage  $|\text{Zuwachs } dF/\text{Reihenwert } F| < 10^{-9}$  das Ende der Reihe anzeigt, wird deshalb ein weiteres Reihenglied hinzugenommen und erneut abgefragt.

**Anhang 2**

Rekursive Bestimmung der hypergeometrischen Reihenlösungen [j = 3, 4]

Es gilt [67], S. 47:

$$m(1-m)(1-x)F(a, b; m-1; x) + m[m-1-(2m-a-b-1)x]F(a, b; m; x) + (m-a)(m-b)x F(a, b; m+1; x) = 0$$

Mit  $a = \nu+1$ ,  $b = -\nu$ ,  $x = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $F(a, b; 1+m; x) \equiv F^m$  folgt daraus

$$F^m = - \frac{m(m-1)}{(1-\cos\varphi)[m(m-1)-1+2\kappa^2 i]} [2\cos\varphi F^{m-1} - (1+\cos\varphi) F^{m-2}]$$

bzw. nach Trennung von Real- und Imaginärteil:

$$F_{\text{Re}}^m = \frac{m(m-1)}{\{[m(m-1)-1]^2 + 4\kappa^4\}(1-\cos\varphi)} \left\{ +2\kappa^2 \left[ \frac{+ (1+\cos\varphi) F_{\text{Re}}^{m-2} - 2\cos\varphi F_{\text{Re}}^{m-1}}{\text{Im}} \right] + \right. \\ \left. + [m(m-1)-1] \left[ \frac{(1+\cos\varphi) F_{\text{Im}}^{m-2} - 2\cos\varphi F_{\text{Im}}^{m-1}}{\text{Re}} \right] \right\}$$

$$m \geq 2 \quad (\text{A } 1)$$

Weiterhin gilt für die Ableitung [67], S. 41:

$$\frac{d}{dx} F(a, b; 1+m; x) = \frac{m}{x} [F(a, b; m; x) - F(a, b; m+1; x)]$$

oder für  $x = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

$$\frac{d F^m}{dx} = \frac{2m}{1-\cos\varphi} [F^{m-1} - F^m]$$

$$m \geq 1 \quad (\text{A } 2)$$

gültig für  $F_{\text{Re}}^m$  und  $F_{\text{Im}}^m$

Für den Fall  $m = 0$  gilt für die Ableitung [67], S. 42:

$$\frac{d F^0}{dx}(a, b; 1; x) = \frac{(1-a)(1-b)}{1-x} F(a, b; 2; x)$$

d. h. für  $x = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $a = \nu+1$ ,  $b = -\nu$

$$\frac{d F^0}{dx} = \frac{(-1 \pm 2\kappa^2 i) 2}{1+\cos\varphi} F^1$$

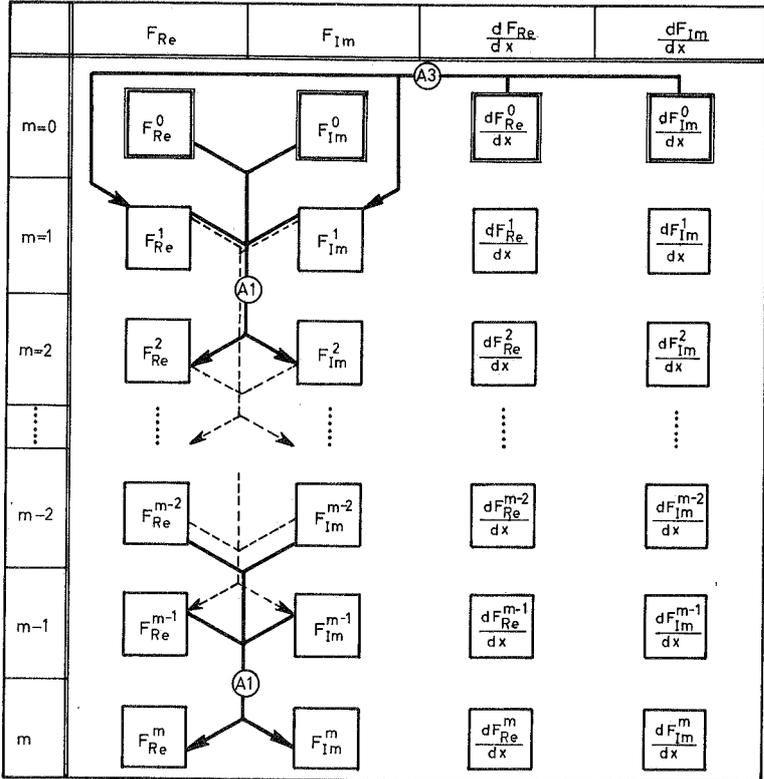
bzw. nach Trennung von Real- und Imaginärteil:

$$\frac{d F_{Re}^0}{dx} = - \frac{2}{1 + \cos \varphi} (F_{Re}^1 + 2 \kappa^2 F_{Im}^1) \quad (A 3.1)$$

