

Die Berechnung von Kreis Kegelschalen mit beliebigem
Wanddickenverlauf und beliebiger Belastung mit Hilfe
eines elektronischen Analogrechners

Von der Universität Stuttgart (TH)
zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.)
genehmigte Abhandlung

14.03.2008

Z

vorgelegt von

Dipl. -Ing. Karl Heinz Ringelstein
geboren zu Bendorf/Koblenz



Hauptberichter:	Prof. Dr. -Ing. F.W. Bornscheuer
Mitberichter:	Prof. Dr. -Ing. H. Bufler
Tag der Einreichung:	30.10.1967
Tag der mündlichen Prüfung:	26. 4.1968

1968

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer und Herrn Oberingenieur Dr.-Ing. E. Stein meinen besonderen Dank aussprechen für die hervorragende Betreuung und stete Förderung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Bufler danke ich sehr für die Übernahme des Korreferats und vielfältige Hinweise zur Schalentheorie.

Herrn Dr.-Ing. B. Jäger gilt mein herzlicher Dank für die Anregungen, die mich zur Beschäftigung mit dem behandelten Themenkreis führten.

Außerdem ist es mir eine angenehme Pflicht, der Firma Daimler-Benz A.-G. für ihre wohlwollende Unterstützung zu danken.

K. H. Ringelstein

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Schrifttum	6
Bezeichnungen	9
1. Einleitung	12
2. Herleitung der Ausgangsgleichungen	15
2.1 Die Grundgleichungen der Schalenbiegetheorie in krummlinigen orthogonalen Koordinaten nach Wlassow	15
2.2 Einführung von Ersatzgrößen	19
2.3 Übergang zur Kegelschale	21
2.4 Fourieranatz in Breitenkreisrichtung	23
2.5 Vereinfachte Gleichungen für die schwach gekrümmte dünne Schale	28
2.6 Membrantheorie der Kegelschale	33
3. Lösungsmethode mit Hilfe eines elektronischen Analog- rechners	34
3.1 Einführung dimensionsloser Größen	34
3.2 Umformung der Gleichungssysteme	34
3.3 Normierung der unabhängigen Veränderlichen	40
3.4 Normierung der abhängigen Veränderlichen	41
3.5 Hilfsfunktionen zur Erzeugung variabler Koeffizienten	42
3.6 Rechenschaltungen für den Kegelstumpf konstanter Wandstärke	42
3.7 Rechenschaltung für den Kegel mit linear veränder- licher Wandstärke	51
3.8 Statisches und dynamisches Prüfen	56
3.9 Schaltung für Maximalwertgeber	56

	Seite
4. Das Randwertproblem	57
4.1 Lösung nach dem Überlagerungsverfahren	57
4.2 Iteratives Rechenverfahren (trial-error)	58
4.3 Das zugeordnete Problem	59
4.4 Beseitigung von Stabilitätsschwierigkeiten	61
5. Abschätzung der Rechengenauigkeit	63
5.1 Membrankegelschale	63
5.2 Kreisringscheibe und -platte	66
5.3 Schwach gekrümmter Kegelstumpf unter rotations- symmetrischer Belastung	71
5.4 Analytische Näherungslösungen nach Novozhilov	76
6. Vergleich zwischen den Gleichungen für die schwach gekrümmte Kegelschale und den erweiterten Gleichungen	82
6.1 Einfluß der Belastung am freien Rand	82
6.2 Einfluß der Harmonischen	96
6.3 Einfluß der Querkontraktionszahl	96
6.4 Einfluß der Wandstärke	96
6.5 Einfluß des Öffnungswinkels	101
6.6 Einfluß des Radienverhältnisses	101
7. Vergleich zwischen konstanter und linear veränder- licher Wandstärke	113
8. Zusammenfassung	120

Schrifttum

- [1] Wlassow, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958
- [2] Novozhilov, V. V.: The Theory of Thin Shells. P. Noordhoff Ltd., Groningen 1959
- [3] Nollau, H.: Der Spannungszustand der biegungssteifen Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke unter beliebiger Belastung. ZAMM 24 (1944), S. 10/34
- [4] Seide, P.: A Donnell Type Theory for Asymmetrical Bending and Buckling of Thin Conical Shells. Journal of Appl. Mech. 24 (1957), S. 547/552
- [5] Krüger, U.: Beitrag zur Biegetheorie der Kegelschale mit linear veränderlicher Wanddicke. Dissertation, Stuttgart 1966
- [6] Giloi, W. u. R. Herschel: Rechenanleitung für Analogrechner. Telefunken-Fachbuch, Konstanz 1961
- [7] Giloi, W. u. R. Lauber: Analogrechnen. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963
- [8] Hannauer, G., O. Serlin u. P. J. Holsberg: Automatic Iterative Operation on an Analog Computer. Electronic Associates Inc., Bulletin Number ALAC 6302-2 1963
- [9] Weinell, E.: Über lineare Randwertprobleme und ihre Behandlung auf Analogrechnern. ZAMM 44 (1964), S. T74/T78

- [10] Marguerre, K. u.
R. Uhrig: Berechnung vielgliedriger Schwingerketten, I. Das Übertragungsverfahren und seine Grenzen.
ZAMM (1964), S. 1/21
- [11] Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.
Dover Publications, New York 1944,
4. Auflage
- [12] Girkmann, K.: Flächentragwerke.
Springer-Verlag, Wien 1954, 3. Auflage
- [13] Flügge, W.: Stresses in Shells.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1960
- [14] Gravina, P. B. J.: Theorie und Berechnung der Rotationschalen.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1961
- [15] Magnus, W. u.
F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1948, 2. Auflage
- [16] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1953
- [17] Zrost, H.: Die biegesteife Kegelschale konstanter Wandstärke unter periodischer Belastung. Dissertation Weimar 1963.
Auszugsweise in: Wissenschaftl. Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar 11 (1964),
S. 309/315 und S. 439/449

- [18] Wunderlich, W.: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Dissertation Hannover 1966. Technische Hochschule Hannover, Lehrstuhl für Stahlbau, Schriftenreihe Heft 4
- [19] Kalnins, A.: Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Nonsymmetrical Loads. Journal of Appl. Mech. 31 (1964), S. 467/476
- [20] Robert, A.,
R. Cantrelle u.
M. Venon: Calcul des contraintes dans les enveloppes de révolution soumises à un chargement axisymétrique. Programmation sur ordinateur digital. Extrait du Mémorial de l' Artillerie française (1966), 3^e fasc. p. 653/766, 4^e fasc. p. 929/1004

Bezeichnungen

Schalentheorie

α, β	krummlinige orthogonale Koordinaten der Schalenmittelfläche
γ	Koordinate in Richtung der Normalen auf die Mittelfläche
A, B	Koeffizienten der ersten Grundform der Mittelfläche
H_1, H_2	Lamésche Koeffizienten
k_1, k_2	Hauptkrümmungen der Mittelfläche
$K = k_1 \cdot k_2$	Gaußsches Krümmungsmaß
N_1, N_2	Normalkräfte
S_1, S_2, S	Schubkräfte
S_1^*, S_2^*	Ersatzschubkräfte
Q_1, Q_2	Querkräfte
Q_1^*, Q_2^*	Ersatzquerkräfte
M_1, M_2	Biegemomente
M_{12}, M_{21}, M	Torsionsmomente
$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2}$	halbe Summe der Torsionsmomente
X, Y, Z	Komponenten der äußeren Flächenbelastung
ϵ_1, ϵ_2	Dehnungen der Mittelfläche
ω	Winkeländerung (Gleitung) der Mittelfläche
κ_1, κ_2	Hauptkrümmungsänderungen der Mittelfläche
τ	Verwindung (Torsion) der Mittelfläche
u, v, w	Komponenten des Verschiebungsvektors der Mittelfläche
θ	Tangentenneigung in Richtung der α -Koordinate
ψ	Tangentenneigung in Richtung der β -Koordinate
h	Schalendicke
E	Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl
n	Harmonische der Fourierreihenentwicklung

Kegelschale

- r, φ Polarkoordinaten, von der Mittellinie des Rotationskegels ausgehend
- ϑ halber Öffnungswinkel an der Spitze
- ds Linienelement der Kegelfläche
- $R_2 = \frac{r}{\cos \vartheta}$ Hauptkrümmungsradius
- $\rho = r/r_a$ dimensionslose Koordinate
- $\rho_i = r_i/r_a$ Radienverhältnis des Kegelstumpfes
- $\delta = h/r_a$ dimensionslose Wandstärke
- $h' = h/r$ Maß für den Öffnungswinkel zwischen den beiden Schalenlaibungen eines Kegels mit linear veränderlicher Wanddicke
- Indizes: i Innenrand = kleinster Breitenkreisradius des Kegelstumpfes
 a Außenrand = größter Breitenkreisradius des Kegelstumpfes
 m arithmetischer Mittelwert zwischen i und a

Analogrechentechnik

- t^* Maschinenzeit des Analogrechners
- R Rechenvariable $\hat{=}$ Problemvariable
- k Zeitkonstante
- λ dimensionsloser Faktor
- \bar{X} normierte Größe (Amplitudennormierung)
- F_1, F_2 Hilfsfunktionen für variable Koeffizienten
- V Verstärkungsfaktor
- r, h, h^*, R, H Relaiskontakte
- Index S Scheitelwert einer Funktion
- $1(1)t$ Zahlenfolge von 1 bis t mit der Schrittweite 1

Weitere Bezeichnungen und Abkürzungen sind im Text erläutert.

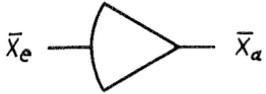
Symbole der Analogrechentchnik



Potentiometer

$$\bar{x}_a = \alpha \cdot \bar{x}_e$$

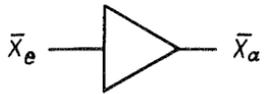
$$0 \leq \alpha \leq 1$$



offener Verstärker

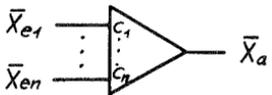
$$\bar{x}_a = -V \cdot \bar{x}_e$$

$$V \gg 1$$



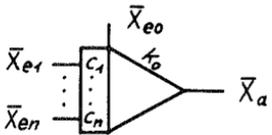
Vorzeichenumkehrer

$$\bar{x}_a = -\bar{x}_e$$



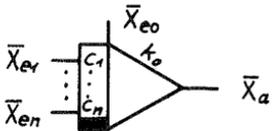
Summierer

$$\bar{x}_a = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot \bar{x}_{ei}$$

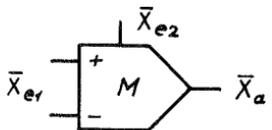


Integrierer

$$\bar{x}_a = -k_o \int_0^{t^*} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \bar{x}_{ei} \cdot dt - \bar{x}_{eo}$$

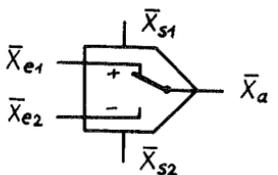


Speicher



Multiplizierer
(time-division)

$$\bar{x}_a = \bar{x}_{e1} \cdot \bar{x}_{e2}$$



Komparator

$$\bar{x}_a = \bar{x}_{e1} \text{ für } \bar{x}_{s1} + \bar{x}_{s2} > 0$$

$$\bar{x}_a = \bar{x}_{e2} \text{ für } \bar{x}_{s1} + \bar{x}_{s2} < 0$$

1. Einleitung

Die Aufgabe, den Spannungs- und Verformungszustand einer Schale zu berechnen, besteht bekanntlich aus zwei Teilen. Zunächst muß das Verhalten des wirklichen Körpers unter gegebenen Belastungen mathematisch erfaßt werden. Hierzu ist es notwendig, eine Reihe von vereinfachenden Annahmen zu treffen. Als zweiter Teil schließt sich dann die Lösung der Gleichungen an, die den idealisierten Körper beschreiben. Die vorliegende Arbeit befaßt sich vorwiegend mit der zweiten Hälfte des Problems.

Die Ausgangsgleichungen für spezielle Schalen lassen sich aus den allgemeinen Theorien gewinnen, die für beliebige Formen und Koordinaten vorliegen. So wird das Gleichungssystem zur Berechnung einer Rotationskegelschale unter statischer Last aus den von Wlassow [1] angegebenen Grundgleichungen der linearen Schalenbiegetheorie rein formal hergeleitet. Die zweidimensionalen partiellen Diff.-gln. kann man durch einen trigonometrischen Ansatz für die Breitenkreiskoordinate (Fourierreihenentwicklung) in gewöhnliche umwandeln. Es entsteht ein System aus algebraischen Gleichungen und acht Diff.- gln. erster Ordnung mit variablen Koeffizienten.

Geschlossene analytische Lösungen mit bekannten Funktionen sind nur für einige Sonderfälle möglich. So führt bei einer beliebig belasteten konischen Schale, deren Wanddicke dem Abstand von der Spitze proportional ist, ein Potenzansatz zum Ziel, [3], [5]. Für den Kegel konstanter Wandstärke unter rotationssymmetrischen Lasten lassen sich die Ausgangsgleichungen mit zusätzlichen Vereinfachungen (schwache Krümmung, Gleichgewichtsgruppen) in eine Besselsche Diff.- gl. umwandeln, [13], [14]. Bei unsymmetrischer Belastung muß man auf Näherungslösungen zurückgreifen, wie sie beispielsweise Novozhilov [2] für dünnwandige Rotationsschalen angibt. Auf Grund von Größenordnungsbetrachtungen werden in den Gleichungen einzelne Glieder vernachlässigt. Mit diesen Annahmen, deren Auswirkungen auf das Ergebnis oft nur schwer abzuschätzen sind, gelingt die Reduktion auf eine einzige Diff.- gl. zweiter Ordnung und deren asymptotische Integration.

Durch die Anwendung digitaler Rechenautomaten haben Verfahren der numerischen Integration an Bedeutung gewonnen. Hierbei geht man zweckmäßigerweise von den ursprünglichen Diff.-gln. erster Ordnung aus. In [20] wird die Methode nach Runge-Kutta benutzt, während Kalnins [19] ein Differenzenschemaverfahren nach Adams vorschlägt, das für jeden Schritt eine optimale Schrittweite wählt, entsprechend der vorgeschriebenen Genauigkeit.

Weiterhin sind in letzter Zeit eine Reihe von theoretischen Arbeiten bekannt geworden, in denen die gesuchten Größen mit Hilfe von Reihenansätzen bestimmt werden. So leitet Zrost [17] über eine Potenzreihenentwicklung eine Lösung für die schwach gekrümmte Kegelschale her. Wunderlich [18] gibt eine Methode zur Integration des Differentialsystems allgemeiner Rotationschalen unter Anwendung des Infinitesimalkalküls der Matrizen an. Die numerische Berechnung erfolgt über gleichmäßig konvergierende unendliche Matrizenreihen und -produkte.

Eine prinzipiell andere Möglichkeit, Diff.-gln. zu lösen, besteht in der direkten Integration auf einem Analogrechner. Das mathematische Modell für ein vorliegendes Problem wird durch ein physikalisches ersetzt, in dem sich die Variablen nach den gleichen Gesetzen ändern. Beim elektronischen Analogrechner besteht das physikalische Modell aus einem elektrischen Netzwerk; die Variablen werden durch Spannungen dargestellt. Veränderliche Koeffizienten und Nichtlinearitäten in den Diff.-gln. lassen sich ohne weiteres einführen. Die Ergebnisse erhält man in Form von Funktionsverläufen.

Ziel der Arbeit ist es, an Hand konkreter Beispiele zu untersuchen, inwieweit sich Probleme der vorliegenden Art auf einem Analogrechner behandeln lassen und eine geeignete Lösungsmethode zu entwickeln. Hierzu gehört insbesondere die Abschätzung der Rechengenauigkeit, die durch eine Anzahl von Vergleichsrechnungen erfolgt. Weiterhin werden die Unterschiede festgestellt, die sich bei Verwendung der vereinfachten Gleichungen für die schwach gekrümmte Kegelschale gegenüber den erweiterten Gleichungen ergeben. Der Einfluß verschiedener Schalenparameter

wird untersucht. Es schließt sich ein Vergleich zwischen konischen Schalen konstanter und linear veränderlicher Wandstärke an. Zur Berechnung von Kegelstümpfen mit konstanter Wanddicke benutzt man oft Ersatzschalen mit linear veränderlichem Wanddickenverlauf, da hierfür die exakte analytische Lösung bekannt ist. Es wird festgestellt, welche Annahmen für den Ersatzkegel zweckmäßigerweise zu treffen sind.

Ein Vorteil der Integration auf dem Analogrechner besteht darin, daß während des Rechenablaufs alle Schnittkräfte, Verzerrungen und Verschiebungen explizit zur Verfügung stehen, da man keine Größen zu eliminieren braucht. Außerdem entfällt die Notwendigkeit, in den Ausgangsgleichungen einzelne Glieder nur auf Grund des Lösungsverfahrens zu vernachlässigen. Änderungen der Schalenparameter sind leicht möglich und ihre Auswirkungen sofort sichtbar. Dies ist besonders für ingenieurmäßige Betrachtungen vorteilhaft.

2. Herleitung der Ausgangsgleichungen

2.1 Die Grundgleichungen der Schalenbiegetheorie in krummlinigen orthogonalen Koordinaten nach Wlassow

Als Ausgangspunkt der Untersuchungen wird das in [1, S. 169 ff] abgeleitete Differentialgleichungssystem einer elastischen Schale benutzt, Gln. (2.1.1/20). Die statischen Gleichgewichtsbedingungen (2.1.1/3) verbinden die Schalenschnittgrößen mit der äußeren Flächenbelastung. Sie stellen das Kräftegleichgewicht in drei zueinander senkrechten Richtungen dar. Die Gln. (2.1.4/6) erhält man aus dem Momentengleichgewicht um zwei orthogonale Tangenten an die Schalenmittelfläche und um die Schalennormale.

Die Komponenten der äußeren Flächenbelastung sind auf die Flächeneinheit, Kräfte und Momente auf die Längeneinheit der Koordinatenlinien bezogen. Die Definition der Größen in positiver Richtung ist aus den Bildern 2.1.1/3 ersichtlich. Die Elastizitätsgleichungen (2.1.7/14) verbinden die Schnittgrößen mit den Deformationsgrößen der Schalenmittelfläche. Mit ihnen ist Gl. (2.1.6) identisch erfüllt.

In (2.1.8) und (2.1.12) unterscheiden sich die Ausdrücke für die Schubkräfte durch die unterstrichenen Glieder von den Gleichungen, die Wlassow angegeben hat. Die Schubkräfte werden aus den Schubspannungen in der Schale nach folgendem Rechnungsgang erhalten: In die Definitionsgleichungen

$$S_1 = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} H_2 \cdot \tau_{\beta\alpha} \cdot d\vartheta, \quad S_2 = \frac{1}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} H_1 \cdot \tau_{\alpha\beta} \cdot d\vartheta$$

setzt man die Laméschen Koeffizienten

$$H_1 = A(1+k_1 \cdot \vartheta), \quad H_2 = B(1+k_2 \cdot \vartheta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B N_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial}{\partial \beta}(A S_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_1 + A B k_1 Q_1 + A B X = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(A N_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(B S_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_2 + A B k_2 Q_2 + A B Y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B Q_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A Q_2) - A B (k_1 N_1 + k_2 N_2) + A B Z = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B M_{21}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{21} - \frac{\partial}{\partial \beta}(A M_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - A B Q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(A M_{21}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \alpha}(B M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - A B Q_1 = 0,$$

$$S_1 - S_2 + k_1 M_{12} - k_2 M_{21} = 0 ;$$

$$N_1 = \frac{E h}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \alpha_1 \right],$$

$$S_1 = \frac{E h}{2(1+\nu)} \left[\omega - \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \tau + \frac{h^2}{12} \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} \omega \right],$$

$$M_1 = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} [\alpha_1 + \nu \alpha_2 + k_2 (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)],$$

$$M_{12} = \frac{E h^3}{24(1+\nu)} (2\tau + k_2 \omega),$$

$$N_2 = \frac{E h}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 + \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \alpha_2 \right],$$

$$S_2 = \frac{E h}{2(1+\nu)} \left[\omega + \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \tau + \frac{h^2}{12} \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} \omega \right],$$

$$M_2 = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} [\alpha_2 + \nu \alpha_1 + k_1 (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)],$$

$$M_{21} = \frac{E h^3}{24(1+\nu)} (2\tau + k_1 \omega);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w,$$

$$\omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_2^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$\tau = \frac{(k_1 - k_2)}{2} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \right] - \frac{1}{A B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right).$$

(2.1.1/6)

(2.1.7/44)

(2.1.15/20)

und, unter Benutzung des Hookeschen Gesetzes, die Schubspannungen

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{\alpha\beta}$$

ein. Der Ausdruck für die Deformationsgröße

$$e_{\alpha\beta} = \omega + 2\tau \gamma + \left[(k_1 - k_2)^2 \frac{\omega}{2} - (k_1 + k_2) \tau \right] \gamma^2$$

ist eine Potenzreihenentwicklung in γ , die nach dem 3. Glied abgebrochen wurde. Die Integration über die Schalendicke liefert die Gln. (2.1.8) und (2.1.12). Die beiden mit τ und ω behafteten Ausdrücke enthalten Glieder gleicher Größenordnung. Dies läßt sich durch Einsetzen der geometrischen Beziehungen (2.1.17) und (2.1.20) in (2.1.8) bzw. (2.1.12) nachweisen.

Die geometrischen Gln. (2.1.15/20) stellen eine Beziehung zwischen den Deformationsgrößen und den Verschiebungen der Schalenmittelfläche her. Sie werden unter Zugrundelegung der Hypothese erhalten, daß ein zur Mittelfläche normales geradliniges Element auch nach der Deformation geradlinig und normal zur deformierten Mittelfläche bleibt und seine Länge nicht ändert (Normalenhypothese).

Für die weitere Rechnung werden noch die Gleichungen von Codazzi-Gauß benötigt, die die Flächengeometrie der Schale beschreiben. Sie verbinden die Hauptkrümmungen mit den Koeffizienten der ersten Grundform:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot k_1) = k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot k_2) = k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -k_1 \cdot k_2 \cdot A \cdot B.$$

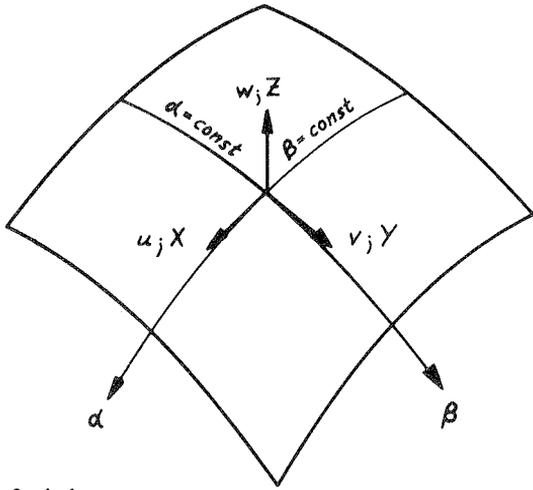


Bild 2.1.1

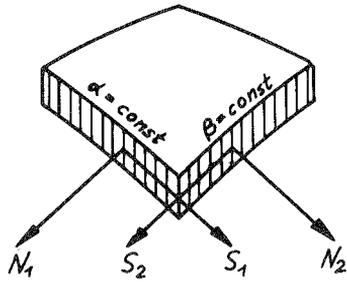


Bild 2.1.2

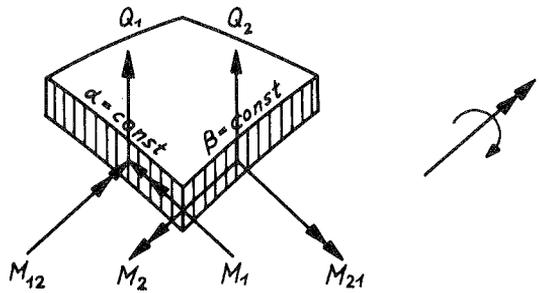


Bild 2.1.3

2.2 Einführung von Ersatzgrößen

Zur praktischen Berechnung einer Schale muß man zu den Differentialgleichungen spezielle Randbedingungen vorschreiben. Es wird vorausgesetzt, daß die Schalenränder mit Hauptkrümmungslinien der Mittelfläche zusammenfallen. Infolge der Normalenhypothese können an jedem Rand nur vier Bedingungen vorgegeben werden. Deshalb müssen die Schnittgrößen S_1 , S_2 , Q_1 , Q_2 , M_{12} und M_{21} zu statisch gleichwertigen Ersatzkräften zusammengefaßt werden, [2, §11]:

$$\begin{aligned} S_1^* &= S_1 + k_2 \cdot M_{12} , & S_2^* &= S_2 + k_1 \cdot M_{21} ; \\ Q_1^* &= Q_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} , & Q_2^* &= Q_2 + \frac{1}{H} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} . \end{aligned}$$

Für jede virtuelle Verformung stimmt die Arbeit der Ersatzkräfte mit der Arbeit der wirklichen Randkräfte überein. Beim Übergang zur Platte erhält man die Kirchhoffschen Ersatzquerkräfte.

Als eine weitere Auswirkung der Normalenhypothese ergibt sich, daß nur die Summe der Torsionsmomente bestimmbar ist:

$$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2} .$$

Für die spätere Rechnung werden noch die Ausdrücke für die Tangentenneigungen gebraucht.

Nach [2, S. 18] erhält man für die Tangentenneigung in Richtung der α -Koordinate

$$\Theta = - \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 \cdot u$$

und für diejenige in Richtung der β -Koordinate

$$\psi = - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 \cdot v .$$

Die Einführung der Ersatzgrößen in die Grundgleichungen liefert unter Berücksichtigung der Bedingungen von Codazzi die Gln. (2.2.1/19).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} (A S_2^*) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_1^* + A B k_1 Q_1^* - 2 \frac{\partial}{\partial \beta} (A k_1 H) + A B X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B S_1^*) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_2^* + A B k_2 Q_2^* - 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B k_2 H) + A B Y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B Q_1^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A Q_2^*) - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} - A B (k_1 N_1 + k_2 N_2) + A B Z &= 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B H) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - A B Q_2^* &= 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \beta} (A H) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - A B Q_1^* &= 0, \end{aligned} \right\} (2.2.1/6)$$

$$S_1^* - S_2^* + 2 (k_1 - k_2) H = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{E h}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \varkappa_1 \right], \\ S_1^* &= \frac{E h}{2(1 + \nu)} \left\{ \omega + \frac{h^2}{12} \left[\frac{(k_1 - k_2)^2}{2} + k_2^2 \right] \omega - \frac{h^2}{12} (k_1 - 3k_2) \tau \right\}, \\ M_1 &= -\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left[\varkappa_1 + \nu \varkappa_2 + k_2 (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \right], \\ H &= \frac{E h^3}{24(1 + \nu)} \left(2 \tau + \frac{k_1 + k_2}{2} \omega \right), \\ N_2 &= \frac{E h}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 + \frac{h^2}{12} (k_1 - k_2) \varkappa_2 \right], \\ S_2^* &= \frac{E h}{2(1 + \nu)} \left\{ \omega + \frac{h^2}{12} \left[\frac{(k_1 - k_2)^2}{2} + k_1^2 \right] \omega + \frac{h^2}{12} (3k_1 - k_2) \tau \right\}, \\ M_2 &= -\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left[\varkappa_2 + \nu \varkappa_1 + k_1 (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \right]; \end{aligned} \right\} (2.2.7/13)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \varkappa_1 &= \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \varkappa_2 &= \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_2^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \tau &= \frac{(k_1 - k_2)}{2} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \right] - \frac{1}{A B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} (2.2.14/19)$$

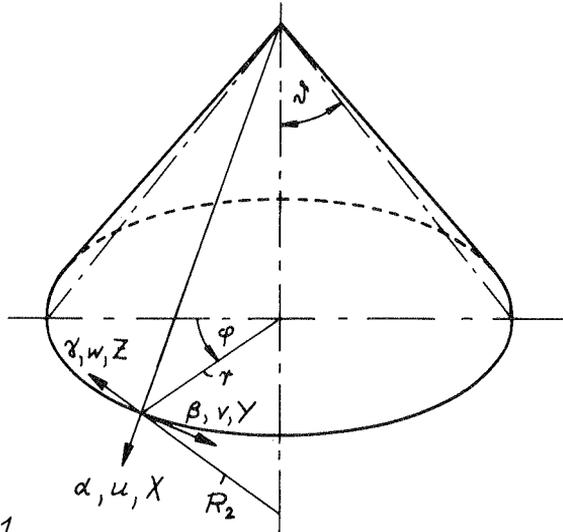


Bild 2.3.1

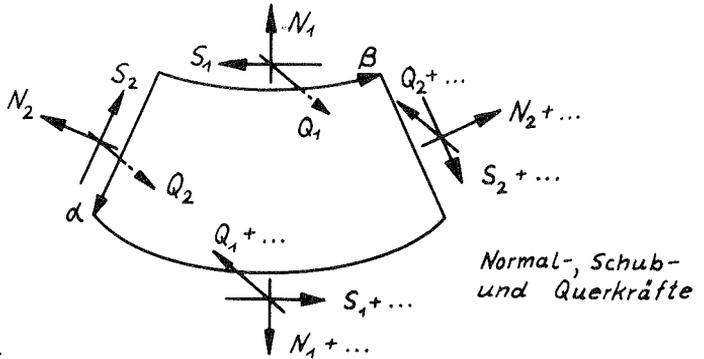


Bild 2.3.2

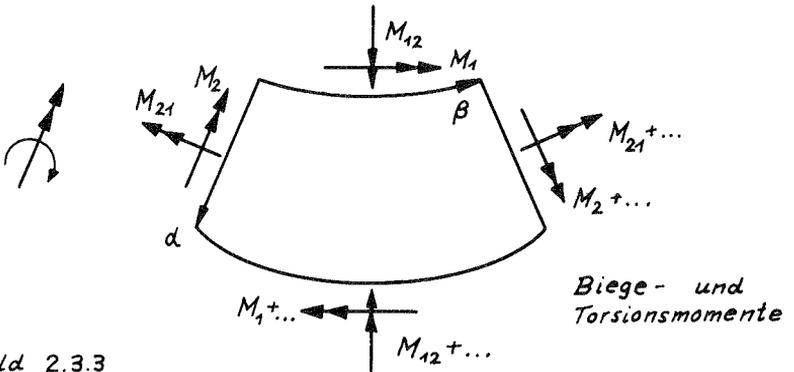


Bild 2.3.3

Die Krümmungen sind:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \vartheta}{r}.$$

Da die Mittelfläche der konischen Schale abwickelbar ist, wird das Gaußsche Krümmungsmaß $K = k_1 \cdot k_2 = 0$.

Die Ersatzgrößen nehmen folgende Form an:

$$S_1^* = S_1 + \frac{\cos \vartheta}{r} M_{12},$$

$$S_2^* = S_2;$$

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi},$$

$$Q_2^* = Q_2 + \sin \vartheta \frac{\partial M_{21}}{\partial r};$$

$$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2};$$

$$\theta = -\sin \vartheta \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\cos \vartheta}{r} v.$$

Das Differentialgleichungssystem geht über in die Gln. (2.3.1/17), die den in [3] angegebenen Gleichungen für die Kegelschale konstanter Wandstärke entsprechen.

2.4 Fourieransatz in Breitenkreisrichtung

Für Rotationsschalen, die durch einen oder zwei Breitenkreise begrenzt und bezüglich der Koordinate φ geschlossen sind, werden sämtliche Belastungen und folglich auch alle Schnittreaktionen und Deformationsgrößen periodische Funktionen von φ sein. Deshalb lassen sich die partiellen Differentialgleichungen durch einen Fourieransatz in gewöhnliche umwandeln. Die Gesamtlösung ergibt sich aus der Überlagerung der einzelnen Harmonischen. Die Reihenentwicklung kann man in zweifacher Form darstellen. Sie hängt davon ab, ob die Belastung symmetrisch oder antisymmetrisch zum Nullmeridian ist, Tabelle 2.4.1.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot N_1) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial S_2^*}{\partial \varphi} - N_2 + \frac{r}{\sin \nu} X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot S_1^*) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \nu}{r} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + S_1^* + \frac{r}{\sin \nu} Y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot Q_1^*) - \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \nu \cdot N_2 + \frac{r}{\sin \nu} Z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot M_1) - \frac{2}{\sin \nu} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - M_2 + \frac{r}{\sin \nu} Q_1^* &= 0; \end{aligned} \right\} (2.3.1/4)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} (E_1 + \nu E_2 + \frac{h^2 \cos \nu}{12 r} \varkappa_1), \\ S_1^* &= \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left[\left(1 + \frac{h^2 \cos^2 \nu}{8 r^2} \right) \omega + \frac{h^2 \cos \nu}{4 r} \tau \right], \\ M_1 &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varkappa_1 + \nu \varkappa_2 + \frac{\cos \nu}{r} (E_1 + \nu E_2) \right], \\ H &= \frac{E \cdot h^3}{24(1+\nu)} \left(2 \cdot \tau + \frac{\cos \nu}{r} \frac{\omega}{2} \right), \\ N_2 &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} (E_2 + \nu E_1 - \frac{h^2 \cos \nu}{12 r} \varkappa_2), \\ S_2^* &= S_1^* - 2 \frac{\cos \nu}{r} H, \\ M_2 &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_2 + \nu \varkappa_1); \end{aligned} \right\} (2.3.5/11)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sin \nu \frac{\partial u}{\partial r}, \\ E_2 &= \frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w, \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \\ \varkappa_1 &= -\sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ \varkappa_2 &= -\frac{\sin \nu \cos \nu}{r^2} u - \frac{\cos^2 \nu}{r^2} w - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \tau &= -\frac{\cos \nu}{2 \cdot r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \sin \nu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right] - \sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right). \end{aligned} \right\} (2.3.12/17)$$

a) Zum Nullmeridian symmetrische Belastung:

symmetr. Größen

antimetr. Größen

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ Q_1^* \\ u \\ w \\ \Theta \\ X \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} N_{1n} \\ N_{2n} \\ M_{1n} \\ M_{2n} \\ Q_{1n}^* \\ u_n \\ w_n \\ \Theta_n \\ X_n \\ Z_n \\ E_{1n} \\ E_{2n} \\ \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{Bmatrix} \cos \cdot n \cdot \varphi,$$

$$\begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ H \\ Q_2^* \\ v \\ \psi \\ Y \\ \tau \\ \omega \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} S_{1n}^* \\ S_{2n}^* \\ H_n \\ Q_{2n}^* \\ v_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ \tau_n \\ \omega_n \end{Bmatrix} \sin \cdot n \cdot \varphi.$$

b) Zum Nullmeridian antimetrische Belastung:

symmetr. Größen

antimetr. Größen

$$\begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ H \\ Q_2^* \\ v \\ \psi \\ Y \\ \tau \\ \omega \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} S_{1n}^* \\ S_{2n}^* \\ H_n \\ Q_{2n}^* \\ v_n \\ \psi_n \\ Y_n \\ \tau_n \\ \omega_n \end{Bmatrix} \cos \cdot n \cdot \varphi,$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ Q_1^* \\ u \\ w \\ \Theta \\ X \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} N_{1n} \\ N_{2n} \\ M_{1n} \\ M_{2n} \\ Q_{1n}^* \\ u_n \\ w_n \\ \Theta_n \\ X_n \\ Z_n \\ E_{1n} \\ E_{2n} \\ \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{Bmatrix} \sin \cdot n \cdot \varphi.$$

Tabelle 2.4.1

Im weiteren Verlauf der Rechnung soll lediglich Fall a) untersucht werden. Man greift die n-ten Glieder der Reihenentwicklung heraus und setzt sie in das partielle Differentialgleichungssystem ein. Jetzt lassen sich die Ableitungen nach φ ausführen und in sämtlichen Gleichungen die Funktionen $\cos \cdot n \cdot \varphi$ bzw. $\sin \cdot n \cdot \varphi$ weggürzen. Bezüglich der Breitenkreiskoordinate rechnet man also nur mit den Maximalwerten weiter, wobei zu beachten ist, daß die Maximalwerte von symmetrischen und antimetrischen Größen auf verschiedenen Meridianen liegen (außer für $n=0$). Für eine beliebige Harmonische n erhält man das System gewöhnlicher Diff.-gl. (2.4.1/17). Die Ersatzgrößen lauten nun:

$$S_{1n}^* = S_{1n} + \frac{\cos v^{\lambda}}{r} M_{12n} ,$$

$$S_{2n}^* = S_{2n} ;$$

$$Q_{1n}^* = Q_{1n} + \frac{n}{r} M_{12n} ,$$

$$Q_{2n}^* = Q_{2n} + \sin v^{\lambda} \frac{dM_{21n}}{d\tau} ;$$

$$H_n = \frac{M_{12n} + M_{21n}}{2} ;$$

$$\Theta_n = - \sin v^{\lambda} \frac{dW_n}{d\tau} ,$$

$$\psi_n = \frac{n}{r} W_n + \frac{\cos v^{\lambda}}{r} V_n .$$

Als Randgrößen können vorgegeben werden

$$N_{1n} , S_{1n}^* , Q_{1n}^* , M_{1n} \text{ und}$$

$$u_n , v_n , w_n , \Theta_n$$

oder sinnvolle Kombinationen dieser Größen.

Für eine Belastung, die zum Nullmeridian antimetrisch ist, muß in den Gleichungen n durch $-n$ ersetzt werden.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} (r N_{1n}) + \frac{n}{\sin \nu} S_{2n}^* - N_{2n} + \frac{r}{\sin \nu} X_n &= 0, \\ \frac{d}{dr} (r S_{1n}^*) - \frac{n}{\sin \nu} N_{2n} + n \frac{\operatorname{ctg} \nu}{r} M_{2n} + S_{1n}^* + \frac{r}{\sin \nu} Y_n &= 0, \\ \frac{d}{dr} (r Q_{1n}^*) + \frac{n^2}{\sin \nu \cdot r} M_{2n} + \frac{2 \cdot n}{r} H_n - \operatorname{ctg} \nu N_{2n} + \frac{r}{\sin \nu} Z_n &= 0, \\ \frac{d}{dr} (r M_{1n}) - \frac{2 \cdot n}{\sin \nu} H_n - M_{2n} + \frac{r}{\sin \nu} Q_{1n}^* &= 0; \end{aligned} \right\} (2.4.1/4)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} (\epsilon_{1n} + \nu \cdot \epsilon_{2n} + \frac{h^2 \cos \nu}{12 r} \varkappa_{1n}), \\ S_{1n}^* &= \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left[\left(1 + \frac{h^2 \cos^2 \nu}{8 r^2} \right) \omega_n + \frac{h^2 \cos \nu}{4 r} \tau_n \right], \\ M_{1n} &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varkappa_{1n} + \nu \cdot \varkappa_{2n} + \frac{\cos \nu}{r} (\epsilon_{1n} + \nu \cdot \epsilon_{2n}) \right], \\ H_n &= \frac{E \cdot h^3}{24(1+\nu)} \left(2 \cdot \tau_n + \frac{\cos \nu}{r} \frac{\omega_n}{2} \right), \\ N_{2n} &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} (\epsilon_{2n} + \nu \cdot \epsilon_{1n} - \frac{h^2 \cos \nu}{12 r} \varkappa_{2n}), \\ S_{2n}^* &= S_{1n}^* - 2 \frac{\cos \nu}{r} H_n, \\ M_{2n} &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_{2n} + \nu \cdot \varkappa_{1n}); \end{aligned} \right\} (2.4.5/11)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{1n} &= \sin \nu \frac{d u_n}{d r}, \\ \epsilon_{2n} &= \frac{\sin \nu}{r} u_n + \frac{n}{r} v_n + \frac{\cos \nu}{r} w_n, \\ \omega_n &= -\frac{n}{r} u_n + \sin \nu \cdot r \frac{d}{d r} \left(\frac{v_n}{r} \right), \\ \varkappa_{1n} &= -\sin^2 \nu \frac{d^2 w_n}{d r^2}, \\ \varkappa_{2n} &= -\frac{\sin \nu \cos \nu}{r^2} u_n - \frac{\cos^2 \nu}{r^2} w_n + \frac{n^2}{r^2} w_n - \frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{d w_n}{d r}, \\ \tau_n &= \frac{\cos \nu}{2 \cdot r} \left[\frac{n}{r} u_n + \sin \nu \cdot r \frac{d}{d r} \left(\frac{v_n}{r} \right) \right] + \sin \nu \cdot n \frac{d}{d r} \left(\frac{w_n}{r} \right). \end{aligned} \right\} (2.4.12/17)$$

2.5 Vereinfachte Gleichungen für die schwach gekrümmte dünne Schale

Bei dünnwandigen Schalen mit schwacher Krümmung kann man nach [1, S. 239 ff] in den geometrischen Gleichungen die Glieder vernachlässigen, die Produkte aus den Tangentialverschiebungen u und v und den Krümmungen k_1 und k_2 enthalten. Im Elastizitätsgesetz entfallen die Ausdrücke mit den Faktoren $\frac{h^3}{12} k_1$ und $\frac{h^3}{12} k_2$. Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Schubkräfte $S_1 = S_2 = S$ und der Torsionsmomente $M_{12} = M_{21} = M$.

Weiterhin können die in den ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen (2.1.1) und (2.1.2) auftretenden Größen $k_1 \cdot Q_1$ und $k_2 \cdot Q_2$, die den Krümmungen proportional sind, vernachlässigt werden.

Die Grundgleichungen (2.1.1/20) gehen mit den oben angeführten Vereinfachungen über in die Gln. (2.5.1/17). Das Momentengleichgewicht um die Schalennormale ist nur noch für $k_1 = k_2$ exakt erfüllt:

$$S + k_1 \cdot M = S + k_2 \cdot M.$$

In dieses System müssen noch die Ersatzquerkräfte eingeführt werden:

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial M}{\partial \beta}, \quad Q_2^* = Q_2 + \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial \alpha};$$

während man für die Schubkräfte

$$S_1^* = S + k_2 \cdot M \approx S, \quad S_2^* = S + k_1 \cdot M \approx S$$

erhält.

Die Ausdrücke für die Tangentenneigungen reduzieren sich auf

$$\Theta = -\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \psi = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}.$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot N_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \cdot S) + \frac{\partial H}{\partial \beta} S + H \cdot B \cdot X &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial \beta} (H \cdot N_2) - \frac{\partial H}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot S) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + H \cdot B \cdot Y &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot Q_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \cdot Q_2) - H \cdot B (k_1 N_1 + k_2 N_2) + H \cdot B \cdot Z &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot M) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M - \frac{\partial}{\partial \beta} (H \cdot M_2) + \frac{\partial H}{\partial \beta} M_1 - H \cdot B \cdot Q_2 &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial \beta} (H \cdot M) + \frac{\partial H}{\partial \beta} M - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - H \cdot B \cdot Q_1 &= 0;
 \end{aligned} \right\} (2.5.1/5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \cdot \epsilon_2), \\
 S &= \frac{E \cdot h}{2(1 + \nu)} \omega, \\
 M_1 &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_1 + \nu \cdot \kappa_2), \\
 M &= \frac{E \cdot h^3}{12(1 + \nu)} \tau, \\
 N_2 &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \cdot \epsilon_1), \\
 M_2 &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_2 + \nu \cdot \kappa_1);
 \end{aligned} \right\} (2.5.6/11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{H \cdot B} \frac{\partial H}{\partial \beta} v + k_1 w, \\
 \epsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{H \cdot B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\
 \omega &= \frac{H}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{H} \right) + \frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\
 \kappa_1 &= -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{H \cdot B^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\
 \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{H^2 \cdot B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\
 \tau &= -\frac{1}{H \cdot B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right).
 \end{aligned} \right\} (2.5.12/17)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.5.1/5) nehmen folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot N_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot S) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S + A \cdot B \cdot X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot N_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot S) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + A \cdot B \cdot Y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot Q_1^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot Q_2^*) - 2 \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} - A \cdot B (k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot N_2) + A \cdot B \cdot Z &= 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot M) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot M_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - A \cdot B \cdot Q_2^* &= 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot M) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - A \cdot B \cdot Q_1^* &= 0; \end{aligned} \right\} (2.5.18/22)$$

Anschließend werden noch die Gln. (2.5.20/21) durch Elimination von Q_2^* zusammengefaßt zu

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B \cdot Q_1^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{M_1}{B} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (A \cdot M_2) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial B M}{\partial \alpha B} \right) - A \cdot B (k_1 N_1 + k_2 N_2) + A \cdot B \cdot Z =$$

Für die schwach gekrümmte Kegelschale mit den Koordinaten r und φ erhält man die Ersatzgrößen

$$\begin{aligned} Q_1^* &= Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, & Q_2^* &= Q_2 + \sin \nu \frac{\partial M}{\partial \tau}; \\ \Theta &= -\sin \nu \frac{\partial W}{\partial \tau}, & \Psi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

und die Gln. (2.5.23/38). Dieses System entspricht der Donnell-Näherung bei Zylinderschalen und stimmt mit den in [4] angegebenen Ausgangsgleichungen überein.

Führt man hierin wiederum den Fourieransatz für die Breitenkreiskoordinate ein, dann ergeben sich für das n -te Glied der Reihenentwicklung und zum Nullmeridian symmetrische Belastung die Gln. (2.5.39/54) mit den Ersatzgrößen

$$\begin{aligned} Q_{1n}^* &= Q_{1n} + \frac{n}{r} M_n, & Q_{2n}^* &= Q_{2n} + \sin \nu \frac{dM_n}{d\tau}; \\ \Theta_n &= -\sin \nu \frac{dw_n}{d\tau}, & \Psi_n &= \frac{n}{r} w_n \end{aligned}$$

und den Randgrößen $N_{1n}, S_n, Q_{1n}^*, M_{1n};$
 $u_n, v_n, w_n, \Theta_n.$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (\tau N_1) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - N_2 + \frac{\tau}{\sin \nu} X &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial r} (\tau S) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + S + \frac{\tau}{\sin \nu} Y &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial r} (\tau Q_1^*) - \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial M}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \nu N_2 + \frac{\tau}{\sin \nu} Z &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial r} (\tau M_1) - \frac{2}{\sin \nu} \frac{\partial M}{\partial \varphi} - M_2 + \frac{\tau}{\sin \nu} Q_1^* &= 0;
 \end{aligned} \right\} (2.5.23/26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega, \\
 M_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \\
 M &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau, \\
 N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \\
 M_2 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varkappa_2 + \nu \varkappa_1);
 \end{aligned} \right\} (2.5.27/32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \sin \nu \frac{\partial u}{\partial r}, \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w, \\
 \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \\
 \varkappa_1 &= -\sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\
 \varkappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \\
 \tau &= -\sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right).
 \end{aligned} \right\} (2.5.33/38)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot N_{1n}) + \frac{n}{\sin \nu} S_n - N_{2n} + \frac{\tau}{\sin \nu} X_n &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot S_n) - \frac{n}{\sin \nu} N_{2n} + S_n + \frac{\tau}{\sin \nu} Y_n &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot Q_{1n}^*) + \frac{n^2}{\sin \nu \cdot \tau} M_{2n} + \frac{2 \cdot n}{\tau} M_n - \operatorname{ctg} \nu \cdot N_{2n} + \frac{\tau}{\sin \nu} Z_n &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot M_{1n}) - \frac{2 \cdot n}{\sin \nu} M_n - M_{2n} + \frac{\tau}{\sin \nu} Q_{1n}^* &= 0; \end{aligned} \right\} (2.539/42)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{1n} + \nu \cdot \varepsilon_{2n}), \\ S_n &= \frac{E \cdot h}{2(1 + \nu)} \omega_n, \\ M_{1n} &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (\alpha_{1n} + \nu \cdot \alpha_{2n}), \\ M_n &= \frac{E \cdot h^3}{12(1 + \nu)} \tau_n, \\ N_{2n} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{2n} + \nu \cdot \varepsilon_{1n}), \\ M_{2n} &= -\frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (\alpha_{2n} + \nu \cdot \alpha_{1n}); \end{aligned} \right\} (2.543/48)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \sin \nu \frac{du_n}{d\tau}, \\ \varepsilon_{2n} &= \frac{\sin \nu}{\tau} u_n + \frac{n}{\tau} v_n + \frac{\cos \nu}{\tau} w_n, \\ \omega_n &= -\frac{n}{\tau} u_n + \sin \nu \cdot \tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_n}{\tau} \right), \\ \alpha_{1n} &= -\sin^2 \nu \frac{d^2 w_n}{d\tau^2}, \\ \alpha_{2n} &= \frac{n^2}{\tau^2} w_n - \frac{\sin^2 \nu}{\tau} \frac{dw_n}{d\tau}, \\ \tau_n &= \sin \nu \cdot n \frac{d}{d\tau} \left(\frac{w_n}{\tau} \right). \end{aligned} \right\} (2.549/54)$$

2.6 Membrantheorie der Kegelschale

Die Membrangleichungen der Kegelschale lassen sich direkt aus (2.5.39/54) gewinnen. Hierzu werden die Querkräfte, Momente und die zugehörigen Deformationsgrößen und Verschiebungen gestrichen. Übrig bleibt ein statisch bestimmtes System, für das man die Normal- und Schubkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen alleine berechnen kann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot N_{1n}) + \frac{n}{\sin \vartheta} S_n - N_{2n} + \frac{\tau}{\sin \vartheta} X_n &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (\tau \cdot S_n) - \frac{n}{\sin \vartheta} N_{2n} + S_n + \frac{\tau}{\sin \vartheta} Y_n &= 0, \\ - \operatorname{ctg} \vartheta \cdot N_{2n} + \frac{\tau}{\sin \vartheta} Z_n &= 0; \end{aligned} \right\} (2.6.1/3)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{1n} + \nu \cdot \varepsilon_{2n}), \\ S_n &= \frac{E \cdot h}{2(1 + \nu)} \omega_n, \\ N_{2n} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{2n} + \nu \cdot \varepsilon_{1n}); \end{aligned} \right\} (2.6.4/6)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \sin \vartheta \frac{du_n}{d\tau}, \\ \varepsilon_{2n} &= \frac{\sin \vartheta}{\tau} u_n + \frac{n}{\tau} v_n + \frac{\cos \vartheta}{\tau} w_n, \\ \omega_n &= -\frac{n}{\tau} u_n + \sin \vartheta \cdot \tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_n}{\tau} \right). \end{aligned} \right\} (2.6.7/9)$$

Da von den Randgrößen lediglich

$$\begin{aligned} N_{1n}, & \quad S_n; \\ u_n, & \quad v_n \end{aligned}$$

vorgegeben werden können, muß man zur Verwirklichung eines reinen Membranspannungszustandes an die Lagerung der Schale sehr spezielle Forderungen stellen.

3. Lösungsmethode mit Hilfe eines elektronischen Analogrechners

3.1 Einführung dimensionsloser Größen

Für die folgenden Untersuchungen wird es sich als zweckmäßig erweisen, die dimensionslose Koordinate $\varrho = r/\tau_a$ und die bezogene Wandstärke $\delta = h/\tau_a$ einzuführen. r_a ist der größte Breitenkreisradius des Kegelstumpfes, Bild 3.1.1.

Im weiteren Verlauf der Rechnung soll nur das homogene Problem behandelt werden. Die äußeren Belastungen X_n , Y_n und Z_n sind gleich null. Störungen werden lediglich über die Ränder in die Schale eingeleitet. Es sei darauf hingewiesen, daß die Berücksichtigung von Belastungsfunktionen für das Lösungsverfahren keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereitet. Der Verlauf der Belastung in Meridianrichtung kann analytisch oder in Kurvenform gegeben sein, wobei sich am Analogrechner auch Sprungfunktionen verwirklichen lassen.

Der Index n für die Harmonische, Abb. 3.1.2, wird ab jetzt in den Gleichungen weggelassen, da sich die Rechnung immer auf ein spezielles Glied der Fourierreihenentwicklung bezieht.

3.2 Umformung der Gleichungssysteme

Die Gleichungen müssen nun in eine für die Behandlung auf dem Analogrechner geeignete Form gebracht werden, vgl. z. B. das Kapitel über "Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten" in [6]. Man löst die Differentialgleichungen des Systems nach den Ableitungen auf und bestimmt aus jeder von ihnen durch Integration eine Unbekannte. Die übrigen gesuchten Größen werden aus den algebraischen Gleichungen erhalten. Es ist zu bemerken, daß mit den in runden Klammern stehenden modifizierten abhängigen Variablen weitergerechnet werden soll. Zur Vermeidung allzu umfangreicher Ausdrücke ist die Reduktion des Gleichungssystems in nur 8 Diff.-gln. 1. Ordnung nicht zu empfehlen.

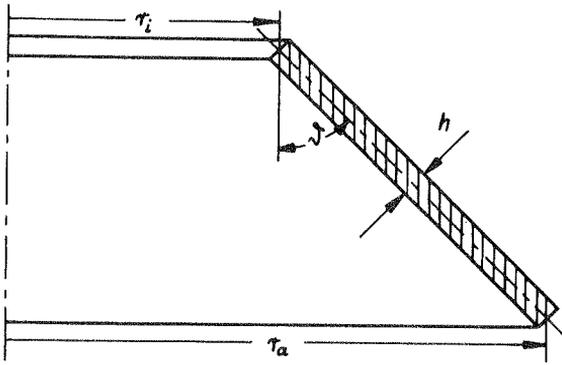


Bild 3.1.1

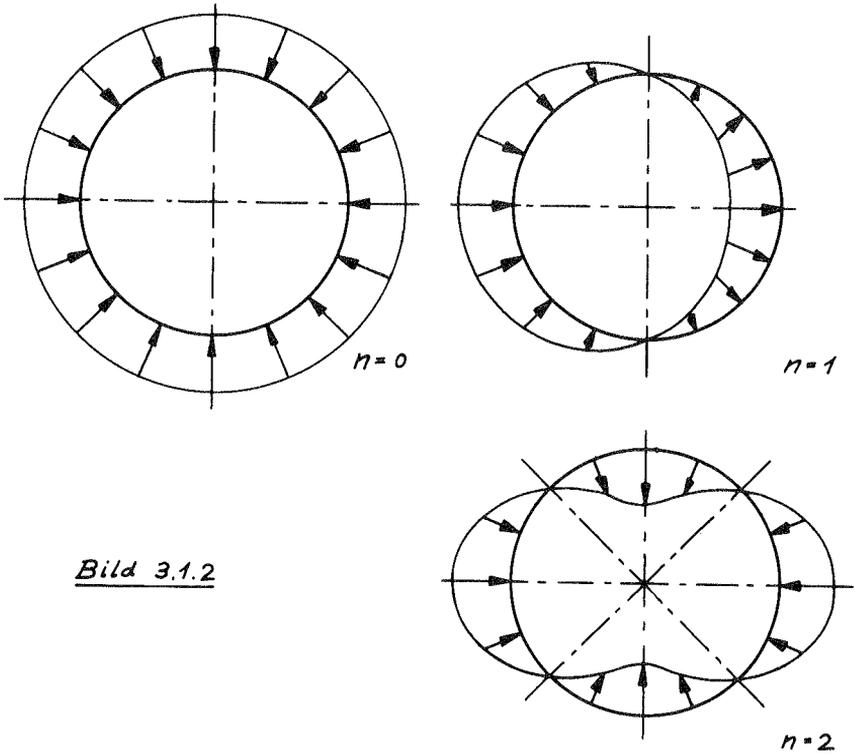


Bild 3.1.2

a) Kegelschale (erweiterte Gleichungen):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho}(e \cdot N_1) &= -\frac{n}{\sin \nu} S_2^* + N_2, \\ \frac{d}{d\rho}(e \cdot S_1^*) &= -\frac{1}{\rho}(e \cdot S_1^*) + \frac{n}{\sin \nu} N_2 - n \cdot \operatorname{ctg} \nu \frac{1}{\rho} (M_2/\tau_a), \\ \frac{d}{d\rho}(e \cdot Q_1^*) &= \operatorname{ctg} \nu \cdot N_2 - \frac{n^2}{\sin \nu} \frac{1}{\rho} (M_2/\tau_a) - 2 \cdot n \frac{1}{\rho} (H/\tau_a), \\ \frac{d}{d\rho}(e \cdot M_1/\tau_a) &= \frac{2 \cdot n}{\sin \nu} (H/\tau_a) + (M_2/\tau_a) - \frac{1}{\sin \nu} (e \cdot Q_1^*); \end{aligned} \right\} (3.2.1/4)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{1-\nu^2}{\delta} (e \cdot N_1) - \frac{\delta^2 \cos \nu}{12} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) \right] - \nu (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2), \\ (\rho + \frac{\delta^2 \cos^2 \nu}{8} \frac{1}{\rho}) (\tau_a \cdot E \cdot \omega) + \frac{\delta^2 \cos \nu}{4} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) - \frac{2(1+\nu)}{\delta} (e \cdot S_1^*) &= 0, \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3} (e \cdot M_1/\tau_a) + \cos \nu \left[(\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) + \nu (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) \right] \right] - \nu (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2), \\ (H/\tau_a) &= \frac{\delta^3}{12(1+\nu)} \left[(\tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) + \frac{\cos \nu}{4} \frac{1}{\rho} (\tau_a \cdot E \cdot \omega) \right], \\ N_2 &= \frac{\delta}{1-\nu^2} \left[(\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) + \nu (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) - \frac{\delta^2 \cos \nu}{12} \frac{1}{\rho} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) \right], \\ S_2^* &= \frac{1}{\rho} (e \cdot S_1^*) - 2 \cdot \cos \nu \frac{1}{\rho} (H/\tau_a), \\ (M_2/\tau_a) &= -\frac{\delta^3}{12(1+\nu)} \left[(\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) + \nu (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) \right]; \end{aligned} \right\} (3.2.5/11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho}(E \cdot u) &= \frac{1}{\sin \nu} (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1), \\ (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) &= \sin \nu \frac{1}{\rho} (E \cdot u) + n \frac{1}{\rho} (E \cdot v) + \cos \nu \frac{1}{\rho} (E \cdot w), \\ \frac{d}{d\rho}(E \cdot v) &= \frac{1}{\sin \nu} (\tau_a \cdot E \cdot \omega) + \frac{n}{\sin \nu} \frac{1}{\rho} (E \cdot u) + \frac{1}{\rho} (E \cdot v), \\ \frac{d}{d\rho}(\tau_a \cdot E \cdot \theta) &= \frac{1}{\sin \nu} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1), \\ \frac{d}{d\rho}(E \cdot w) &= -\frac{1}{\sin \nu} (\tau_a \cdot E \cdot \theta), \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) &= \frac{1}{\rho} \left[\sin \nu (\tau_a \cdot E \cdot \theta) + (n^2 - \cos^2 \nu) \frac{1}{\rho} (E \cdot w) - \sin \nu \cos \nu \frac{1}{\rho} (E \cdot u) \right], \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) &= \frac{1}{\rho} \left[n \cos \nu \frac{1}{\rho} (E \cdot u) + \frac{\cos \nu}{2} (\tau_a \cdot E \cdot \omega) - n (\tau_a \cdot E \cdot \theta) - n \sin \nu \frac{1}{\rho} (E \cdot w) \right], \end{aligned} \right\} (3.2.12/18)$$

Randgrößen:

$$(e \cdot N_1), (e \cdot S_1^*), (e \cdot Q_1^*), (e \cdot M_1/\tau_a);$$

$$(E \cdot u), (E \cdot v), (E \cdot w), (\tau_a \cdot E \cdot \theta).$$

b) Schwach gekrümmte Kegelschale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} (e \cdot N_1) &= -\frac{n}{\sin \vartheta} \frac{1}{\varrho} (e \cdot S) + N_2, \\ \frac{d}{d\varrho} (e \cdot S) &= -\frac{1}{\varrho} (e \cdot S) + \frac{n}{\sin \vartheta} N_2, \\ \frac{d}{d\varrho} (e \cdot Q_1^*) &= \operatorname{ctg} \vartheta \cdot N_2 - \frac{1}{\varrho} \left[\frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} (M_2 / \tau_a) + 2 \cdot n (M / \tau_a) \right], \\ \frac{d}{d\varrho} (e M_1 / \tau_a) &= \frac{2 \cdot n}{\sin \vartheta} (M / \tau_a) + (M_2 / \tau_a) - \frac{1}{\sin \vartheta} (e \cdot Q_1^*); \end{aligned} \right\} (3.2.19/22)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) &= \frac{1-\nu^2}{\varrho} \frac{1}{\varrho} (e \cdot N_1) - \nu (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2), \\ (\tau_a \cdot E \cdot \omega) &= \frac{2(1+\nu)}{\varrho} \frac{1}{\varrho} (e \cdot S), \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) &= -\frac{12(1-\nu^2)}{\varrho^3} \frac{1}{\varrho} (e \cdot M_1 / \tau_a) - \nu (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2), \\ (M / \tau_a) &= \frac{\varrho^3}{12(1+\nu)} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varepsilon), \\ N_2 &= \frac{\varrho}{1-\nu^2} [(\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) + \nu (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1)], \\ (M_2 / \tau_a) &= -\frac{\varrho^3}{12(1-\nu^2)} [(\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) + \nu (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1)]; \end{aligned} \right\} (3.2.23/28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} (E \cdot u) &= \frac{1}{\sin \vartheta} (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1), \\ (\tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) &= \sin \vartheta \frac{1}{\varrho} (E \cdot u) + n \frac{1}{\varrho} (E \cdot v) + \cos \vartheta \frac{1}{\varrho} (E \cdot w), \\ \frac{d}{d\varrho} (E \cdot v) &= \frac{1}{\sin \vartheta} (\tau_a \cdot E \cdot \omega) + \frac{n}{\sin \vartheta} \frac{1}{\varrho} (E \cdot u) + \frac{1}{\varrho} (E \cdot v), \\ \frac{d}{d\varrho} (\tau_a \cdot E \cdot \theta) &= \frac{1}{\sin \vartheta} (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1), \\ \frac{d}{d\varrho} (E \cdot w) &= -\frac{1}{\sin \vartheta} (\tau_a \cdot E \cdot \theta), \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) &= \frac{1}{\varrho} \left[\sin \vartheta (\tau_a \cdot E \cdot \theta) + n^2 \frac{1}{\varrho} (E \cdot w) \right], \\ (\tau_a^2 \cdot E \cdot \varepsilon) &= -\frac{n}{\varrho} \left[(\tau_a \cdot E \cdot \theta) + \sin \vartheta \frac{1}{\varrho} (E \cdot w) \right]. \end{aligned} \right\} (3.2.29/35)$$

Randgrößen:

$$(e \cdot N_1), (e \cdot S), (e \cdot Q_1^*), (e \cdot M_1 / \tau_a);$$

$$(E \cdot u), (E \cdot v), (E \cdot w), (\tau_a \cdot E \cdot \theta).$$

c) Membrankegelschale

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dE} (E \cdot N_1) &= - \frac{n}{\sin \nu} \frac{1}{E} (E \cdot S), \\ \frac{d}{dE} (E \cdot S) &= - \frac{1}{E} (E \cdot S); \end{aligned} \right\} (3.2.36/37)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_\alpha \cdot E \cdot \varepsilon_1) &= \frac{1}{f} \frac{1}{E} (E \cdot N_1), \\ (\tau_\alpha \cdot E \cdot \omega) &= \frac{2(1+\nu)}{f} \frac{1}{E} (E \cdot S); \end{aligned} \right\} (3.2.38/39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(E \cdot u)}{dE} &= \frac{1}{\sin \nu} (\tau_\alpha \cdot E \cdot \varepsilon_1), \\ \frac{d(E \cdot v)}{dE} &= \frac{1}{\sin \nu} (\tau_\alpha \cdot E \cdot \omega) + \frac{n}{\sin \nu} \frac{1}{E} (E \cdot u) + \frac{1}{E} (E \cdot v). \end{aligned} \right\} (3.2.40/41)$$

Randgrößen:

$$(E \cdot N_1), (E \cdot S); (E \cdot u), (E \cdot v).$$

Es gibt oft mehrere Möglichkeiten, eine Aufgabe für den Analogrechner zu programmieren. Für das vorliegende Problem soll dies am Beispiel der Gl. (3.2.1) erläutert werden. Die Rechensymbole mit ihren Bedeutungen sind im Abschnitt "Bezeichnungen" zusammengestellt.

Bei dem hier eingeschlagenen Weg wird $(E \cdot N_1)$ als Unbekannte angesehen, die aus S_2^* und N_2 berechnet werden kann, Bild 3.2.1. Die Größe N_1 erhält man durch anschließende Multiplikation mit $1/E$. Ein Vorteil dieser Schaltung ist die gleichzeitige Verwendung des Integrierers als Summierer, da hierdurch Rechenelemente eingespart werden. Außerdem kommt man, im Hinblick auf das Gesamtsystem, mit einem Minimum an Multiplizierern aus. Das ist von Bedeutung, da die Multiplizierer als nichtlineare Elemente mit verhältnismäßig großen Fehlern behaftet sind.

$$\frac{d}{d\epsilon}(e N_1) = -\frac{n}{\sin\vartheta} S_2^* + N_2.$$

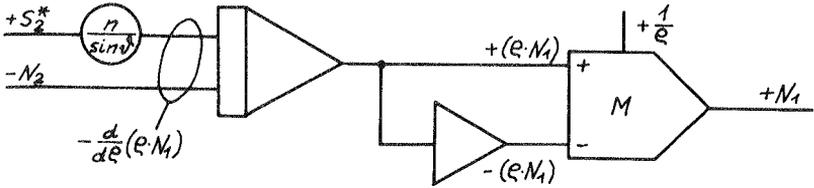


Bild 3.2.1

$$e \frac{dN_1}{d\epsilon} + N_1 + \frac{n}{\sin\vartheta} S_2^* - N_2 = 0.$$

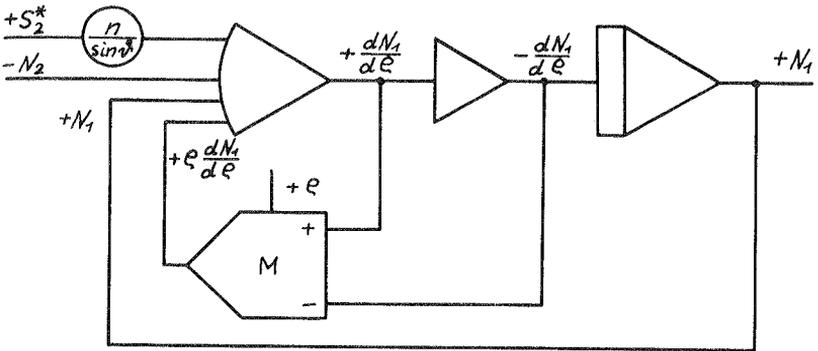


Bild 3.2.2

$$\frac{dN_1}{d\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} (N_2 - N_1 - \frac{n}{\sin\vartheta} S_2^*).$$

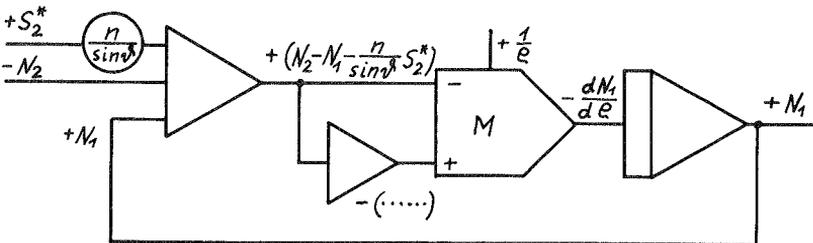


Bild 3.2.3

Man hätte auch zunächst nach e differenzieren und die entstehende Gleichung implizit mit Hilfe eines offenen Verstärkers lösen können, Bild 3.2.2. In der Abb. 3.2.3 ist eine dritte Variante dargestellt, bei der die Gleichung nach $\frac{dN_1}{d\varrho}$ aufgelöst wird. In beiden Fällen benötigt man als zusätzliches Rechen-element einen Summierer bzw. offenen Verstärker.

Die algebraische Gleichung (3.2.6) soll als einzige mit der impliziten Technik gelöst werden.

3.3 Normierung der unabhängigen Veränderlichen

Die unabhängige Variable des Analogrechners ist die Maschinenzeit t^* [s]. Sie wird mit Hilfe eines Faktors k [1/s] zur dimensionslosen Rechenvariablen transformiert:

$$R = k \cdot t^*.$$

Bei der hier vorliegenden Aufgabe ist die unabhängige Veränderliche die Ortskoordinate e . Sie soll den Bereich von $e = e_i$ bis $e = e_a$ durchlaufen, wobei $e_i \neq 0$ ist. Um eine Beziehung zwischen beiden Variablen herzustellen, definiert man die dimensionslose Problemvariable

$$R = \lambda(e - e_i), \quad dR = \lambda \cdot de, \quad \lambda[-].$$

Gleichsetzen beider Größen ergibt:

$$k \cdot t^* = \lambda(e - e_i).$$

Hieraus kann man die maximale Maschinenzeit, die der Strecke $(e_a - e_i)$ entspricht, berechnen:

$$t_{max}^* = \frac{\lambda}{k} (e_a - e_i).$$

3.4 Normierung der abhängigen Veränderlichen

Die Gleichungen müssen mit Hilfe von Maßstabsfaktoren normiert werden. Dazu bezieht man die abhängigen Variablen X auf ihre maximal erreichbaren Werte X_{\max} :

$$\bar{X} = X/X_{\max}$$

\bar{X} ist dann eine dimensionslose Größe, die zwischen $-1 \leq \bar{X} \leq +1$ liegt.

Wenn die Maximalwerte der abhängigen Veränderlichen nicht bekannt sind, müssen sie abgeschätzt und ggf. nachträglich korrigiert werden. Zur Erzielung einer guten Rechengenauigkeit soll der Rechenbereich möglichst voll ausgenutzt werden. Bei dem hier vorliegenden Problem werden die Maximalwerte nach der von Novozhilov [2] angegebenen Methode näherungsweise berechnet. Am Analogrechner werden die Rechengrößen durch elektrische Spannungen dargestellt. Die Rechenspannung U ist ebenfalls auf die größte Spannung U_{\max} (10 Volt bei Transistorrechnern) bezogen:

$$\bar{U} = U/U_{\max}, \quad -1 \leq \bar{U} \leq +1.$$

Somit ist zwischen den Größen des Problems und den Rechen-
spannungen ein eindeutig definierter Zusammenhang hergestellt.
Für die Amplitudennormierung werden die folgenden Größen
eingeführt:

$$\begin{aligned} \overline{(E \cdot N_1)} &= \frac{(E \cdot N_1)}{(E \cdot N_1)_{\max}} & \bar{N}_2 &= \frac{N_2}{(N_2)_{\max}} & \bar{u} &= \frac{(E \cdot u)}{(E \cdot u)_{\max}} \\ \overline{(E \cdot S_1^*)} &= \frac{(E \cdot S_1^*)}{(E \cdot S_1^*)_{\max}} & \bar{S}_2^* &= \frac{S_2^*}{(S_2^*)_{\max}} & \bar{v} &= \frac{(E \cdot v)}{(E \cdot v)_{\max}} \\ \overline{(E \cdot Q_1^*)} &= \frac{(E \cdot Q_1^*)}{(E \cdot Q_1^*)_{\max}} & \bar{M}_2 &= \frac{(M_2/\tau_a)}{(M_2/\tau_a)_{\max}} & \bar{w} &= \frac{(E \cdot w)}{(E \cdot w)_{\max}} \\ \overline{(E \cdot M_1)} &= \frac{(E \cdot M_1/\tau_a)}{(E \cdot M_1/\tau_a)_{\max}} & \bar{H} &= \frac{(H/\tau_a)}{(H/\tau_a)_{\max}} & \bar{\theta} &= \frac{(\tau_a \cdot E \cdot \theta)}{(\tau_a \cdot E \cdot \theta)_{\max}} \\ \bar{\epsilon}_1 &= \frac{(\tau_a \cdot E \cdot \epsilon_1)}{(\tau_a \cdot E \cdot \epsilon_1)_{\max}} & \bar{\epsilon}_2 &= \frac{(\tau_a \cdot E \cdot \epsilon_2)}{(\tau_a \cdot E \cdot \epsilon_2)_{\max}} & \bar{\omega} &= \frac{(\tau_a \cdot E \cdot \omega)}{(\tau_a \cdot E \cdot \omega)_{\max}} \\ \bar{\vartheta}_{e1} &= \frac{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \vartheta_{e1})}{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \vartheta_{e1})_{\max}} & \bar{\vartheta}_{e2} &= \frac{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \vartheta_{e2})}{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \vartheta_{e2})_{\max}} & \bar{\tau} &= \frac{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \tau)}{(\tau_a^2 \cdot E \cdot \tau)_{\max}} \end{aligned}$$

3.5 Hilfsfunktionen zur Erzeugung variabler Koeffizienten

Zur Gewinnung von variablen Koeffizienten stellt man zweckmäßigerweise eine Rechenschaltung für die Differentialgleichung auf, deren Lösung die gegebene Funktion ist, [7, §18].

Man definiert: $F_1 \triangleq 1/e$.

Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dF_1}{dR} + F_1^2 = 0.$$

Mit $\bar{F}_1 = F_1 / (F_1)_{max}$, $(F_1)_{max} = 1/e_i$

erhält man die normierte Gleichung $\frac{d\bar{F}_1}{dR} + \frac{(F_1)_{max}}{\lambda} \bar{F}_1^2 = 0$

und den Anfangswert $(\bar{F}_1)_i = +1$ für $R = 0$.

Ebenso ergibt sich für $F_2 \triangleq e$

die Differentialgleichung $\frac{dF_2}{dR} = 1$.

Die Normierung $\bar{F}_2 = F_2 / (F_2)_{max}$, $(F_2)_{max} = e_a$

liefert die Rechengleichung $\frac{d\bar{F}_2}{dR} = \frac{1}{\lambda \cdot (F_2)_{max}}$.

Der Anfangswert ist $(\bar{F}_2)_i = e_i / e_a$ für $R = 0$.

Die Schnittgrößen in Meridianrichtung berechnen sich aus den Beziehungen

$$\bar{N}_1 = \bar{F}_1 (\overline{e \cdot N_1}) = \frac{e_i \cdot N_1}{(e \cdot N_1)_{max}}, \quad \bar{Q}_1^* = \bar{F}_1 (\overline{e \cdot Q_1^*}) = \frac{e_i \cdot Q_1^*}{(e \cdot Q_1^*)_{max}},$$

$$\bar{S}_1^* = \bar{F}_1 (\overline{e \cdot S_1^*}) = \frac{e_i \cdot S_1^*}{(e \cdot S_1^*)_{max}}, \quad \bar{M}_1 = \bar{F}_1 (\overline{e \cdot M_1}) = \frac{e_i \cdot (M_1 / r_a)}{(e \cdot M_1 / r_a)_{max}}.$$

3.6 Rechenschaltungen für den Kegelstumpf konstanter Wandstärke

Im folgenden sind die Rechenschaltungen mit den normierten Gleichungen und zugehörigen Potentiometerwerten für den Kegelstumpf konstanter Wandstärke zusammengestellt.

a) Erweiterte Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dR}(\overline{eM}_1) &= -\textcircled{08} \overline{S}_2^* + \textcircled{27} \overline{N}_2, \\ \frac{d}{dR}(\overline{eS}_1^*) &= -\textcircled{29} \overline{F}_1(\overline{eS}_1^*) + \textcircled{22} \overline{N}_2 - \textcircled{68} \overline{F}_1 \overline{M}_2, \\ \frac{d}{dR}(\overline{eQ}_1^*) &= \textcircled{20} \overline{N}_2 - \textcircled{77} \overline{F}_1 \overline{M}_2 - \textcircled{62} \overline{F}_1 \overline{H}, \\ \frac{d}{dR}(\overline{eM}_1) &= \textcircled{67} \overline{H} + \textcircled{70} \overline{M}_2 - \textcircled{56}(\overline{eQ}_1^*); \end{aligned} \right\} (3.6.1/4)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{E}_1 &= \overline{F}_1[\textcircled{01}(\overline{eM}_1) - \textcircled{02} \overline{x}_1] - \textcircled{03} \overline{E}_2, \\ (\overline{F}_2 + \textcircled{36} \overline{F}_1) \overline{\omega} + \textcircled{30} \overline{\tau} - \textcircled{31}(\overline{eS}_1^*) &= 0, \\ \overline{x}_1 &= -\overline{F}_1[\textcircled{72}(\overline{eM}_1) + \textcircled{63} \overline{E}_1 + \textcircled{69} \overline{E}_2] - \textcircled{88} \overline{x}_2, \\ \overline{H} &= \textcircled{61} \overline{\tau} + \textcircled{66} \overline{F}_1 \overline{\omega}, \\ \overline{N}_2 &= \textcircled{21} \overline{E}_2 + \textcircled{09} \overline{E}_1 - \textcircled{18} \overline{F}_1 \overline{x}_2, \\ \overline{S}_2^* &= \textcircled{23} \overline{F}_1(\overline{eS}_1^*) - \textcircled{28} \overline{F}_1 \overline{H}, \\ \overline{M}_2 &= -\textcircled{71} \overline{x}_2 - \textcircled{78} \overline{x}_1; \end{aligned} \right\} (3.6.5/11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{u}}{dR} &= \textcircled{11} \overline{E}_1, \\ \overline{E}_2 &= \textcircled{19} \overline{F}_1 \overline{u} + \textcircled{26} \overline{F}_1 \overline{v} + \textcircled{24} \overline{F}_1 \overline{w}, \\ \frac{d\overline{v}}{dR} &= \textcircled{32} \overline{\omega} + \textcircled{34} \overline{F}_1 \overline{u} + \textcircled{39} \overline{F}_1 \overline{v}, \\ \frac{d\overline{\theta}}{dR} &= \textcircled{81} \overline{x}_1, \\ \frac{d\overline{w}}{dR} &= -\textcircled{80} \overline{\theta}, \\ \overline{x}_2 &= \overline{F}_1[\textcircled{79} \overline{\theta} + \textcircled{73} \overline{F}_1 \overline{w} - \textcircled{04} \overline{F}_1 \overline{u}], \\ \overline{\tau} &= \overline{F}_1[\textcircled{00} \overline{F}_1 \overline{u} + \textcircled{37} \overline{\omega} - \textcircled{84} \overline{\theta} - \textcircled{86} \overline{F}_1 \overline{w}]; \end{aligned} \right\} (3.6.12/18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{F}_1}{dR} &= -\textcircled{93} \overline{F}_1^2, \\ \frac{d\overline{F}_2}{dR} &= \textcircled{49}. \end{aligned} \right\} (3.6.19/20)$$

00	$\frac{n \cdot \cos^2 \nu}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}$	27	$\frac{1}{\lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho \cdot N_1)_{\max}}$	67	$\frac{2 \cdot n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(H/\tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot M_1/\tau_a)_{\max}}$
01	$\frac{1 - \nu^2}{\delta \cdot \rho_i} \frac{(\rho \cdot N_1)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \epsilon_1)_{\max}}$	28	$\frac{2 \cdot \cos \nu}{\rho_i} \frac{(H/\tau_a)_{\max}}{(S_2^*)_{\max}}$	68	$\frac{n \cdot \operatorname{ctg} \nu}{\lambda \cdot \rho_i} \frac{(M_2/\tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot S_1^*)_{\max}}$
02	$\frac{\delta^2 \cdot \cos \nu}{12 \cdot \rho_i} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \epsilon_1)_{\max}}$	29	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$	69	$\frac{\nu \cdot \cos \nu}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$
03	$\nu \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \epsilon_1)_{\max}}$	30	$\frac{\delta^2 \cdot \cos \nu}{4} \frac{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}{(\tau_a E \cdot w)_{\max}}$	70	$\frac{1}{\lambda} \frac{(M_2/\tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot M_1/\tau_a)_{\max}}$
04	$\frac{\sin \nu \cdot \cos \nu}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}$	31	$\frac{2(1+\nu)}{\delta} \frac{(\rho \cdot S_1^*)_{\max}}{(\tau_a E \cdot w)_{\max}}$	71	$\frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}{(M_2/\tau_a)_{\max}}$
08	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(S_2^*)_{\max}}{(\rho \cdot N_1)_{\max}}$	32	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \cdot w)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	72	$\frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3 \cdot \rho_i} \frac{(\rho \cdot M_1/\tau_a)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$
09	$\frac{\nu \cdot \delta}{1-\nu^2} \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_1)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	34	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	73	$\frac{n^2 \cdot \cos^2 \nu}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}$
11	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}{(E \cdot u)_{\max}}$	36	$\frac{\delta^2 \cdot \cos^2 \nu}{8 \cdot \rho_i}$	77	$\frac{n^2}{\sin \nu \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(M_2/\tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$
18	$\frac{\delta^3 \cdot \cos \nu}{12(1-\nu^2) \rho_i} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	37	$\frac{\cos \nu}{2 \cdot \rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}$	78	$\frac{\nu \cdot \delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}{(M_2/\tau_a)_{\max}}$
19	$\frac{\sin \nu}{\rho_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}$	39	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$	79	$\frac{\sin \nu}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot \theta)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}$
20	$\frac{\operatorname{ctg} \nu}{\lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$	49	$\frac{1}{\lambda}$	80	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \cdot \theta)_{\max}}{(E \cdot w)_{\max}}$
21	$\frac{\delta}{1-\nu^2} \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	56	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}{(\rho \cdot M_1/\tau_a)_{\max}}$	81	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \epsilon_1)_{\max}}{(\tau_a E \cdot \theta)_{\max}}$
22	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho \cdot S_1^*)_{\max}}$	61	$\frac{\delta^3}{12(1+\nu)} \frac{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}{(H/\tau_a)_{\max}}$	84	$\frac{n}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot \theta)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}$
23	$\frac{1}{\rho_i} \frac{(\rho \cdot S_1^*)_{\max}}{(S_2^*)_{\max}}$	62	$\frac{2 \cdot n}{\lambda \cdot \rho_i} \frac{(H/\tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$	86	$\frac{n \cdot \sin \nu}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot T)_{\max}}$
24	$\frac{\cos \nu}{\rho_i} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}$	63	$\frac{\cos \nu}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot \epsilon_1)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$	88	$\nu \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$
26	$\frac{n}{\rho_i} \frac{(E \cdot v)_{\max}}{(\tau_a E \cdot \epsilon_2)_{\max}}$	66	$\frac{\delta^3 \cdot \cos \nu}{48(1+\nu) \rho_i} \frac{(\tau_a E \cdot w)_{\max}}{(H/\tau_a)_{\max}}$	93	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$

Tabelle 3.6.1 Potentiometerwerte (erweiterte Gleichungen)

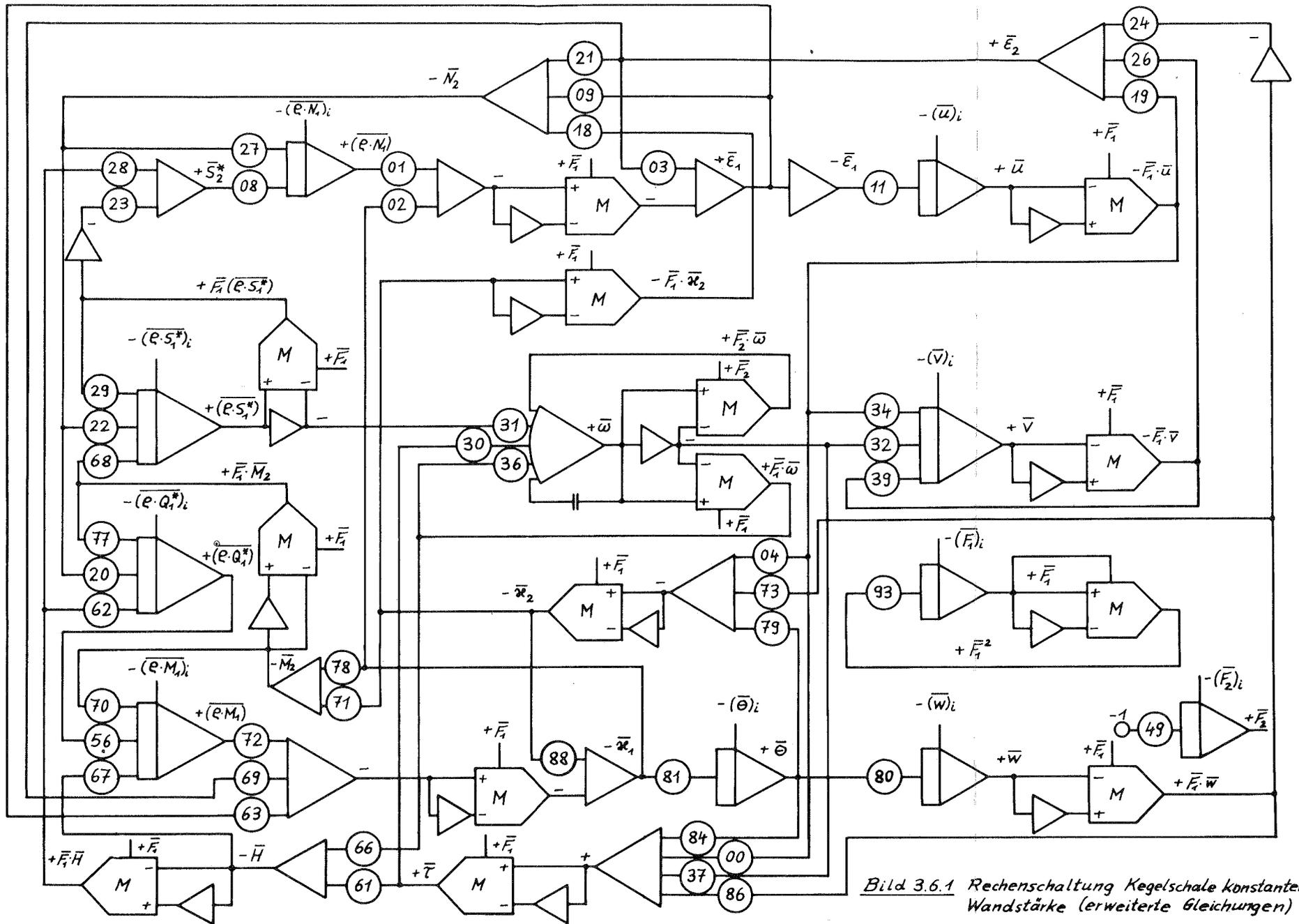


Bild 3.6.1 Rechenschaltung Kegelschale konstanter Wandstärke (erweiterte Gleichungen)

b) Vereinfachte Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dR}(\overline{eN_1}) &= -\textcircled{08} \overline{F_1}(\overline{eS}) + \textcircled{27} \overline{N_2}, \\ \frac{d}{dR}(\overline{eS}) &= -\textcircled{29} \overline{F_1}(\overline{eS}) + \textcircled{22} \overline{N_2}, \\ \frac{d}{dR}(\overline{eQ_1^*}) &= \textcircled{20} \overline{N_2} - \overline{F_1}[\textcircled{77} \overline{M_2} + \textcircled{62} \overline{M}], \\ \frac{d}{dR}(\overline{eM_1}) &= \textcircled{67} \overline{M} + \textcircled{70} \overline{M_2} - \textcircled{56}(\overline{eQ_1^*}); \end{aligned} \right\} (3.6.21/24)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{E_1} &= \textcircled{01} \overline{F_1}(\overline{eN_1}) - \textcircled{03} \overline{E_2}, \\ \overline{\omega} &= \textcircled{31} \overline{F_1}(\overline{eS}), \\ \overline{\varkappa_1} &= -\textcircled{72} \overline{F_1}(\overline{eM_1}) - \textcircled{88} \overline{\varkappa_2}, \\ \overline{M} &= \textcircled{61} \overline{\tau}, \\ \overline{N_2} &= \textcircled{21} \overline{E_2} + \textcircled{09} \overline{E_1}, \\ \overline{M_2} &= -\textcircled{71} \overline{\varkappa_2} - \textcircled{78} \overline{\varkappa_1}; \end{aligned} \right\} (3.6.25/30)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{u}}{dR} &= \textcircled{11} \overline{E_1}, \\ \overline{E_2} &= \textcircled{19} \overline{F_1} \cdot \overline{u} + \textcircled{26} \overline{F_1} \cdot \overline{v} + \textcircled{24} \overline{F_1} \cdot \overline{w}, \\ \frac{d\overline{v}}{dR} &= \textcircled{32} \overline{\omega} + \textcircled{34} \overline{F_1} \cdot \overline{u} + \textcircled{39} \overline{F_1} \cdot \overline{v}, \\ \frac{d\overline{\Theta}}{dR} &= \textcircled{81} \overline{\varkappa_1}, \\ \frac{d\overline{w}}{dR} &= -\textcircled{80} \overline{\Theta}, \\ \overline{\varkappa_2} &= \overline{F_1}[\textcircled{79} \overline{\Theta} + \textcircled{73} \overline{F_1} \cdot \overline{w}], \\ \overline{\tau} &= -\overline{F_1}[\textcircled{84} \overline{\Theta} + \textcircled{86} \overline{F_1} \cdot \overline{w}]; \end{aligned} \right\} (3.6.31/37)$$

$$\left. \frac{d\overline{F_1}}{dR} = -\textcircled{93} \overline{F_1}^2. \right\} (3.6.38)$$

01	$\frac{1-\nu^2}{\delta \cdot \rho_i} \frac{(\rho \cdot N_1)_{\max}}{(\tau_a E \varepsilon_1)_{\max}}$	39	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$	88	$\nu \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$
03	$\nu \frac{(\tau_a E \varepsilon_2)_{\max}}{(\tau_a E \varepsilon_1)_{\max}}$	56	$\frac{1}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}{(\rho M_1 / \tau_a)_{\max}}$	93	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$
08	$\frac{\eta}{\sin \nu \delta \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(\rho S)_{\max}}{(\rho N_1)_{\max}}$	61	$\frac{\delta^3}{12(1+\nu)} \frac{(\tau_a^2 E T)_{\max}}{(M / \tau_a)_{\max}}$		
09	$\frac{\nu \cdot \delta}{1-\nu^2} \frac{(\tau_a E \varepsilon_1)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	62	$\frac{2 \cdot \eta}{\lambda \cdot \rho_i} \frac{(M / \tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$		
11	$\frac{1}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \varepsilon_1)_{\max}}{(E \cdot u)_{\max}}$	67	$\frac{2 \cdot \eta}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(M / \tau_a)_{\max}}{(\rho M_1 / \tau_a)_{\max}}$		
19	$\frac{\sin \nu \delta}{\rho_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(\tau_a E \varepsilon_2)_{\max}}$	70	$\frac{1}{\lambda} \frac{(M_2 / \tau_a)_{\max}}{(\rho M_1 / \tau_a)_{\max}}$		
20	$\frac{\operatorname{ctg} \nu \delta}{\lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$	71	$\frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}{(M_2 / \tau_a)_{\max}}$		
21	$\frac{\delta}{1-\nu^2} \frac{(\tau_a E \varepsilon_2)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	72	$\frac{12(1-\nu^2)}{\delta^3 \cdot \rho_i} \frac{(\rho M_1 / \tau_a)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}$		
22	$\frac{\eta}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho S)_{\max}}$	73	$\frac{\eta^2}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}$		
24	$\frac{\cos \nu \delta}{\rho_i} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a E \varepsilon_2)_{\max}}$	77	$\frac{\eta^2}{\sin \nu \delta \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(M_2 / \tau_a)_{\max}}{(\rho \cdot Q_1^*)_{\max}}$		
26	$\frac{\eta}{\rho_i} \frac{(E \cdot v)_{\max}}{(\tau_a E \varepsilon_2)_{\max}}$	78	$\frac{\nu \cdot \delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}{(M_2 / \tau_a)_{\max}}$		
27	$\frac{1}{\lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(\rho N_1)_{\max}}$	79	$\frac{\sin \nu \delta}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \theta)_{\max}}{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_2)_{\max}}$		
29	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$	80	$\frac{1}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \theta)_{\max}}{(E \cdot w)_{\max}}$		
31	$\frac{2(1+\nu)}{\delta \cdot \rho_i} \frac{(\rho S)_{\max}}{(\tau_a E \omega)_{\max}}$	81	$\frac{1}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(\tau_a^2 E \cdot \alpha_1)_{\max}}{(\tau_a E \theta)_{\max}}$		
32	$\frac{1}{\sin \nu \delta \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \omega)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	84	$\frac{\eta}{\rho_i} \frac{(\tau_a E \theta)_{\max}}{(\tau_a^2 E T)_{\max}}$		
34	$\frac{\eta}{\sin \nu \delta \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	86	$\frac{\eta \cdot \sin \nu \delta}{\rho_i^2} \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(\tau_a^2 E T)_{\max}}$		

Tabelle 3.6.2 Potentiometerwerte (vereinfachte Gleichungen)

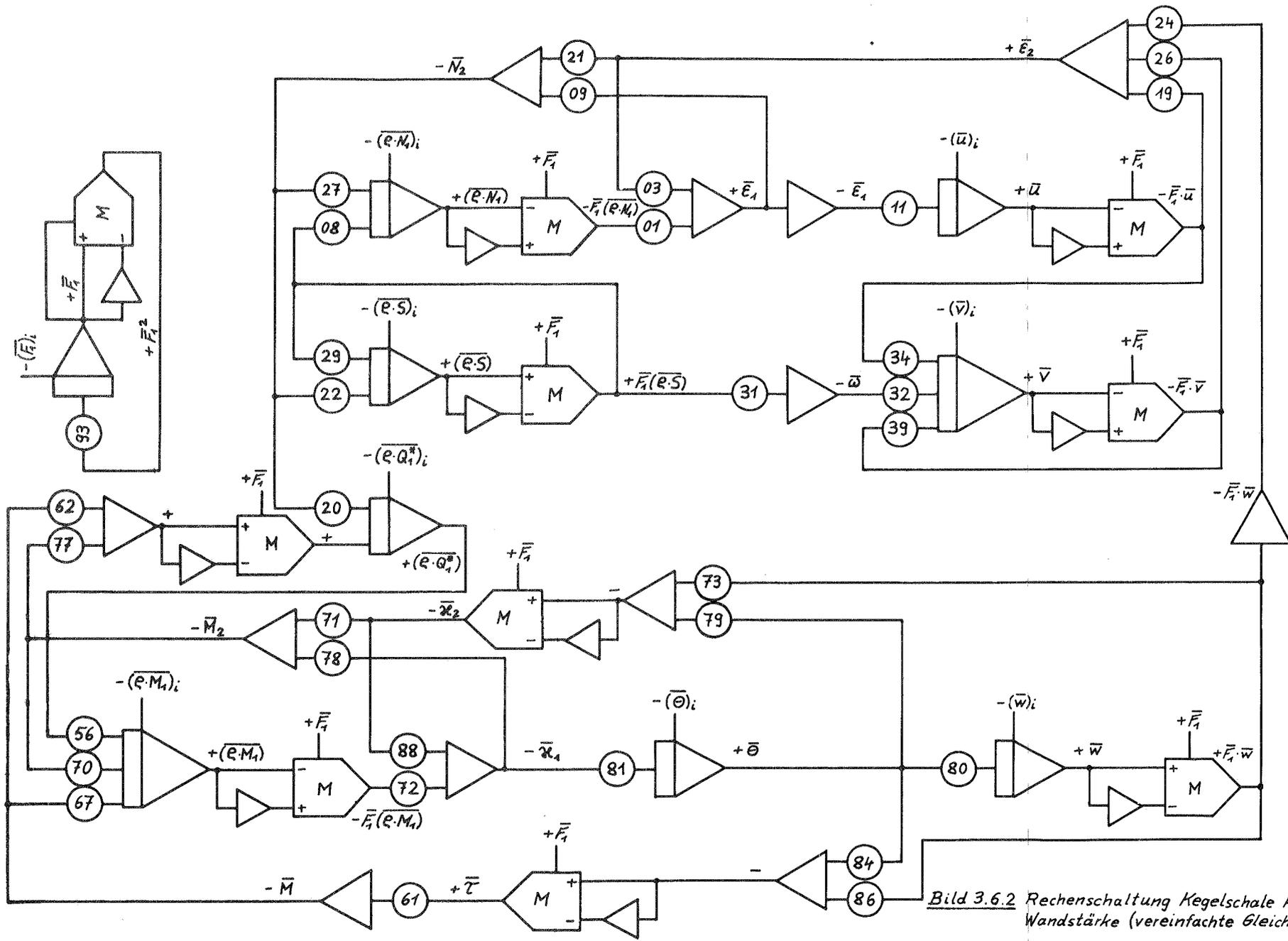


Bild 3.6.2 Rechenschaltung Kegelschale konstanter Wandstärke (vereinfachte Gleichungen)

c) Membrangleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dR} (\overline{eN}_1) &= - \textcircled{08} \overline{F}_1 (\overline{eS}), \\ \frac{d}{dR} (\overline{eS}) &= - \textcircled{29} \overline{F}_1 (\overline{eS}); \end{aligned} \right\} (3.6.39/40)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{E}_1 &= \textcircled{01} \overline{F}_1 (\overline{eN}_1), \\ \overline{\omega} &= \textcircled{34} \overline{F}_1 (\overline{eS}); \end{aligned} \right\} (3.6.41/42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{u}}{dR} &= \textcircled{11} \overline{E}_1, \\ \frac{d\overline{v}}{dR} &= \textcircled{32} \overline{\omega} + \textcircled{31} \overline{F}_1 \overline{u} + \textcircled{39} \overline{F}_1 \overline{v}; \end{aligned} \right\} (3.6.43/44)$$

$$\frac{d\overline{F}_1}{dR} = - \textcircled{93} \overline{F}_1^2 \quad \left. \right\} (3.6.45)$$

$\textcircled{01}$	$\frac{1}{\delta \cdot \rho_i} \frac{(\rho_i N_i)_{\max}}{(\tau_{\alpha} E E_i)_{\max}}$	$\textcircled{29}$	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$	$\textcircled{34}$	$\frac{2(1+\nu)}{\delta \cdot \rho_i} \frac{(\rho_i S)_{\max}}{(\tau_{\alpha} E \omega)_{\max}}$
$\textcircled{08}$	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(\rho_i S)_{\max}}{(\rho_i N_i)_{\max}}$	$\textcircled{31}$	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda \cdot \rho_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	$\textcircled{39}$	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$
$\textcircled{11}$	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_{\alpha} E E_i)_{\max}}{(E \cdot u)_{\max}}$	$\textcircled{32}$	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_{\alpha} E \omega)_{\max}}{(E \cdot v)_{\max}}$	$\textcircled{93}$	$\frac{1}{\lambda \cdot \rho_i}$

Tabelle 3.6.3 Potentiometerwerte (Membrangleichungen)

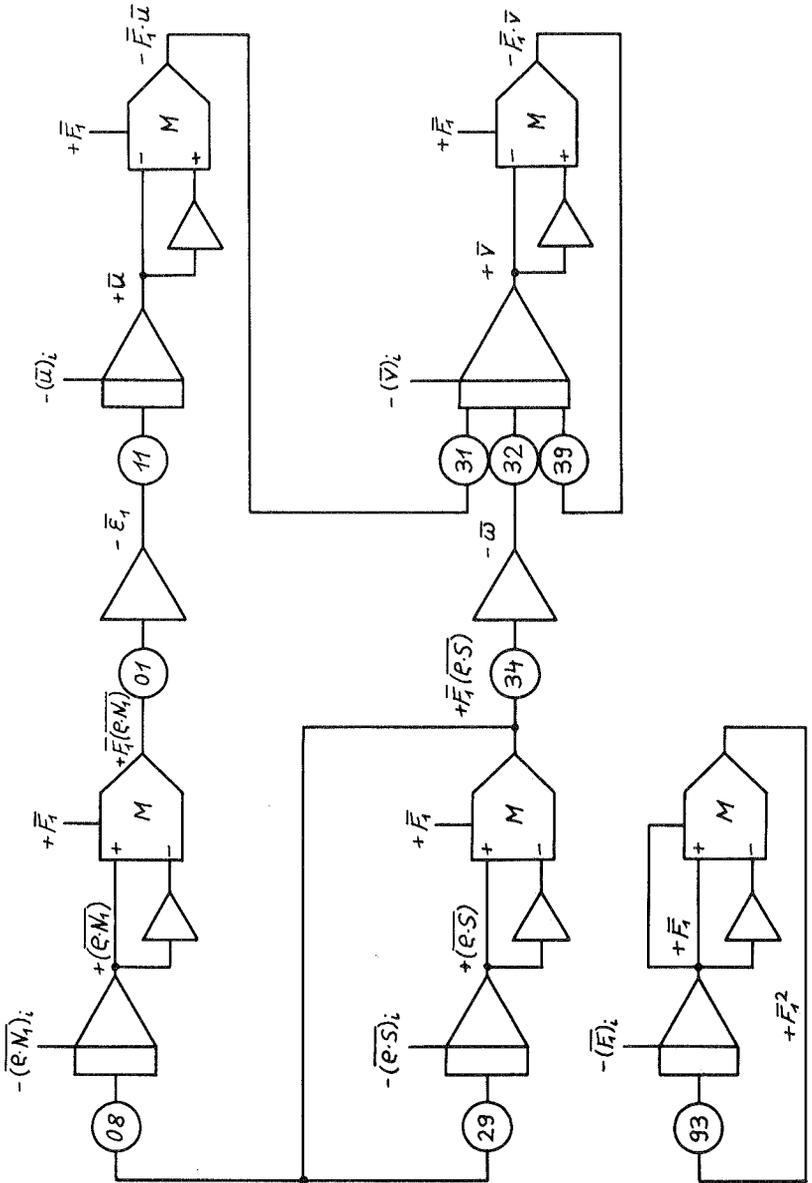


Bild 3.6.3 Rechenschaltung Kegelschale konstanter Wandstärke (Membran)

3.7 Rechenschaltung für den Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke

Die erweiterten Gleichungen sollen noch für eine Kegelschale angeschrieben werden, deren Wandstärke proportional dem Abstand von der Spitze ist:

$$s = h' \cdot e.$$

Die Konstante h' charakterisiert den Öffnungswinkel zwischen den beiden Schalenlaibungen. Das System (3.2.1/18) geht über in die Gln. (3.7.1/18).

Für einige Größen wird eine neue Amplitudennormierung eingeführt:

$$\left(\frac{M_2}{e}\right) = \frac{\left(\frac{M_2}{e \cdot r_a}\right)}{\left(\frac{M_2}{e \cdot r_a}\right)_{\max}} \longrightarrow \bar{M}_2 = \bar{F}_2 \left(\frac{M_2}{e}\right) = \frac{\left(\frac{M_2}{r_a}\right)}{\left(\frac{M_2}{e \cdot r_a}\right)_{\max}}$$

$$\left(\frac{H}{e}\right) = \frac{\left(\frac{H}{e \cdot r_a}\right)}{\left(\frac{H}{e \cdot r_a}\right)_{\max}} \longrightarrow \bar{H} = \bar{F}_2 \left(\frac{H}{e}\right) = \frac{\left(\frac{H}{r_a}\right)}{\left(\frac{H}{e \cdot r_a}\right)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e \cdot \varepsilon_1}\right) = \frac{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_1)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_1)_{\max}} \longrightarrow \bar{\varepsilon}_1 = \bar{F}_1 \left(\overline{e \cdot \varepsilon_1}\right) = \frac{(e_i \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_1)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_1)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e \cdot \varepsilon_2}\right) = \frac{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_2)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_2)_{\max}} \longrightarrow \bar{\varepsilon}_2 = \bar{F}_1 \left(\overline{e \cdot \varepsilon_2}\right) = \frac{(e_i \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_2)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \varepsilon_2)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e \cdot \omega}\right) = \frac{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \omega)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \omega)_{\max}} \longrightarrow \bar{\omega} = \bar{F}_1 \left(\overline{e \cdot \omega}\right) = \frac{(e_i \cdot r_a \cdot E \cdot \omega)}{(e \cdot r_a \cdot E \cdot \omega)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e^2 \cdot \varkappa_1}\right) = \frac{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1)_{\max}} \longrightarrow \bar{\varkappa}_1 = \bar{F}_1^2 \left(\overline{e^2 \cdot \varkappa_1}\right) = \frac{(e_i^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e^2 \cdot \varkappa_2}\right) = \frac{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2)_{\max}} \longrightarrow \bar{\varkappa}_2 = \bar{F}_1^2 \left(\overline{e^2 \cdot \varkappa_2}\right) = \frac{(e_i^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2)_{\max}}$$

$$\left(\overline{e^2 \cdot \tau}\right) = \frac{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \tau)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \tau)_{\max}} \longrightarrow \bar{\tau} = \bar{F}_1^2 \left(\overline{e^2 \cdot \tau}\right) = \frac{(e_i^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \tau)}{(e^2 \cdot r_a^2 \cdot E \cdot \tau)_{\max}}$$

Damit erhält man für den Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke die Gln. (3.7.19/38).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot N_1) &= -\frac{n}{\sin \nu} S_2^* + N_2, \\ \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot S_1^*) &= -\frac{1}{\rho} (\rho \cdot S_1^*) + \frac{n}{\sin \nu} N_2 - n \cdot \operatorname{ctg} \nu \left(\frac{M_2}{\rho \cdot \tau_a} \right), \\ \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot Q_1^*) &= \operatorname{ctg} \nu \cdot N_2 - \frac{n^2}{\sin \nu} \left(\frac{M_2}{\rho \cdot \tau_a} \right) - 2 \cdot n \left(\frac{H}{\rho \cdot \tau_a} \right), \\ \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot M_1 / \tau_a) &= \rho \left[\frac{2 \cdot n}{\sin \nu} \left(\frac{H}{\rho \cdot \tau_a} \right) + \left(\frac{M_2}{\rho \cdot \tau_a} \right) \right] - \frac{1}{\sin \nu} (\rho \cdot Q_1^*); \end{aligned} \right\} (3.7.1/4)$$

$$\left. \begin{aligned} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) &= \frac{1-\nu^2}{h^3} \frac{1}{\rho} (\rho \cdot N_1) - \frac{h^2 \cdot \cos \nu}{12} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) - \nu (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2), \\ (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot w) &= -\frac{2 \cdot h^2 \cdot \cos \nu}{8+h^2 \cos^2 \nu} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) + \frac{16(1+\nu)}{h^3(8+h^2 \cos^2 \nu)} \frac{1}{\rho} (\rho \cdot S_1^*), \\ (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1) &= -\frac{12(1-\nu^2)}{h^3} \frac{1}{\rho^2} (\rho \cdot M_1 / \tau_a) - \cos \nu (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) - \nu \cos \nu (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) - \nu (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2), \\ \left(\frac{H}{\rho \cdot \tau_a} \right) &= \frac{h^3}{12(1+\nu)} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) + \frac{h^3 \cos \nu}{48(1+\nu)} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot w), \\ N_2 &= \frac{h^3}{1-\nu^2} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) + \frac{\nu \cdot h^3}{1-\nu^2} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1) - \frac{h^3 \cos \nu}{12(1-\nu^2)} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2), \\ S_2^* &= \frac{1}{\rho} (\rho \cdot S_1^*) - 2 \cdot \cos \nu \left(\frac{H}{\rho \cdot \tau_a} \right), \\ \left(\frac{M_2}{\rho \cdot \tau_a} \right) &= -\frac{h^3}{12(1-\nu^2)} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) - \frac{\nu \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1); \end{aligned} \right\} (3.7.5/11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (E \cdot u) &= \frac{1}{\sin \nu} \frac{1}{\rho} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_1), \\ (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot \varepsilon_2) &= \sin \nu (E \cdot u) + n (E \cdot v) + \cos \nu (E \cdot w), \\ \frac{d}{d\rho} (E \cdot v) &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\sin \nu} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot w) + \frac{n}{\sin \nu} (E \cdot u) + (E \cdot v) \right], \\ \frac{d}{d\rho} (\tau_a \cdot E \cdot \theta) &= \frac{1}{\sin \nu} \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_1), \\ \frac{d}{d\rho} (E \cdot w) &= -\frac{1}{\sin \nu} (\tau_a \cdot E \cdot \theta), \\ (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \varkappa_2) &= \sin \nu \cdot \rho (\tau_a \cdot E \cdot \theta) + (n^2 - \cos^2 \nu) (E \cdot w) - \sin \nu \cdot \cos \nu (E \cdot u), \\ (\rho^2 \cdot \tau_a^2 \cdot E \cdot \tau) &= n \cdot \cos \nu (E \cdot u) + \frac{\cos \nu}{2} (\rho \cdot \tau_a \cdot E \cdot w) - n \cdot \rho (\tau_a \cdot E \cdot \theta) - n \cdot \sin \nu (E \cdot w). \end{aligned} \right\} (3.7.12/18)$$

Randgrößen:

$$\begin{aligned} &(\rho \cdot N_1), (\rho \cdot S_1^*), (\rho \cdot Q_1^*), (\rho \cdot M_1 / \tau_a); \\ &(E \cdot u), (E \cdot v), (E \cdot w), (\tau_a \cdot E \cdot \theta). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dR} (\overline{e \cdot N_1}) &= - (08) \overline{S_2^*} + (27) \overline{N_2}, \\
 \frac{d}{dR} (\overline{e \cdot S_1^*}) &= - (29) \overline{F_1} (\overline{e \cdot S_1^*}) + (22) \overline{N_2} - (68) (\overline{M_2/e}), \\
 \frac{d}{dR} (\overline{e \cdot Q_1^*}) &= (20) \overline{N_2} - (77) (\overline{M_2/e}) - (62) (\overline{H/e}), \\
 \frac{d}{dR} (\overline{e \cdot M_1}) &= (67) \overline{F_2} (\overline{H/e}) + (70) \overline{F_2} (\overline{M_2/e}) - (56) (\overline{e \cdot Q_1^*});
 \end{aligned} \right\} (3.7.19/22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 (\overline{e \cdot \varepsilon_1}) &= (01) \overline{F_1} (\overline{e \cdot M_1}) - (02) (\overline{e^2 \alpha_1}) - (03) (\overline{e \cdot \varepsilon_2}), \\
 (\overline{e \cdot \omega}) &= - (30) (\overline{e^2 \tau}) + (31) \overline{F_1} (\overline{e \cdot S_1^*}), \\
 (\overline{e^2 \alpha_1}) &= - (72) \overline{F_1^2} (\overline{e \cdot M_1}) - (63) (\overline{e \cdot \varepsilon_1}) - (69) (\overline{e \cdot \varepsilon_2}) - (88) (\overline{e^2 \alpha_2}), \\
 (\overline{H/e}) &= (61) (\overline{e^2 \tau}) + (66) (\overline{e \cdot \omega}), \\
 \overline{N_2} &= (27) (\overline{e \cdot \varepsilon_2}) + (09) (\overline{e \cdot \varepsilon_1}) - (18) (\overline{e^2 \alpha_2}), \\
 \overline{S_2^*} &= (23) \overline{F_1} (\overline{e \cdot S_1^*}) - (28) (\overline{H/e}), \\
 (\overline{M_2/e}) &= - (71) (\overline{e^2 \alpha_2}) - (78) (\overline{e^2 \alpha_1});
 \end{aligned} \right\} (3.7.23/29)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\bar{u}}{dR} &= (11) \overline{F_1} (\overline{e \cdot \varepsilon_1}), \\
 (\overline{e \cdot \varepsilon_2}) &= (19) \bar{u} + (26) \bar{v} + (24) \bar{w}, \\
 \frac{d\bar{v}}{dR} &= \overline{F_1} [(32) (\overline{e \cdot \omega}) + (34) \bar{u} + (39) \bar{v}], \\
 \frac{d\bar{\theta}}{dR} &= (81) \overline{F_1^2} (\overline{e^2 \alpha_1}), \\
 \frac{d\bar{w}}{dR} &= - (80) \bar{\theta}, \\
 (\overline{e^2 \alpha_2}) &= (79) \overline{F_2} \cdot \bar{\theta} + (73) \bar{w} - (04) \bar{u}, \\
 (\overline{e^2 \tau}) &= (00) \bar{u} + (37) (\overline{e \cdot \omega}) - (84) \overline{F_2} \cdot \bar{\theta} - (86) \bar{w};
 \end{aligned} \right\} (3.7.30/36)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\overline{F_1}}{dR} &= - (93) \overline{F_1^2}, \\
 \frac{d\overline{F_2}}{dR} &= (49).
 \end{aligned} \right\} (3.7.37/38)$$

00	$n \cdot \cos \nu \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E T)_{\max}}$	27	$\frac{1}{\lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(e N_1)_{\max}}$	68	$n \cdot \operatorname{ctg} \nu \frac{(M_2)_{\max}}{(e \tau_a)_{\max}}$
01	$\frac{1 - \nu^2}{h^1 \cdot e_i} \frac{(e N_1)_{\max}}{(e \tau_a E E_1)_{\max}}$	28	$2 \cdot \cos \nu \frac{(H)_{\max}}{(S_2^*)_{\max}}$	69	$\nu \cdot \cos \nu \frac{(e \tau_a E E_2)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}$
02	$\frac{h^2 \cdot \cos \nu}{12} \frac{(e \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}{(e \tau_a E E_1)_{\max}}$	29	$\frac{1}{\lambda \cdot e_i}$	70	$\frac{1}{\lambda} \frac{(M_2)_{\max}}{(e M_1 / \tau_a)_{\max}}$
03	$\nu \frac{(e \tau_a E E_2)_{\max}}{(e \tau_a E E_1)_{\max}}$	30	$\frac{2 h^2 \cdot \cos \nu}{(8 + h^2 \cdot \cos^2 \nu)} \frac{(e \tau_a^2 E T)_{\max}}{(e \tau_a E u)_{\max}}$	71	$\frac{h^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{(e^2 \tau_a E \alpha_2)_{\max}}{(M_2)_{\max}}$
04	$\sin \nu \cdot \cos \nu \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(e \tau_a^2 E \alpha_2)_{\max}}$	31	$\frac{16(1 + \nu)}{h(8 + h^2 \cdot \cos^2 \nu)} \frac{(e S_1^*)_{\max}}{(e \tau_a E u)_{\max}}$	72	$\frac{12(1 - \nu^2)}{h^3 \cdot e_i^2} \frac{(e M_1 / \tau_a)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}$
08	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(S_2^*)_{\max}}{(e N_1)_{\max}}$	32	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda e_i} \frac{(e \tau_a E u)_{\max}}{(E \cdot \nu)_{\max}}$	73	$(n^2 \cdot \cos^2 \nu) \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_2)_{\max}}$
09	$\frac{\nu \cdot h^1}{1 - \nu^2} \frac{(e \tau_a E E_1)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	34	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda e_i} \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(E \cdot \nu)_{\max}}$	77	$\frac{n^2}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(M_2)_{\max}}{(e Q_1^*)_{\max}}$
11	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda e_i} \frac{(e \tau_a E E_1)_{\max}}{(E \cdot u)_{\max}}$	37	$\frac{\cos \nu}{2} \frac{(e \tau_a E w)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E T)_{\max}}$	78	$\frac{\nu \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}{(M_2)_{\max}}$
18	$\frac{h^3 \cos \nu}{12(1 - \nu^2)} \frac{(e \tau_a^2 E \alpha_2)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	39	$\frac{1}{\lambda \cdot e_i}$	79	$\sin \nu \frac{(e \tau_a E \Theta)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_2)_{\max}}$
19	$\sin \nu \frac{(E \cdot u)_{\max}}{(e \tau_a E E_2)_{\max}}$	49	$\frac{1}{\lambda}$	80	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(\tau_a E \Theta)_{\max}}{(E w)_{\max}}$
20	$\operatorname{ctg} \nu \frac{(N_2)_{\max}}{\lambda} \frac{(e Q_1^*)_{\max}}{(e \tau_a E \Theta)_{\max}}$	56	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(e Q_1^*)_{\max}}{(e M_1 / \tau_a)_{\max}}$	81	$\frac{1}{\sin \nu \cdot \lambda e_i^2} \frac{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}{(\tau_a E \Theta)_{\max}}$
21	$\frac{h^1}{1 - \nu^2} \frac{(e \tau_a E E_2)_{\max}}{(N_2)_{\max}}$	61	$\frac{h^3}{12(1 + \nu)} \frac{(e^2 \tau_a^2 E T)_{\max}}{(H)_{\max}}$	84	$n \frac{(\tau_a E \Theta)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E T)_{\max}}$
22	$\frac{n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(N_2)_{\max}}{(e S_1^*)_{\max}}$	62	$\frac{2 \cdot n}{\lambda} \frac{(H)_{\max}}{(e \tau_a)_{\max}}$	86	$n \cdot \sin \nu \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E T)_{\max}}$
23	$\frac{1}{e_i} \frac{(e S_1^*)_{\max}}{(S_2^*)_{\max}}$	63	$\cos \nu \frac{(e \tau_a E E_1)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}$	88	$\nu \frac{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_2)_{\max}}{(e^2 \tau_a^2 E \alpha_1)_{\max}}$
24	$\cos \nu \frac{(E \cdot w)_{\max}}{(e \tau_a E E_2)_{\max}}$	66	$\frac{h^3 \cos \nu}{48(1 + \nu)} \frac{(e \tau_a E w)_{\max}}{(H)_{\max}}$	93	$\frac{1}{\lambda \cdot e_i}$
26	$\frac{n}{(e \tau_a E E_2)_{\max}} \frac{(E \cdot \nu)_{\max}}{(e \tau_a E E_2)_{\max}}$	67	$\frac{2 \cdot n}{\sin \nu \cdot \lambda} \frac{(H)_{\max}}{(e \tau_a)_{\max}}$		

Tabelle 3.7.1 Potentiometerwerte

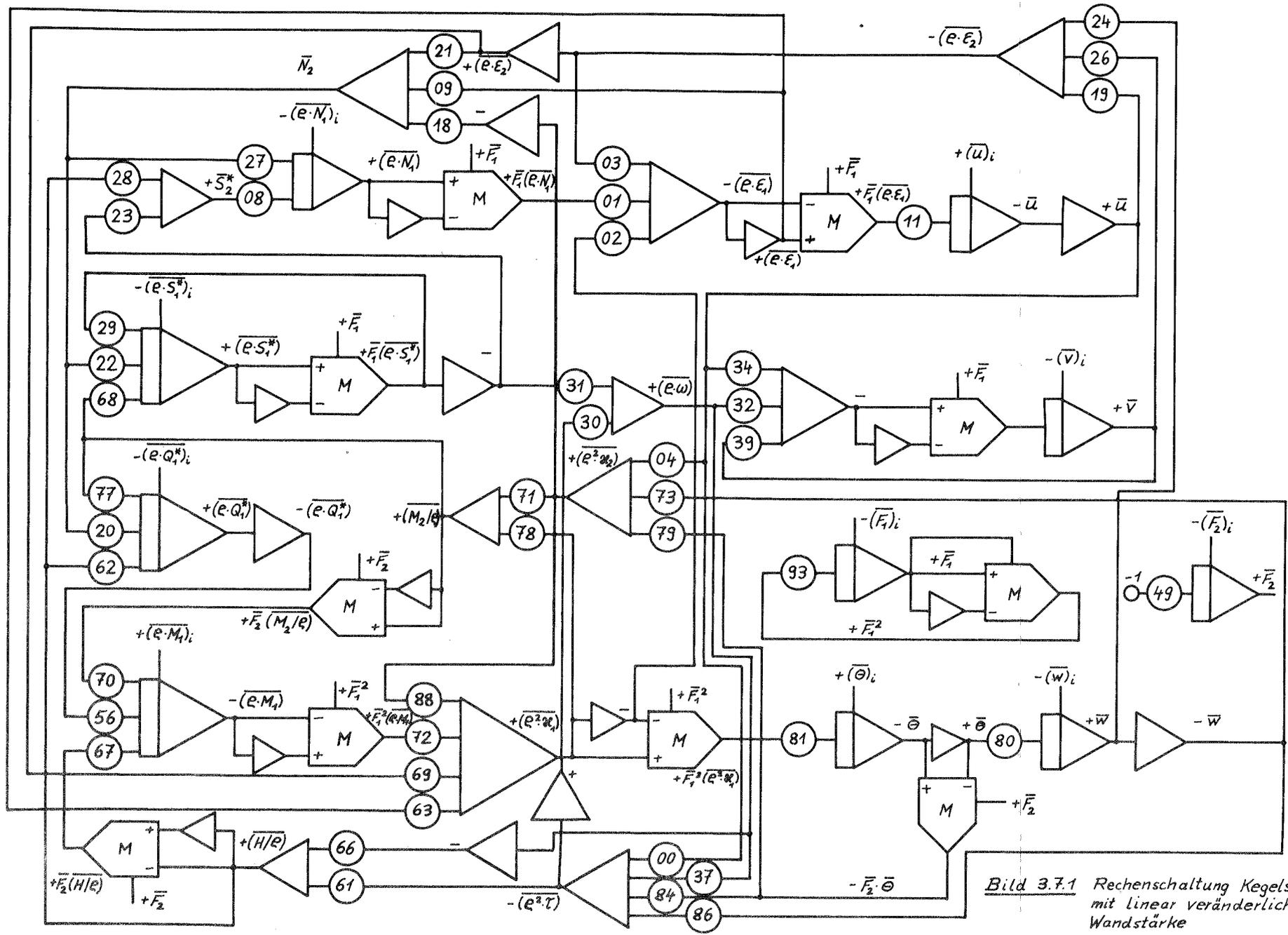


Bild 3.7.1 Rechenschaltung Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke

3.8 Statisches und dynamisches Prüfen

Um Fehlermöglichkeiten bei der numerischen Lösung der Aufgaben auszuschalten, ist es unbedingt notwendig, statische und dynamische Programmprüfungen vorzunehmen. Zur Durchführung der vorbereitenden Rechnungen wurde ein Fortran-Programm für einen Digitalrechner (IBM 1620) erstellt. Eingabewerte hierfür sind die Schalenparameter und die ungefähren Maximalwerte. Als Ergebnis erhält man die Potentiometerwerte und die Daten für die statische Programmprüfung. Das statische Prüfen gibt Aufschluß darüber, ob alle Verbindungsleitungen richtig gesteckt sind, und ob die Rechelemente statisch richtig arbeiten. Außerdem wird die Koeffizienteneinstellung nachkontrolliert.

Eine hinreichende Sicherheit für die Zuverlässigkeit der Rechnung kann nur eine dynamische Programmprüfung liefern. Hierbei wird das Ergebnis von speziellen Fällen mit bekannten Lösungen verglichen, siehe Abschnitt 5.1, "Abschätzung der Rechengenauigkeit".

3.9 Schaltung für Maximalwertgeber

Der Verlauf der Lösungsfunktionen wurde mit einem mehrkanaligen Lichtschreiber aufgezeichnet. Die zugehörigen Anfangs- und Endwerte sind mit einem Digitalvoltmeter, bei dem die Anzeige der Rechenspannung direkt in Ziffern erfolgt, gemessen und über einen Drucker ausgegeben worden. Zur Bestimmung der Maximalwerte derjenigen Kurven, die ihren Größtwert nicht an den Schalenrändern haben, diente eine Hilfsschaltung, Bild 3.9.1. Sobald die Eingangsgröße \bar{X} ihren Scheitelwert \bar{X}_s erreicht hat, schaltet der Komparator um. \bar{X}_s wird gespeichert und kann ebenfalls ausgedruckt werden.

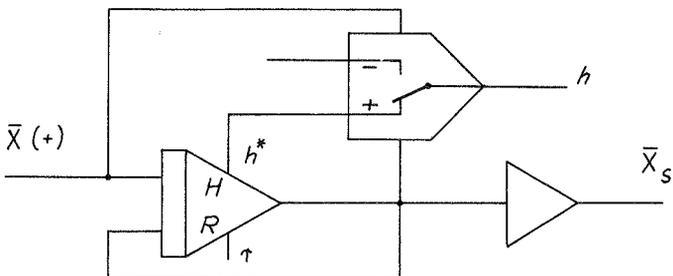


Bild 3.9.1

4. Das Randwertproblem

4.1 Lösung nach dem Überlagerungsverfahren

Bei dem hier vorliegenden Randwertproblem sind an jedem Ende des Kegelstumpfes vier Randbedingungen zu erfüllen. Der Analogrechner erlaubt auf direktem Wege jedoch nur die Lösung von Aufgaben mit Anfangswerten. Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, Randwertprobleme auf Anfangswertaufgaben zurückzuführen. Wenn es sich um ein System linearer Differentialgleichungen handelt, läßt sich das Überlagerungsverfahren anwenden, [7, §22]. Zunächst wird mit den vier an der Stelle e_i gegebenen Anfangsbedingungen $(\bar{y}_k)_i$ eine Lösung berechnet, wobei die restlichen vier unbekanntenen Anfangswerte $(\bar{z}_k)_i$ gleich null gesetzt werden. Dann gibt man für die Anfangswerte $(\bar{z}_k)_i$ nacheinander beliebige Werte $(\bar{A}_k)_i$ ein und bestimmt die zugehörigen Lösungen:

Rechnung Nr.	Anfangswerte bei e_i		Lösungen bei e_a	
	$(\bar{y}_k)_i$	$(\bar{z}_k)_i$	$(\bar{y}_k)_a$	$(\bar{z}_k)_a$
0	$(\bar{y}_k)_i$	0	$(\bar{y}_k^0)_a$	$(\bar{z}_k^0)_a$
m	0	$(\bar{A}_k)_i$ für $k=m$ 0 für $k \neq m$	$(\bar{y}_k^m)_a$	$(\bar{z}_k^m)_a$

$$k = 1 (1) 4, m = 1 (1) 4.$$

Zusammensetzen der Einzellösungen ergibt das Gleichungssystem

$$(\bar{z}_k)_a = (\bar{z}_k^0)_a + \sum_{m=1}^4 C_m \cdot (\bar{z}_k^m)_a.$$

Hieraus lassen sich die Koeffizienten C_m berechnen, da die \bar{z}_k an der Stelle e_a bekannt sind.

Die gesuchten Anfangswerte erhält man aus den Beziehungen

$$(\bar{z}_k)_i = C_m \cdot (\bar{A}_k)_i \quad ; \quad k = m.$$

4.2 Iteratives Rechenverfahren (trial - error)

Ein für den Analogrechner besser geeignetes Verfahren ist die automatisch ablaufende Iteration, [8]. Für die unbekannt Anfangsgrößen führt man zu Beginn der Rechnung willkürliche Werte ein. Nach jedem Durchlauf wird die Abweichung der gewonnenen Ergebnisse zu den vorgegebenen Endwerten gespeichert. Aus den Unterschieden werden die Änderungen für die Anfangswerte der nachfolgenden Iteration abgeleitet. Als Beispiel sei die Schaltung zur Abfrage der Verschiebung \bar{u} betrachtet, Bild 4.2.1. \bar{u} soll am Ende der Rechenzeit den Wert Null erreichen.

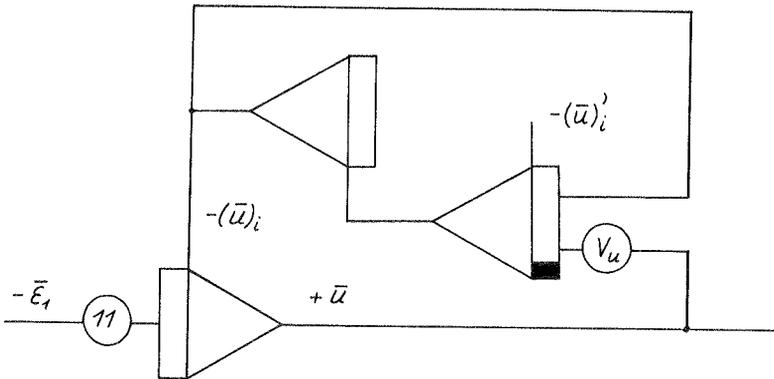


Bild 4.2.1

$(\bar{u})'_i$ ist ein geschätzter Anfangswert, mit dem der erste Zyklus abläuft. Der zweite Durchlauf wird mit einem verbesserten Anfangswert vorgenommen, wobei die automatische Korrektur von $(\bar{u})'_i$ proportional zum Fehler erfolgt. Dies wird solange fortgesetzt, bis die Randbedingung $(\bar{u})_\alpha = 0$ erfüllt ist. Den zugehörigen Anfangswert kann man aus der Speicherschaltung entnehmen. Mit Hilfe eines Bewertungsfaktors V läßt sich dieses Verfahren beschleunigen. Die Faktoren dürfen allerdings nicht zu groß gewählt werden, da sonst keine Konvergenz mehr eintritt.

Bei inhomogenen Randbedingungen kann derselbe Lösungsweg eingeschlagen werden. Anstelle einer expliziten Aussage über die

Randgrößen müssen für jeden Rand vier Kontinuitäts- bzw. Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Für die Iteration ist es nicht notwendig, gleichartige Größen miteinander zu verbinden. So kann beispielsweise die Abweichung der Verschiebung \bar{u} vom vorgeschriebenen Endwert direkt dazu benutzt werden, den zunächst unbekanntem Anfangswert der Normalkraft \bar{N}_1 zu korrigieren.

In der Abb. 4.2.2 ist ein typischer Verlauf für die gleichzeitige Iteration der vier Verschiebungsgrößen auf Null angegeben (einseitig eingespannte Schale). Die obere Hälfte zeigt das Einpendeln der Anfangsgrößen auf die gesuchten Werte. Der erste Rechenzyklus wurde mit Zahlenwerten gestartet, die zehn Prozent unter den richtigen lagen. In der unteren Hälfte des Bildes sind die zugehörigen Endwerte aufgetragen. Dieses trial-error Verfahren war nach etwa 25 Rechenoperationen abgelaufen. Die günstigsten Werte von V wurden für die einzelnen Größen durch Probieren gefunden. Außerdem konnte nur experimentell festgestellt werden, mit welchem Vorzeichen die abzufragenden Parameter behaftet sein müssen, damit das Verfahren konvergiert. Die iterative Rechenmethode ist auch zur Lösung von nicht-linearen Differentialgleichungen geeignet.

4.3 Das zugeordnete Problem

Eine weitere Möglichkeit zur Behandlung einer Randwertaufgabe auf dem Analogrechner soll hier nur kurz gestreift werden. In [9] wird gezeigt, daß jedes lineare Randwertproblem auf eine reine Anfangswertaufgabe höherer Ordnung zurückgeführt werden kann. Aus der Lösung des zugeordneten Problems ergeben sich die Anfangswerte für die ursprünglichen Gleichungen. Nachteilig bei dieser Methode ist die rasche Zunahme der Ordnung des zugeordneten mit derjenigen des gegebenen Problems. So entspricht der Differentialgleichung 8. Ordnung ein System 108. Ordnung, das sich für die reine Randstörungsaufgabe auf die 70. Ordnung reduziert. Bei Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten würde außer den Integrierern noch eine große Anzahl von Multiplizierern benötigt. Man sieht, daß der praktischen Anwendung dieses Verfahrens durch den Aufwand an Rechenelementen Grenzen gesetzt sind.

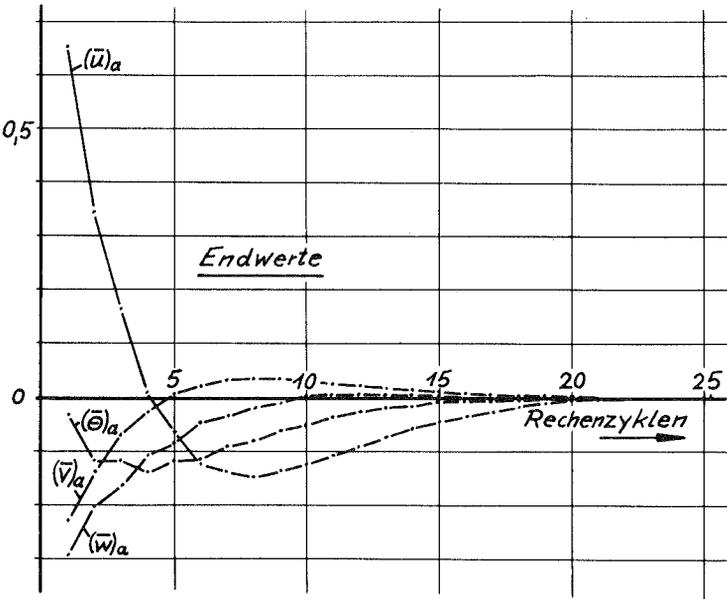
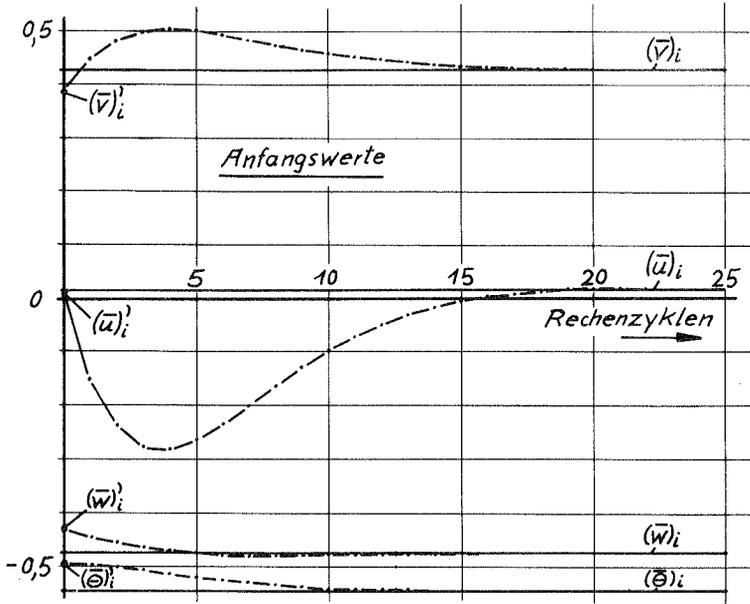


Bild 4.2.2

4.4 Beseitigung von Stabilitätsschwierigkeiten

Bei der Durchrechnung spezieller Fälle für die Kegelschale ergaben sich für bestimmte Parameter Instabilitäterscheinungen. Diese traten auf für lange Schalen, hohe Reihenglieder der Fourierentwicklung und dünne Wandstärken. Es handelt sich hier um ein Problem, das den numerischen Schwierigkeiten beim Übertragungsverfahren entspricht, [10]. Nur werden die Grenzen am Analogrechner schon früher erreicht als beim Digitalrechner, der eine wesentlich größere Stellenzahl zur Verfügung hat. Wenn der Biegespannungszustand von einem Rand her so stark abklingt, daß er den anderen nicht mehr beeinflusst, ist es unmöglich, eine unmittelbare Beziehung zwischen beiden Rändern herzustellen. Hier muß sowohl das Überlagerungsverfahren als auch die iterative Rechenmethode versagen.

Zur Beseitigung der Schwierigkeiten wird folgender Weg vorgeschlagen. Man teilt die Schale in t einzelne Abschnitte auf. Für jedes Segment wird eine Übertragungsmatrix B_j aufgestellt. Hierzu gibt man am Analogrechner für alle Anfangsgrößen $(\bar{X}_k)_{j-1}$ nacheinander beliebige Werte $(\bar{A}_k)_{j-1}$ ein und notiert ihre Wirkungen $(\bar{X}_k)_j$:

Rechnung Nr.	Anfangswerte bei ϱ_{j-1} $(\bar{X}_k)_{j-1}$	Lösungen bei ϱ_j $(\bar{X}_k)_j$
m	$(\bar{A}_k)_{j-1}$ für $k = m$ 0 für $k \neq m$	$(\bar{X}_k^m)_j$

$$k = 1 (1) 8, m = 1 (1) 8, j = 1 (1) t.$$

Die Elemente der Matrix B_j erhält man aus

$$(b_{km})_j = \frac{(\bar{X}_k^m)_j}{(\bar{A}_k)_{j-1}}.$$

Mit Hilfe der Forderung, daß die Übergangsbedingungen an den Schnittstellen erfüllt sein müssen, läßt sich ein lineares Gleichungssystem für die Verschiebungs- und Kraftgrößen

aufstellen. Hierin werden noch die Bedingungen für den inneren und äußeren Schalenrand eingeführt. Die anschließende Auflösung des Systems nach dem Gaußschen Algorithmus liefert die Werte an den Schnittstellen und insbesondere auch die vier unbekanntem Anfangswerte für den inneren Rand. Das Gleichungssystem ist im wesentlichen um die Hauptdiagonale besetzt. Bei umfangreichen Problemen ist es zweckmäßiger, das Formänderungsgrößen- oder Kraftgrößenverfahren unter Benutzung von Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen anzuwenden.

Mit einer hybriden Rechenanlage ließe sich die praktische Berechnung solcher Aufgaben besonders gut durchführen. Der Analogrechner würde die Lösungen der Differentialgleichungen für die Schalenabschnitte liefern. Die übrige Arbeit, vor allem die Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems, übernimmt dann der Digitalrechner.

Als Beispiel wurde der in Abb. 6.4.1 maßstäblich dargestellte Kegelstumpf in $t=5$ Abschnitte unterteilt. Der äußere Rand $\varrho = \varrho_a$ ist eingespannt, während in den freien Rand $\varrho = \varrho_i$ die Einheitsquerkraft $(\bar{Q}_1^*)_i = 1$ rotationssymmetrisch ($n=0$) eingeleitet wird. Für drehsymmetrische Belastung brauchen an jedem Schalenrand nur drei Bedingungen vorgegeben zu werden, da sich eine Gleichungsgruppe abspalten läßt. Außerdem geht die Ersatzquerkraft Q_1^* über in Q_1 . Das Ergebnis der Rechnung ist aus den Bildern 5.4.1/2 ersichtlich. Die durch Kreuze angedeuteten Werte sind die Lösungen des Gleichungssystems, während die Kurven unter Benutzung der daraus gewonnenen Anfangswerte vom Analogrechner geliefert wurden.

5. Abschätzung der Rechengenauigkeit

5.1 Membrankegelschale

Die Rechnungen wurden auf einem Telefunken-Präzisionsanalogrechner RA 800-H (ohne Digitalzusatz) durchgeführt. Der Komponentenfehler für diese Anlage ist mit $<10^{-4}$ angegeben. Zur Aufindung der günstigsten Lösungsmethode am Analogrechner und zur Abschätzung der Rechengenauigkeit wurden zunächst die Membrangleichungen (3.6.39/45) untersucht. Die analytischen Lösungen hierfür sind bekannt, [11, S. 601]:

$$N_{1M} = \frac{n}{\sin^2 \vartheta \cdot r^2} C_5 + \frac{1}{r} C_6 \quad ;$$

$$S_M = \frac{1}{r^2} C_5 \quad ;$$

$$u_M = -\frac{n}{\sin^2 \vartheta \cdot E \cdot h \cdot r} C_5 + \frac{\ln r}{\sin \vartheta \cdot E \cdot h} C_6 + C_7 \quad ;$$

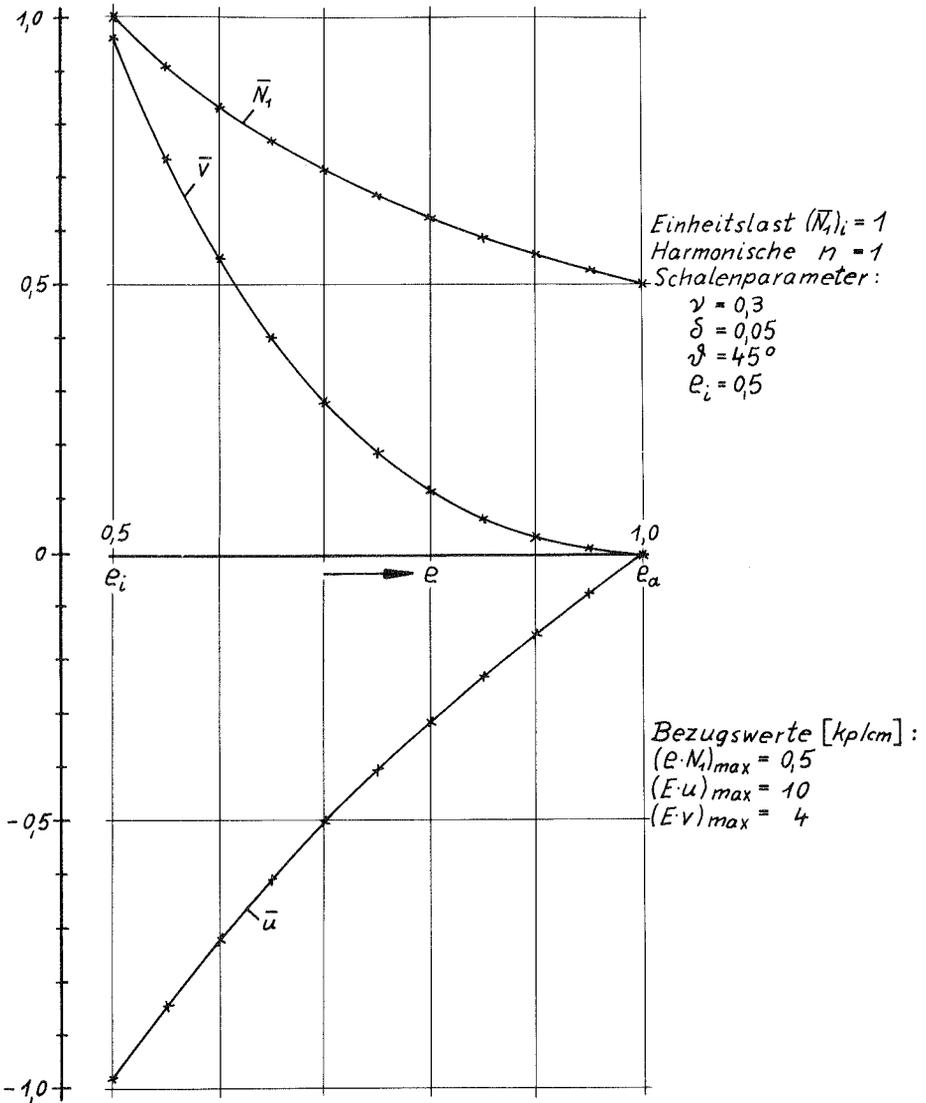
$$v_M = \frac{n^2 - 2(1+\nu) \sin^2 \vartheta}{2 \cdot \sin^3 \vartheta \cdot E \cdot h \cdot r} C_5 - \frac{n(\ln r + 1)}{\sin^2 \vartheta \cdot E \cdot h} C_6 - \frac{n}{\sin \vartheta} C_7 + r \cdot C_8 \quad ;$$

$$w_M = -\frac{n(n^2 - 4 \cdot \sin^2 \vartheta)}{2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta \cdot E \cdot h \cdot r} C_5 + \frac{(n^2 - \sin^2 \vartheta) \ln r + (n^2 - \nu \sin^2 \vartheta)}{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta \cdot E \cdot h} C_6 + \frac{n^2 \cdot \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta} C_7 - \frac{n \cdot r}{\cos \vartheta} C_8 \quad ;$$

$$\Theta_M = -\frac{n(n^2 - 4 \cdot \sin^2 \vartheta)}{2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta \cdot E \cdot h \cdot r^2} C_5 - \frac{n^2 - \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot E \cdot h \cdot r} C_6 + \frac{n \cdot \sin \vartheta}{\cos \vartheta} C_8 \quad ;$$

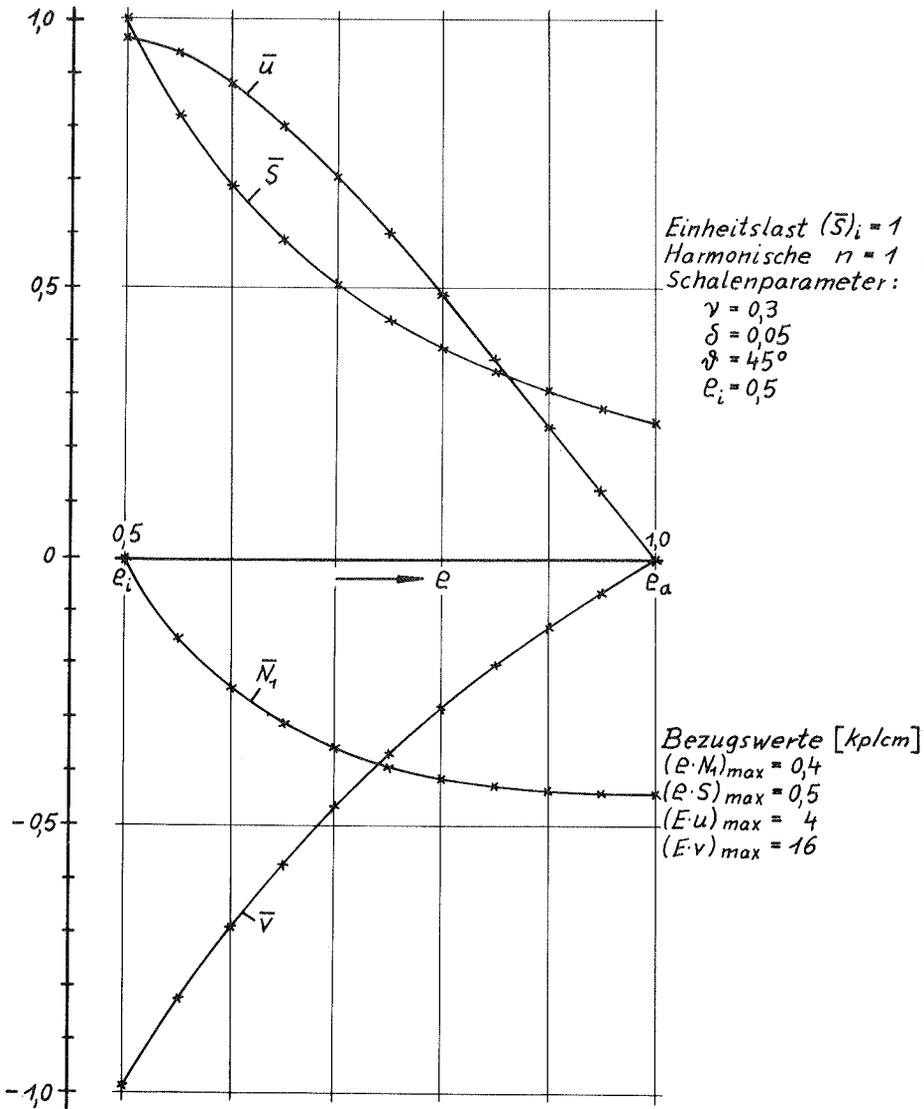
In den Abbildungen 5.1.1/2 werden am Analogrechner gewonnene Lösungen mit den exakten analytischen Ergebnissen verglichen. Die Abmessungen der zugehörigen Schale gehen aus Bild 6.4.2 hervor. Am freien Rand greift einmal die Normalkraft (\bar{N}_1); und zum anderen die Schubkraft (\bar{S}); mit $n = 1$ an. Die Fehler in den Anfangs- bzw. Endwerten liegen unter 0,2%, wobei als Fehler definiert ist

$$f = \frac{|\text{analoger Wert}| - |\text{exakter Wert}|}{|\text{exakter Wert}|} \cdot 100\%.$$



Größe	$(\bar{N}_1)_a$	$(\bar{u})_i$	$(\bar{v})_i$
— = Lösung des Analogrechners	0,4995	-0,9788	0,9654
x = exakte analytische Lösung	0,5000	-0,9802	0,9655
Fehler f [%]	-0,10	-0,14	-0,01

Bild 5.1.1 Kegelschale (Membran)



Größe	$(\bar{N}_1)_a$	$(\bar{S})_a$	$(\bar{u})_i$	$(\bar{v})_i$
— = Lösung des Analogrechners	-0,4416	0,2495	0,9650	-0,9809
x = exakte analytische Lösung	-0,4419	0,2500	0,9655	-0,9819
Fehler f [%]	-0,07	-0,20	-0,05	-0,10

Bild 5.1.2 Kegelschale (Membran)

5.2 Kreisringscheibe und -platte

In dem gewählten Polarkoordinatensystem läßt sich mit $\nu = 90^\circ$ der Grenzübergang zur Kreisringscheibe bzw. -platte ohne weiteres durchführen. Die Gln. (3.6.21/37) zerfallen in zwei Systeme von jeweils 4. Ordnung. Diese Entkopplung läßt sich auch an der Analogrechsaltung sehr gut verfolgen. Mit $\nu \rightarrow 90^\circ$ werden die Potentiometerwerte für (20) und (24) immer kleiner, und für $\nu = 90^\circ$ sind sie gleich null. Am Analogrechner erhält man als Spezialfall die Lösungen für die Kreisringscheibe und -platte, die beide parallel zueinander berechnet werden können. Diese einer exakten analytischen Behandlung zugänglichen Sonderfälle sollen benutzt werden, um die Ergebnisse der Analogrechnung zu überprüfen. Für eine ebene Fläche verschwinden die Unterschiede zwischen den erweiterten und den vereinfachten Gleichungen.

Mit Hilfe harmonischer Funktionen lassen sich die Lösungen herleiten für die Kreisringscheibe, Tab. 5.2.1, und für die Kreisringplatte, Tab. 5.2.2, vgl. z.B. [12]. Die untersuchte Anordnung ist aus Bild 6.5.4 ersichtlich. Der Rand $\varrho = \varrho_i$ wird durch die Einheitskraft $(\bar{N}_1)_i$ bzw. $(\bar{Q}_1^*)_i$ mit $n = 1$ belastet. In den Abbildungen 5.2.1/2 sind die Rechenergebnisse wiedergegeben. Die größte Abweichung f der analogen Lösung vom exakten Ergebnis beträgt etwa 0,3%. Der Übergang zur Zylinderschale ist mit den gewählten Koordinaten nicht möglich, da sich Divisionen durch Null ergeben würden.

$n = 0$

$$N_1 = C_1 + r^{-2} C_2 ,$$

$$S = r^{-2} C_3 ,$$

$$u = \frac{1}{E \cdot h} \left[(1-\nu) r \cdot C_1 - (1+\nu) r^{-1} C_2 \right] ,$$

$$v = - \frac{1+\nu}{E \cdot h} r^{-1} C_3 + r \cdot C_4 ;$$

$n = 1$

$$N_1 = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[-2(1-\nu) r^{-3} C_2 + \frac{2(1-\nu^2)}{1-3 \cdot \nu} r \cdot C_3 + \frac{3-\nu^2-2 \cdot \nu}{3-\nu} r^{-1} C_4 \right] ,$$

$$S = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left[-4 \cdot r^{-3} C_2 + \frac{4(1+\nu)}{1-3 \cdot \nu} r \cdot C_3 - \frac{2(1-\nu)}{3-\nu} r^{-1} C_4 \right] ,$$

$$u = C_1 + r^{-2} C_2 + r^2 C_3 + \ln r \cdot C_4 ,$$

$$v = -C_1 + r^{-2} C_2 + \frac{5+\nu}{1-3 \cdot \nu} r^2 C_3 - \left(\ln r + \frac{1+\nu}{3-\nu} \right) C_4 ;$$

$n > 1$

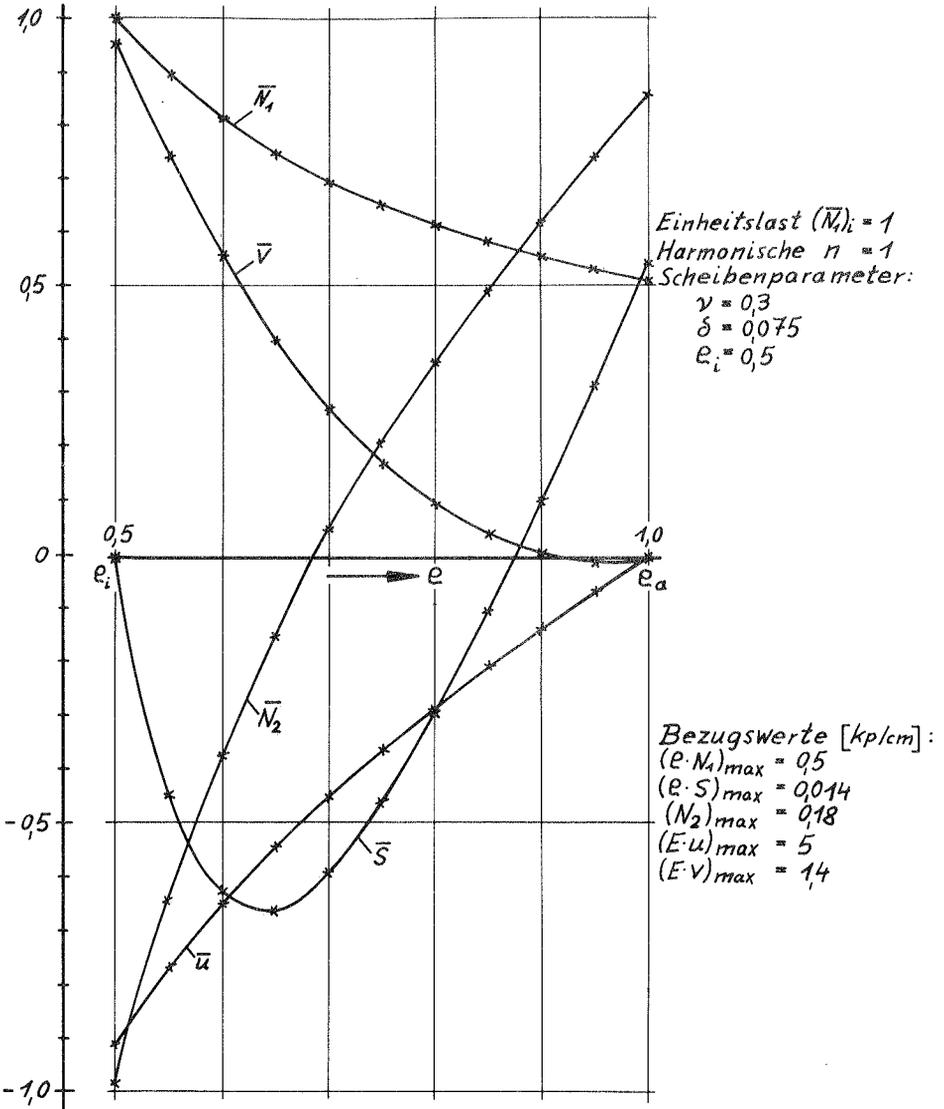
$$N_1 = (n-n^2) r^{n-2} C_1 - (n^2+n) r^{-(n+2)} C_2 + (n+2-n^2) r^n C_3 - (n-2+n^2) r^{-n} C_4 ,$$

$$S = (n^2-n) r^{n-2} C_1 - (n^2-n) r^{-(n+2)} C_2 + (n^2+n) r^n C_3 - (n^2-n) r^{-n} C_4 ,$$

$$u = \frac{1}{E \cdot h} \left[-n(1+\nu) r^{n-1} C_1 + n(1+\nu) r^{-(n+1)} C_2 + (2(1-\nu)-n(1+\nu)) r^{n+1} C_3 + (2(1-\nu)+n(1+\nu)) r^{-(n-1)} C_4 \right] ,$$

$$v = \frac{1}{E \cdot h} \left[n(1+\nu) r^{n-1} C_1 + n(1+\nu) r^{-(n+1)} C_2 + (n+4+\nu \cdot n) r^{n+1} C_3 + (n-4+\nu \cdot n) r^{-(n-1)} C_4 \right] .$$

Tablelle 5.2.1 Kreisringscheibe



Größe	$(\bar{N}_1)_a$	$(\bar{S})_a$	$(\bar{N}_2)_i$	$(\bar{u})_i$	$(\bar{v})_i$
— = Lösung des Analogrechners	0,5148	0,5429	-0,9877	-0,9051	0,9592
x = exakte analytische Lösung	0,5151	0,5414	-0,9867	-0,9052	0,9586
Fehler f [%]	-0,06	0,28	0,10	-0,01	0,06

Bild 5.21 Kreisringscheibe

$n = 0$

$$Q_1^* = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} 4 \cdot r^{-1} \cdot C_4,$$

$$M_1 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[-(1-\nu) r^{-2} \cdot C_2 + 2(1+\nu) C_3 + (2(1+\nu) \ln r + (3+\nu)) C_4 \right],$$

$$W = C_1 + \ln r \cdot C_2 + r^2 \cdot C_3 + r^2 \cdot \ln r \cdot C_4,$$

$$\Theta = -r^{-1} \cdot C_2 - 2 \cdot r \cdot C_3 - r(2 \cdot \ln r + 1) C_4;$$

$n = 1$

$$Q_1^* = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[2(1-\nu) r^{-4} \cdot C_2 + 2(3+\nu) C_3 - (3-\nu) r^{-2} \cdot C_4 \right],$$

$$M_1 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[2(1-\nu) r^{-3} \cdot C_2 + 2(3+\nu) r \cdot C_3 + (1+\nu) r^{-1} \cdot C_4 \right],$$

$$W = r \cdot C_1 + r^{-1} \cdot C_2 + r^3 \cdot C_3 + r \cdot \ln r \cdot C_4,$$

$$\Theta = -C_1 + r^{-2} \cdot C_2 - 3 \cdot r^2 \cdot C_3 - (\ln r + 1) C_4;$$

$n > 1$

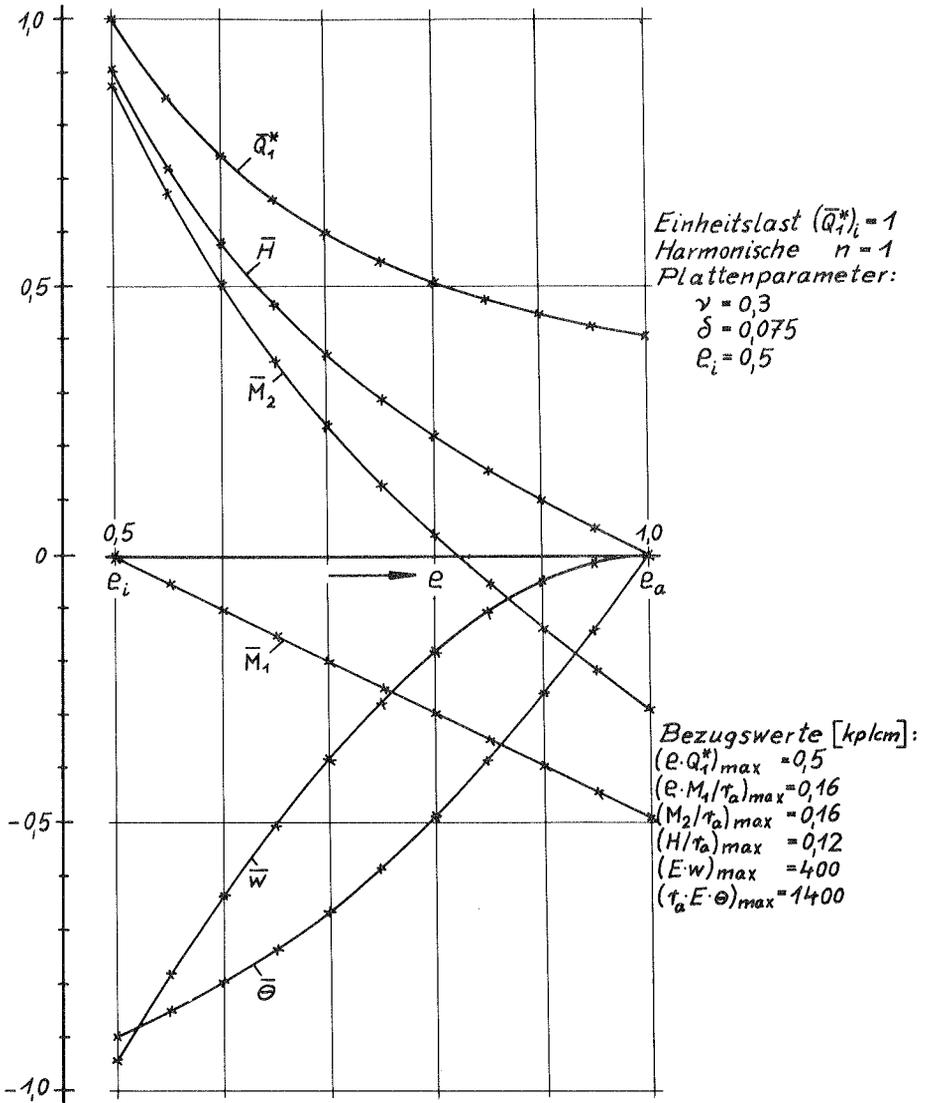
$$Q_1^* = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[-(1-\nu) n^2 (n-1) r^{n-3} \cdot C_1 + (1-\nu) n^2 (n+1) r^{-(n+3)} \cdot C_2 \right. \\ \left. + (-n^3(1-\nu) + n^2(3+\nu) + 4n) r^{n-1} \cdot C_3 + (n^2(1-\nu) + n^2(3+\nu) - 4n) r^{-(n+1)} \cdot C_4 \right],$$

$$M_1 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) n (n-1) r^{n-2} \cdot C_1 + (1-\nu) n (n+1) r^{-(n+2)} \cdot C_2 \right. \\ \left. + (n^2(1-\nu) + n(3+\nu) + 2(1+\nu)) r^n \cdot C_3 + (n^2(1-\nu) - n(3+\nu) + 2(1+\nu)) r^{-n} \cdot C_4 \right],$$

$$W = r^n \cdot C_1 + r^{-n} \cdot C_2 + r^{n+2} \cdot C_3 + r^{-(n-2)} \cdot C_4,$$

$$\Theta = -n \cdot r^{n-1} \cdot C_1 + n \cdot r^{-(n+1)} \cdot C_2 - (n+2) r^{n+1} \cdot C_3 + (n-2) r^{-(n-1)} \cdot C_4.$$

Table 5.2.2 Kreisringplatte



Größe	$(Q_1^*)_a$	$(M_1)_a$	$(M_2)_i$	$(H)_i$	$(\bar{w})_i$	$(\bar{\theta})_i$
— = Lösung des Analogrechners	0,4070	-0,4927	0,8816	0,9049	-0,9409	-0,8974
x = exakte analytische Lösung	0,4077	-0,4928	0,8825	0,9050	-0,9413	-0,8964
Fehler f [%]	-0,17	-0,02	-0,10	-0,01	-0,04	0,11

Bild 5.22 Kreisringplatte

5.3 Schwach gekrümmter Kegelstumpf unter rotationssymmetrischer Belastung

Das Differentialgleichungssystem der schwach gekrümmten Kegelschale läßt sich für rotationssymmetrische Belastung in eine Besselsche Differentialgleichung zurückführen, [13], [14]. Zunächst kann man die Gleichungen abspalten, die zu einer reinen Torsionsbelastung gehören und mit den entsprechenden Membrangleichungen identisch sind. Übrig bleibt ein System 6. Ordnung. Unter der Voraussetzung, daß nur Gleichgewichtsgruppen an den Schalenrändern angreifen, wird das Problem auf die 4. Ordnung reduziert. Mit Hilfe der Transformation

$$\eta = 2 \cdot \mu \sqrt{i \cdot r} ; \quad i^2 = -1 ; \quad \mu^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h} \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} .$$

ergibt sich die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2(r \cdot Q_1)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d(r \cdot Q_1)}{d\eta} + \left(1 - \frac{4}{\eta^2}\right) (r \cdot Q_1) = 0 .$$

Die Real- und Imaginärteile der Lösung werden durch die Thomsonfunktionen ausgedrückt, Tab. 5.3.1. Für den Fall, daß die Bedingung

$$(r \cdot N_1) - t g \vartheta (r \cdot Q_1) = 0$$

nicht erfüllt ist, läßt sich näherungsweise noch ein Membranspannungszustand überlagern.

In den Abbildungen 5.3.1/3 wird für die Schale nach Bild 6.4.2 und einen Momentenangriff $(\bar{M}_1)_i = 1$ am freien Rand ein Vergleich mit den Lösungskurven des Analogrechners durchgeführt. Zur Berechnung der Thomsonfunktionen ist die asymptotische Reihenentwicklung benutzt worden. Hierbei wurden so viele Reihenglieder berücksichtigt, wie zur Erzielung einer vierstelligen Rechengenauigkeit nötig waren, [15]. Die beiden Verschiebungen u und w erhält man nur in der Kombination

$$\epsilon_2 = \frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{\cos \vartheta}{r} w .$$

Mit Hilfe einer numerischen Integration läßt sich w aus der Beziehung

$$\frac{dw}{dr} = - \frac{1}{\sin \vartheta} \Theta$$

bestimmen. Nach [16, S. 197] wurde hierzu die Simpson-Regel in Verbindung mit der 3/8-Regel angewendet.

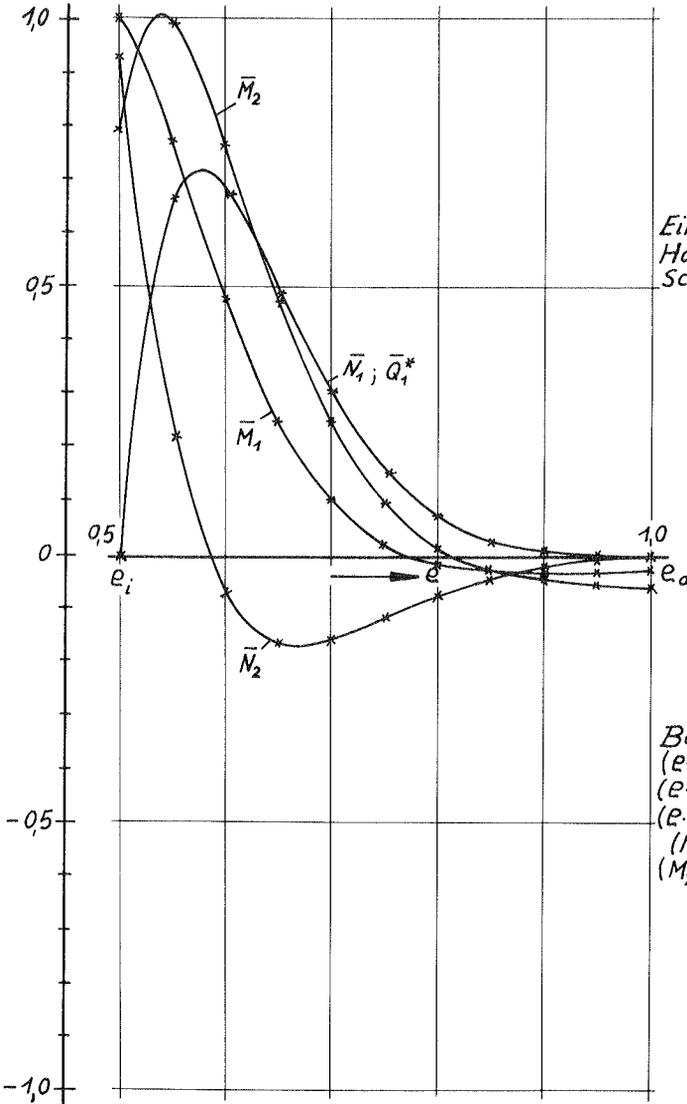
$$Q_1 = \frac{\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X}{\tau} C_1 + \frac{\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X}{\tau} C_2 + \frac{\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X}{\tau} C_3 + \frac{\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X}{\tau} C_4,$$

$$M_1 = -\frac{2 \cdot X^{-2}}{\sin \vartheta} \left[X \cdot \ker^2 X - 2(1-\nu)(\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X) \right] C_1 + \frac{2 \cdot X^{-2}}{\sin \vartheta} \left[X \cdot \ker^2 X - 2(1-\nu)(\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X) \right] C_2 \\ - \frac{2 \cdot X^{-2}}{\sin \vartheta} \left[X \cdot \ker^2 X - 2(1-\nu)(\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X) \right] C_3 + \frac{2 \cdot X^{-2}}{\sin \vartheta} \left[X \cdot \ker^2 X - 2(1-\nu)(\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X) \right] C_4,$$

$$E_2 = \frac{\tau \vartheta}{E \cdot h \cdot \tau} \left[\frac{X}{2} \ker^2 X - (1+\nu) \ker X + 2(1+\nu) X^{-1} \cdot \ker^2 X \right] C_1 + \frac{\tau \vartheta}{E \cdot h \cdot \tau} \left[\frac{X}{2} \ker^2 X - (1+\nu) \ker X - 2(1+\nu) X^{-1} \cdot \ker^2 X \right] C_2 \\ + \frac{\tau \vartheta}{E \cdot h \cdot \tau} \left[\frac{X}{2} \ker^2 X - (1+\nu) \ker X + 2(1+\nu) X^{-1} \cdot \ker^2 X \right] C_3 + \frac{\tau \vartheta}{E \cdot h \cdot \tau} \left[\frac{X}{2} \ker^2 X - (1+\nu) \ker X - 2(1+\nu) X^{-1} \cdot \ker^2 X \right] C_4,$$

$$\Theta = \frac{\tau^2 \vartheta^2 \mu^2 (\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X)}{E \cdot h} C_1 - \frac{\tau^2 \vartheta^2 \mu^2 (\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X)}{E \cdot h} C_2 + \frac{\tau^2 \vartheta^2 \mu^2 (\ker X + 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X)}{E \cdot h} C_3 - \frac{\tau^2 \vartheta^2 \mu^2 (\ker X - 2 \cdot X^{-1} \cdot \ker^2 X)}{E \cdot h} C_4.$$

Table 5.3.1 Schwach gekrümmte Kegelschale unter rotations-symmetrischer Belastung

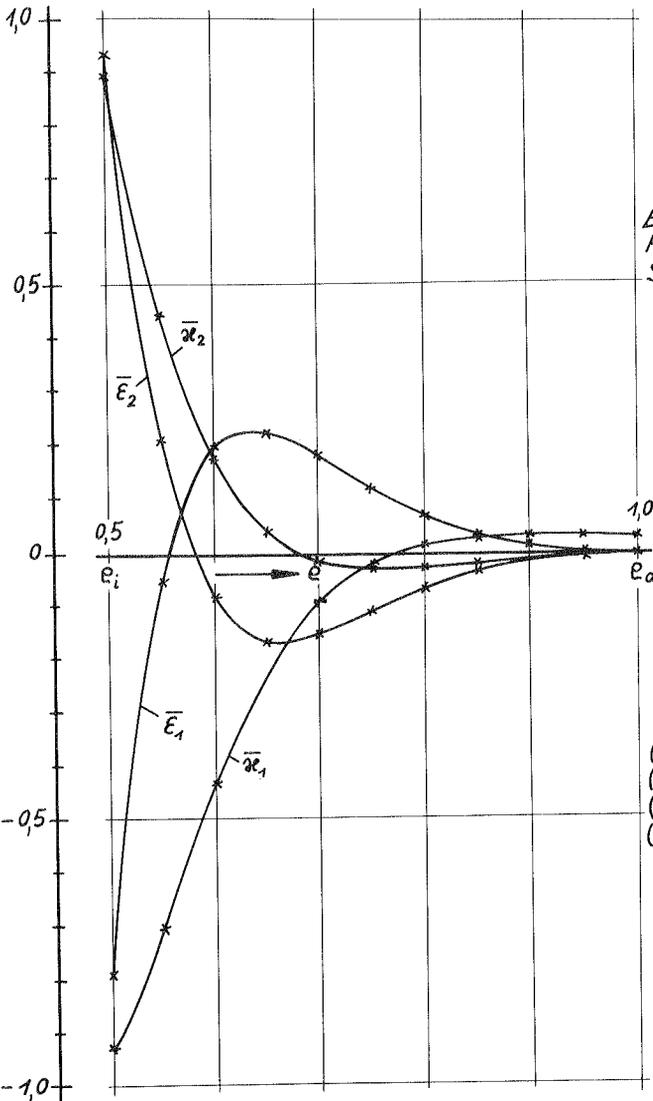


Einheitslast $(\bar{M}_1)_i = 1$
 Harmonische $n = 0$
 Schalenparameter:
 $\nu = 0.3$
 $\delta = 0.05$
 $\vartheta = 45^\circ$
 $e_i = 0.5$

Bezugswerte [kp/cm]:
 $(e \cdot M_1)_{\max} = 2.5$
 $(e \cdot Q_1^*)_{\max} = 2.5$
 $(e \cdot M_1/r_a)_{\max} = 0.5$
 $(N_2)_{\max} = 70$
 $(M_2/r_a)_{\max} = 0.14$

Größe	$(\bar{N}_2)_i$	$(\bar{M}_2)_i$
— = Lösung des Analogrechners	0,9346	0,7979
x = analytische Lösung (Besselsche Dgl.)	0,9349	0,7979
Fehler f [%]	-0,03	0,00

Bild 5.3.1 Kegelschale (rotationssymmetrisch belastet)

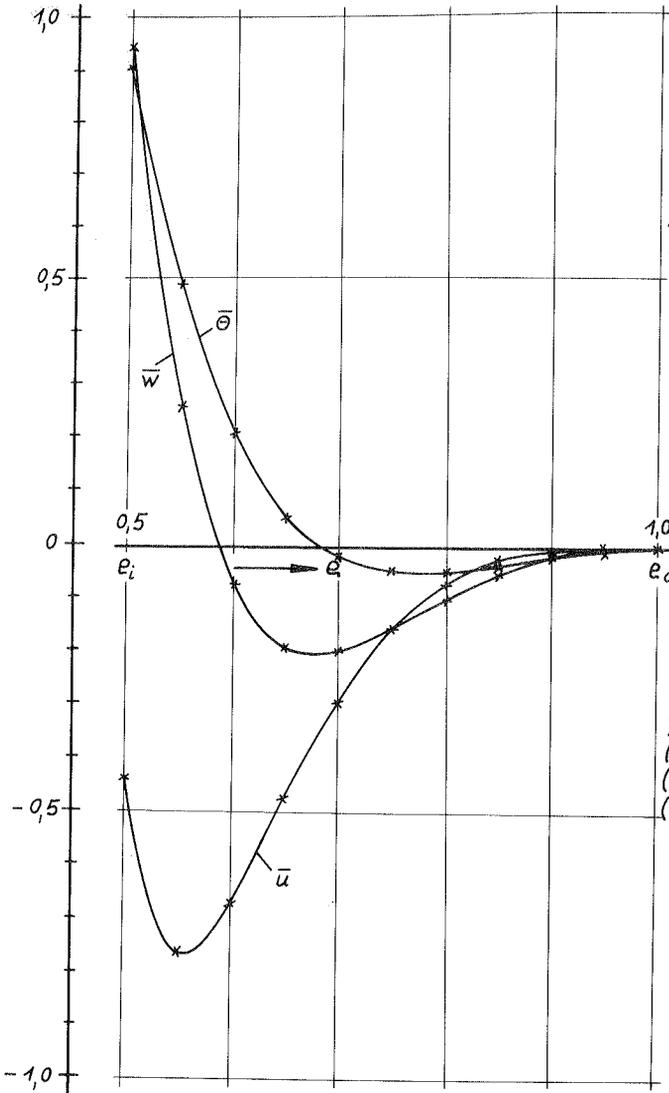


Einheitslast $(\bar{M}_1)_i = 1$
 Harmonische $n = 0$
 Schalenparameter:
 $\nu = 0,3$
 $\delta = 0,05$
 $\psi = 45^\circ$
 $\rho_i = 0,5$

Bezugswerte [kplcm]:
 $(\tau_a \cdot E \cdot E_1)_{\max} = 500$
 $(\tau_a \cdot E \cdot E_2)_{\max} = 1400$
 $(\tau_a^2 \cdot E \cdot \alpha_1)_{\max} = 10 \cdot 10^4$
 $(\tau_a^2 \cdot E \cdot \alpha_2)_{\max} = 2 \cdot 10^4$

Größe	$(\bar{E}_1)_i$	$(\bar{E}_2)_i$	$(\bar{\alpha}_1)_i$	$(\bar{\alpha}_2)_i$
— = Lösung des Analogrechners	-0,7864	0,9359	-0,9277	0,9036
x = analytische Lösung (Besselsche Dgl)	-0,7852	0,9343	-0,9278	0,9030
Fehler f [%]	0,15	0,17	-0,01	0,07

Bild 5.3.2 Kegelschale (rotationssymmetrisch belastet)



Einheitslast $(\bar{M}_1)_i = 1$
 Harmonische $n = 0$
 Schalenparameter:
 $\nu = 0,3$
 $\delta = 0,05$
 $\beta = 45^\circ$
 $e_i = 0,5$

Bezugswerte [kplcm]:
 $(E \cdot u)_{\max} = 40$
 $(E \cdot w)_{\max} = 1000$
 $(\tau \cdot E \cdot \theta)_{\max} = 14 \cdot 10^4$

Größe	$(\bar{u})_i$	$(\bar{w})_i$	$(\bar{\theta})_i$
— = Lösung des Analogrechners	-0,4428	0,9431	0,9125
x = analytische Lösung (Besselsche Dgl.)	-0,4400	0,9424	0,9121
Fehler f [%]	0,64	0,07	0,04

Bild 5.3.3 Kegelschale (rotationssymmetrisch belastet)

5.4 Analytische Näherungslösungen nach Novozhilov

Die Maximalwerte für die Amplitudennormierung sind nach dem in [2] angegebenen Verfahren zur näherungsweise Berechnung von dünnen Rotationsschalen bestimmt worden. Novozhilov vernachlässigt bei seiner Methode in einigen Ausdrücken Glieder von der Größenordnung h/R im Vergleich zu eins; R ist der kleinste Krümmungsradius. Aus der Verknüpfung der Kontinuitätsbedingungen der Mittelfläche mit den Gleichgewichtsbedingungen erhält er zwei Ausdrücke für die Querkräfte Q_1 und Q_2 . Einsetzen in das Kräfte- und Momentengleichgewicht ergibt 6 Gleichungen mit den 6 Unbekannten N_1, N_2, S, M_1, M_2 , und M . Durch die Einführung der komplexen Größen

$$\tilde{N}_1 = N_1 + \frac{i}{c} \frac{M_2 - \nu \cdot M_1}{1 - \nu^2},$$

$$\tilde{N}_2 = N_2 + \frac{i}{c} \frac{M_1 - \nu \cdot M_2}{1 - \nu^2},$$

$$\tilde{S} = S + \frac{i}{c} \frac{M}{1 - \nu}, \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}$$

reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf die Hälfte. Bezüglich der Breitenkreiskoordinate wird eine Fourierreihenentwicklung durchgeführt. Mit Hilfe eines Ansatzes, der nur für $n = 0$ und $n = 1$ exakt erfüllt ist, erhält man eine einzige Differentialgleichung 2. Ordnung. Die näherungsweise Integration dieser Gleichung liefert die gesuchten Schnittgrößen. Aus den geometrischen Beziehungen werden durch ähnliche Näherungsbetrachtungen die Verschiebungsgrößen gewonnen. Führt man diese Rechnungen für die Kegelschale durch, dann erhält man mit Berücksichtigung des Membranspannungszustandes die Lösungen nach Tab. 5.4.1. Da sich die Ersatzkräfte von den ursprünglichen Kräften durch Glieder von der Größenordnung h/R im Vergleich zu eins unterscheiden, ist im Rahmen der Genauigkeit $S_1^* \approx S$ und $Q_1^* \approx Q_1$.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(siny - cosy)e^{-\chi_1}}{Y} C_1 + \frac{(siny + cosy)e^{-\chi_1}}{Y} C_2 + \frac{(siny + cosy)e^{\chi_1}}{Y} C_3 + \frac{(siny - cosy)e^{\chi_1}}{Y} C_4 + N_{1M}, \\
 S &= \frac{n(siny - cosy)e^{-\chi_1}}{\sin^2 \cdot Y} C_1 + \frac{n(siny + cosy)e^{-\chi_1}}{\sin^2 \cdot Y} C_2 + \frac{n(siny + cosy)e^{\chi_1}}{\sin^2 \cdot Y} C_3 + \frac{n(siny - cosy)e^{\chi_1}}{\sin^2 \cdot Y} C_4 + S_M, \\
 Q_1 &= \frac{(siny - cosy)e^{-\chi_1}}{\operatorname{tg}^2 \cdot Y} C_1 + \frac{(siny + cosy)e^{-\chi_1}}{\operatorname{tg}^2 \cdot Y} C_2 + \frac{(siny + cosy)e^{\chi_1}}{\operatorname{tg}^2 \cdot Y} C_3 + \frac{(siny - cosy)e^{\chi_1}}{\operatorname{tg}^2 \cdot Y} C_4, \\
 M_1 &= c \cdot siny \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_1 + c \cdot cosy \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_2 - c \cdot siny \cdot e^{\chi_1} \cdot C_3 + c \cdot cosy \cdot e^{\chi_1} \cdot C_4, \\
 u &= -\frac{\nu \cdot \tau (siny - cosy)e^{-\chi_1}}{\sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_1 - \frac{\nu \cdot \tau (siny + cosy)e^{-\chi_1}}{\sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_2 - \frac{\nu \cdot \tau (siny + cosy)e^{\chi_1}}{\sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_3 - \frac{\nu \cdot \tau (siny - cosy)e^{\chi_1}}{\sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_4 + u_M, \\
 v &= -\frac{n(2+\nu)c}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot siny \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_1 - \frac{n(2+\nu)c}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot cosy \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_2 + \frac{n(2+\nu)c}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot siny \cdot e^{\chi_1} \cdot C_3 - \frac{n(2+\nu)c}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot cosy \cdot e^{\chi_1} \cdot C_4 + v_M, \\
 w &= \frac{\tau}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot cosy \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_1 - \frac{\tau}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot siny \cdot e^{-\chi_1} \cdot C_2 + \frac{\tau}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot cosy \cdot e^{\chi_1} \cdot C_3 + \frac{\tau}{\cos^2 \cdot E \cdot h} \cdot siny \cdot e^{\chi_1} \cdot C_4 + w_M, \\
 \Theta &= \frac{\tau (siny + cosy)e^{-\chi_1}}{c \cdot \sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_1 - \frac{\tau (siny - cosy)e^{-\chi_1}}{c \cdot \sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_2 + \frac{\tau (siny - cosy)e^{\chi_1}}{c \cdot \sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_3 - \frac{\tau (siny + cosy)e^{\chi_1}}{c \cdot \sin^2 \cdot E \cdot h \cdot Y} C_4 + \Theta_M, \\
 Y &= \sqrt{\frac{2 \cdot \cos^2 \cdot \tau}{c \cdot \sin^2 \cdot \delta}} \quad ; \quad Y_1 = \left(1 + \frac{c \cdot \pi^2}{\cos^2 \cdot \tau_m} \right) Y \quad ; \quad \tau_m = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}
 \end{aligned}$$

Tabelle 5.4.1 Näherungslösung für die Kegelschale nach Novozhilov

In Tabelle 5.4.2 werden die Elastizitätsgleichungen des Kreiskegels gegenübergestellt, die sich aus den allgemeinen Schalen-gleichungen nach Wlassow und Novozhilov ergeben. Es ist zu bemerken, daß die Wlassowschen Gln. mit den von Flügge in [13, S. 318] angegebenen Elastizitätsgleichungen übereinstimmen. Durch Vernachlässigung der durchgehend unterstrichenen Glieder erhält man die vereinfachten Gln. für den dünnen, flachen Kegel. Die Gln. von Novozhilov unterscheiden sich hiervon durch die mit gestrichelten Linien gekennzeichneten Glieder, die aber bei rotationssymmetrischer Belastung verschwinden.

Die Bilder 5.4.1/2 zeigen an einem Beispiel den Vergleich von Lösungen, die mit verschiedenen Integrationsverfahren gewonnen wurden. Es handelt sich um den Kegelstumpf nach Abb. 6.4.1 und eine Querkrafteinleitung am freien Rand mit $n = 0$. Die Ergebnis-kurven des Analogrechners für die erweiterten und vereinfachten Gln. und die Lösungen nach Flügge über die Besselsche Diff.-gl. fallen im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammen. Die mit Hilfe der näherungsweise Integration nach Novozhilov erhaltenen Lösungsfunktionen sind gestrichelt eingetragen. Als größter Fehler ergibt sich beim Maximalwert des Biegemomentes \bar{M}_1 eine Abweichung von etwa 10%.

Sämtliche analytischen Vergleichsrechnungen wurden unter Benutzung von Fortran-Programmen auf einem Digitalrechner durchgeführt.

Wlassow / Flügge

$$N_1 = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\sin \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w \right) - \frac{h^2 \cos \nu}{12} \frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$N_2 = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w + \nu \cdot \sin \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h^2 \cos \nu}{12} \frac{\sin \nu \cos \nu}{r^2} u + \frac{\cos^2 \nu}{r^2} w + \frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$S_1 = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{h^2 \cos \nu}{12} \frac{\sin \nu \cos \nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) \right\}$$

$$S_2 = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{h^2 \cos \nu}{12} \frac{\cos \nu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) \right\}$$

$$M_1 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\cos \nu}{r} \left(\sin \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$M_2 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \cdot \sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\cos \nu}{r} \left(\frac{\sin \nu}{r} u + \frac{\cos \nu}{r} w \right) \right]$$

$$M_{12} = -\frac{E \cdot h^3}{12(1+\nu)} \left[\sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) - \sin \nu \cdot \cos \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$$

$$M_{21} = -\frac{E \cdot h^3}{12(1+\nu)} \left[\sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) + \frac{\cos \nu}{2 \cdot r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\sin \nu \cdot \cos \nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$$

Novozhilov

$$N_1 = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\sin \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w \right) \right]$$

$$N_2 = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\frac{\sin \nu}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \nu}{r} w + \nu \cdot \sin \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right]$$

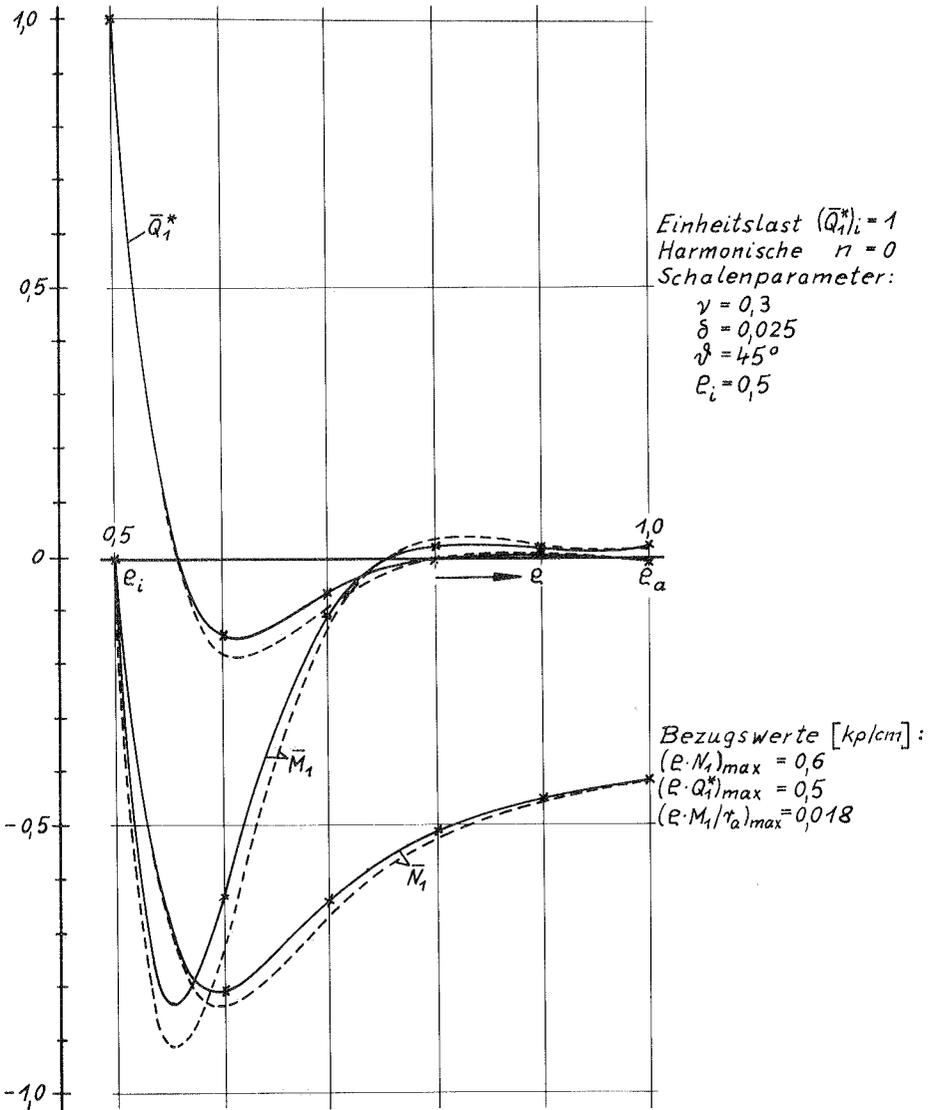
$$S = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \nu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$$

$$M_1 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos \nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$M_2 = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\sin^2 \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos \nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu \cdot \sin^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

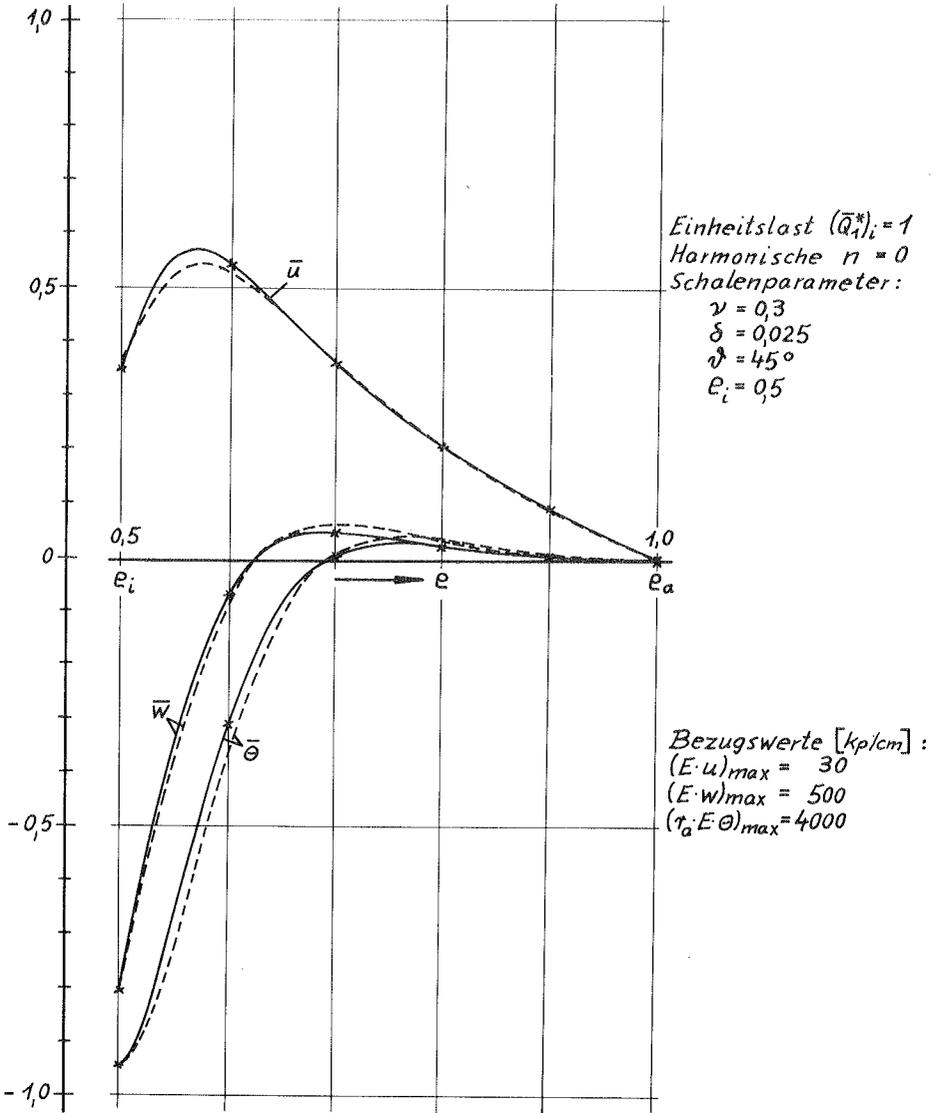
$$H = -\frac{E \cdot h^3}{12(1+\nu)} \left[\sin \nu \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{w}{r} \right) - \sin \nu \cdot \cos \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$$

Tabelle 5.4.2 Elastizitätsgln. für die Kegelschale



- Ergebnisse des Analogrechners für die erweiterten und vereinfachten Glr. und Lösungen der Besselschen Diff.-gl.
- - - - näherungsweise Integration nach Novozhilov

Bild 5.4.1 Kegelschale (rotationssymmetrisch belastet)



— Ergebnisse des Analogrechners für die erweiterten und vereinfachten Gln. und Lösungen der Besselschen Diff.-gl.

---- "näherungsweise Integration nach Novozhilov

Bild 5.4.2 Kegelschale (rotationssymmetrisch belastet)

6. Vergleich zwischen den Gleichungen für die schwach gekrümmte Kegelschale und den erweiterten Gleichungen

6.1 Einfluß der Belastung am freien Rand

Im folgenden sollen für verschiedene Schalenparameter die Abweichungen festgestellt werden, die sich bei Verwendung der Gln. (3.6.1/20) gegenüber den Gln. (3.6.21/38) für die schwach gekrümmte Schale ergeben. Als Abweichung sei hierbei definiert:

$$\alpha = \frac{|W_1| - |W_2|}{|W_2|} 100\% ,$$

W_1 = Maximalwert einer Größe, die nach den vereinfachten Gleichungen berechnet wurde,

W_2 = Maximalwert der entsprechenden Größe aus den erweiterten Gleichungen.

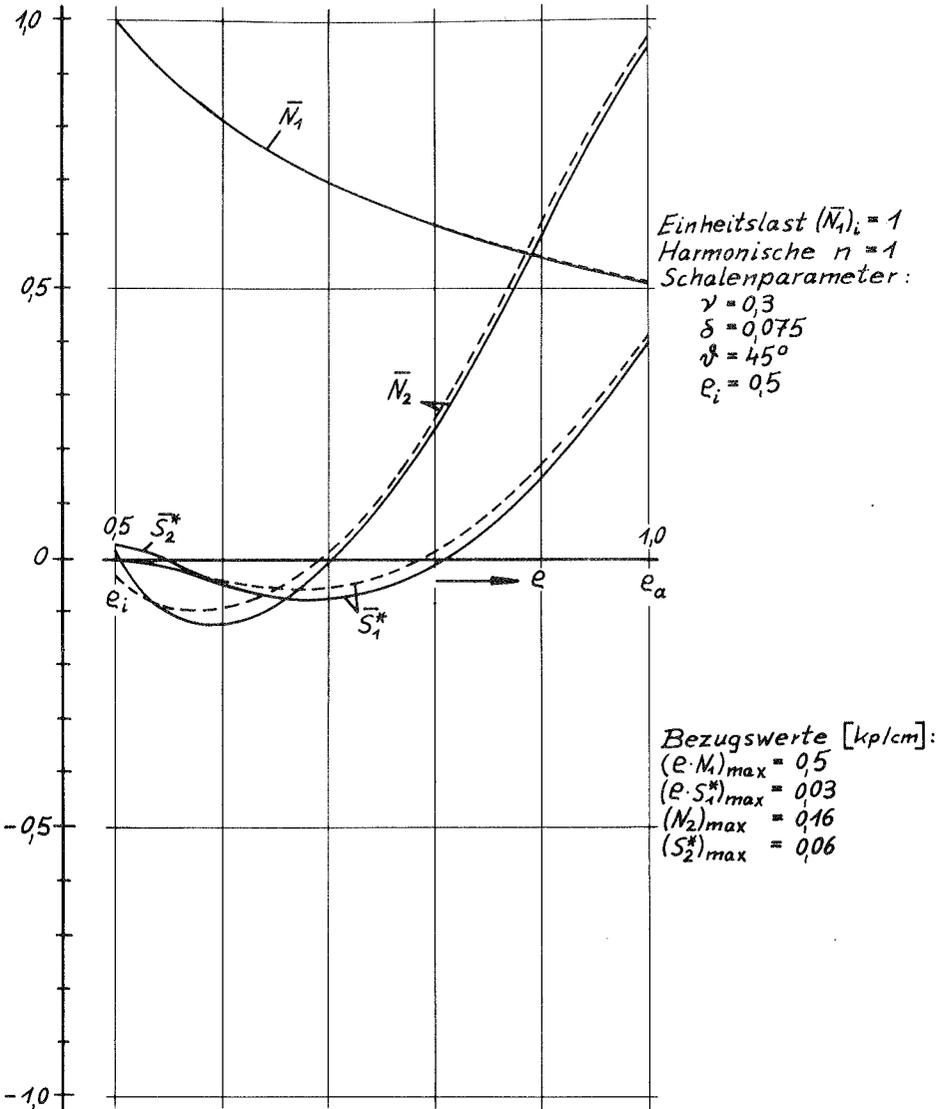
Für die Kräfte und Momente, die als Einheitslasten am freien Schalenrand wirken, dienen die Beträge der ersten Überschwingung, bzw. die Endwerte, als Vergleichsgrößen.

Bei einem Kegelstumpf gibt es zahlreiche Möglichkeiten, die Parameter zu kombinieren. Ausgehend von der in Abb. 6.4.3 dargestellten Anordnung werden sämtliche Belastungsfälle und Abmessungen variiert. Unverändert bleiben die Randbedingungen freier Rand bei $e = e_i$ und eingespannter Rand bei $e = e_a$. Ein Anhaltswert für die zu erwartenden Abweichungen ist das Verhältnis von Wandstärke zu kleinstem Krümmungsradius im Vergleich zu eins. Mit $\frac{d \cdot \cos \vartheta}{e_i} = 0,11$ für den Kegel nach Abb. 6.4.3 entspricht das einem Wert von etwa 11%. Man kann hier kaum noch von einer dünnen Schale sprechen. Diese Anordnung wurde aber gewählt, um die Unterschiede deutlicher hervortreten zu lassen. Inwieweit die Voraussetzungen der technischen Schalenbiegetheorie noch zutreffen, soll unberücksichtigt bleiben.

Um den Einfluß der Belastung am freien Rand zu untersuchen, werden nacheinander die Einheitslastzustände $(\bar{N}_i)_i$, $(\bar{S}_i^*)_i$, $(\bar{Q}_i^*)_i$ und $(\bar{M}_i)_i$ mit $n = 1$ angebracht. In den Bildern 6.1.1/12 sind die Lösungen der beiden Gleichungssysteme gegenübergestellt. Für die beiden ersten Belastungsfälle ergeben sich wesentliche Differenzen

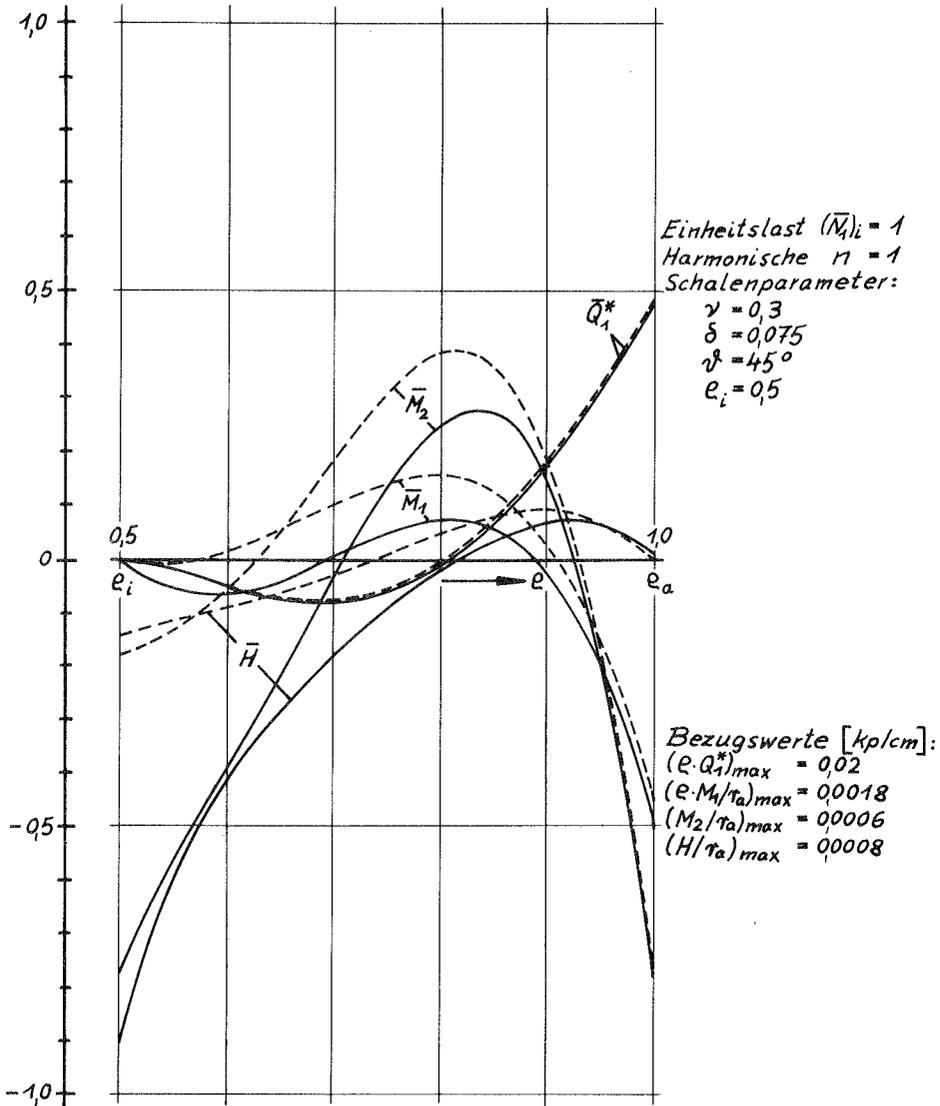
in den Größen \bar{M}_2 und \bar{H} am Schaleninnenrand, Abbildungen 6.1.2 und 6.1.5. Bei der Querkrafteinleitung ist nur für \bar{M}_2 ein Fehler von 23% festzustellen, während beim Momentenangriff alle Größen innerhalb der Toleranz von 11% liegen. Die Membranspannungen und Verschiebungsgrößen stimmen im allgemeinen recht gut überein. Ausnahmen hiervon sind $(\bar{\Theta})_i$ aus Bild 6.1.3 und $(\bar{N}_2)_i$ aus Bild 6.1.4. Insbesondere erweist sich auch die Annahme von der Gleichheit der Schubkräfte als durchaus zulässig. Die Abweichungen in den Größen \bar{M}_2 und \bar{H} resultieren hauptsächlich aus den Vereinfachungen der geometrischen Beziehungen. Hier muß man bei vorwiegendem Membranspannungszustand die Tangentialverschiebungen in den Formeln für α_2 und τ offensichtlich mit berücksichtigen. Die absoluten Werte der Momente M_2 und H sind allerdings ziemlich klein, so daß eine starke prozentuale Differenz kaum von Bedeutung ist. Die Abweichung von 23% für $(\bar{M}_2)_i$ bei der Querkrafteinleitung, Bild 6.1.8, ist auf die Vernachlässigung von $k_2^2 \cdot w$ in der Gl. (2.1.19) zurückzuführen. Hierdurch wird w nur mit n^2 multipliziert, statt mit dem Faktor $(n^2 - \cos^2 \nu)$, Gln. (3.2.17) und (3.2.34). Mit $n = 1$ und $\nu = 45^\circ$ ergibt das ein Verhältnis von 1 zu 0,5. Für größeres n müßten die Unterschiede geringer werden. Im weiteren soll nur noch der Belastungsfall $(\bar{Q}_1^*)_i = 1$ untersucht werden.

Für sämtliche Rechnungen am Analogrechner wurde die Zeitkonstante $k = 1$ [1/s] gewählt. Mit $\lambda = \frac{1}{\varrho_a \cdot \varrho_i}$ erhält man eine Rechenzeit von $t_{\max}^* = 1$ [s] und Potentiometerwerte, die einstellbar sind. Ein Rechenzyklus, der sich aus der Pausenzeit, der Rechenzeit und der Haltezeit zusammensetzt, dauerte drei Sekunden. Bei etwa 25 Iterationen für ein Beispiel entspricht das einer Gesamtzeit von 75 [s].



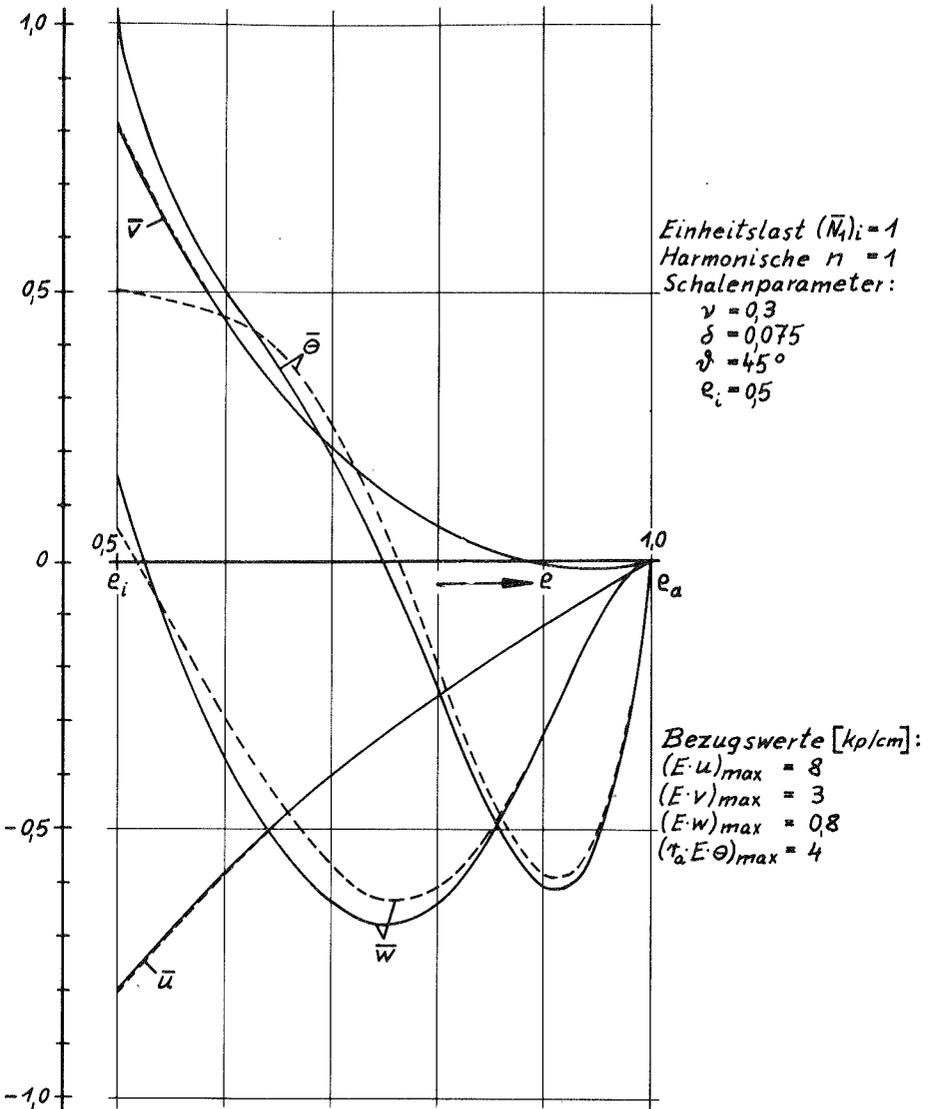
Größe	$(\bar{N}_1)_a$	$(\bar{S}_1^*)_a$	$(\bar{N}_2)_a$	$(\bar{S}_2^*)_a$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,5168	0,4335	0,9739	0,4335
— = erweiterte Gleichungen	0,5153	0,4221	0,9655	0,4218
Abweichung α [%]	0,3	2,7	0,9	2,8

Bild 6.1.1 Kegelschale



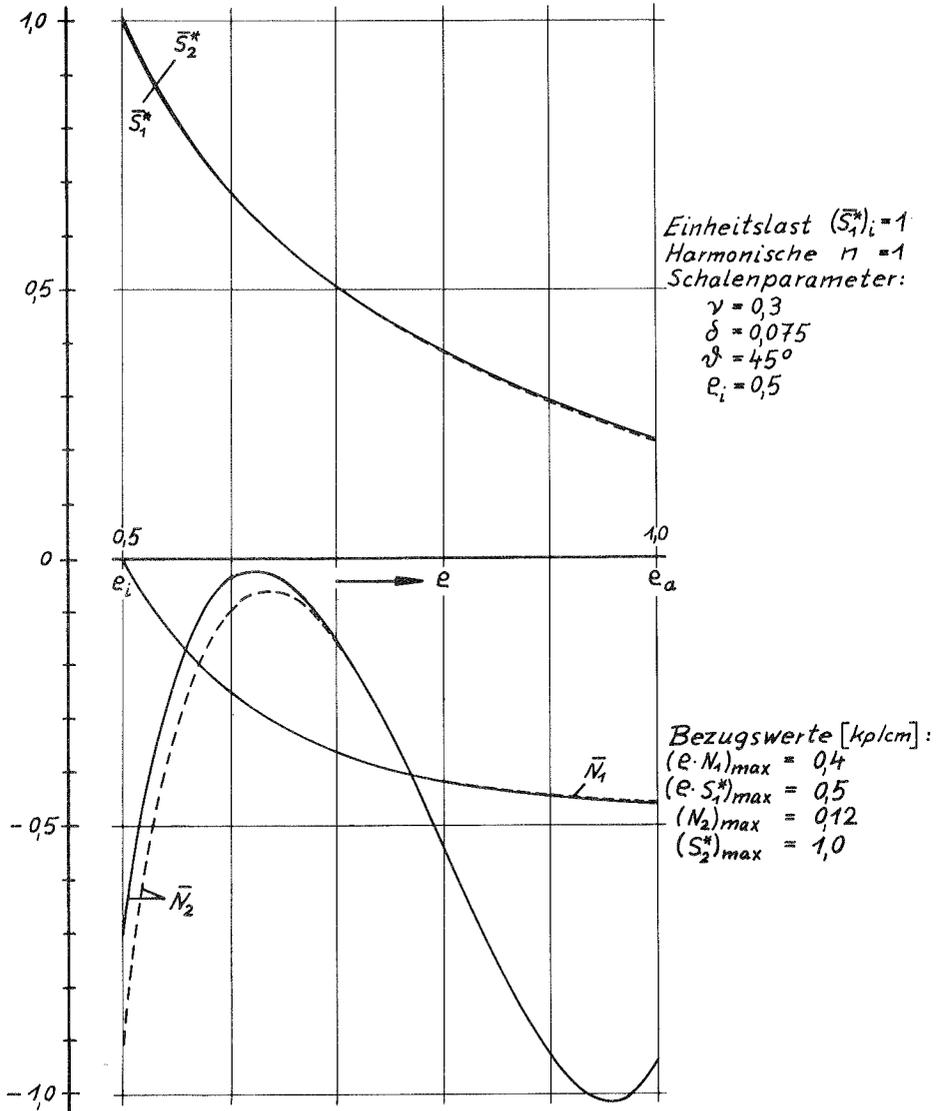
Größe	$(\bar{Q}_1^*)_a$	$(\bar{M}_1)_a$	$(\bar{M}_2)_i$	$(\bar{H})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,4892	-0,4640	-0,1819	-0,1429
— = erweiterte Gleichungen	0,4804	-0,5141	-0,7819	-0,9062
Abweichung α [%]	1,8	-9,8	-76,7	-84,2

Bild 6.1.2 Kegelschale



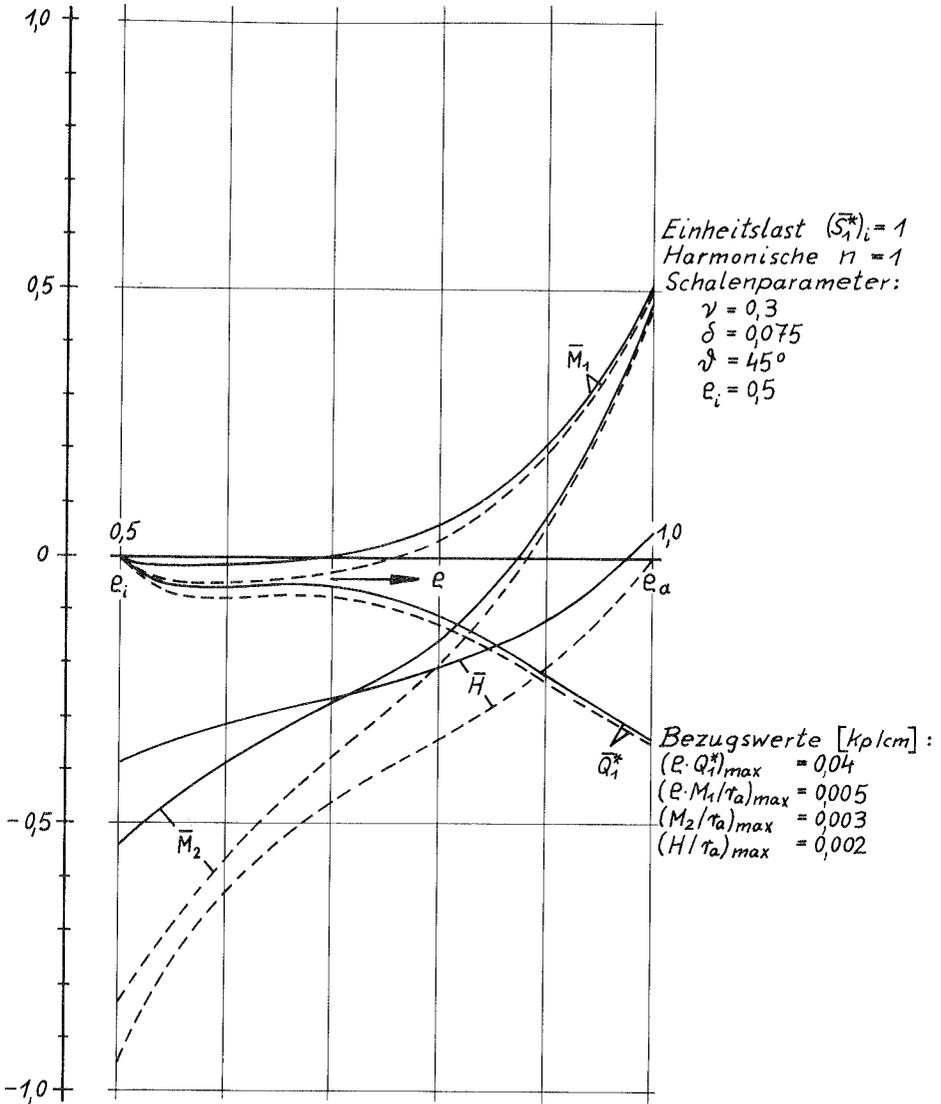
Größe	$(\bar{u})_i$	$(\bar{v})_i$	$(\bar{w})_s$	$(\bar{\theta})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,8051	0,8272	-0,6341	0,5089
— = erweiterte Gleichungen	-0,8033	0,8253	-0,6787	1,0390
Abweichung α [%]	0,2	0,2	-6,6	-51,0

Bild 6.1.3 Kegelschale



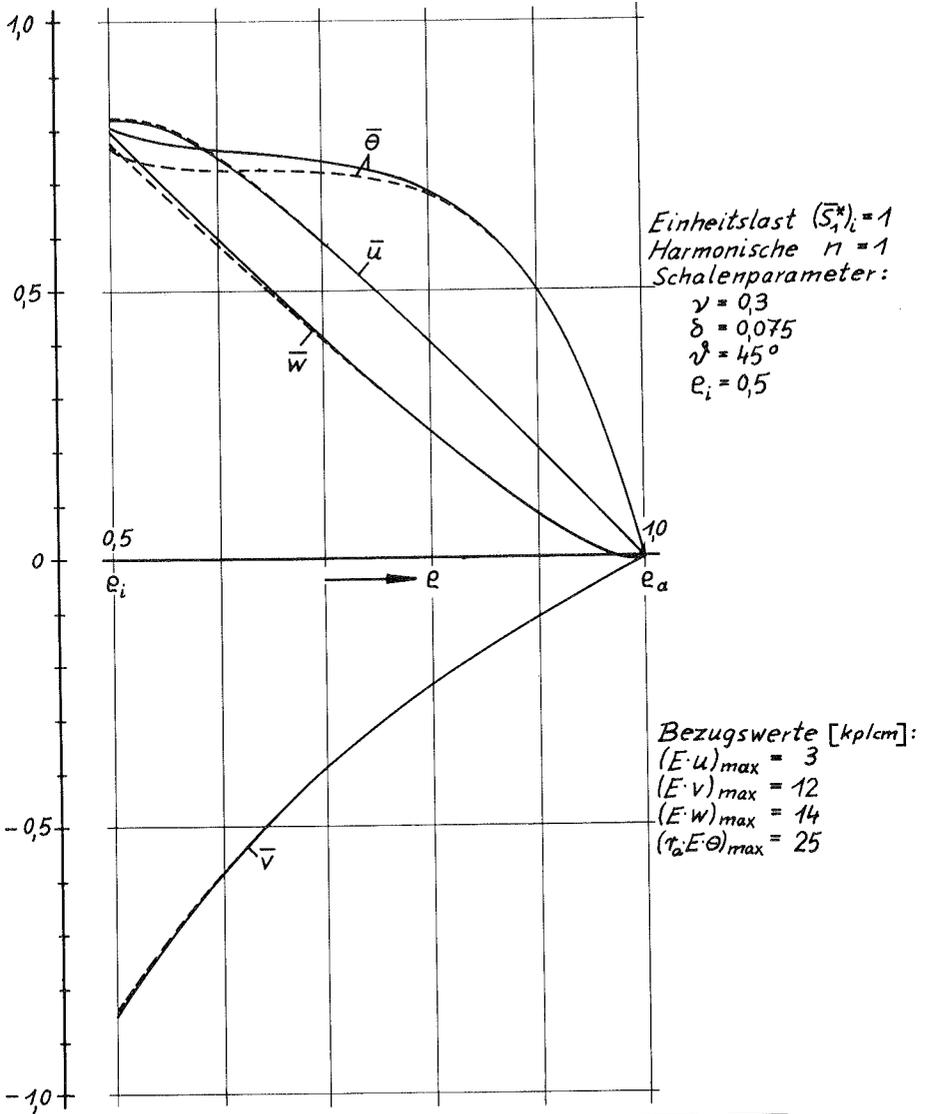
Größe	$(\bar{N}_1)_a$	$(\bar{S}_1^*)_a$	$(\bar{N}_2)_i$	$(\bar{S}_2^*)_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,4661	0,2140	-0,9061	1,0000
— = erweiterte Gleichungen	-0,4667	0,2153	-0,7035	1,0018
Abweichung a [%]	-0,1	-0,6	28,8	-0,2

Bild 6.1.4 Kegelschale



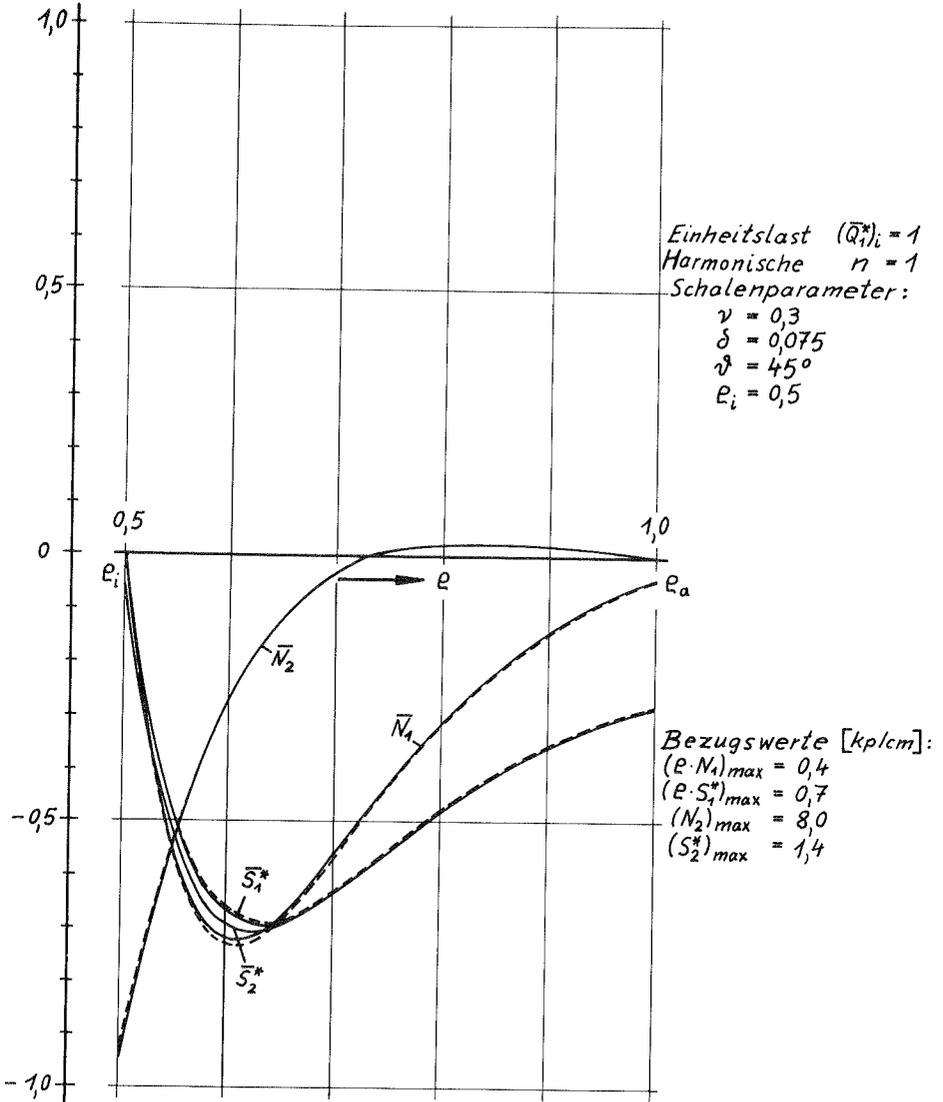
Größe	$(\bar{Q}_1^*)_a$	$(\bar{M}_1)_a$	$(\bar{M}_2)_i$	$(\bar{H})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,3569	0,4966	-0,8347	-0,9395
— = erweiterte Gleichungen	-0,3481	0,5059	-0,5412	-0,3851
Abweichung a [%]	2,5	-1,8	54,2	144,0

Bild 6.1.5 Kegelschale



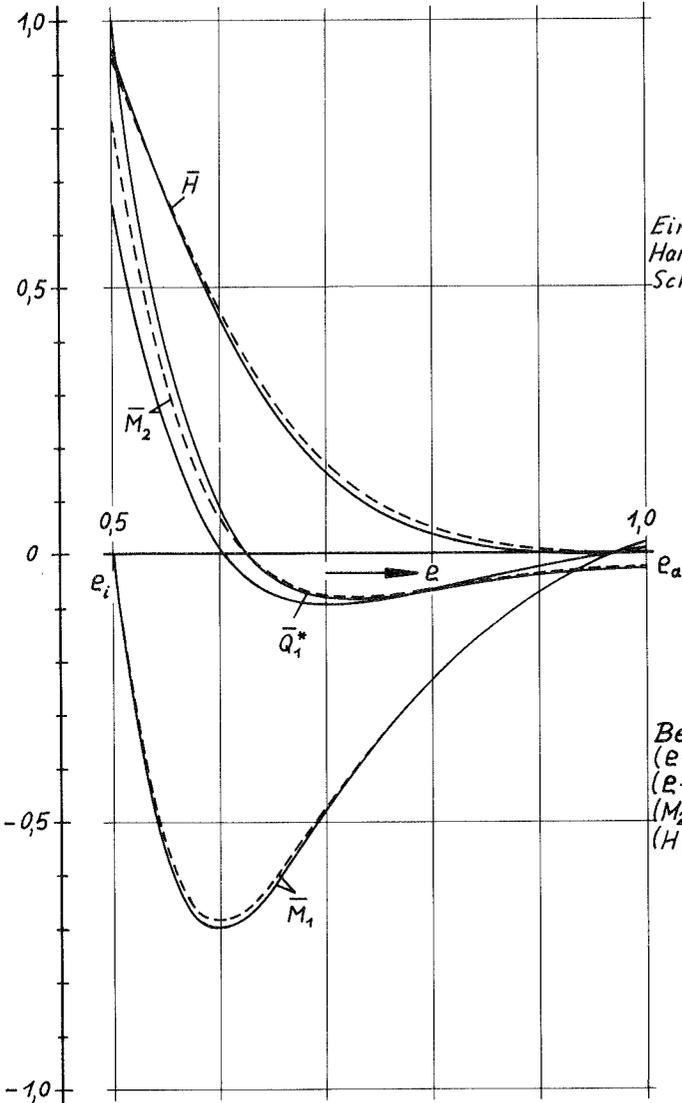
Größe	$(\bar{u})_i$	$(\bar{v})_i$	$(\bar{w})_i$	$(\bar{\theta})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,8276	-0,8496	0,7796	0,7731
— = erweiterte Gleichungen	0,8265	-0,8549	0,8038	0,8092
Abweichung α [%]	0,1	-0,6	-3,0	-4,5

Bild 6.1.6 Kegelschale



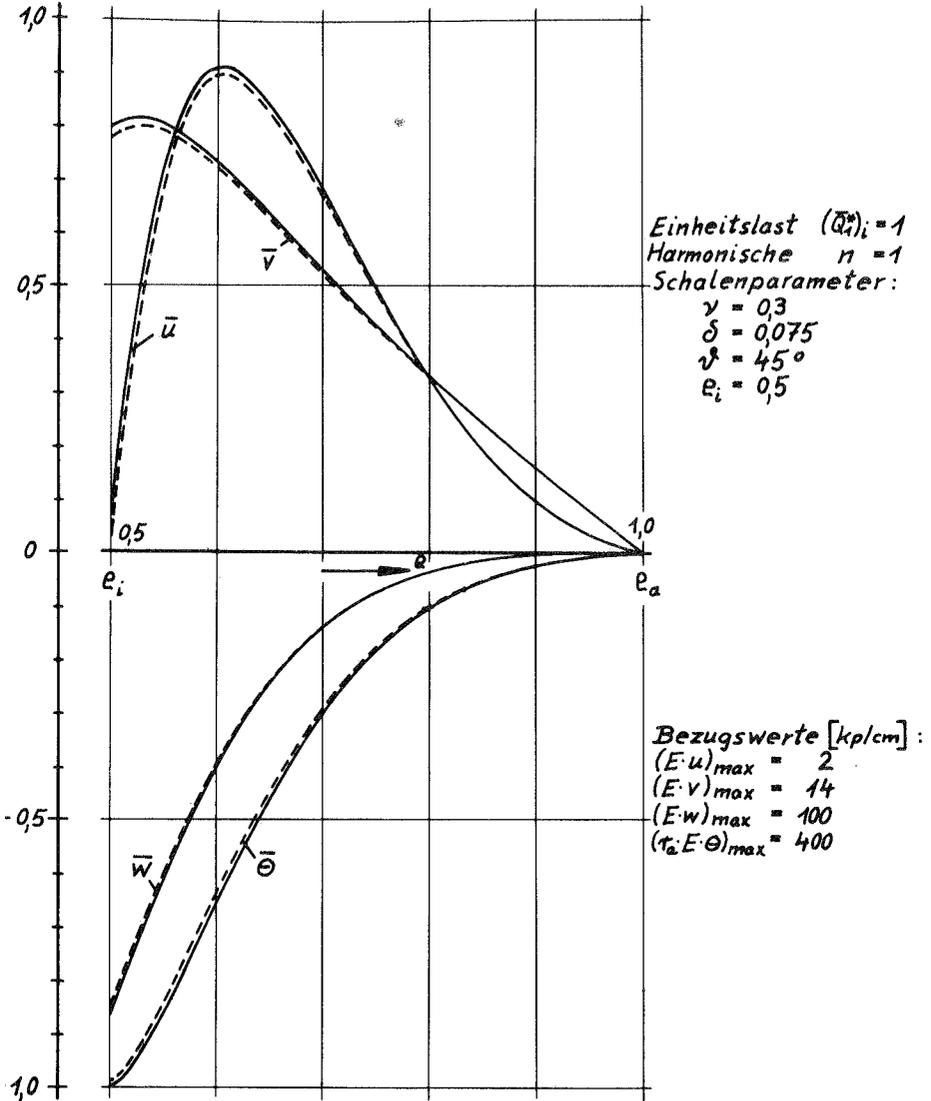
Größe	$(\bar{N}_1)_s$	$(\bar{S}_1^*)_s$	$(\bar{N}_2)_i$	$(\bar{S}_2^*)_s$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,7401	-0,6898	-0,9354	-0,6898
— = erweiterte Gleichungen	-0,7276	-0,6958	-0,9378	-0,7124
Abweichung a [%]	1,7	-0,9	-0,3	-3,2

Bild 6.1.7 Kegelschale



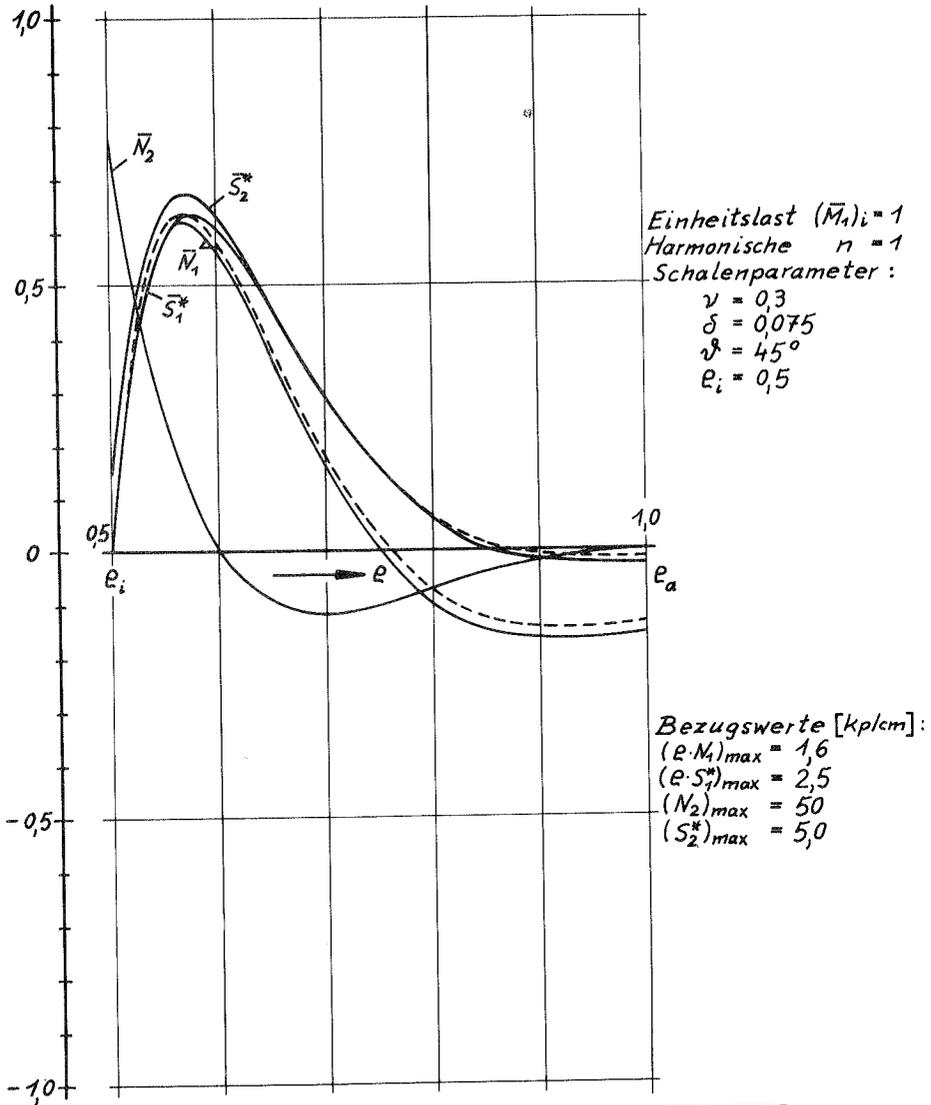
Größe	$(\bar{Q}_1^*)_s$	$(\bar{M}_1)_s$	$(\bar{M}_2)_i$	$(\bar{H})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,0862	-0,6941	0,7940	0,9325
— = erweiterte Gleichungen	-0,0890	-0,7039	0,6476	0,9376
Abweichung α [%]	-3,2	-1,4	22,6	-0,5

Bild 6.1.8 Kegelschale



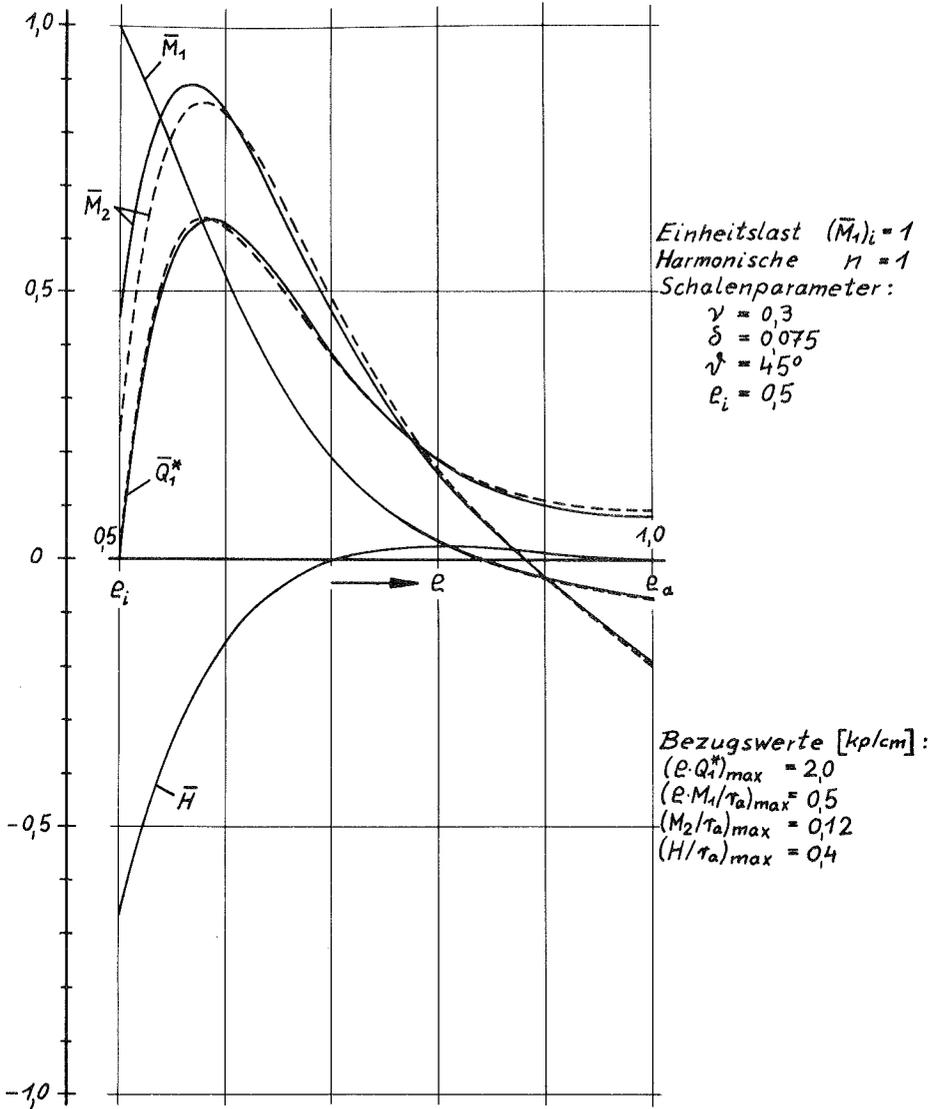
Größe	$(\bar{u})_s$	$(\bar{v})_s$	$(\bar{w})_i$	$(\bar{\Theta})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,8931	0,8009	-0,8607	-0,9891
— = erweiterte Gleichungen	0,9078	0,8192	-0,8713	-0,9943
Abweichung α [%]	-1,6	-2,2	-1,2	-0,5

Bild 6.1.9 Kegelschale



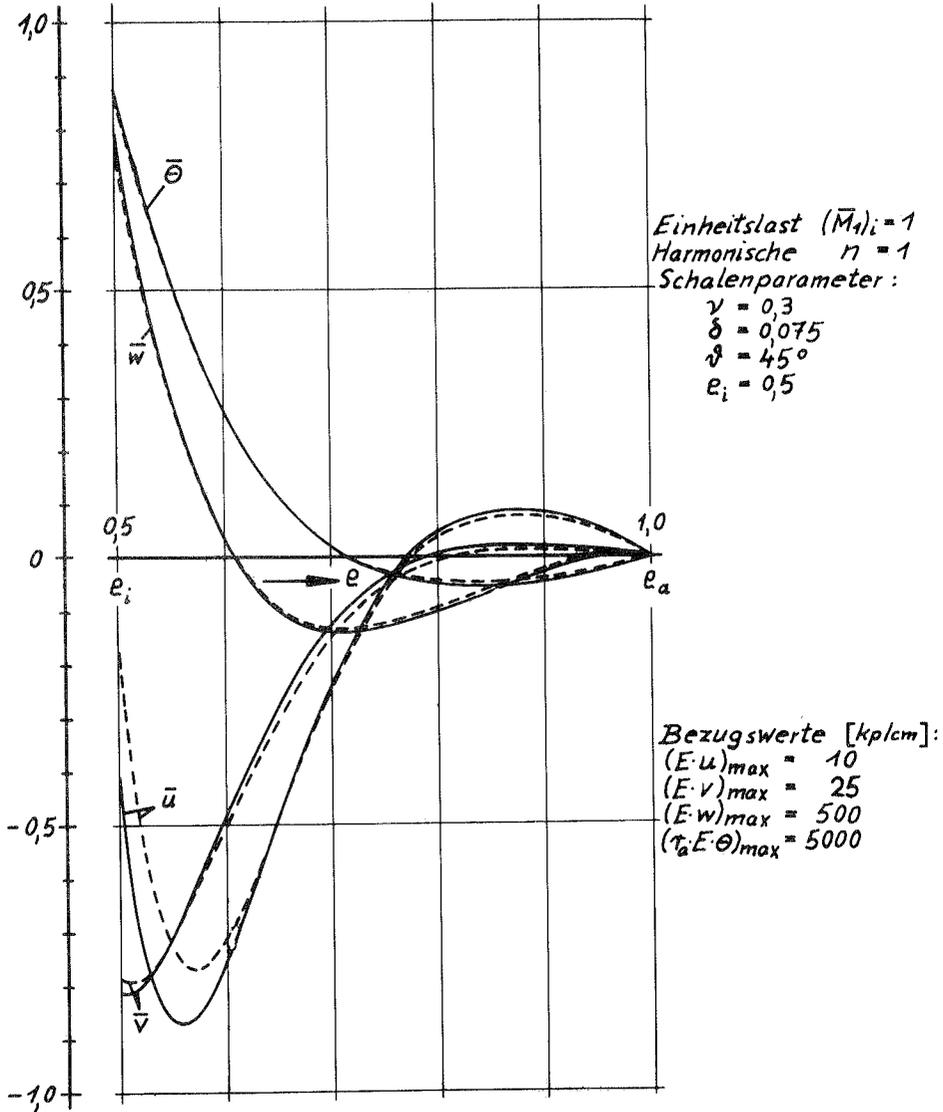
Größe	$(\bar{N}_1)_s$	$(\bar{S}_1^*)_s$	$(\bar{N}_2)_i$	$(\bar{S}_2^*)_s$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,6349	0,6303	0,7761	0,6303
— = erweiterte Gleichungen	0,6121	0,6288	0,7760	0,6763
Abweichung α [%]	3,7	0,2	0,0	-6,8

Bild 6.1.10 Kegelschale



Größe	$(\bar{Q}_1^*)_s$	$(M_1)_a$	$(M_2)_s$	$(H)_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	0,6271	-0,0840	0,8570	-0,6635
— = erweiterte Gleichungen	0,6289	-0,0801	0,8909	-0,6655
Abweichung α [%]	-0,3	(4,9)	-3,8	-0,3

Bild 6.1.11 Kegelschale



Größe	$(\bar{u})_s$	$(\bar{v})_i$	$(\bar{w})_i$	$(\bar{\theta})_i$
--- = vereinfachte Gleichungen	-0,7706	-0,7869	0,7911	0,8689
— = erweiterte Gleichungen	-0,8670	-0,8136	0,7960	0,8721
Abweichung α [%]	-11,1	-3,3	-0,6	-0,4

Bild 6.1.12 Kegelschale

6.2 Einfluß der Harmonischen

Die Abweichungen in Abhängigkeit von der Harmonischen der Fourierentwicklung sind für $n = 0; 1$ und 2 in den Abbildungen 6.2.1/2 wiedergegeben. Es handelt sich wieder um die Schale nach Bild 6.4.3. Die Fehler in den Kräften, Momenten und Verschiebungen liegen unter 10% , außer bei $(\bar{M}_2)_i$ für $n = 0$ und $n = 1$. Dies bestätigt die Annahme aus Abschnitt 6.1, daß für größeres n die Unterschiede von $(\bar{M}_2)_i$ kleiner werden. Bei den übrigen Größen ergibt sich ein entgegengesetztes Bild. Hier nehmen die prozentualen Abweichungen im allgemeinen mit n zu.

6.3 Einfluß der Querkontraktionszahl

Bei der Variation der Querkontraktionszahl mit den Werten $\nu = 0,3 ; 0,15$ und 0 konnte keine einheitliche Tendenz festgestellt werden, Abbildungen 6.3.1/2. Die Unterschiede, die sich bei Benutzung der Gleichungen für die schwach gekrümmte Kegelschale gegenüber den erweiterten Gleichungen ergeben, scheinen von ν unabhängig zu sein.

6.4 Einfluß der Wandstärke

Da bei der Herleitung der vereinfachten Gleichungen außer Gliedern, die mit der Krümmung zusammenhängen, auch solche vernachlässigt werden, in denen die Wandstärke eingeht, müssen die Differenzen für dünne Wandstärken geringer werden.

a) rotationssymmetrische Belastung ($n = 0$)

Für rotationssymmetrische Belastung und die in den Bildern 6.4.1/3 maßstäblich dargestellten Kegelschalen sind die Abweichungen aus den Abbildungen 6.4.5/6 zu ersehen. Es ist eine klare Abhängigkeit von der Wandstärke festzustellen. Für $\delta = 0,025$ versagte das iterative Lösungsverfahren. Es mußte auf die Aufteilung der Schale in mehrere Abschnitte und die Lösung eines Gleichungssystems zurückgegriffen werden.

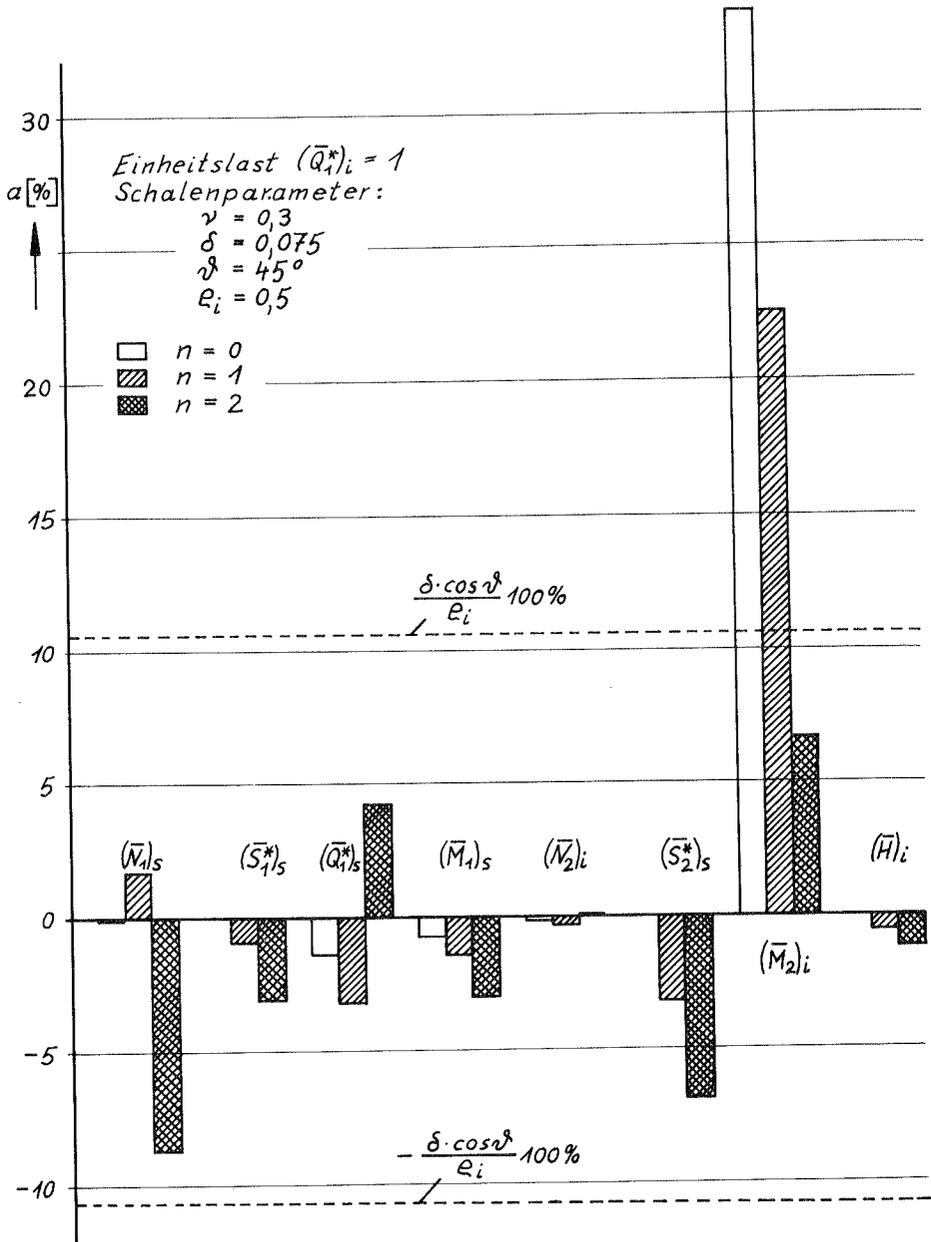


Bild 6.2.1 Abweichung a der Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der Harmonischen n

Einheitslast $(\bar{q}_1)_i = 1$

Schalenparameter:

$$\nu = 0,3$$

$$\delta = 0,075$$

$$\vartheta = 45^\circ$$

$$e_i = 0,5$$

□ $n = 0$

▨ $n = 1$

▩ $n = 2$

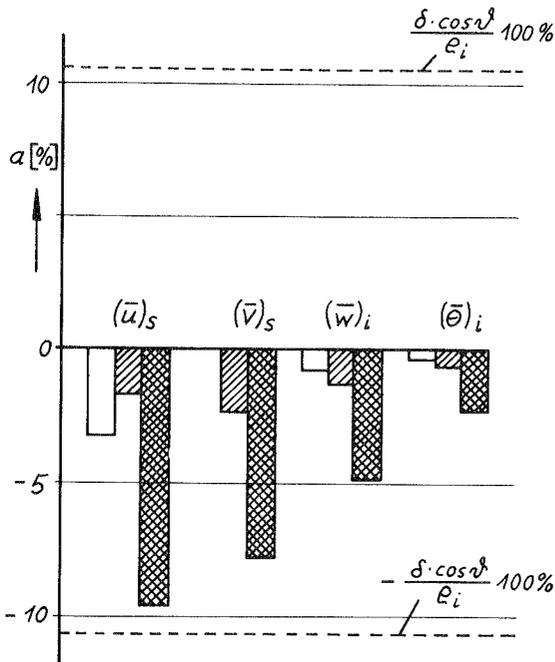


Bild 6.2.2 Abweichung a der Verschiebungsgrößen in Abhängigkeit von der Harmonischen n

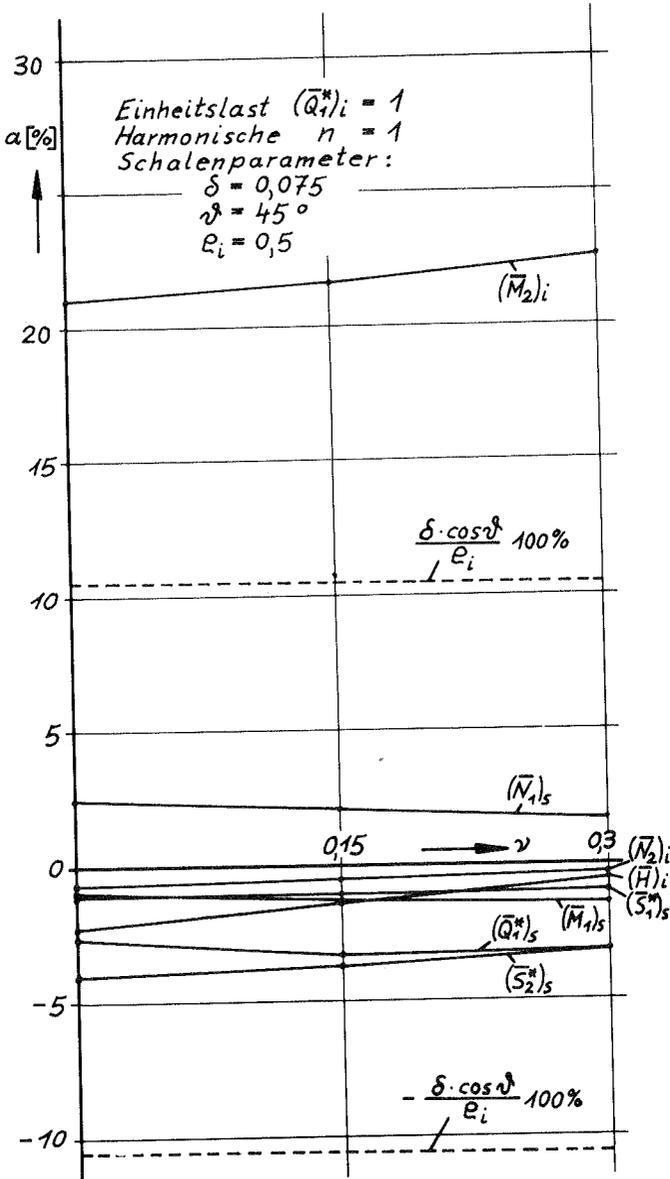


Bild 6.3.1 Abweichung a der Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν

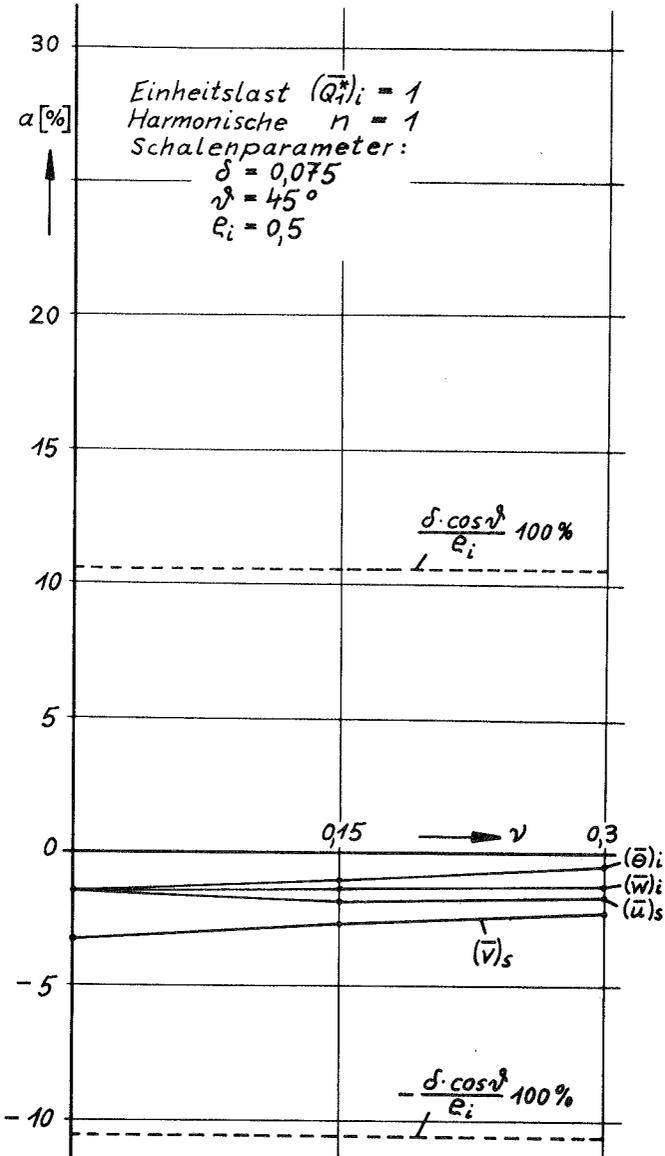


Bild 6.3.2 Abweichung a der Verschiebungsgrößen in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν

b) Windlast (n = 1)

Für n = 1 wurden Anordnungen mit verhältnismäßig dicken Wandstärken von $\delta = 0,05$ bis $\delta = 0,125$ untersucht, vgl. die Bilder 6.4.2/4. Hierbei ist zu bemerken, daß bei den Kegelstümpfen mit $\delta > 0,05$ die bei der Herleitung der technischen Schalentheorie getroffenen geometrischen Hypothesen wahrscheinlich nicht mehr gültig sind. Es ging hier nur darum, den Einfluß der Wandstärke zu studieren, Abbildungen 6.4.7/8. Man sieht, daß a für alle Wandstärken in der Größenordnung von $\frac{\delta \cdot \cos \vartheta}{\rho_i} 100\%$ bleibt, abgesehen von $(\bar{M}_2)_i$.

6.5 Einfluß des Öffnungswinkels

Die Krümmung eines Kegelstumpfes berechnet sich aus

$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \vartheta}{r}$. Sie hat ihren Größtwert am Innenrand r_i und wird mit wachsendem Öffnungswinkel ϑ geringer, Bilder 6.5.1/4. Demnach ist zu erwarten, daß die Unterschiede zwischen beiden Gleichungssystemen immer kleiner werden und bei $\vartheta = 90^\circ$ ganz verschwinden. Die Ergebnisse für die vier untersuchten Beispiele sind in den Abbildungen 6.5.5/6 aufgezeichnet. Die Abweichung des Momentes $(\bar{M}_2)_i$ liegt bei einem Öffnungswinkel von $\vartheta > 65^\circ$ unterhalb der gestrichelten Kurve, und für $\vartheta = 75^\circ$ betragen die a-Werte sämtlicher Größen noch höchstens 2%. Auf solche schwach gekrümmten Schalen lassen sich die vereinfachten Gleichungen ohne weiteres anwenden.

6.6 Einfluß des Radienverhältnisses

Als letzte Möglichkeit bleibt noch die Variation des Radienverhältnisses ρ_i , Bilder 6.6.1/4. Da die Krümmung der Kegelschale umgekehrt proportional zum kleinsten Breitenkreisradius ist, müssen die Abweichungen mit größer werdendem ρ_i abnehmen. Diese Tendenz ist aus den Abbildungen 6.6.5/6 deutlich zu erkennen. Nur die Unterschiede für die Verschiebung $(\bar{u})_s$ steigen zwischen $\rho_i = 0,5$ und $\rho_i = 0,7$ an.

$$e_i = \frac{r_i}{r_a} = 0,5$$

$$\vartheta = 45 [^\circ]$$

$$\delta = \frac{h}{r_a}$$

Bild 6.4.1

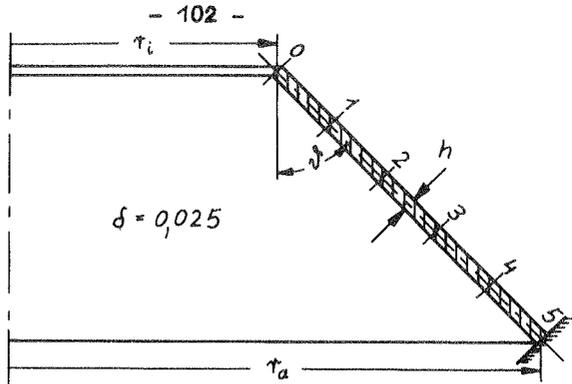


Bild 6.4.2

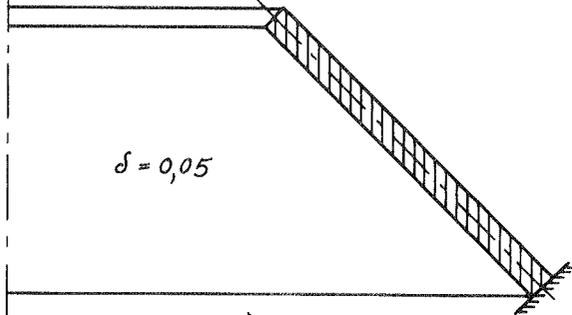


Bild 6.4.3

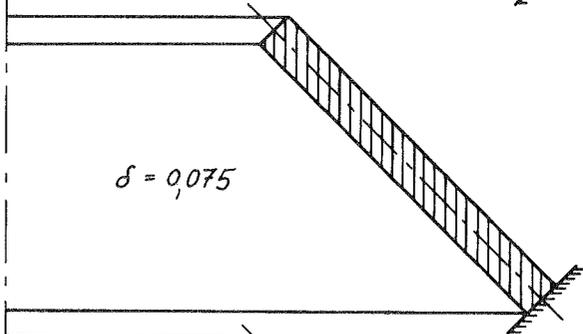
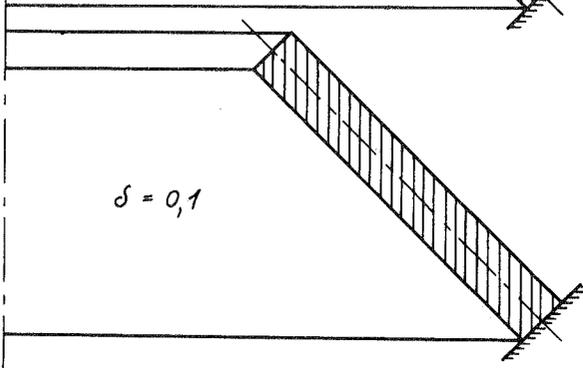


Bild 6.4.4



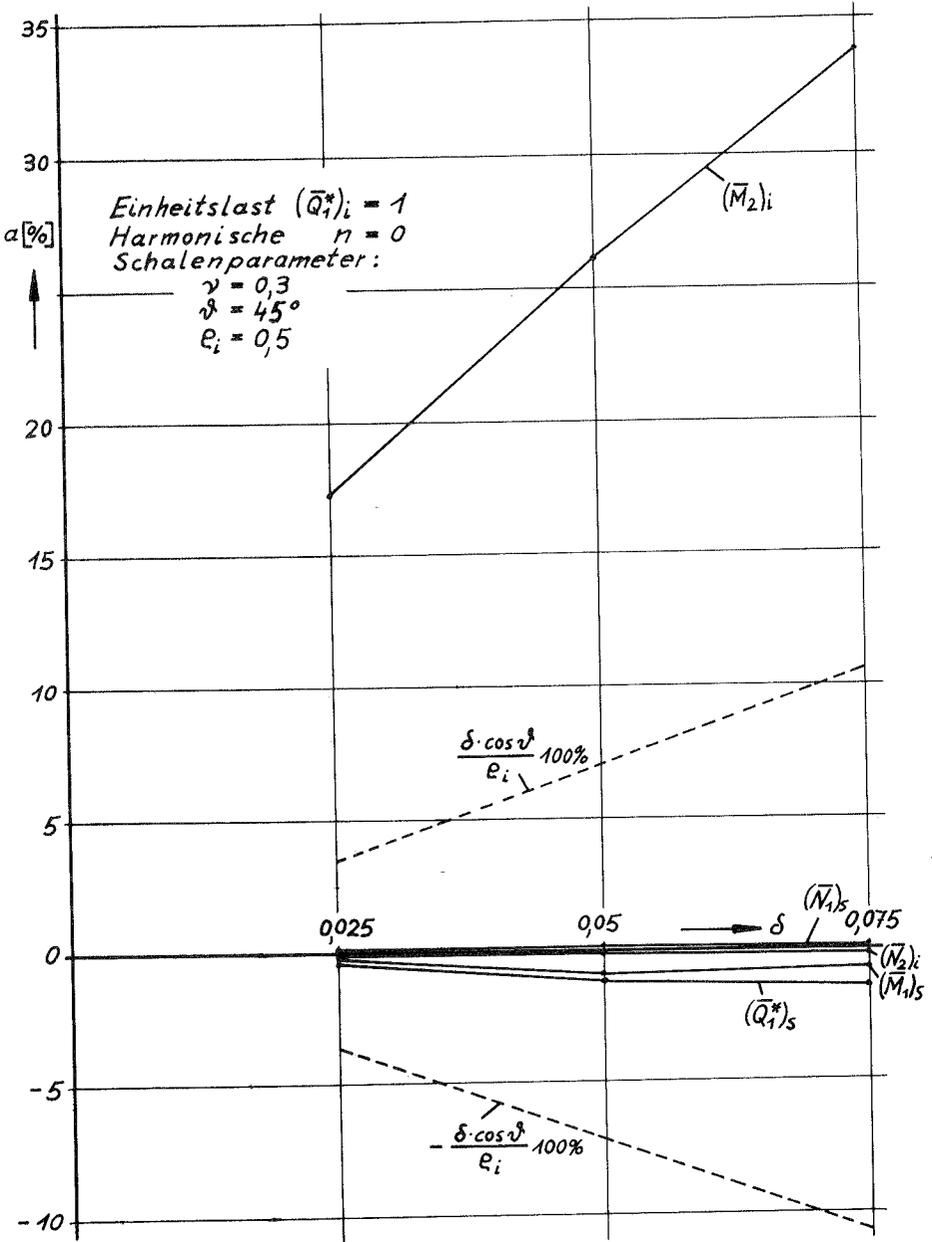


Bild 6.4.5 Abweichung a der Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der Wandstärke δ

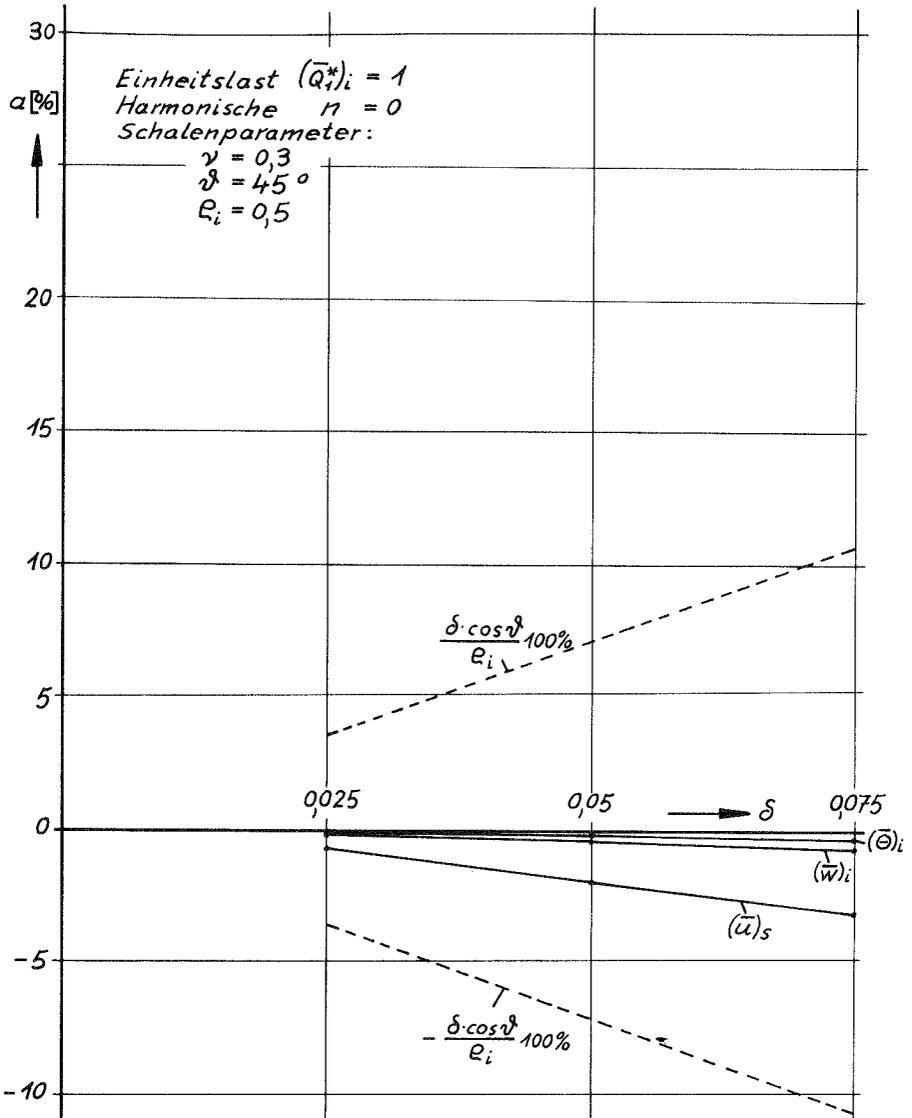


Bild 6.4.6 Abweichung a der Verschiebungsgrößen in Abhängigkeit von der Wandstärke δ

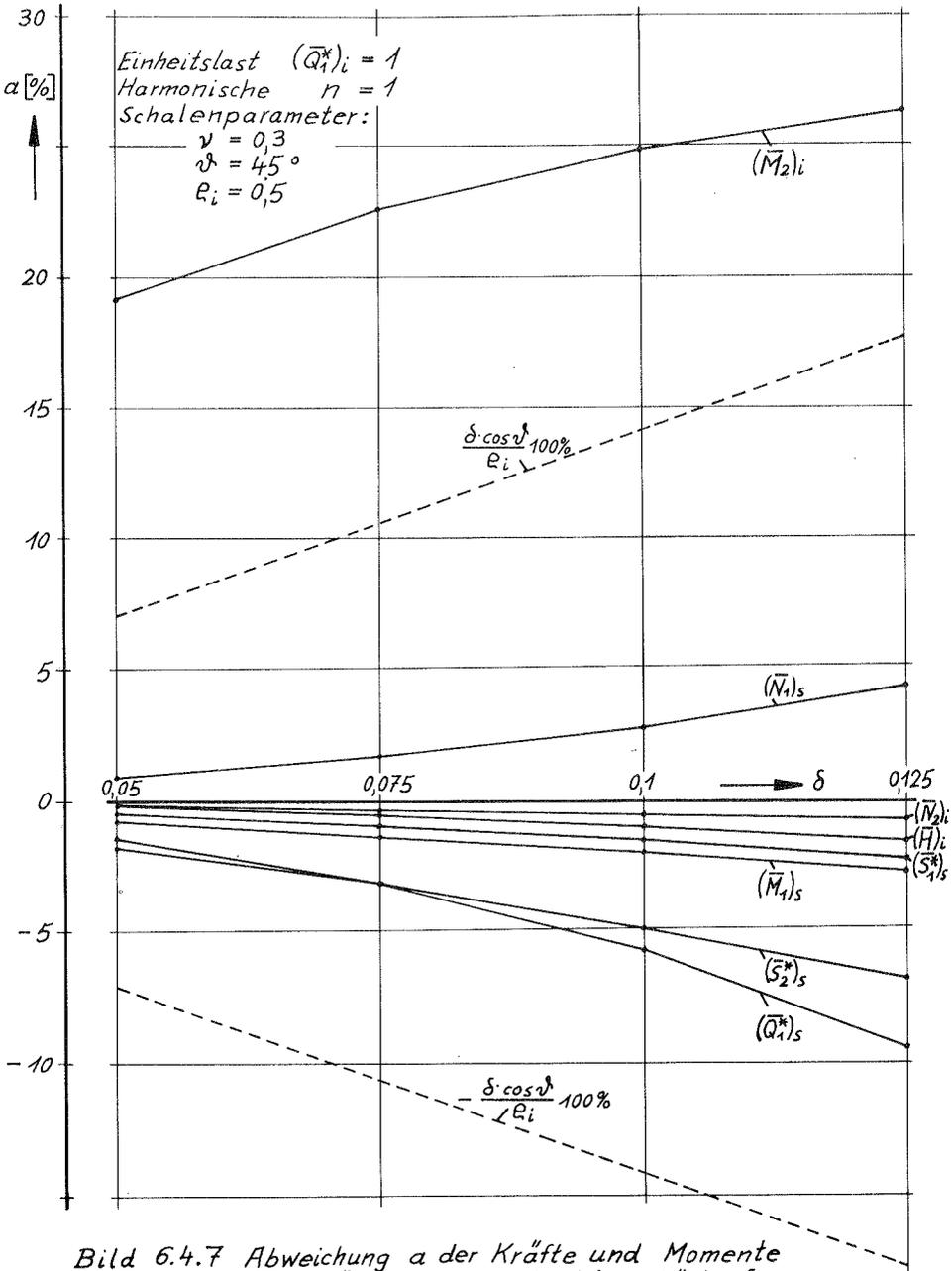


Bild 6.4.7 Abweichung a der Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der Wandstärke δ

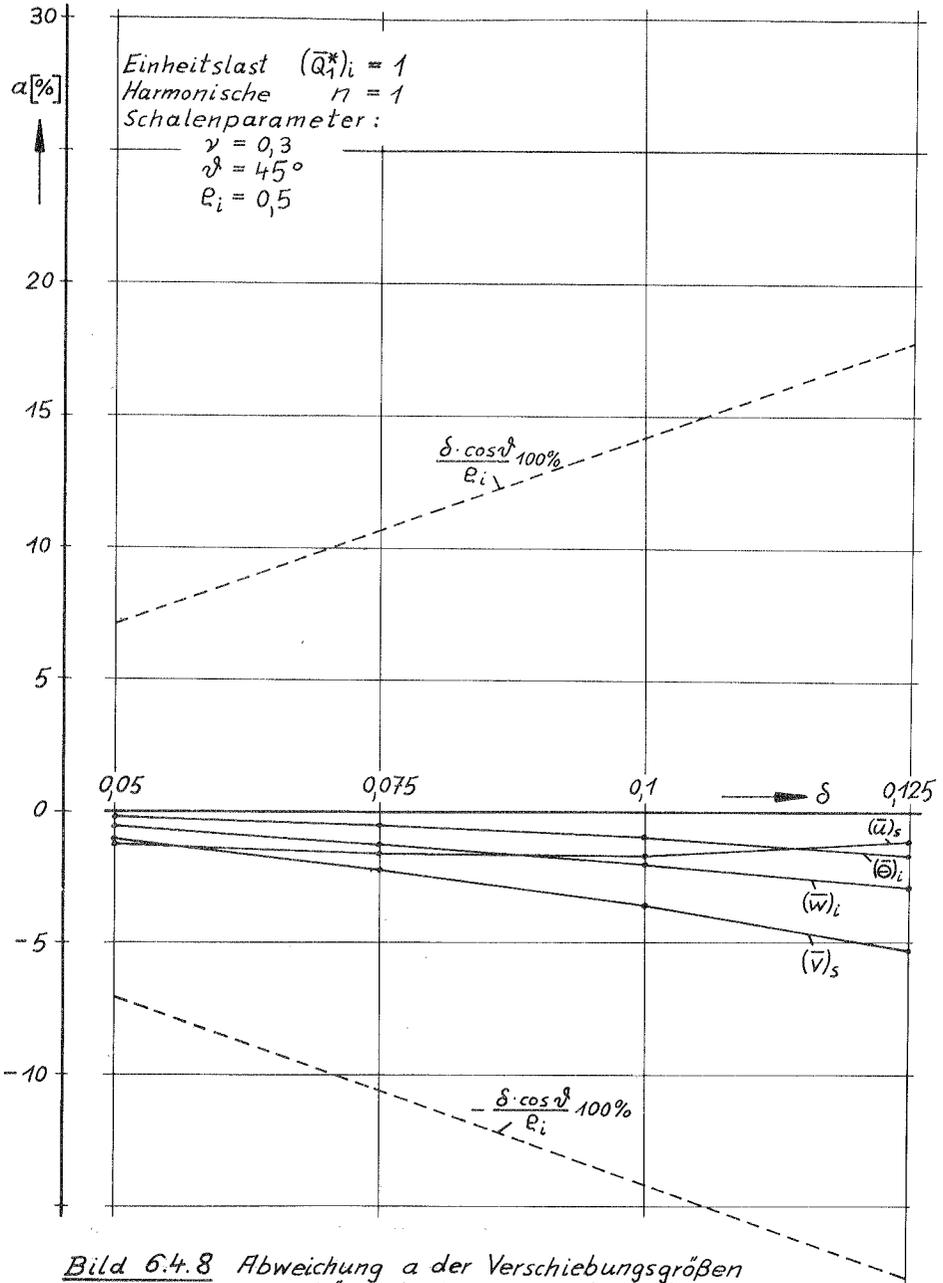


Bild 6.4.8 Abweichung a der Verschiebungsgrößen in Abhängigkeit von der Wandstärke δ

$$\rho_i = \frac{r_i}{r_a} = 0,5$$

$$\delta = \frac{h}{r_a} = 0,075$$

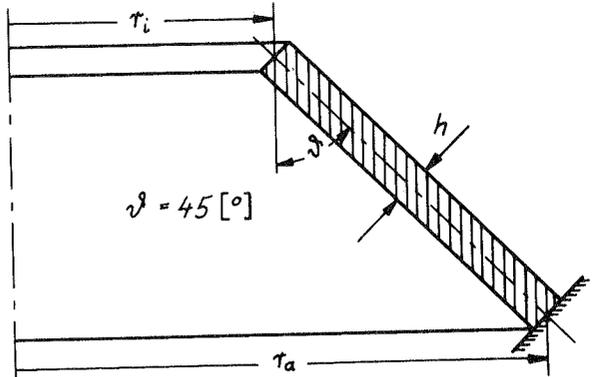


Bild 6.5.1

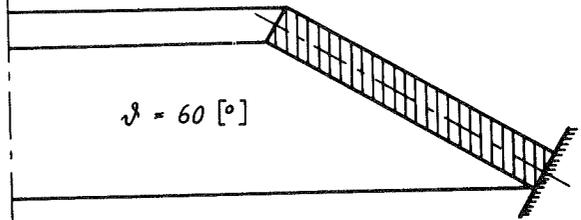


Bild 6.5.2

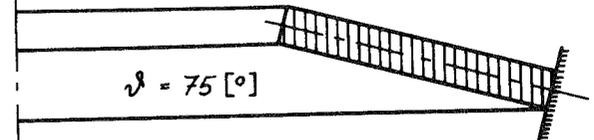


Bild 6.5.3

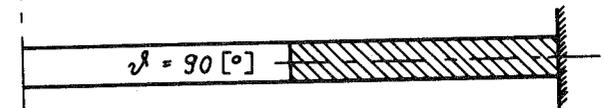


Bild 6.5.4

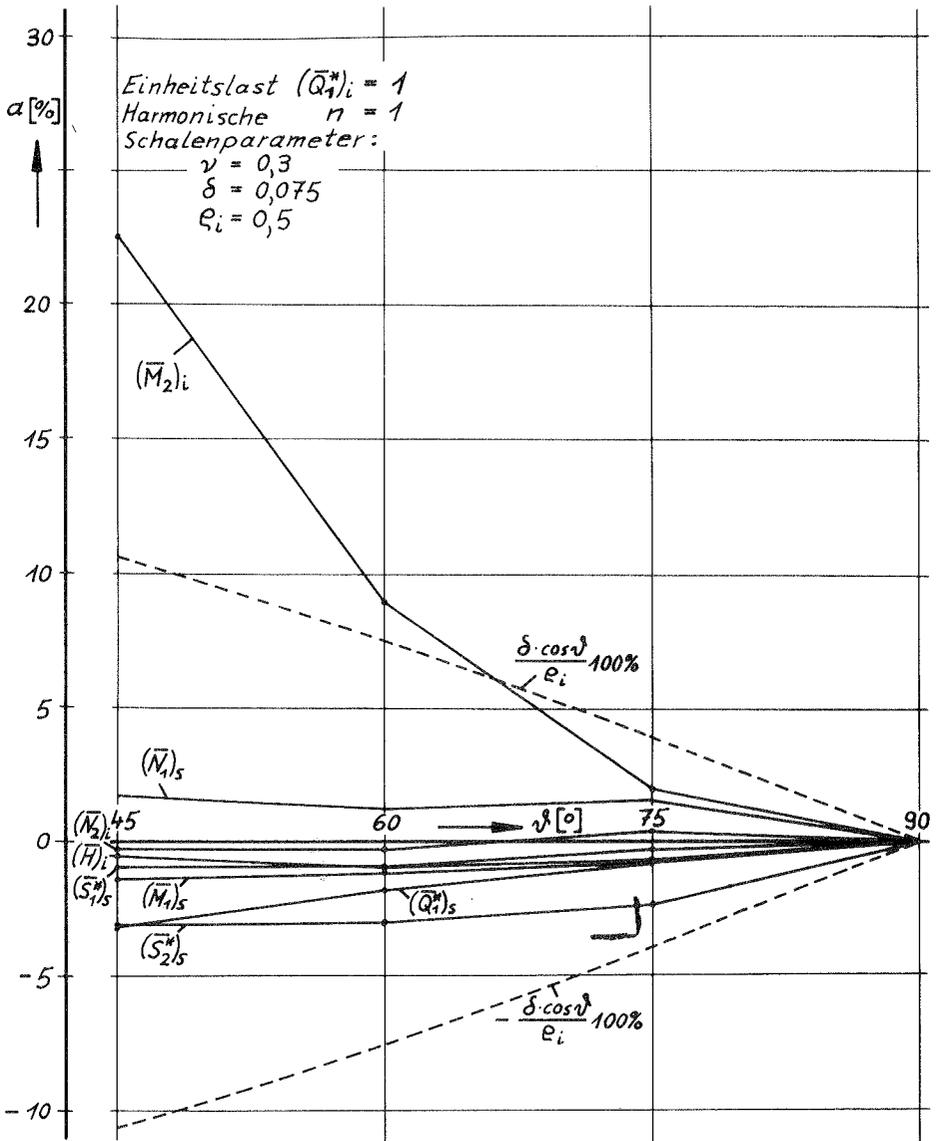


Bild 6.5.5 Abweichung α der Kräfte und Momente in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel δ

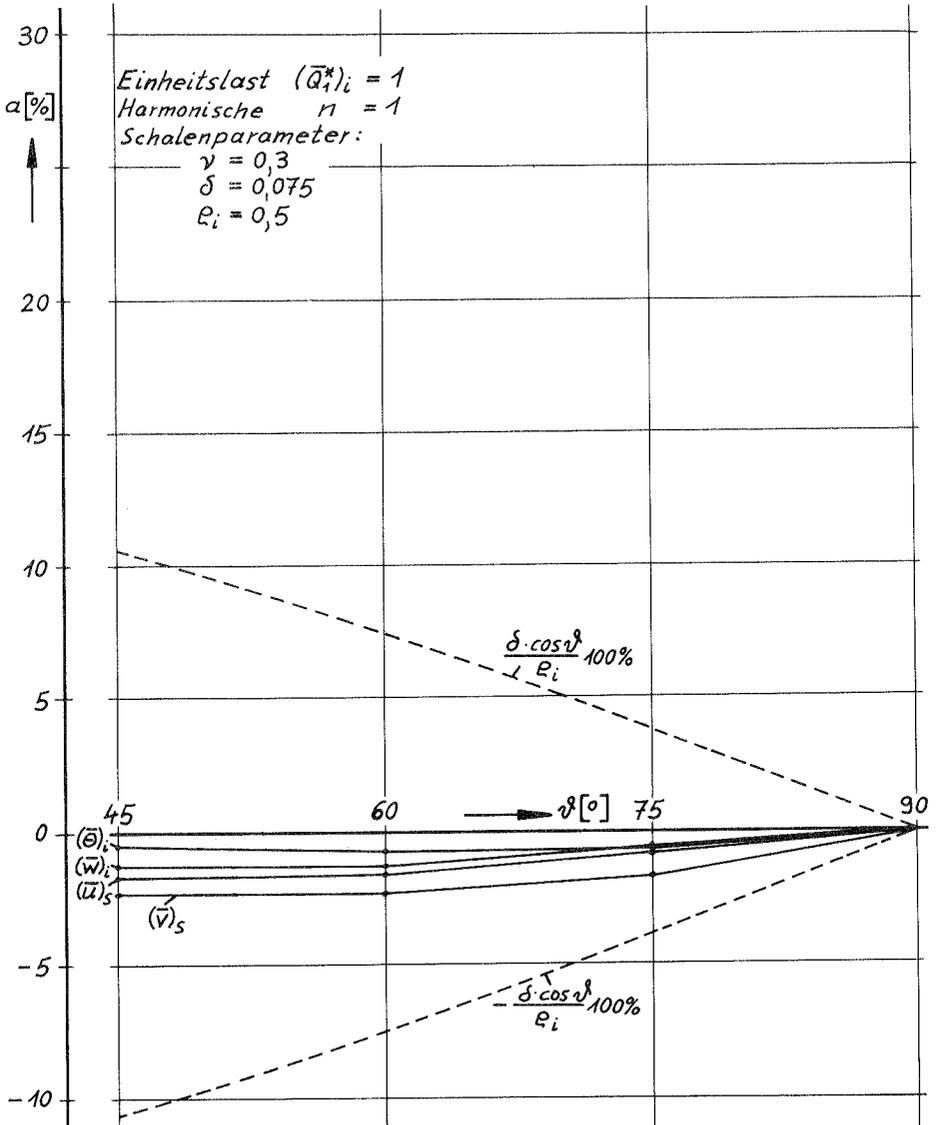
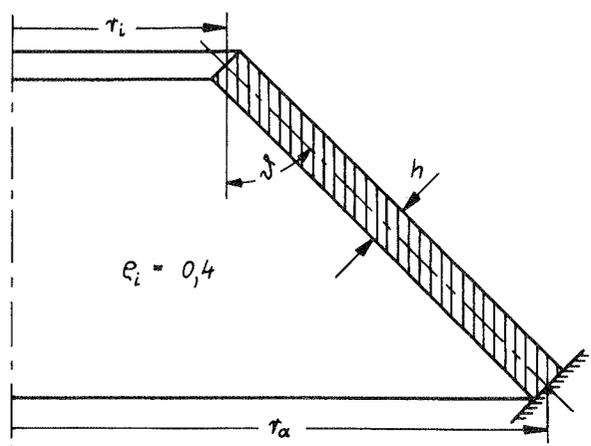


Bild 6.5.6 Abweichung α der Verschiebungsgrößen in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ

$$e_i = \frac{\tau_i}{\tau_a}$$

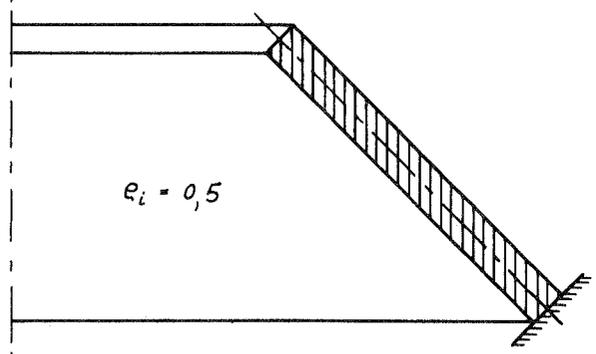
$$\vartheta = 45 [^\circ]$$

$$\delta = \frac{h}{\tau_a} = 0,075$$



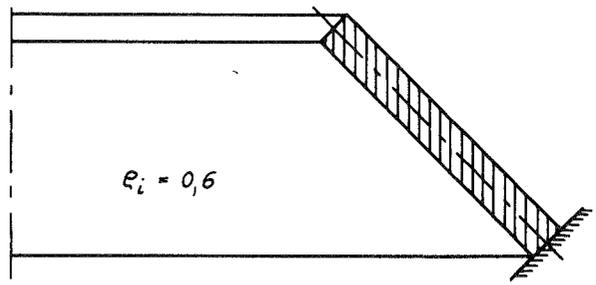
$e_i = 0,4$

Bild 6.6.1



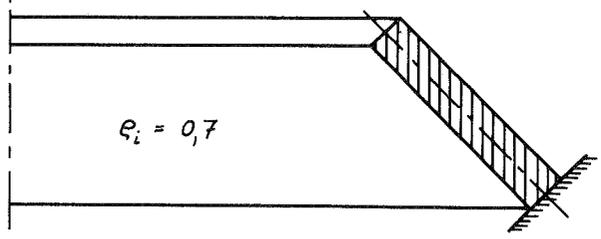
$e_i = 0,5$

Bild 6.6.2



$e_i = 0,6$

Bild 6.6.3



$e_i = 0,7$

Bild 6.6.4

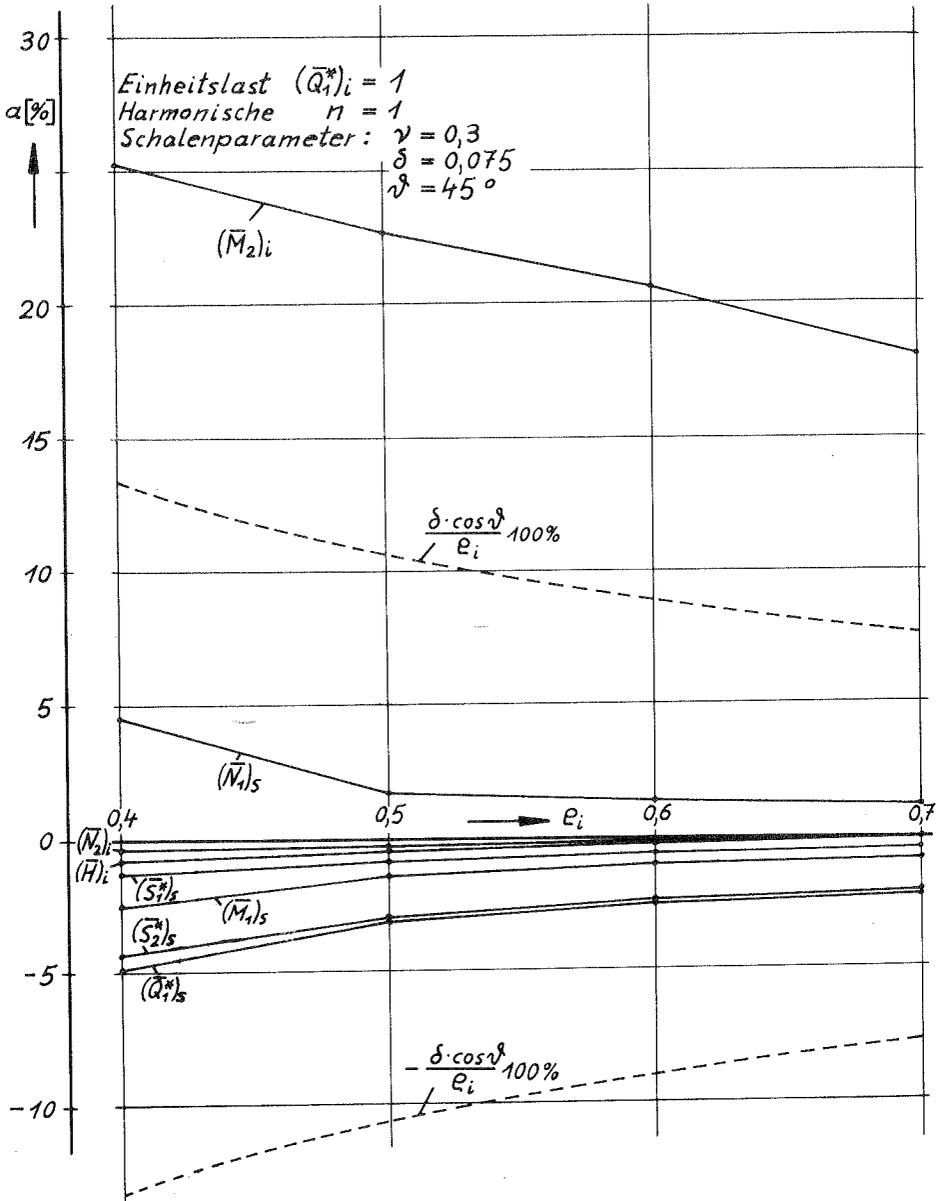


Bild 6.6.5 Abweichung α der Kräfte und Momente in Abhängigkeit vom Radienverhältnis ϵ_i

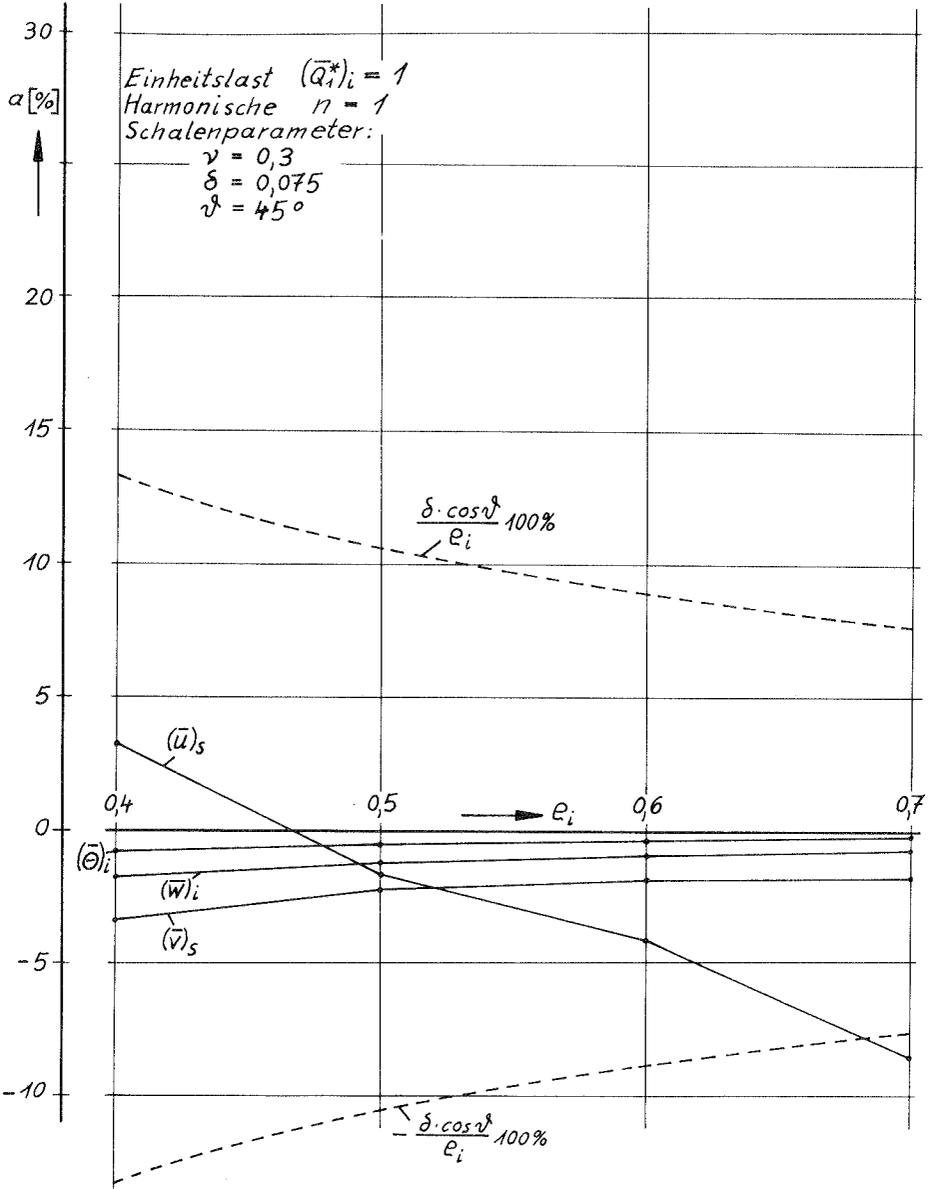


Bild 6.6.6 Abweichung α der Verschiebungsgrößen
in Abhängigkeit vom Radienverhältnis ρ_i

7. Vergleich zwischen konstanter und linear veränderlicher Wandstärke

Vielfach benutzt man zur Berechnung von Kegelschalen konstanter Wandstärke Ersatzschalen mit linear veränderlicher Wanddicke, da hierfür elementare Lösungen bekannt sind, [3]. An Hand einer Vergleichsrechnung soll festgestellt werden, welche Annahme für den Ersatzkegel zweckmäßigerweise zu treffen sind und inwieweit die Lösungen miteinander übereinstimmen. Der Kegel mit variabler Wandstärke nach Abb. 7.1 wird verglichen mit einem Kegel von der Wandstärke des Innenrandes $d_i = 0,05$ und einem solchen mit mittlerer Wandstärke $d_m = \frac{d_a + d_i}{2} = 0,075$. Am freien Rand wirke die Einheitskraft $(\overline{Q_1^*})_i$ mit $n=1$, während der Rand $e = e_a$ eingespannt ist. Die Ergebnisse für die drei Rechnungen sind in den Abbildungen 7.2/13 im gleichen Maßstab aufgetragen. Es wurden die erweiterten Gleichungssysteme (3.6.1/20) bzw. (3.7.19/38) benutzt.

Bei den meisten Größen ist eine weitgehende Übereinstimmung mit dem Kegel mittlerer Wanddicke festzustellen. Dies gilt besonders für N_1 , S_1^* , S_2^* , M_1/r_a und $E \cdot u$, die ihren Maximalwert nicht am Innenrand haben. Lediglich die Lösungskurven von M_2/r_a , H/r_a , $E \cdot w$ und $r_a \cdot E \cdot \theta$, die vom freien Rand her abklingen, entsprechen eher der dünnen Schale. Der Ersatzkegel mit linear veränderlicher Wandstärke sollte möglichst an der Stelle von der gleichen Dicke wie der ursprüngliche Kegel sein, an der die interessierenden Größen ihren Maximalwert haben. Diese Forderung läßt sich mit nur einem Ersatzkegel nicht für alle Kräfte, Momente und Verschiebungen gleichzeitig erfüllen.

$$e_i = \frac{r_i}{r_a} = 0,5$$

$$\vartheta = 45^\circ$$

$$\delta_i = \frac{h_i}{r_a} = 0,05$$

$$\delta_m = \frac{h_m}{r_a} = 0,075$$

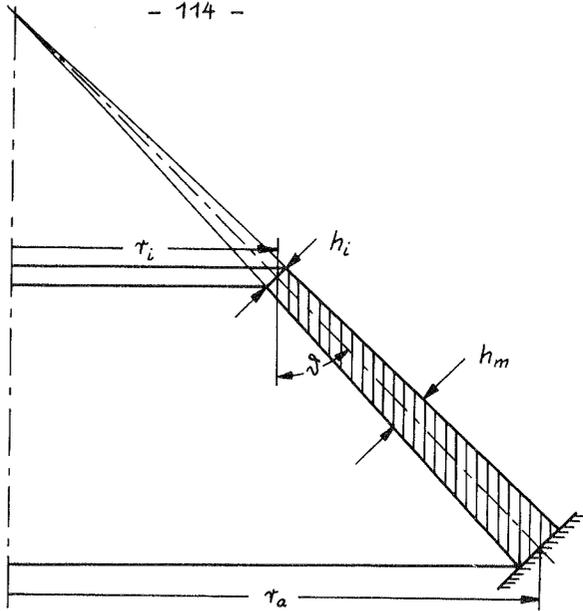


Bild 7.1

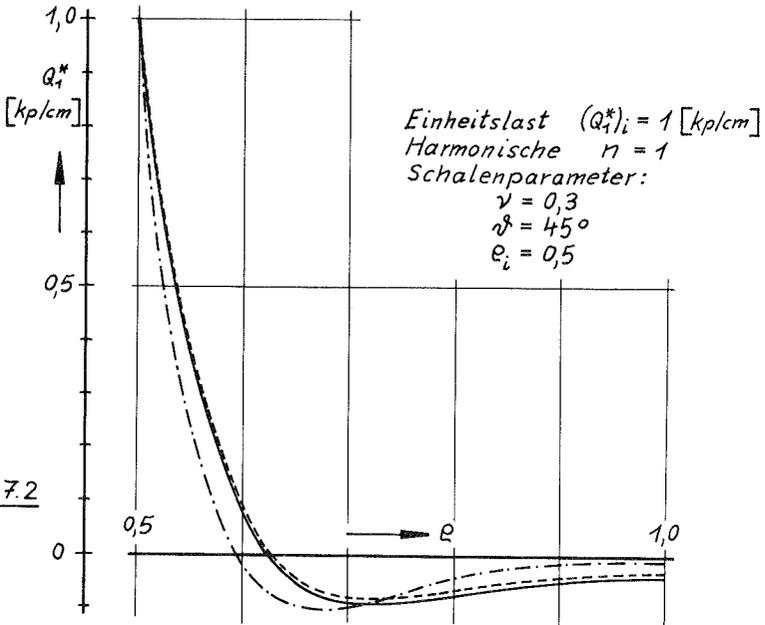


Bild 7.2

- Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke
- · - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_i = 0,05$
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_m = 0,075$

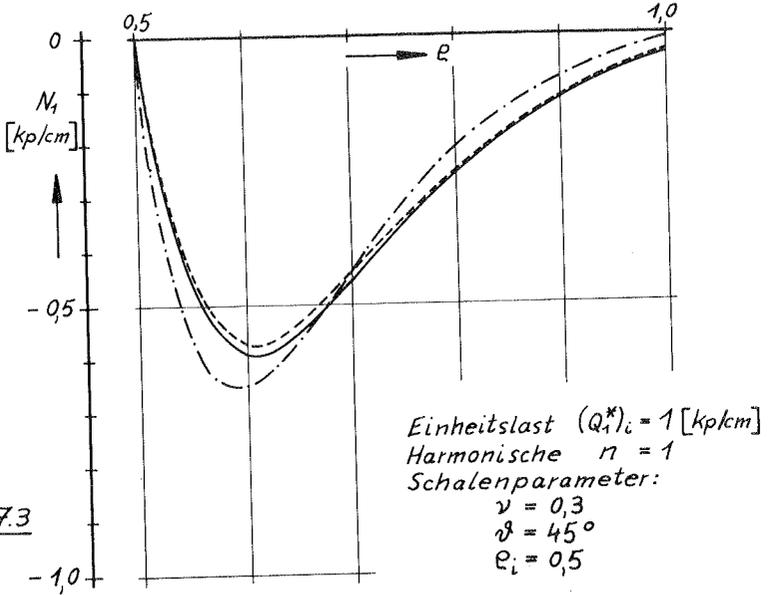


Bild 7.3

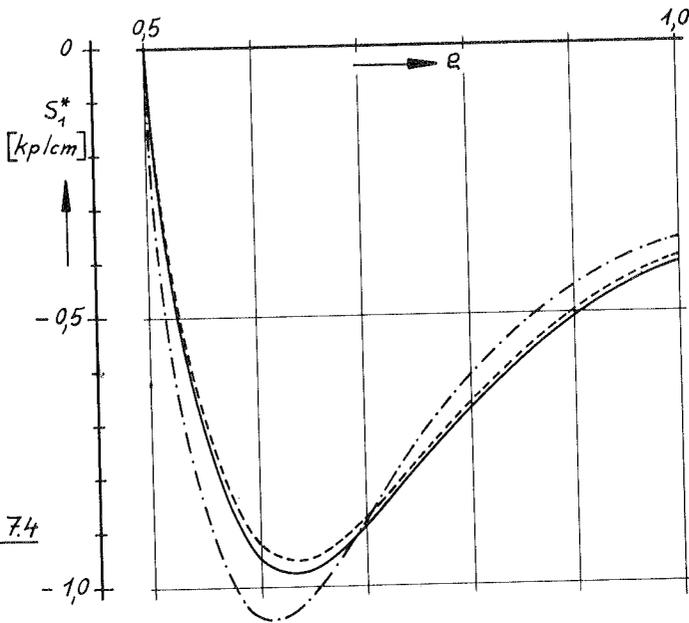


Bild 7.4

- Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_i = 0,05$
- · - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_m = 0,075$

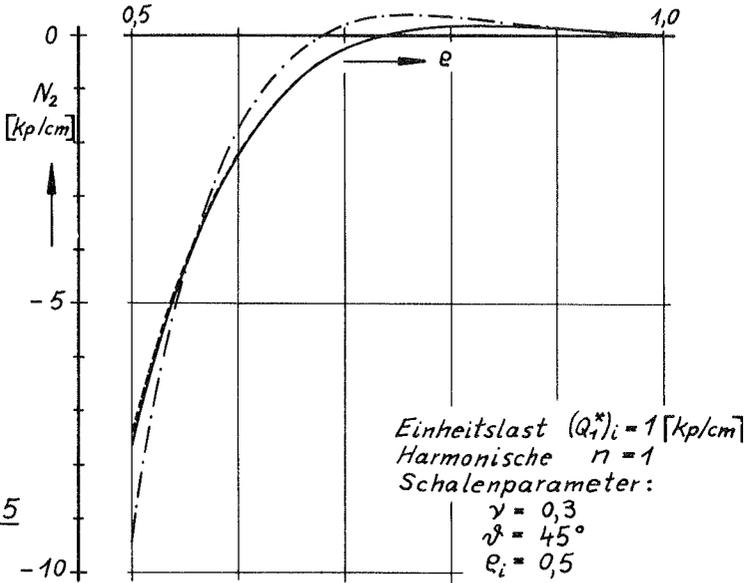


Bild 7.5

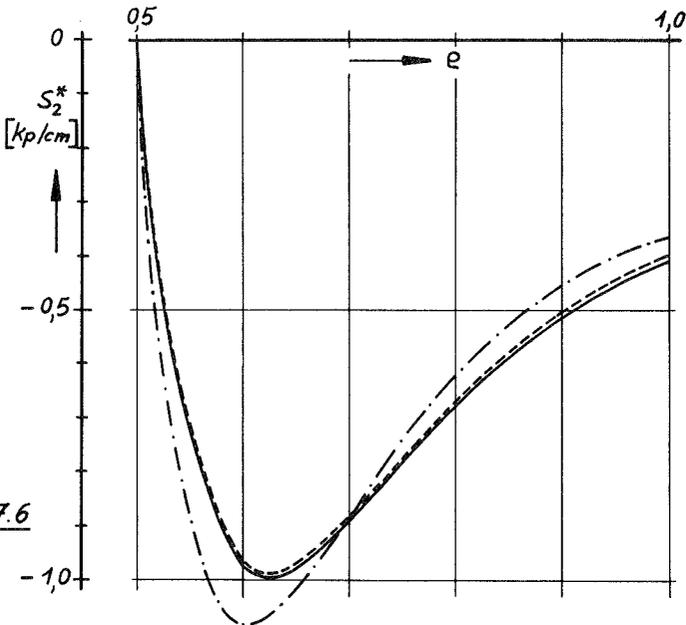


Bild 7.6

- Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_i = 0,05$
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_m = 0,075$

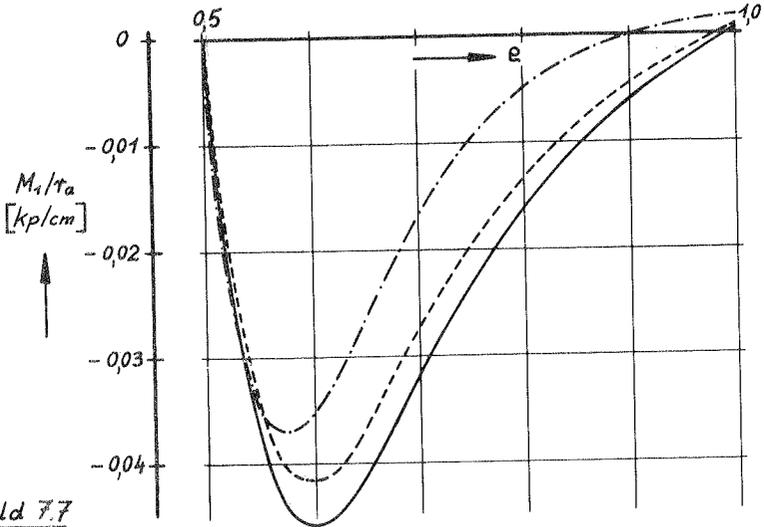


Bild 7.7

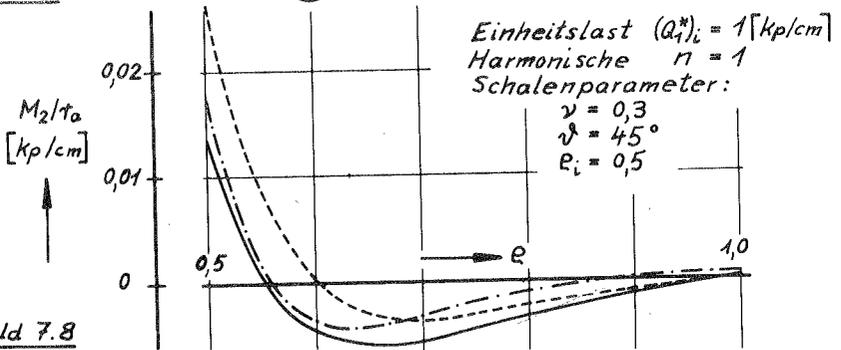


Bild 7.8

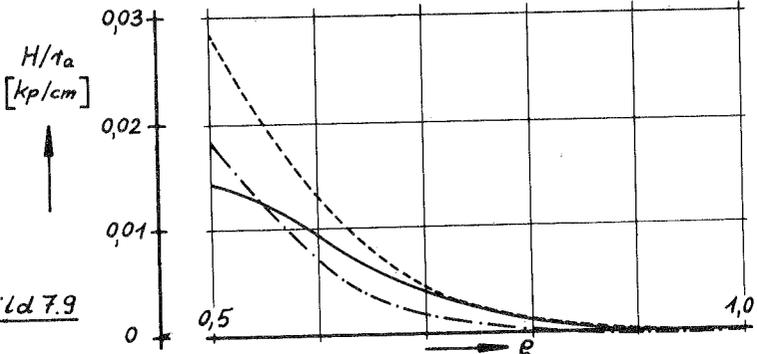


Bild 7.9

- Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_i = 0,05$
- · - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_m = 0,075$

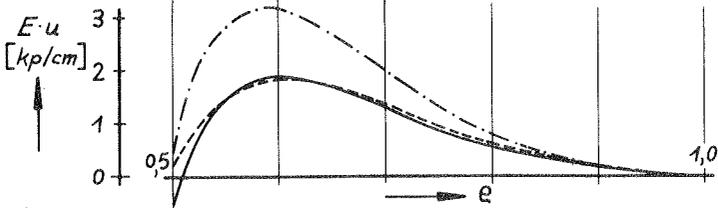


Bild 7.10

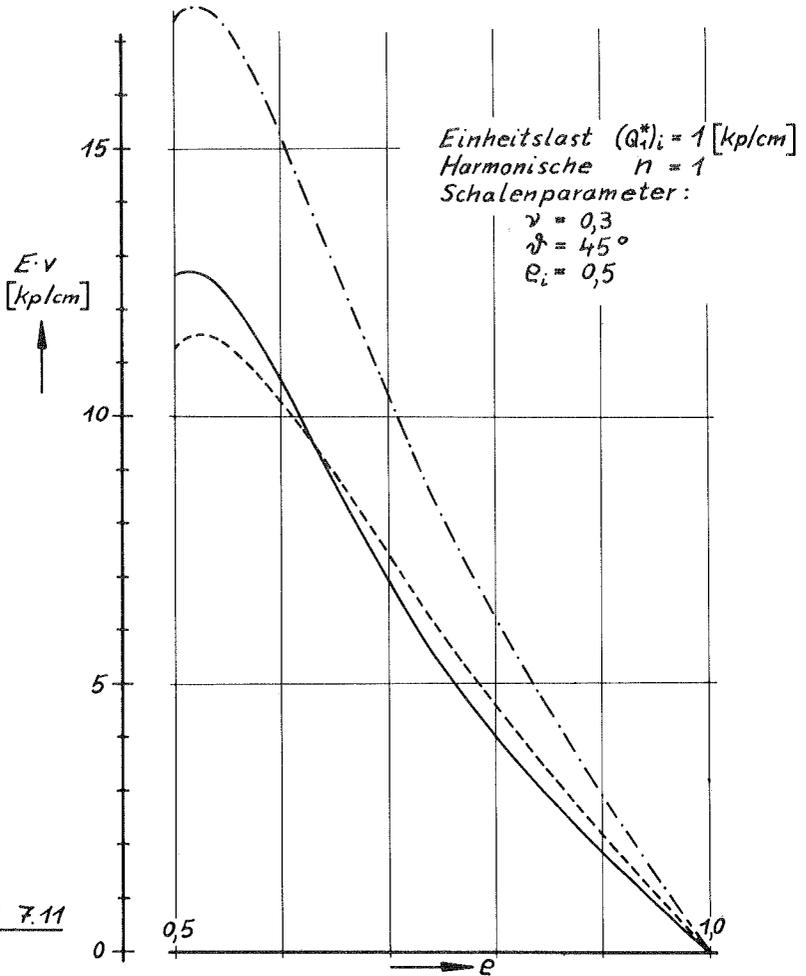


Bild 7.11

- Kegel mit linear veränderlicher Wandstärke
- - - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_i = 0,05$
- · - Kegel konstanter Wandstärke mit $\delta_m = 0,075$

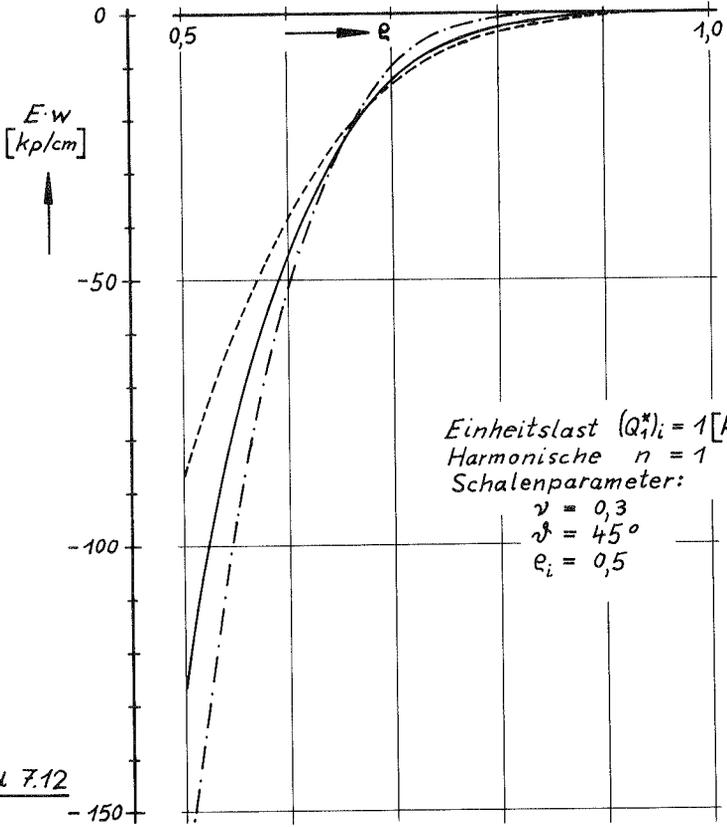


Bild 7.12

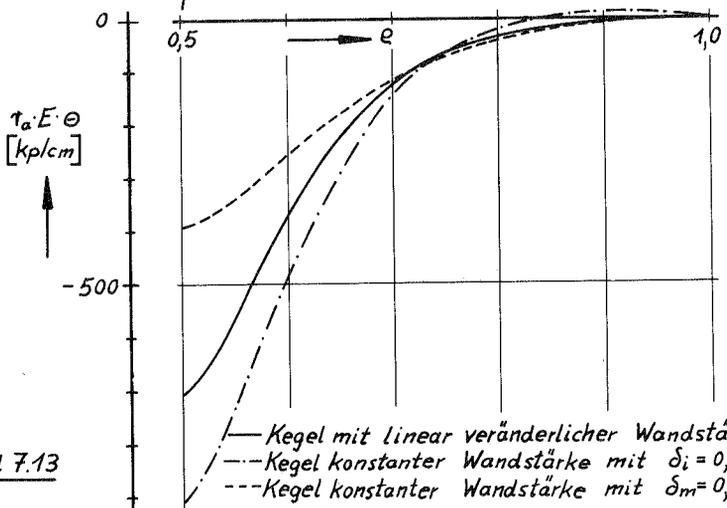


Bild 7.13

8. Zusammenfassung

Die Anwendung der Analogrechentechne zur Behandlung von Problemen der Schalenbiegetheorie wird gezeigt am Beispiel eines einseitig eingespannten Kegelstumpfes, an dessen freiem Rand beliebige Einheitslastzustände angreifen.

An jedem Ende der Kegelschale sind vier Randbedingungen zu erfüllen. Der Analogrechner erlaubt auf direktem Wege jedoch nur die Lösung von Aufgaben mit gegebenen Anfangswerten. Die verschiedenen Möglichkeiten, Randwertprobleme auf Anfangswertaufgaben zurückzuführen, werden diskutiert. Da es sich um ein System linearer Diff.-gln. handelt, ließe sich das Überlagerungsverfahren anwenden. Für den Analogrechner ist ein automatisch ablaufendes Iterationsverfahren jedoch besser geeignet, das auch auf nichtlineare Probleme anwendbar ist.

Bei stark abklingendem Biegespannungszustand kann man keine unmittelbare Beziehung zwischen beiden Rändern herstellen. Zur Beseitigung der dann auftretenden Stabilitätsschwierigkeiten wird die Aufteilung der Schale in mehrere Abschnitte vorgeschlagen. Auf diese Weise lassen sich auch Zwischenbedingungen einführen. Für die hierzu notwendigen Berechnungen wäre der Übergang auf eine hybride Anlage von Vorteil. Der Analogrechner liefert die Lösungen für die Schalensegmente, während der Digitalrechner die vorbereitenden Rechnungen, das Aufstellen der Koeffizientenmatrizen und die Lösung des Gleichungssystems übernimmt.

Um die Rechengenauigkeit abschätzen zu können, werden eine Reihe von Vergleichsrechnungen durchgeführt. Zu den speziellen Fällen, deren exakte Lösungen bekannt sind, gehören neben den Membrangleichungen die Kreisringscheibe und -platte. Außerdem lassen sich die Lösungsfunktionen für die vereinfachten Gleichungen der schwach gekrümmten Kegelschale unter rotations-symmetrischer Belastung mit analytischen Ergebnissen vergleichen. Die Fehler in den Maximalwerten der einzelnen Größen liegen unter einem Prozent.

Als praktische Anwendung des Verfahrens werden die Abweichungen festgestellt, die sich bei Verwendung der Gleichungen für die schwach gekrümmte dünne Kegelschale gegenüber den erweiterten Wlassowschen Gleichungen ergeben. Hierzu wird der Einfluß der folgenden Parameter untersucht: Belastung, Harmonische der Fourierreihenentwicklung, Querkontraktionszahl, Wandstärke, Öffnungswinkel und Radienverhältnis. Ein Anhaltswert für die zu erwartenden Abweichungen ist das Verhältnis von Wandstärke zu kleinstem Krümmungsradius im Vergleich zu eins. Bei der Belastung durch Membrankräfte ergeben sich wesentliche Differenzen in den Größen M_2 und H am Schaleninnenrand, während bei der Querkrafteinleitung nur für M_2 ein größerer Fehler festzustellen ist und beim Momentenangriff alle Größen innerhalb der angegebenen Toleranz liegen. Die Unterschiede resultieren vorwiegend aus den Vernachlässigungen, die in den geometrischen Beziehungen vorgenommen wurden. Der Einfluß der Harmonischen macht sich dahingehend bemerkbar, daß für größeres n die prozentualen Abweichungen im allgemeinen zunehmen. Bei der Variation der Querkontraktionszahl läßt sich keine einheitliche Tendenz feststellen. Für dünne Wandstärken werden die Differenzen erwartungsgemäß geringer. Die Krümmung einer konischen Schale hängt wesentlich vom Öffnungswinkel ab. Bei halben Spitzwinkeln über 75° lassen sich die vereinfachten Gleichungen für schwach gekrümmte Schalen ohne weiteres anwenden. Hier liegen die Unterschiede in sämtlichen Größen unter zwei Prozent, und beim Übergang zur Kreisringscheibe bzw. -platte verschwinden sie ganz. Weiterhin wurde noch der Einfluß des Radienverhältnisses untersucht. Die Abweichungen müssen mit größer werdendem Durchmesser des Innenrandes abnehmen, da die Krümmung des Kegelstumpfes umgekehrt proportional zum Breitenkreisradius ist. Dies läßt sich aus den Ergebnissen deutlich erkennen.

Im letzten Kapitel der Arbeit erfolgt eine Gegenüberstellung von konischen Schalen konstanter und linear veränderlicher Wandstärke. Ein Kegel mit variabler Wanddicke wird verglichen mit einem Kegel von der Wandstärke des Innenrandes und einem solchen mit mittlerer Wandstärke. Am freien Rand wirkt eine Einheitsquerkraft. Bei den meisten Größen ist eine weitgehende Überein-

stimmung mit dem Kegel mittlerer Wanddicke festzustellen. Dies gilt besonders für die Membrankräfte, die ihre Maximalwerte größtenteils nicht am Innenrand haben. Lediglich die Lösungskurven für die Größen, die vom Innenrand her abklingen, entsprechen eher der dünnen Schale. Ein einziger Ersatzkegel veränderlicher Wandstärke reicht nicht aus, um den Verlauf aller Kräfte, Momente und Verformungen mit gleich guter Genauigkeit zu beschreiben.

Das Rechenverfahren ist nicht auf Kegel beschränkt. Es lassen sich Rotationsschalen mit beliebig gekrümmter differentierbarer Meridiankurve behandeln. Die Wanddicke in Richtung der Meridiantangente kann stetig oder sprunghaft veränderlich sein. Da auch die Berechnung nichtlinearer Diff.-gln. auf dem Analogrechner grundsätzlich keine Schwierigkeiten bereitet, läßt sich die Methode, hier allerdings unter der Voraussetzung drehsymmetrischer Belastung, erweitern. Man kann die nach der Theorie zweiter Ordnung gewonnenen Gleichgewichtsbedingungen (Gleichgewicht am verformten Schalenelement) verwenden und in die Spannungs-Dehnungsbeziehungen ein nichtlineares Werkstoffgesetz einführen.

Lebenslauf

Karl Heinz Ringelstein

4. Juli 1937 geboren in Bendorf/Koblenz als Sohn des Metzgermeisters Ludwig Ringelstein und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Meier
- 1943 bis 1947 Besuch der Volksschule in Boppard/Rh
- 1947 bis 1957 Besuch des Städtischen Neusprachlichen Gymnasiums in Boppard/Rh
Reifeprüfung: 25. 2. 1957
- 1957 bis 1962 Studium des Maschinenbaus an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Diplom-Vorprüfung, allgemeiner Maschinenbau: 22. 12. 1959
Diplom-Hauptprüfung, Fachrichtung Wärme-, Kraft- und Arbeitsmaschinen: 4.9.1962
- Seit 1962 Berechnungs-Ingenieur bei der Firma Daimler-Benz A.-G., Stuttgart-Untertürkheim, Abteilung Konstruktion/Strömungsmaschinen