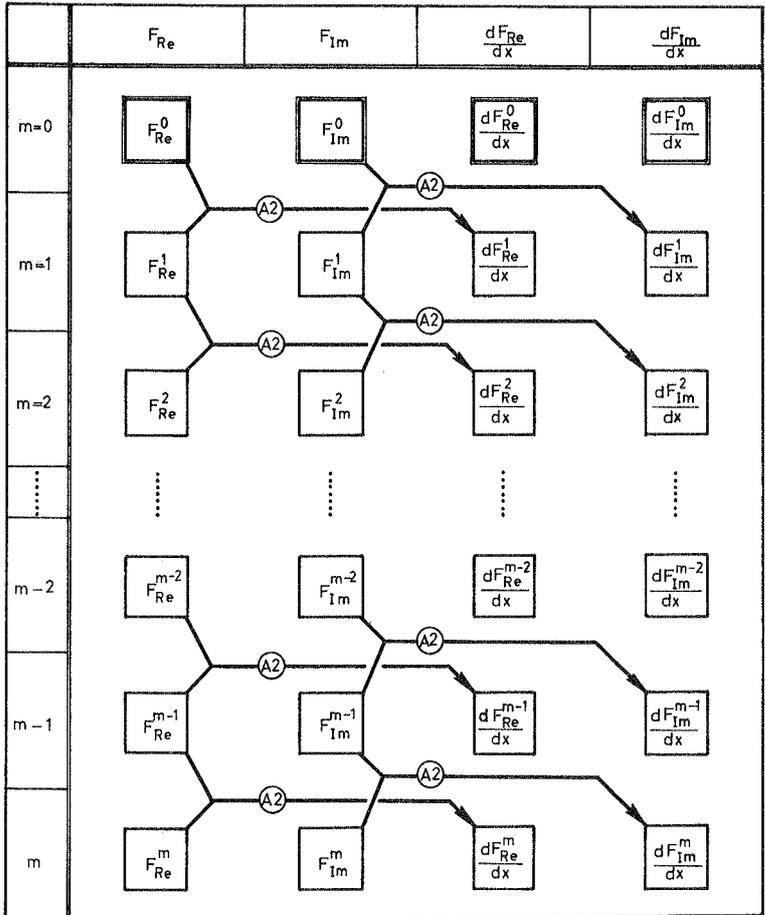
$$\frac{d F_{Im}^0}{dx} = + \frac{2}{1 + \cos \varphi} (2 \kappa^2 F_{Re}^1 - F_{Im}^1) \quad (A 3.2)$$

Liegende Lösungen  $F_{Re}^0$  und  $F_{Im}^0$  und ihre Ableitungen  $\frac{d F_{Re}^0}{dx}$  und  $\frac{d F_{Im}^0}{dx}$  für den (rotationssymmetrischen) Fall  $m = 0$  vor, so lassen sich aus ihnen nacheinander alle Reihen weiterer Harmonischer  $m = 1, 2, 3 \dots$  mit den Formeln (A 1) bis (A 3) bestimmen.

Für die Reihen:



Für die Ableitungen:



Ausgangsreihen

## Lebenslauf

3. 10. 1940 geboren in Osnabrück als Sohn des Reichsbahnrats Wilhelm Ramm und seiner Ehefrau Ilse, geb. Schulte-Ostermann
- 1947 - 1951 Besuch der Volksschulen in Dissen (Teutoburger Wald) und Georgsmarienhütte bei Osnabrück
- 1951 - 1952 Besuch des Realgymnasiums für Jungen in Osnabrück
- 1952 - 1960 Besuch des Gutenberg-Gymnasiums in Wiesbaden - Reifeprüfung: März 1960
- 1960 Sechs Monate Baupraktikum in Wiesbaden
- 1960 - 1963 Fünf Semester Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Darmstadt - Vordiplom: Oktober 1962
- 1963 - 1966 Sechs Semester Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart - Kombination der Vertiefungsrichtungen: Verkehrswesen / Konstruktiver Ingenieurbau - Hauptdiplom: April 1966
- 1966 Wissenschaftlicher Mitarbeiter und
- seit 1967 Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl (Institut) für Baustatik, Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer