

✓

**NUMERISCHE BEHANDLUNG DER  
KIRCHHOFFSCHEN UND REISSNERSCHEN  
PLATTENTHEORIE NACH EINER  
DISKRETISIERTEN UND ERWEITERTEN  
TREFFTZ – METHODE**

von  
**GÜNTER MÜLLER**

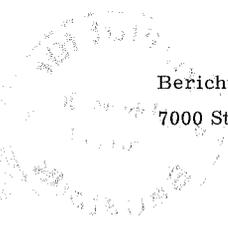
Bericht Nr. 75 – 2

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1975





Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,  
7000 Stuttgart 1, Keplerstraße 11, Postfach 560, bezogen werden.

Dieser Bericht wurde unter dem Titel "Beitrag zur numerischen Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode" als Dissertation von Herrn Günter Müller dem Fachbereich 11, Konstruktiver Ingenieurbau, der Universität Stuttgart am 28. 11. 74 vorgelegt.

Die mündliche Doktorprüfung fand am 28. Mai 1975 statt.

Berichter waren:

Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. phil. Dr. -Ing. E. h. U. Wegner

### Zusammenfassung

Klassische und verallgemeinerte Variationsverfahren werden als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste eingeordnet. Ausführlich wird das Trefftz'sche Verfahren in erweiterter und diskretisierter Form behandelt und die Ausgangsgleichungen zur Berechnung von Platten nach der Kirchhoffschen und nach einer vereinfachten Reissner'schen Theorie aufgestellt. An ausgewählten Beispielen wird die Leistungsfähigkeit des Verfahrens im Vergleich zu anderen Lösungen gezeigt. Die Methode kann ohne Schwierigkeit auf andere Probleme der Elastostatik übertragen werden.

### Summary

Classical and generalized variational methods are classified to be special cases of the method of weighted residuals. In detail the method of Trefftz is dealt with in an extended sense and in a discrete form. For the analysis of plates the corresponding equations are derived on the basis of the theory of Kirchhoff and a simplified theory of Reissner. Selected examples show the efficiency of the method in comparison with other solutions. Without difficulty the method can be applied to other mechanical problems.

### Résumé

Les méthodes variationnelles sont présentées comme cas particuliers de la méthode des résidus. La méthode de Trefftz dans sa forme généralisée et discrétisée est développée en détail et les équations correspondantes du calcul des plaques selon Kirchhoff et selon une théorie simplifiée de Reissner sont établies. Les performances de cette méthode sont, à l'appui de quelques exemples choisis, comparées à celles d'autres solutions. La méthode peut sans difficultés être appliquée à d'autres problèmes de la théorie d'élasticité.

## Inhaltsverzeichnis

### Schriftumsverzeichnis

#### Bezeichnungen

1. Einleitung
  - 1.1 Näherungsmethoden in der Flächenstatik
  - 1.2 Aufgabenstellung der Arbeit
  
2. Variationsverfahren als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste (method of weighted residuals) und Wahl eines Verfahrens
  - 2.1 Die Methode der gewichteten Reste
    - 2.1.1 Erweiterung der Methode der gewichteten Reste durch Aufteilung des Bereichs in Teilbereiche (Mehrbereichsrechnung)
    - 2.1.2 Berücksichtigung von Nebenbedingungen
    - 2.1.3 Die diskretisierte Methode der gewichteten Reste
  - 2.2 Variationsverfahren der Elastostatik als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste
    - 2.2.1 Klassische Variationsverfahren
    - 2.2.2 Verallgemeinerte Variationsverfahren
  - 2.3 Wahl und Modifikation eines Verfahrens
  
3. Grundgleichungen der Kirchhoffschen und vereinfachten Reissnerschen Plattentheorie
  - 3.1 Überblick über Formulierung und Anwendung verschärfter Plattentheorien
  - 3.2 Ausgangsgleichungen der vereinfachten Reissnerschen und der Kirchhoffschen Theorie

- 3.3 Bestimmung der Ansatzfunktionen in Polarkoordinaten
  - 3.3.1 Ansatzfunktionen für  $w$
  - 3.3.2 Ansatzfunktionen für  $\alpha$
  - 3.4 Schnitt- und Verschiebungsgrößen für das lokale Koordinatensystem  $(n, t)$  des Randes
  
- 4. Das diskretisierte, erweiterte Trefftz - Verfahren und das diskretisierte Randfehlerquadratminimumverfahren
  - 4.1 Das diskretisierte Randfehlerquadratminimumverfahren
  - 4.2 Das diskretisierte, erweiterte Trefftz-Verfahren
    - 4.2.1 Das Potential der Platte
  - 4.3 Erweiterung auf Mehrbereiche
    - 4.3.1 Diskretisiertes Fehlerquadratminimumverfahren für Mehrbereiche
    - 4.3.2 Diskretisiertes, erweitertes Trefftz-Verfahren für Mehrbereiche
    - 4.3.3 Übergang zur Finiten-Element-Methode
  - 4.4 Diskretisierte kombinierte Verfahren
    - 4.4.1 Kombination Trefftz - Verfahren und Fehlerquadratminimumverfahren
    - 4.4.2 Kombination Trefftz-Verfahren und Kollokation
  
- 5. Zahlenbeispiele
  - 5.1 Übersicht über die gerechneten Beispiele
  - 5.2 Untersuchung der Plattenecken
  - 5.3 Beispielreihe 1
  - 5.4 Beispielreihe 2
  - 5.5 Beispielreihe 3
  
- 6. Zusammenfassung und Ausblick

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Finlayson, B. A.,           The Method of Weighted Residuals -  
      Scriven, L. E.:           A Review.  
                                  Appl. Mech. Reviews 19(1966) S. 735 -  
                                  748.
- [2] Leissa, A. W.,            A Comparison of Approximate Methods  
      Claussen, W. E.,       for the Solution of Plate Bending Prob-  
      Hulbert, L. E.,       lems.  
      Hopper, A. T.:        AIAA Journal 7 (1969) S. 920 - 928.
- [3] Brandes, K.:            Zur Systematik numerischer Nähe-  
                                  rungsverfahren in der Statik und Dy-  
                                  namik der Konstruktionen.  
                                  Nucl. Eng. and Design 18(1972) S. 469 -  
                                  485.
- [4]                            Jahresübersichten Elastizitätslehre.  
                                  VDI - Zeitschrift, ab Bd. 103 (1961).
- [5] Collatz, L.:            Numerische Behandlung von Differen-  
                                  tialgleichungen.  
                                  Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [6] Crandall, S. H.:        Engineering Analysis.  
                                  A Survey of Numerical Procedures.  
                                  McGraw Hill Book Company Inc.,  
                                  New York, 1956.
- [7] Murray, W.:            Numerical Methods for Unconstrained  
                                  Optimization.  
                                  Academic Press, London, 1972.
- [8] Krüger, J.:            Beitrag zur Berechnung randgestützter  
                                  dicker Platten und dicker Fundament-  
                                  platten.  
                                  Wiss. Zeitschrift Hochsch. für Arch.  
                                  und Bauwesen Weimar 18(1971) S. 541 -  
                                  550.

- [9] Schmid, G.: Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der gewichteten Residuen. ZAMM 52 (1972) S. 461 - 469.
- [10] Courant, R.: Über ein konvergenzerzeugendes Prinzip in der Variationsrechnung. Göttinger Nachrichten (1922) S. 144 - 150.
- [11] Courant, R.: Über direkte Methoden in der Variationsrechnung und über verwandte Fragen. Math. Annalen 97 (1927) S. 711 - 736.
- [12] Birman, M.S.: Variationsmethoden analog dem Trefftz-schen Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben. Vestnik Leningradskogo universiteta. Serija matematiki, mehaniki i astronomii 11 (1956) 3, Nr. 13, S. 69 - 89.
- [13] Birman, M.S.: Über die Variationsmethode von Trefftz für die Gleichung  $\Delta^2 u = f$ . Doklady Akademii nauk, SSSR 101 (1955) 2, S. 201 - 204.
- [14] Pöschl, T.: Über eine mögliche Verbesserung der Ritzschen Methode. Ing. Arch. 23 (1955) S. 365 - 372.
- [15] Weidner, P.: Eine Weiterentwicklung des Trefftz-schen Verfahrens zur Lösung der Bipotentialgleichung. ZAMM 47 (1967) S. T 57.

- [16] Ramm, E.: Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie. Anwendung der verbesserten Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimum) als Randverfahren. Diss. Universität Stuttgart, 1972.
- [17] Diaz, J. B.,  
Greenberg, H. J.: Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Biharmonic Boundary Value Problem. J. Math. Phys. 27 (1948) S. 193 - 201.
- [18] Wegner, U.: Ein Beitrag zur Lösung von Balken und Plattenproblemen. Beton- und Stahlbetonbau 9 (1961) S. 210 - 218.
- [19] Lebender, W.: Ein Beitrag zur approximativen Berechnung der allseitig eingespannten, quadratischen Platte unter einachsiger exzentrischer Einzellast. Diss. TH Darmstadt, 1962.
- [20] Philipzik, W.: Das Trefftz-Verfahren für eingespannte anisotrope und isotrope querbelastete Platten. Techn. Mitt. Krupp Forsch.-Ber. 30 (1972) S. 89 - 91.
- [21] Trefftz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. 2. Int. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich (1926) S. 131 - 137.

- [22] Weinstein, A.: On a Minimal Problem in the Theory of Elasticity.  
J. London Math. Soc. 10 (1935) S. 184 - 192.
- [23] Wegner, U.: Eine neue Methode zur approximativen Lösung von Spannungsproblemen bei Platten und Scheiben.  
Forschungshefte Stahlbau 6 (1943) S. 183 - 189.
- [24] Berger, E. R.: Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung.  
Österr. Ing. Arch. 7 (1953) S. 39 - 49.
- [25] Albrecht, J.: Eine einheitliche Herleitung der Gleichungen von Trefftz und Galerkin.  
ZAMM 35 (1955) S. 193 - 195.
- [26] Rüdiger, D.: Die Verfahren von Ritz und Trefftz in der Reissnerschen Plattentheorie.  
Österr. Ing. Arch. 13 (1959) S. 257 - 263.
- [27] Rüdiger, D.: Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper.  
Ing. Arch. 27 (1960) S. 421 - 428.
- [28] Rüdiger, D.: Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua.  
Ing. Arch. 29 (1960) S. 115 - 124.
- [29] Kneschke, A.,  
Rüdiger, D.: Eine Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips zur Integration mechanischer Anfangs- und Randwertaufgaben.  
Ing. Arch. 31 (1962) S. 101 - 114.

- [30] Kneschke, A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Band III.  
Teubner-Verlag, Leipzig, 1962.
- [31] Kneschke, A.: Unmittelbare Herleitung der Trefftz-schen Gleichungen des Verfahrens der partikularen Lösungen.  
ZAMM 43 (1963) S. 417 - 420.
- [32] Stein, E.: Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke.  
Diss. TH Stuttgart, 1964.
- [33] Buck, E.,  
Scharpf, W.,  
Stein, E.,  
Wunderlich, W.: Finite Elemente in der Statik.  
Vorträge von einem Kolloquium in Stuttgart.  
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [34] Morley, L.S.D.: The Approximate Solution of Plate Problems.  
Proc. IX Int. Congr. Appl. Mech.,  
Brüssel, 1956, VI, S. 22 - 29.
- [35] Rüdiger, D.: Eingespannte Rechteckplatten mit Schubverzerrungen.  
ZAMM 43 (1963) S. 71 - 79.
- [36] Hain, H.: Zur Ermittlung der Auflagerkraft - Einflußflächen schiefwinkliger Platten.  
Abhdl. der Braunsch. wiss. Gesell.  
15 (1963) S. 80 - 132.
- [37] Aas Jakobsen, A.: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß.  
Abhdl. IVBH 38 (1937) S. 1 - 7.

- [38] Hulbert, L.E.,  
Niedenfuhr, F.W.: Accurate Calculation of Stress Dis-  
tributions in Multiholed Plates.  
Transact. ASME J. Eng. Ind. 87 (1965)  
S. 331 - 336.
- [39] Hoppe, H.: Über Erfahrungen mit Kollokationsver-  
fahren bei zweidimensionalen Rand-  
wertaufgaben,  
ZAMM 47 (1967) S. T 52 - T 54.
- [40] Brandes, K.: Die Lagerung des kreiszylindrischen  
Rohres auf einer kreisförmigen star-  
ren Schneide. Lösung eines gemisch-  
ten Randwertproblems mit Hilfe einer  
speziellen Kollokationsmethode.  
Diss. TU Berlin, 1968.
- [41] Hulbert, L.E.,  
Simonen, F.A.: On the Solution of Approximate Elastic  
Stress Problems by the Boundary-  
Point-Least-Squares Technique.  
1 Int. Congr. on Press. Vessel Techn.,  
Part F, Design and Analysis, Delft,  
1969.
- [42] Majundar, S.: Biegetheorie schwach gekrümmter  
Translationsschalen über rechteckigem  
Grundriß.  
Diss. TU Berlin, 1969.
- [43] Hulbert, L.E.,  
Simonen, F.A.: Analysis of Stresses in Shallow Spheri-  
cal Shells with Periodically Spaced  
Holes.  
Transact. ASME J. of Eng. Ind. 92  
(1970) S. 834 - 840.

- [44] Becker, M.: Beitrag zur Schalenberechnung nach einem verallgemeinerten Variationsprinzip und nach der überbestimmten Kollokation.  
Diss. Universität Stuttgart, 1972.
- [45] Reissner, E.: On the Theory of Bending of Elastic Plates.  
J. Math. Phys. 23 (1944) S. 184 - 194.
- [46] Bolle, L.: Contribution au problème lineaire de flexion d'une plaque élastique.  
Bull. Techn. Suisse Romande 73 (1947) S. 281 - 285 und S. 293 - 298.
- [47] Hencky, H.: Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten.  
Ing. Arch. 16 (1947) S. 72 - 76.
- [48] Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik.  
Ing. Arch. 21 (1953) S. 266 - 286.
- [49] Panc, V.: Verschärfte Theorie der Plattenstatik.  
Ing. Arch. 33 (1964) S. 351 - 371.
- [50] Fersht, S.: An Extended Reissner Thin Plate Theory.  
Israel J. of Techn. 2 (1964) S. 312 - 317.
- [51] Shen, M.K.: Ein Paradoxon der Plattentheorie.  
Der Bauingenieur 37 (1962) S. 23.
- [52] Hanuska, A.: Zu den Theorien der Plattenbiegung.  
Beton- und Stahlbetonbau 64 (1969) S. 214 - 217.

- [53] Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates.  
J. Appl. Mech. 12 (1945) S. A 69 - A 77.
- [54] Greimann, L. F.,  
Lynn, P. P.: Finite Element Analysis of Plate Bending with Transverse Shear Deformation.  
Nuclear Eng. and Design 14 (1970) S. 223 - 230.
- [55] Reissner, E.: On Bending of Elastic Plates.  
Quart. of Appl. Math. 5 (1947) S. 55 - 68.
- [56] Schäfer, M.: Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten.  
ZAMM 32 (1951) S. 161 - 171.
- [57] Kromm, A.: Über die Randquerkräfte bei gestützten Platten.  
ZAMM 35 (1955) S. 231 - 241.
- [58] Salerno, V. L.,  
Goldberg, M. A.: Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates.  
Transact. ASME J. Appl. Mech. 27 (1960) S. 54 - 58.
- [59] Ainola, L. Y.: On Refined Reissner-Type Theories of Plates.  
Proc. 4 All-Union Conf. on Shells and Plates, Erevan 1962, S. 146 - 152.
- [60] Stavsky, Y.: On the Theory of Symmetrically Heterogeneous Plates Having the Same Thickness Variation of the Elastic Moduli.  
In 'Topics in Appl. Mech.'.  
Elsevier Publ. Comp., Amsterdam, 1965, S. 105 - 116.

- [61] Zimmer, K.: Ein Beitrag zur anisotropen dicken Platte.  
ZAMM 46 (1966) S. 543 - 545.
- [62] Carley, G.T.,  
Langhaar, H.L.: Transverse Shearing Stress in Rectangular Plates.  
Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. 94 (1968) S. 137 - 151.
- [63] Srinivas, S.,  
Rao, A.K.,  
Rao, C.V.J.: Flexure of Simply Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates.  
ZAMM 49 (1969) S. 449 - 458.
- [64] Baumgart, F.: Ein systematisches Verfahren zur Gewinnung exakter Lösungen für dicke Rechteckplatten und Balken mit rechteckigem Querschnitt.  
Fortschritt - Ber. VDI - Zeitschrift, Reihe 4, Nr. 17 (1970).
- [65] Pryor, Ch.W.,  
Barker, R.M.,  
Frederick, D.: Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates.  
Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. 86 (1960) S. 967 - 983.
- [66] Roth, J.: Beitrag zur Berechnung dicker Rechteckplatten unter Berücksichtigung veränderlicher Plattendicke.  
Diss. TH Aachen, 1972.
- [67] Argyris, J.H.,  
Scharpf, D.W.: Finite Element Theory of Plates and Shells Including Transverse Shear Strain Effects.  
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 1 (1972) S. 81 - 139.



- [77] Timoshenko, S. P.,      Theory of Plates and Shells.  
Woinowsky-Krieger, S.: 2. Auflage.  
McGraw Hill Book Company Inc.,  
New York, 1959.
- [78] Nadai, A.:                Die elastischen Platten.  
Springer-Verlag, Berlin, 1925. Nach-  
druck 1968.
- [79] Gericke, J.:              Anwendung der Eigenwertmethode zur  
Berechnung schiefwinkliger Platten  
mit beliebigen Randbedingungen und  
Untersuchung der Spannungszustände  
in den stumpfen Ecken.  
Diss. TU Berlin, 1967.
- [80] Pfaffinger, D.:         Berechnung polygonaler Platten mit  
verbesserten Differenzgleichungen.  
Diss. ETH Zürich, 1970.
- [81] Kazuyosi Ono:            The Exact Theory of Flat Slabs.  
ZAMM 41 (1961) S. 285 - 312.
- [82] Bufler, H.:              Die verallgemeinerten Variationsglei-  
chungen der dünnen Platte bei Zulas-  
sung diskontinuierlicher Schnittkräfte  
und Verschiebungsgrößen.  
Ing. Arch. 39 (1970) S. 330 - 340.
- [83] Rumpel, G.:             Beitrag zum Problem der schiefwinkl-  
igen Platte.  
Diss. TU Berlin, 1957.
- [84] Riehle, W.,              Die Berechnung von Zustands- und  
Stein, E.:                  Einflußflächen für die Schnittgrößen  
beliebiger Platten mit Hilfe der Me-  
thode der finiten Elemente.  
Fortschritt - Ber. VDI - Zeitschrift,  
Reihe 4, Nr. 14, 1969.

- [85] Czerny, F.: Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten.  
In Beton-Kalender I, 1972, Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin.
- [86] Girkmann, K.: Flächentragwerke.  
6. Auflage.  
Springer-Verlag, Wien, 1963.
- [87] Woinowsky-Krieger, S.: Über die Anwendung der Mellin-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung.  
Ing. Arch. 20 (1952) S. 391 - 397.
- [88] Koiter, W.T.: Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz des Herrn Woinowsky-Krieger.  
Ing. Arch. 21 (1953) S. 381.
- [89] Stiglat, K.,  
Wippel, H.: Platten.  
2. Auflage.  
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [90] Mathai, K.: Beitrag zur Berechnung isotroper Platten nach dem Differenzenverfahren mit funktionaler Kontrolle und Verbesserung.  
Diss. Uni. Stuttgart, 1973.
- [91] Stiglat, K.,  
Wippel, P.: Die an zwei benachbarten Rändern gelagerte Platte unter Gleichlast.  
Beton- u. Stahlbetonbau 55 (1960) S. 88 - 93.
- [92] Argyris, J.H.: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells.  
Ing. Arch. 35 (1966) S. 102 - 142.

- [93] Holz, K. P.: Ergänzung des Verfahrens finiter Elemente durch Ecksingularitäten zur verbesserten Berechnung schiefwinkliger Platten.  
Diss. TU Hannover, 1970.
- [94] Desmukh, R.S., Archer, R.R.: Numerical Solution of Moderately Thick Plates.  
Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. 100 (1974) S. 903 - 917.

Bezeichnungen, Abkürzungen, Symbole

Abkürzungen

Bei Indexschreibweise gilt:

$$i = 1, 2$$
$$j = 1, 2 \quad \text{und} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

DRFV            Diskretisiertes Randfehlerquadratminimum-Verfahren

DTVS           Diskretisiertes, erweitertes Trefftz-Verfahren,  
symmetrisches Gleichungssystem

DTVN           DTV, nicht symmetrisches Gleichungssystem

DRFV - K       DRFV        }  
DTVS - K       DTVS        }        kombiniert mit Kollokation  
DTVN - K       DTVN        }

DTVS - F       DTVS        }  
DTVN - F       DTVN        }        kombiniert mit DRFV

DBV            Diskretisiertes Birman - Verfahren

Bezeichnungen

E	$[\frac{kN}{m^2}]$	Elastizitätsmodul
G	$[\frac{kN}{m}]$	Schubmodul
h	[m]	Plattendicke
$\mu$	[1]	Querdehnungszahl
$K = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$	[kNm]	Plattenbiegesteifigkeit
$\sigma_{ij}$		Spannungen
$m_{ij}, m_n, m_{nt}, m_r, m_\theta, m_{r\theta}$		Biegemomente, Drillmomente

$q_i, q_n, q_t, q_r, q_\theta$	Querkräfte
$w$	Durchbiegung
$w_i \equiv -\beta_i, w_n \equiv -\beta_n, w_t \equiv -\beta_t$	Neigungen
$w_r \equiv -\beta_r, w_\theta \equiv -\beta_\theta$	
$(\dots)$	Matrix oder Vektor
$(\dots)^T$	transponierte Matrix (Vektor)
$\left. \begin{array}{l} x_1 \equiv x \\ x_2 \equiv y \\ (z) \end{array} \right\}$	kartesisches Koordinatensystem
$r, \theta$	polares Koordinatensystem
$n, t$	lokales Koordinatensystem
$(\dots)_i$	Ableitung nach $i$
$\Delta$	Laplace Operator
$(\hat{\dots})$	vorgegebene Größen
$(\bar{\dots})$	genäherte Größen
$\overset{p}{(\dots)}$	partikulare Größen
$\overset{h}{(\dots)}$	homogene Größen
$M_j$	Anzahl der Kollokationspunkte im $j$ -ten Bereich
$N$	Anzahl der Ansatzkonstanten
$\underline{c}$	Vektor der Ansatzkonstanten
$\left. \begin{array}{l} I_n(\ ) \\ K_n(\ ) \end{array} \right\}$	modifizierte Besselfunktionen $n$ -ter Ordnung

$s$	Berandung
$s_w$	Randstück, auf dem $w$ vorgeschrieben wird
$s_{w_n}$	Randstück, auf dem $w_n$ vorgeschrieben wird
$s_{w_t}$	Randstück, auf dem $w_t$ vorgeschrieben wird
$s_{q_n}$	Randstück, auf dem $q_n$ vorgeschrieben wird
$s_{m_n}$	Randstück, auf dem $m_n$ vorgeschrieben wird
$s_{m_{nt}}$	Randstück, auf dem $m_{nt}$ vorgeschrieben wird
$s_{\ddot{u}}$	Randstück zwischen zwei Bereichen

### Symbole

	eingespannter Rand	a) $s_w + s_{w_n} + s_{w_t}$ b) $s_w + s_{w_n} + s_{m_{nt}}$
	gelenkig gelagerter Rand	a) $s_w + s_{m_n} + s_{w_t}$ b) $s_w + s_{m_n} + s_{m_{nt}}$
	freier Rand	$s_{q_n} + s_{m_n} + s_{m_{nt}}$
	Symmetrierand	$s_{q_n} + s_{w_n} + s_{m_{nt}}$
	Übergangsrand	$s_{\ddot{u}}$
	Kraft aus Bildebene heraus	
	Kraft in Bildebene hinein	
	Moment bzw. Neigung	

Weitere Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole werden im Text erläutert.

## 1. Einleitung

### 1.1 Näherungsmethoden in der Flächenstatik

Da exakte, geschlossene Lösungen nur für wenige - meist für die Praxis unbedeutende - Sonderfälle vorliegen, sind Näherungsverfahren von großer Bedeutung für die Lösung der partiellen Differentialgleichungen der Flächenstatik.

Die Näherungsverfahren können in numerische (mathematische) und physikalische Verfahren unterteilt werden. Bei physikalischen Verfahren wird der Berechnung ein physikalisches (mechanisches oder elektrisches) Modell zugrunde gelegt. Numerische Verfahren gehen entweder von der Differentialgleichung oder von entsprechenden Variationsproblemen aus. Im Kapitel 2 werden Verfahren der zweiten Gruppe näher betrachtet und versucht, sie in ein übergeordnetes Prinzip einzuordnen.

Eine ausführliche Beschreibung der Verfahren und zahlreiche Literaturangaben bieten die Veröffentlichungen von Finlayson/Scriven [ 1 ], Leissa u. a. [ 2 ] und Brandes [ 3 ]. Außerdem sei auf die seit 1961 jährlich erscheinenden Literaturübersichten über das Fachgebiet Elastizitätstheorie der VDI - Zeitschrift [ 4 ] und die Lehrbücher von Collatz [ 5 ] und Crandall [ 6 ] hingewiesen.

Ziel der numerischen Verfahren ist entweder die Reduzierung des partiellen Problems auf ein gewöhnliches Differentialgleichungsproblem oder häufiger, die vollständige Algebraisierung, d. h. die Erzeugung von linearen oder nichtlinearen Gleichungssystemen.

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich durch bestimmte Strategien, die zu diesem Ziele führen. Im wesentlichen lassen sich folgende Vorgehensweisen feststellen:

- a) bezüglich der Art der Näherung
  - a 1) Das Problem wird unmittelbar (direkt) diskretisiert, z. B. werden Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren oder Integrale durch Summen ersetzt.

- a 2) Das Problem wird mittelbar (indirekt) diskretisiert, z. B. durch zulässige Ansatzfunktionen, die mit noch unbekanntem Parametern versehen werden.
- b) bezüglich des Ortes der Näherung
  - b 1) Das Problem wird im Gebiet exakt erfaßt, am Rand nur näherungsweise (Randmethode).
  - b 2) Das Problem wird am Rand exakt erfaßt, im Gebiet nur näherungsweise (Gebietsmethode).
  - b 3) Das Problem wird im Gebiet und am Rand nur näherungsweise erfaßt (gemischte Methode).
- c) Aufteilung des Bereiches in Teilbereiche (Mehrbereichsrechnung)  
Das heißt z. B., es werden lokale Ansatzfunktionen für die Teilbereiche gewählt und zusätzliche Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Bereichen formuliert.
- d) Kombination verschiedener Vorgehensweisen, z. B. Verbesserung eines errechneten Ergebnisses mit einem anderen Verfahren (Nachlaufrechnung).
- e) Strategien der linearen und nichtlinearen Programmierung [ 7 ].  
Diese sind in den letzten Jahren hinzugekommen, auf sie soll nicht weiter eingegangen werden.

Durch sinnvolle Kombination solcher Strategien können neue Verfahren entwickelt werden. In jüngster Zeit wurde das Differenzenverfahren auf Variationsprobleme angewandt ('Variationsdifferenzenverfahren' in [ 8 ]) und damit sehr gute Ergebnisse erzielt.

Für alle Näherungsverfahren gilt, daß ihr Anwendungsbereich, in dem mit vertretbarem Aufwand gute Ergebnisse erzielt werden können, beschränkt ist, d. h., daß sie nur für bestimmte Probleme besonders

geeignet sind (z. B. das Galerkin-Verfahren für nichtlineare Probleme bei einfachen Randbedingungen). Auch die sehr anpassungsfähige Methode der finiten Elemente unterliegt der genannten Einschränkung.

## 1.2 Aufgabenstellung der Arbeit

Das Thema der Arbeit bilden drei Aufgaben:

1. Die Entwicklung eines Näherungsverfahrens durch Kombination von bekannten Vorgehensweisen und Verfahren.
2. Anwendung auf Probleme der Plattenstatik und Vergleich mit anderen Verfahren.
3. Vergleich der Kirchhoff Theorie und einer vereinfachten Reissner Theorie an ausgewählten Beispielen.

Zu 1)

Aus dem Katalog der numerischen Näherungsverfahren werden die Variationsverfahren herausgegriffen und versucht, sie einer übergeordneten Methode - der Methode der gewichteten Reste - unterzuordnen. Aus dieser Gruppe wird das Trefftz Verfahren gewählt. Es wird nach Art der verbesserten Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimumverfahren) diskretisiert und in verschiedener Weise erweitert (Mitnahme von Nebenbedingungen und Formulierung für Mehrbereiche). Es entspricht so einem gewichteten diskretisierten Fehlerquadratminimumverfahren. Die Begründung für die Wahl wird in Kapitel 2 gegeben.

Zu 2)

Für Plattenprobleme nach der Kirchhoffschen und der vereinfachten Reissnerschen Plattentheorie (bei der die Querspannung vernachlässigt wird) werden die Ausgangsgleichungen aufbereitet.

Das Verfahren wird zunächst an eingespannten und gelenkig gelagerten Rechteckplatten ausgetestet und die Ergebnisse mit denen anderer Verfahren verglichen. Danach werden anspruchsvollere Probleme behandelt.

Zu 3)

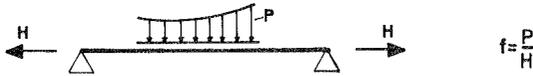
Da die Kirchhoff-Theorie besonders bei Vorliegen von freien Rändern unbefriedigend ist und bei dem gewählten Verfahren die Anwendung der vereinfachten Reissnerschen Plattentheorie keinen besonderen Aufwand erfordert, wird diese für einige Beispiele angewandt.

2. Variationsverfahren als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste (method of weighted residuals) und Wahl eines Verfahrens

2.1 Die Methode der gewichteten Reste

Den Begriff method of weighted residuals hat Crandall geprägt [ 1 ]. Crandall hat in seinem Buch [ 6 ] das Kollokationsverfahren, das Fehlerquadratminimumverfahren und das Galerkin - Verfahren unter diesem Begriff zusammengefaßt. Finlayson/Scriven [ 1 ] und Schmidt [ 9 ] haben auch das Ritz- und Trefftz-Verfahren untergeordnet. Hier wird gezeigt, daß grundsätzlich alle Variationsverfahren der Elastostatik und Kombinationen, wie sie von Courant in [ 10 ] und [ 11 ], Birmann [ 12 , 13 ] sowie Pöschl [ 14 ] vorgeschlagen wurden, als Sonderfälle dieser Methode gesehen werden können.

Die Erläuterung soll am Beispiel der Membrane erfolgen.



Die Problemstellung lautet:

Gesucht wird die Lösungsfunktion der Randwertaufgabe

$$\Delta W(x,y) = - f(x,y) \quad \text{im Gebiet } F \quad (2.1)$$

mit den Randbedingungen

$$W = \sigma \quad \text{auf } s_V \quad (2.2)$$

$$\text{und } W_{,n} = \sigma \quad \text{auf } s_K \quad (2.3)$$

$s_V$  und  $s_K$  bilden zusammen den Rand  $s$ .

Die Vorgehensweise besteht darin, eine Näherungsfunktion der Art  $\bar{w} = w + \sum_{i=1}^N c_i w_i$  zu wählen und diese in die vom Problem gestellten

Bedingungen einzusetzen, die jetzt aber nicht exakt erfüllt werden, sondern Reste (Residuen, Fehler) aufweisen:

$$\Delta \bar{w} + \frac{1}{2} = R_F \quad \text{in } F \quad (2.4)$$

$$\bar{w} = R_{s_V} \quad \text{auf } s_V \quad (2.5)$$

$$\bar{w}_n = R_{s_K} \quad \text{auf } s_K \quad (2.6)$$

Sind die Reste identisch Null, ist  $\bar{w} \equiv w$  die gesuchte Lösung des Randwertproblems. Im allgemeinen werden Abweichungen bestehen. Diese werden mit  $N$  Wichtungsfunktionen  $\Phi_i$  versehen und im Mittel gleich Null gesetzt. Daraus ergeben sich  $N$  Bestimmungsgleichungen für die  $N$  unbekanntenen Ansatzkonstanten  $c_i$ :

$$\int_F R_F \cdot \Phi_i \cdot dF + \int_{s_V} R_{s_V} \cdot \Phi_i \cdot ds + \int_{s_K} R_{s_K} \cdot \Phi_i \cdot ds = 0 \quad (2.7)$$

Die Wichtungsfunktionen und Ansatzfunktionen sind prinzipiell frei wählbar, sie müssen nur linear unabhängig sein. Die Güte der Ergebnisse wird aber stark von der mehr oder weniger glücklichen Wahl abhängen. Außerdem ist es sinnvoll, Näherungsfunktionen zu wählen, die bereits einen Teil der Bedingungen (2.1) bis (2.3) erfüllen, da der Aufwand sich verringert und die Ergebnisse besser werden. Eine weitere Verbesserung kann sicher dann erzielt werden, wenn die Wichtungsfunktionen nicht willkürlich gewählt werden, sondern sich aus vorgegebenen Bedingungen oder Prinzipien ableiten lassen. Im Abschnitt 2.2 werden Variationsfunktionale zur Bestimmung der Wichtungsfunktionen zugrunde gelegt.

### 2.1.1 Erweiterung der Methode der gewichteten Reste durch Aufteilung des Bereichs in Teilbereiche (Mehrereberechnung)

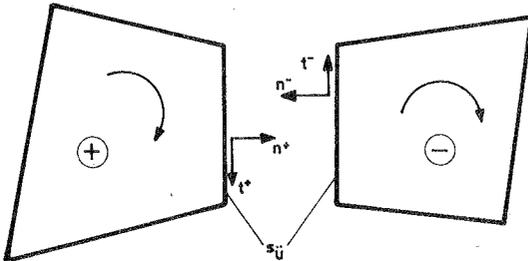
Bei schwierigen Problemen kann es vorkommen, daß auch bei Steigerung der Zahl der Ansatzfunktionen keine Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden kann, weil durch die hohen Ansatzfunktionen numerische Schwierigkeiten auftreten. In diesen Fällen ist es sinnvoller, das

Tragwerk in mehrere Bereiche zu unterteilen und für diese eigene Ansätze zu wählen. Zu den in 2.1 genannten Bedingungen kommen dann noch Übergangsbedingungen hinzu. Diese lauten für das Beispiel der Membrane:

$$W^+ = W^- \text{ auf } s_{\ddot{u}} \quad (2.8)$$

$$W_{,n}^+ = -W_{,n}^- \text{ auf } s_{\ddot{u}} \quad (2.9)$$

wenn mit + der betrachtete Teilbereich, mit - der Nachbarbereich und mit  $s_{\ddot{u}}$  der gemeinsame Übergangsrand gekennzeichnet wird.



**Bild 2.1**

Für jeden Bereich  $j$  können für die  $N_j$  Ansatzfunktionen  $N_j$  Gleichungen aufgestellt werden. Die Gesamtzahl der Unbekannten beträgt  $N = \sum_j N_j$ . Die  $i$ -te Gleichung eines Teilbereiches (+) schreibt sich:

$$\int_{F^+} R_F \cdot \Phi_{iF} \cdot dF + \int_{s_V^+} R_{s_V} \cdot \Phi_{i s_V} \cdot ds + \int_{s_K^+} R_{s_K} \cdot \Phi_{i s_K} \cdot ds + \int_{s_U^+} R_{s_U^+} \cdot \Phi_{i s_U^+} \cdot ds + \int_{s_U} R_{s_U}^+ \cdot \Phi_{i s_U} \cdot ds = 0 \quad (2.10)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} R_{süv}^+ &= \bar{w}^+ - \bar{w}^- \\ \text{und} \quad R_{sük}^+ &= \bar{w}_{j,n}^+ + \bar{w}_{j,n}^- \end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.1.2 Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Geforderte Nebenbedingungen können nach der Eliminationsmethode oder über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode berücksichtigt werden. Im ersten Fall werden die Bedingungsgleichungen in der Weise eingebaut, daß ein Teil der Unbekannten eliminiert und die Zahl der Unbekannten somit reduziert wird. Im zweiten Fall werden die Nebenbedingungen mit zusätzlichen Unbekannten (Lagrange Parametern) versehen dem Gleichungssystem hinzugefügt. Dabei erhöht sich die Zahl der Unbekannten um die Zahl der geforderten Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen können nur dann exakt erfüllt werden, wenn ihre Anzahl kleiner ist als die Zahl der Ansatzkonstanten.

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, die Nebenbedingungen mit willkürlichen Gewichtsfunktionen (z. B. Konstanten) dem Gleichungssystem hinzuzufügen. In diesem Falle werden die Nebenbedingungen nach Maßgabe der Gewichtsfunktion mehr oder weniger stark, aber nicht voll (exakt) berücksichtigt. Die Zahl der Ansatzparameter bleibt erhalten. Diese Vorgehensweise wird in 2.2.2 näher erläutert.

### 2.1.3 Die diskretisierte Methode der gewichteten Reste

Bei der zuvor gezeigten Methode muß für jedes Element der Gleichungsmatrix das Integral über ein Produkt von Funktionen gebildet werden. Diese Integralauswertungen sind zum Teil äußerst aufwendig (beispielsweise, wenn die Randkurve nicht analytisch formulierbar ist oder bei Integration über Flächen). Eine Möglichkeit, diesen Aufwand zu umgehen, besteht darin, die Integrale durch Summen über M Punkte zu ersetzen, wobei M größer als N, der Zahl der unbekanntes Ansatzfreiwerte, zu nehmen ist. Die erforderlichen Rechenoperationen lassen

sich so auf einfache Matrizengleichungen reduzieren. Diese Variante wurde schon bei Collatz [ 5 ] angedeutet und entspricht dem Gaußschen Prinzip in der Ausgleichsrechnung (vermittelndes Ausgleichsverfahren).  $M$  kann auch gleich  $N$  genommen werden, dann entspricht die Methode der Kollokation. Die einzelnen Integralausdrücke können unterschiedlich diskretisiert werden. Z. B. ist es denkbar, für Hauptbedingungen  $M > N$  und für Nebenbedingungen  $M \leq N$  anzusetzen. Wird für die Nebenbedingung  $M < N$  angesetzt, entspricht die Methode dem 'vermittelnden Ausgleich bedingter Beobachtungen' in der Ausgleichsrechnung.

## 2.2 Variationsverfahren der Elastostatik als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste

Die Variationsverfahren ergeben sich als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste, wenn die Wichtungsfunktionen über die Stationaritätsbedingung eines Funktionals festgelegt werden. Das Funktional hat allgemein die Form

$$\int_F \psi^1 \cdot \psi^2 \cdot dF + \int_S \psi^1 \cdot \psi^2 \cdot ds = \text{stat.} \quad (2.12)$$

Die Produkte  $\psi^1 \cdot \psi^2$  stellen entweder Fehlerquadrate oder Energieterme dar. Im ersten Falle sind die  $\psi^1 \equiv \psi^2$ , d. h. das Funktional leitet sich aus einem Fehlerabgleichsprinzip ab. Im zweiten Falle sind mit  $\psi^2$  die zu  $\psi^1$  dualen Größen bezeichnet. Ist z. B.  $\psi^1$  eine Verschiebung, stellt  $\psi^2$  die Querkraft dar. In dieser Form leitet sich das Funktional aus einem Energieprinzip ab.

Ausgehend von diesen beiden Arten des Funktionals (2.12) werden auf den folgenden Seiten für das Beispiel der Membrane einige Variationsverfahren (klassische und verallgemeinerte) abgeleitet und als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste gedeutet.

Um Schreibarbeit einzusparen, werden homogene Randbedingungen vorausgesetzt. Die Berücksichtigung von inhomogenen Randbedingungen bereitet aber keine Schwierigkeit.

Als Näherungsfunktion wird  $\bar{w} = w + \sum_{i=1}^N c_i w_i$  angesetzt. Das Funktional (2.12) nimmt dann für das Beispiel der Membrane folgende Formen an:

Nach dem Energieprinzip:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{EP} &= -\frac{1}{2} \int_F \Delta \bar{w} \cdot \bar{w} \cdot dF - \int_F f \cdot \bar{w} \cdot dF - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{S_V} \bar{w}_{,n} \cdot \bar{w} \cdot ds + \frac{1}{2} \int_{S_K} \bar{w}_{,n} \cdot \bar{w} \cdot ds = \text{stat.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nach dem Fehlerabgleichsprinzip:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{FP} &= \int_F p_F \cdot (\Delta \bar{w} + f)^2 \cdot dF + \\ &\quad + \int_{S_V} p_V \cdot \bar{w}^2 \cdot ds + \int_{S_K} p_K \cdot \bar{w}_{,n}^2 \cdot ds = \text{stat.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$p_F$ ,  $p_V$  und  $p_K$  sind frei wählbare Gewichtsfunktionen, mit denen die Fehlerquadrate unterschiedlicher Dimension zu multiplizieren sind.

Zwei Beziehungen, die bei den Ableitungen erforderlich sind, seien vorausgeschickt:

$$\int_F \text{grad } \psi^1 \cdot \text{grad } \psi^2 \cdot dF = - \int_F \psi^1 \cdot \Delta \psi^2 \cdot dF + \int_S \psi^1 \cdot \psi^2_{,n} \cdot ds \quad (2. I)$$

$$- \int_F \psi^1 \cdot \Delta \psi^2 \cdot dF = - \int_F \psi^2 \cdot \Delta \psi^1 \cdot dF + \int_S \psi^2 \cdot \psi^1_{,n} \cdot ds - \int_S \psi^1 \cdot \psi^2_{,n} \cdot ds \quad (2. II)$$

2.2.1 Klassische Variationsverfahren

a) ausgehend vom Energieprinzip

Die Variation von (2.13), d. h. hier die Ableitung nach der Ansatzkonstanten  $c_i$ , liefert die i-te Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{EP}}{\partial c_i} = & -\frac{1}{2} \int_F \Delta \bar{w} \cdot w_i \cdot dF - \frac{1}{2} \int_F \bar{w} \cdot \Delta w_i \cdot dF - \int_F f \cdot w_i \cdot dF - \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_V} \bar{w} \cdot w_{i,n} \cdot ds - \frac{1}{2} \int_{S_V} \bar{w}_{i,n} \cdot w_i \cdot ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_K} \bar{w} \cdot w_{i,n} \cdot ds + \frac{1}{2} \int_{S_K} \bar{w}_{i,n} \cdot w_i \cdot ds = 0 \end{aligned}$$

oder mit (2.II):

$$\underbrace{- \int_F (\Delta \bar{w} + f) \cdot w_i \cdot dF}_{\mathcal{R}_F \quad \mathcal{F}_{iF}} - \underbrace{\int_{S_V} \bar{w} \cdot w_{i,n} \cdot ds}_{\mathcal{R}_{S_V} \quad \mathcal{F}_{iS_V}} + \underbrace{\int_{S_K} \bar{w}_{i,n} \cdot w_i \cdot ds}_{\mathcal{R}_{S_K} \quad \mathcal{F}_{iS_K}} = 0 \quad (2.15)$$

(2.15) entspricht der Beziehung (2.7) nach der Methode der gewichteten Reste. Als Wichtungsfunktionen ergeben sich die zu den Resten dualen Größen.

Bei den klassischen Variationsverfahren erfüllen die Ansatzfunktionen bestimmte Bedingungen. Gleichung (2.15) reduziert sich entsprechend. Die verschiedenen Fälle sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

Bemerkungen zu den dort angegebenen Ritz- und Trefftz-Gleichungen:

1. Die Ritz-Gleichungen werden meist in einer Form, die keine Randintegrale enthält, angegeben. Diese läßt sich mit Hilfe von (2.I) erzeugen:

$$\int_F \text{grad } \bar{w} \cdot \text{grad } w_i \cdot dF - \int_F f \cdot w_i \cdot dF = 0 \quad (2.15a)$$

2. Für den Fall, daß  $s_V = s$ , läßt sich das Randintegral in ein Flächenintegral umwandeln:

$$-\int_F \text{grad } \bar{w} \cdot \text{grad } w_i \cdot dF = \alpha \quad (2.15 b)$$

In dieser Form wurden die Trefftz-Gleichungen ursprünglich angegeben.

b) ausgehend vom Fehlerabgleichsprinzip

Die i-te Gleichung ergibt sich entsprechend (2.15) aus der Ableitung von (2.14) nach der Ansatzkonstanten  $c_i$ :

$$\int_F (\Delta \bar{w} + f) \cdot \Delta w_i \cdot P_F \cdot dF + \int_{s_V} \bar{w} \cdot w_i \cdot P_V \cdot ds + \int_{s_K} \bar{w}_{i,n} \cdot w_{i,n} \cdot P_K \cdot ds = \alpha$$

$$R_F \quad \Phi_{iF} \quad R_{s_V} \quad \Phi_{i,s_V} \quad R_{s_K} \quad \Phi_{i,s_K} \quad (2.16)$$

Es ist ebenfalls denkbar, außer Resten der Differentialgleichung und der Randbedingungen auch Reste von Ableitungen der Differentialgleichungen zu wichten, also z. B.:

$$\dots + \int_F (\Delta \bar{w} + f)_{,x} \cdot \Delta w_{i,x} \cdot dF + \int_F (\Delta \bar{w} + f)_{,y} \cdot \Delta w_{i,y} \cdot dF + \dots \quad (2.16 a)$$

Bemerkung

Die Gleichungen (2.15) und (2.16) können ineinander übergeführt werden, wenn als Gewichtsfunktionen jeweils

$$P_{Fi} = - \frac{1}{2} \frac{w_i}{\Delta w_i}$$

$$P_{Vi} = - \frac{1}{2} \frac{w_{i,n}}{w_i}$$

und

$$P_{Ki} = + \frac{1}{2} \frac{w_i}{w_{i,n}}$$

angesetzt werden.

Sonderfälle für spezielle Ansatzfunktionen sind in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Tabelle 2.1  
Klassische Variationsverfahren als Sonderfälle der Methode der gewichteten Reste

Bedingungen an Ansatzfunktionen ↓	$-\int_F (\Delta \bar{w} + f) w_i dF$	$-\int_{S_V} \bar{w} \cdot w_{i,n} ds$	$+\int_{S_K} \bar{w}_n \cdot w_i ds$	= 0	Energieverfahren
	$+\int_F (\Delta \bar{w} + f) \Delta w_i p_F dF$	$+\int_{S_V} \bar{w} \cdot w_i \cdot p_V ds$	$+\int_{S_K} \bar{w}_n \cdot w_{i,n} \cdot p_K ds$	= 0	Fehlerabgleichsverfahren
$w_i = 0$ auf $s_V$ $w_{i,n} = 0$ auf $s_K$ $p_P = 0$ $w = 0$	x	$\equiv 0$	$\equiv 0$	= 0	Galerkin
$w_i = 0$ auf $s_V$ $p_P = 0$	x	$\equiv 0$	$\equiv 0$	= 0	Fehlerquadratminimum als Gebietsverfahren
$w_i = 0$ auf $s_V$	x	$\equiv 0$	x	= 0	Ritz
$p_P = 0$	x	$\equiv 0$	x	= 0	Fehlerquadratminimum als gemischtes Verfahren
$\Delta w_i = 0$ in F $\Delta w_P = -f$ in F	$\equiv 0$	x	$\equiv 0$	= 0	Castigliano / Menabrea bzw. Trefftz für $s_V \equiv s$
$w_{i,n} = 0$ auf $s_K$	$\equiv 0$	x	$\equiv 0$	= 0	Fehlerquadratminimum als gemischtes Verfahren
$\Delta w_{i,j} = 0$ in F $\Delta w_P = -f$ in F	$\equiv 0$	x	x	= 0	Trefftz (erweitert) bzw. Rüdiger
	$\equiv 0$	x	x	= 0	Fehlerquadratminimum als Randverfahren

## 2.2.2 Verallgemeinerte Variationsverfahren

Nach dem Prinzip der Methode der gewichteten Reste ist es zulässig, verschieden gewichtete Fehlerfunktionen zu kombinieren. Beispielsweise ist es möglich, Terme aus (2.15) durch solche aus (2.16) zu ersetzen oder Terme von (2.16) an (2.15) anzuhängen. Bei Diskretisierung nach der in 2.1.3 beschriebenen Weise kann für die einzelnen Ausdrücke der Gleichungen (2.15) bzw. (2.16) zudemhin eine unterschiedlich große Zahl von Punkten, über die zu summieren ist, gewählt werden.

Hier soll gezeigt werden, wie sich nach diesem Prinzip Gleichungssysteme verallgemeinerter Variationsverfahren, wie sie von Courant in [10] und [11], Birman [12,13], Pöschl [14] und Weidner [15] angegeben wurden, aufbauen lassen. Außerdem eröffnen diese Vorgehensweisen Möglichkeiten zur Konstruktion von weiteren Näherungsverfahren.

Eine Modifizierung der (klassischen) Variationsverfahren kann aus verschiedenen Gründen erwünscht sein, z. B.

- a) zur Befreiung von Nebenbedingungen,
- b) zur Konvergenzverbesserung,
- c) zur Erzeugung eindeutiger Näherungsfunktionen.

Zu a)

Hier soll nicht die übliche Lagrange-Multiplikatoren-Methode vorgestellt werden, sondern die Methoden von Courant [11] und Birman [12].

Courant erweitert das Ritz-Verfahren auf Ansatzfunktionen, die keine Randbedingungen zu erfüllen haben. Birman verallgemeinert das von Trefftz ursprünglich nur für die 1. Randwertaufgabe angegebene Verfahren für die 2. und 3. Randwertaufgabe. Beide Autoren verändern das ursprüngliche Variationsfunktional durch Zusatzintegrale so, daß zwar die Art der natürlichen Randbedingungen beeinflusst wird, nicht aber die Eulersche Differentialgleichung. Wesentliche Eigenschaft dieser Methoden ist der Erhalt der Extremumseigenschaft, die bei der Lagrange-Methode verloren geht.

a 1) Das von Courant in [11] angegebene Verfahren

Wird zu den Ritz-Gleichungen (2.15 a) ein Fehlerquadratterm hinzugefügt, ergibt sich mit  $p_V \equiv t$ ,  $t > 0$ :

$$\int_F \text{grad } \bar{w} \cdot \text{grad } w_i \, dF - \int_F f \cdot w_i \, dF + t \int_{S_V} \bar{w} \cdot w_i \, ds = \sigma$$

oder mit (2.1):

$$- \int_F (\Delta \bar{w} + f) \cdot w_i \, dF + \int_S \bar{w}_{,n} \cdot w_i \, ds + t \int_{S_V} \bar{w} \cdot w_i \, ds = \sigma \quad (2.17)$$

Die Ansatzfunktionen müssen hierbei weder die Differentialgleichung noch die Randbedingungen erfüllen.

Dieselbe Beziehung erhält man auch durch Variation des von Courant in [11] angegebenen Funktionals:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_F (\text{grad } \bar{w})^2 \, dF - \int_F f \cdot \bar{w} \, dF + \frac{1}{2} t \cdot \int_{S_V} \bar{w}^2 \, ds$$

( $t > 0 \dots$  freier Parameter)

Das Konstruktionsprinzip für das Courantsche Funktional ('freies' Variationsproblem) besteht darin, mit freien Parametern oder Gewichtsfunktionen versehene Zusatzintegrale zum Hauptintegral hinzuzufügen. Das Hauptintegral erstreckt sich über das Gebiet und erhält alle die Terme, die bei Variation zur Eulerschen Differentialgleichung führen. An die Zusatzintegrale sind bestimmte Voraussetzungen geknüpft. Diese gewährleisten, daß durch sie nur die Art der natürlichen Randbedingungen beeinflusst wird, nicht aber die Eulersche Differentialgleichung. Zum Beispiel dürfen bei zwei unabhängigen Veränderlichen, wenn das Hauptintegral nur erste Ableitungen enthält, nur noch Zusatzglieder über Linien auftreten, wobei diese Integrale keine Ableitungen mehr enthalten.

Aus der Variation von  $\pi_c$  ergibt sich:

- 1)  $\Delta w = -f$  im Gebiet Eulersche Differentialgleichung
- 2)  $w_{,n} = 0$  auf  $s_K$  natürliche Randbedingung
- 3)  $w_{,n} + t w = 0$  auf  $s_V$  natürliche Randbedingung

Wie man sieht, wird die Eulersche Differentialgleichung durch das Zusatzintegral nicht verändert. Es ergeben sich nur natürliche Randbedingungen, deren Art durch Variation des Parameters  $t$  beeinflusst werden kann:

Für  $t \rightarrow \infty$   $w = 0$  geometrische Randbedingung

für  $t \rightarrow 0$   $w_{,n} = 0$  statische Randbedingung

Die geometrische Randbedingung wird als Grenzfall einer natürlichen Randbedingung betrachtet, bei der ein Parameter gegen Unendlich geht.

Bei der praktischen Berechnung mit endlich vielen Ansatzfunktionen muß ein Kompromiß geschlossen werden; Einmal muß der Wert  $t$  genügend groß gewählt werden, um eine geometrische Randbedingung zu simulieren, andererseits muß die Größe von  $t$  in Grenzen gehalten werden; denn je größer  $t$  gewählt wird, desto mehr Ansatzfunktionen sind erforderlich. Praktische Erfahrungen über die Wahl der Parameter liegen nicht vor.

a 2) Das Verfahren von Birman [12,13]

Das aus diesem Verfahren resultierende Gleichungssystem erhält man durch Hinzufügen von entsprechenden Fehlerquadratminimumtermen zu den Ausdrücken der erweiterten Trefftz-Gleichungen.

$$-\int_{s_V} \bar{w} \cdot w_{i,n} \cdot ds + t_1^* \int_{s_V} \bar{w} \cdot w_i \cdot ds + \int_{s_K} \bar{w}_{,n} \cdot w_i \cdot ds + t_2^* \int_{s_K} \bar{w}_{,n} \cdot w_{i,n} \cdot ds = \sigma \quad (2.18)$$

Die Ansatzfunktionen müssen die Differentialgleichung erfüllen.

Nach Birman ergeben sich diese Gleichungen aus einem Funktional, das für eine Hilfsrandwertaufgabe mit rein natürlichen Hilfsrandbedingungen erstellt wird. Die Konstruktion des Funktionals geschieht in der Weise, daß zum Hauptintegral, dessen Variation die Eulersche Differentialgleichung liefert, ebenfalls Zusatzintegrale hinzugefügt werden, deren Integranden aus quadrierten Ausdrücken bestehen. Das Konstruktionsprinzip soll am Beispiel der Membrane vorgeführt werden.

Hilfsrandbedingung:

$$\bar{w}_{1,n} + \sigma \cdot \bar{w} = \sigma \quad \text{auf } s$$

wobei

$$\sigma = t_1 \quad ; \quad t_1 > \sigma \quad \text{auf } s_V$$

und

$$\sigma = -t_2 \quad ; \quad t_2 > \sigma \quad \text{auf } s_K$$

Hauptintegral:

$$\int_F (\text{grad } \bar{w})^2 dF$$

Zusatzintegrale:

$$\int_s \sigma \bar{w}^2 ds + \int_{s_K} -\frac{1}{\sigma} (\bar{w}_{1,n} + \sigma \bar{w})^2 ds$$

Funktional nach Birman (Nebenbedingung  $\Delta \bar{w} = -f$ ):

$$\pi_B = \int_F (\text{grad } \bar{w})^2 dF + \int_s \sigma \bar{w}^2 ds + \int_{s_K} -\frac{1}{\sigma} (\bar{w}_{1,n} + \sigma \bar{w})^2 ds$$

$$\pi_B = \int_F (\text{grad } \bar{w})^2 dF + \int_{s_V} t_1 \bar{w}^2 ds - 2 \int_{s_K} \bar{w}_{1,n} \cdot \bar{w} ds + \int_{s_K} \frac{1}{t_2} w_{1,n}^2 ds$$

Die Ableitung nach der Ansatzkonstanten  $c_i$  ergibt mit (2.1) unter Berücksichtigung von  $\Delta \bar{w} = -f$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{S_V} \bar{w} \cdot w_{i,n} \cdot ds + 2 \int_{S_V} t_1 \cdot \bar{w} \cdot w_i \cdot ds - \\
 & - 2 \int_{S_K} \bar{w}_m \cdot w_i \cdot ds + 2 \int_{S_K} \frac{1}{t_2} \cdot \bar{w}_m \cdot w_{i,n} \cdot ds = 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Mit  $t_1 = -t_1^*$  und  $\frac{1}{t_2} = -t_2^*$  entspricht (2.19) der mit -2 multiplizierten Gleichung (2.18).

b) Das von Courant in [10] angegebene Verfahren und das Verfahren von Pöschl [14]

Einen ersten Hinweis zur Verbesserung des Ritz-Verfahrens gibt Courant in [10]. Die Methode besteht darin, für den Fall, daß  $L[\varphi] = 0$  ( $L \dots$  Differentialoperator) die Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems darstellt, unter dem Integral additiv den Ausdruck  $(L[\varphi])^2$  hinzuzufügen. Außer  $(L[\varphi])^2$  können ähnliche Ausdrücke mit Gewichtsfunktionen versehen hinzugefügt werden, die man erhält, indem man vorher  $L[\varphi]$  nach einer oder mehreren der auftretenden Variablen einmal oder mehrmals differenziert. Die Idee beruht auf der Erfahrung, daß die Empfindlichkeit eines Integrals im allgemeinen umso größer ist, je höhere Ableitungen von  $\varphi$  unter dem Integral auftreten. 'Durch die gezeigte Maßnahme wird also in unschädlicher Weise gewissermaßen künstlich das Integral sensibilisiert, ohne dabei die Lösung zu modifizieren, da ja der neue Integralausdruck für die wahre Lösung mit dem ursprünglichen übereinstimmt.' Courant in [10].

Beispiel Membrane

$$\begin{aligned} \pi_{CR} &= \frac{1}{2} \int_F (\text{grad } \bar{w})^2 \cdot dF - \int_F f \cdot \bar{w} \cdot dF + \\ &+ \int_F t \cdot (\Delta \bar{w} + f)^2 dF + \\ &+ \int_F t_1 (\Delta \bar{w} + f)_{,x}^2 dF + \\ &+ \int_F t_2 (\Delta \bar{w} + f)_{,y}^2 dF + \dots \end{aligned}$$

$t, t_1, t_2, \dots$  sind frei wählbare, aber positive Gewichtsfunktionen.

Pöschl [14] schlägt vor, für ausgewählte Punkte des Gebiets die Differentialgleichung durch die Ansatzfunktionen zu befriedigen. Wie bei Courant können auch Ableitungen der Differentialgleichung als Kollokationsbedingungen herangezogen werden. Durch die Kollokationsbedingungen werden einige Ansatzkonstanten eliminiert, der Rest wird aus der Variation des Funktionals bestimmt. Pöschl zeigt an Beispielen, daß das so modifizierte Verfahren zu Verbesserungen führt. Theoretisch wird die Konvergenz nicht erörtert.

Beispiel Membrane:

$$\begin{aligned} \pi_P &= \frac{1}{2} \int_F (\text{grad } \bar{w})^2 \cdot dF - \int_F f \cdot \bar{w} \cdot dF + \\ &+ \sum_i \lambda_i \cdot (\Delta \bar{w} + f)_i + \\ &+ \sum_j \lambda_j \cdot ((\Delta \bar{w} + f)_{,x})_j + \\ &+ \sum_k \lambda_k \cdot ((\Delta \bar{w} + f)_{,y})_k + \dots \end{aligned}$$

$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \dots$  sind Lagrange-Multiplikatoren für die Bedingungen an den  $i, j, k \dots$  Punkten.

Die Ableitungen nach  $c_i$  führen auf die  $i$ -ten Gleichungen, die sich aus dem Ritz-Anteil und den Anteilen aus den Fehlerquadraten (bei Courant) bzw. Kollokationsbedingungen (bei Pöschl) der Differentialgleichungen und ihrer Ableitungen zusammensetzen. Nach der Methode der gewichteten Reste ergeben sich diese Gleichungen unmittelbar aus der Kombination von Termen aus (2.15), (2.16) und (2.16 a).

Die Anwendung der Idee von Pöschl auf ein Randverfahren (diskretisiertes Fehlerquadratminimumverfahren) deutet Ramm in seiner Dissertation [16] an. Hier werden die Kollokationsbedingungen nicht zur Elimination von Ansatzkonstanten herangezogen, sondern mit Lagrange-Multiplikatoren versehen dem Funktional hinzugefügt. Diese Variante hat den Vorteil, daß die Aufbereitung für eine Maschinenrechnung sich einfacher gestalten läßt als bei der Eliminationsmethode.

Das folgende Verfahren von Weidner ist die Übertragung der Methode von Courant auf ein Randverfahren. Sie wurde von Weidner aber nicht im Hinblick auf die Konvergenzverbesserung vorgenommen.

#### c1) Die Methode von Weidner [15]

Weidner modifiziert das Trefftz-Funktional im Hinblick auf seine Eindeutigkeit. Er weist - einer Darstellung von Diaz/Greenberg [17] folgend - nach, daß das Trefftz-Funktional zwar einen Extremwert hat, die Lösungsfunktion sich daraus aber nicht vollständig ergibt. Die Modifikation geschieht wiederum durch Zusatzintegrale, die die Extremumseigenschaft und die Eulersche Differentialgleichung des Problems nicht beeinflussen. Für das Beispiel der Membrane mit der Randbedingung  $w = 0$  auf  $s$  wird  $\int_s w^2 \cdot ds$  mit positiven, sonst aber beliebigen Gewichtsfunktionen versehen, dem Variationsausdruck nach Trefftz hinzugefügt. Entsprechend dem Pöschl-Verfahren ist es denkbar, nur an einer endlichen Zahl von Punkten  $i$  Bedingungen der Art  $w_i = 0$  zu fordern und diese mit Lagrange-Parametern versehen dem Funktional hinzuzufügen.

Das Verfahren von Weidner kann als Sonderfall der Methode von Birman angesehen werden.

c 2) Das Verfahren von Wegner [18]

Wegner erhält für das Beispiel der eingespannten Platte die Lösungsfunktion nach dem Trefftz-Verfahren bis auf Potentialfunktionen. Für diese werden entsprechende Ansätze gewählt und die Ansatzkonstanten über eine Nachlaufrechnung aus der Bedingung

$$\int_{\mathcal{S}} t_1 \cdot \bar{w}^2 \cdot d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} t_2 \cdot \bar{w}_{in}^2 d\mathcal{S} = \text{Minimum}$$

bei zunächst festen, beliebigen  $t_1$  und  $t_2$  bestimmt. Durch Variation von  $t_1$  und  $t_2$  kann dann noch das 'Minimum minimorum' erzielt werden. Entsprechend geht Lebender [19] vor. Allerdings bestimmt er die Konstanten der Zusatzlösung über das Kollokationsverfahren.

2.3 Wahl und Modifikation eines Verfahrens

Aus der Vielzahl der nach der Methode der gewichteten Reste konstruierbaren Verfahren sollen das Fehlerquadratminimumverfahren (als Randverfahren), das erweiterte Trefftz-Verfahren und Kombinationen beider herausgegriffen und in diskretisierter Form (Integrale werden durch Summen ersetzt) auf Plattenprobleme angewendet werden. Der Schwerpunkt der Anwendung soll auf der Anwendung des erweiterten, diskretisierten Trefftz-Verfahrens liegen. Das diskretisierte Fehlerquadratminimumverfahren und die kombinierten Verfahren sollen nur zu Vergleichen herangezogen werden.

Begründung für die Wahl des erweiterten Trefftz-Verfahrens

1. Das Trefftz-Verfahren ist ein Randverfahren. Randverfahren bieten bei linearen Problemen folgende Vorteile:
  - a) Da die Ansatzfunktionen die Differentialgleichung im Gebiet erfüllen, werden im Gebiet auch die interessierenden höheren Ableitungen (Schnittgrößen) gut wiedergegeben.
  - b) Beim Randverfahren sind die Integrationen einfacher bzw. ist bei Diskretisierung die Punktverteilung weniger unsicher.

- c) Es ist einfacher, Ansatzfunktionen zu finden, die die Differentialgleichung erfüllen, als Funktionen, die bestimmte Randbedingungen erfüllen.
  - d) Die Randmethode ist allgemein, da für einen einmal ausgewählten Funktionensatz Probleme mit beliebigen Randbedingungen erfaßt werden können. Ändert sich die Belastungsfunktion, muß nur der partikuläre Anteil ausgetauscht werden.
  - d) Die Fehlerabschätzung ist einfacher als beim Gebiets- oder gemischten Verfahren.
2. Das Trefftz-Verfahren leitet sich aus einem Energieprinzip ab und weist so den physikalischen Zusammenhang mit dem Elastizitätsproblem auf. Gegenüber dem Fehlerquadratminimumverfahren hat es den Vorteil, daß nur Größen gleicher Dimension (Energie) vorkommen. Die Notwendigkeit einer Gewichtung entfällt.
  3. Nebenbedingungen, auch in Form von Optimalforderungen, können berücksichtigt werden.
  4. Das Trefftz-Verfahren ist bisher in der Literatur wenig zur Anwendung gekommen (siehe Tafel I, S. 44 f.). Eine umfangreiche numerische Untersuchung fehlt. Diese Feststellung findet sich auch bei Philipzik [20].

#### Mängel und Modifikationen des erweiterten Trefftz-Verfahrens zur Beseitigung der Nachteile

1. Das Trefftz-Verfahren liefert keine eindeutige Verschiebungsfunktion.  
  
Durch die Erweiterung des Funktionals durch Fehlerquadratintegrale oder Kombination mit einzelnen Kollokationsbedingungen kann dieser Mangel, wenn gewünscht, behoben und außerdem eventuell die Konvergenz beschleunigt werden.
2. Die beim Trefftz-Verfahren auftretenden Integralausdrücke erstrecken sich zwar nur über Randkurven, sind aber dennoch - vor allem

bei komplizierten Rändern und bei größerer Zahl von Ansatzfunktionen - 'unhandlich'.

Durch entsprechende Diskretisierung, wie sie beim Fehlerquadratminimumverfahren verschiedentlich angewandt wurde (siehe Tafel II, S. 46), werden die aufwendigen Integralauswertungen vermieden. Die erforderlichen Rechenoperationen lassen sich in äußerst einfachen, für die Maschinenrechnung günstigen Matrixausdrücken formulieren.

3. Ein gewichtiger Nachteil der Methode liegt darin, daß durch die mehr oder weniger glückliche Wahl der Ansatzfunktionen aus der zugelassenen Menge die Güte des Ergebnisses stark beeinflußt werden kann. Von verschiedenen Autoren wird darauf hingewiesen: Collatz in [ 5 ], Morley [34 ], Leissa [ 2 ], Stein [32 ], Courant [11 ].

Der Einfluß wird gemildert, wenn die Ansatzfunktionen sorgfältig ausgewählt werden.

Tafel I	Behandlung des Trefftz-Verfahrens in der Literatur
---------	--

a) Allgemeine Abhandlungen

Autor	Jahr	Probleme
Trefftz, E. [21]	1926	Potentialgleichung für 1. Randwertaufgabe.
Weinstein, A. [22]	1935	Erweiterung auf Bipotentialgleichung mit geometrischen Randbedingungen.
Wegner, U. [23]	1943	Erweiterung auf Bipotentialgleichung und gerechnete Beispiele.
Diaz, J. B., Greenberg, H. J. [17]	1948	Erweiterung auf Bipotentialgleichung und Nachweis der Extremumseigenschaften.
Berger, E. R. [24]	1953	Erweiterung auf Bipotentialgleichung mit beliebigen Randbedingungen. Ansatzfunktionen müssen Differentialgleichung und statische Randbedingungen erfüllen.
Birman, M. S. [13] Birman, M. S. [12]	1955 und 1956	Erweiterung auf Bipotentialgleichung mit beliebigen Randbedingungen. Ansatzfunktionen müssen nur die Differentialgleichung erfüllen.
Albrecht, J. [25]	1955	Elliptische Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten für 1., 2. und 3. Randwertaufgabe.
Rüdiger, D. [26]	1959	Platte nach Reissner-Theorie.
Rüdiger, D. [27]	1960	Dreidimensionale elastische Körper.
Rüdiger, D. [28]	1960	Zweidimensionale elastische Körper.
Kneschke, A., Rüdiger, D. [29]	1962	Bewegung von Massenpunktsystemen und elastischen Körpern (Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips, so daß die variierten Funktionen weder an Anfangs- noch Oberflächenbedingungen gebunden sind).

Kneschke, A. [30]	1962	Torsionsproblem, Anfangswertaufgaben.
Kneschke, A. [31]	1963	Randwertproblem der Elastizitätstheorie, stationäres Randwertproblem der Wärmeleitung.
Stein, E. [32]	1964	Platte, Kreiszylinderschale, flache Schale.
Stein, E. - Beitrag in [33] S. 172 - 185	1969	Kombination des Trefftz-Verfahrens mit der Finiten-Element-Methode.
Schmid, G. [9]	1972	Grundgleichungen für ein finites Element.
Philipzik, W. [20]	1972	Zweiseitige Abschätzung (mit Ritz und Trefftz) der Variationsfunktionale der eingespannten Platte.

b) Nach dem Trefftz-Verfahren gerechnete Beispiele

Wegner, U. [23]	1943	Eingespannte quadratische Platte unter Gleichlast, eingespannte Kreisplatte mit Einzellast.
Morley, L.S.D. [34]	1956	Eingespannte quadratische Platte unter Gleichlast, eingespannte quadratische Kragplatte mit Einzellasten in den freien Ecken, eingespannte gleichseitige Dreieckplatte unter Gleichlast.
Lebender, W. [19]	1962	Eingespannte quadratische Platte mit einachsiger exzentrischer Einzellast.
Rüdiger, D. [35]	1963	Eingespannte Rechteckplatte unter Gleichlast nach der Reissnerschen Theorie.
Hain, H. [36]	1963	Zweiseitig gelenkig gelagerte Platte mit zwei freien und schiefen Rändern.
Ruoff, G. - Beitrag in [33] S. 242 - 259	1973	Flache Schale.

Tafel II	Anwendung des diskretisierten Fehlerquadratminimum-Verfahrens
----------	---

Autor	Jahr	Problem
Aas Jakobsen, A. [37]	1937/ 1938	Im Grundriß polygonal begrenzte Kugelschale nach Membrantheorie.
Hulbert, L.E., Niedenfuhr, F.W. [38]	1965	Spannungsverteilung in perforierten Platten.
Hoppe, H. [39]	1967	Platten.
Brandes, K. [40]	1968	Lagerung eines Rohres auf starrer Schneide.
Leissa, A.W. u.a. [2]	1969	Platten
Hulbert, L.E., Simonen, F.A. [41]	1969	Scheiben.
Majundar, S. [42]	1969	Biegetheorie schwach gekrümmter Translationsschalen über rechteckigem Grundriß.
Hulbert, L.E., Simonen, F.A. [43]	1970	Tonnenschalen mit periodisch verteilten Löchern.
Ramm, E. [16]	1972	Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Belastung.
Becker, M. [44]	1972	Schalen.
Ebel, H. Beitrag in [33] S. 186 - 196	1973	Formulierung für Mehrbereichsberechnung.

### 3. Grundgleichungen der Kirchhoffschen und Bolleschen Plattentheorie

#### 3.1 Überblick über Formulierung und Anwendung verschärfter Plattentheorien

Die üblicherweise angewandte Kirchhoffsche Plattentheorie ist im wesentlichen gekennzeichnet durch drei Annahmen über den Verschiebungszustand:

- a) Der Querschnitt bleibt bei Verformung eben.  
(Bernoulli Hypothese I)
- b) Die Normale bleibt senkrecht auf dem Querschnitt.  
(Bernoulli Hypothese II)
- c) Normalspannungen senkrecht zur Platte und die Querkompression sind vernachlässigbar.

Diese Annahmen führen zu der relativ einfachen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung, bringen aber andererseits Schwierigkeiten bezüglich der Randbedingungen mit sich, da die Theorie die Befriedigung von nur zwei Bedingungen an einem betrachteten Randstück erlaubt.

Verschärfte Plattentheorien sind dadurch charakterisiert, daß sie die genannten Annahmen mildern. Tabelle 3.1 zeigt die bekanntesten Theorien mit ihren Merkmalen. Die am meisten angewandte ist die von Reissner [45] 1944 aufgestellte Theorie. Sie berücksichtigt die Querschubverzerrungen und die Querkompression näherungsweise und führt auf ein partielles Differentialgleichungssystem von insgesamt 6. Ordnung. Eine vereinfachte Reissner Theorie, die den Einfluß der Querkompression vernachlässigt, hat Bolle [46] angegeben. Sie ist als Sonderfall in der Theorie von Kromm [48] enthalten. Der Vorteil dieser Theorie besteht darin, daß sich die Grundgleichungen einfacher darstellen lassen als nach der Reissnerschen Theorie. Es ergeben sich zwei partielle Differentialgleichungen; eine entsprechend der Kirchhoffschen Differentialgleichung von 4. Ordnung und eine zusätzliche von 2. Ordnung. Somit können an einem Randstück drei Bedingungen erfüllt werden.

Tabelle 3.1    Verschärfte Plattentheorien

Autor	Jahr	einschränkende Annahmen über den			
		Verschiebungszustand			Spannungszustand
		Querschnitt bleibt eben	Normale bleibt senkrecht auf Querschnitt	Quersummen-drückung $\epsilon_z = 0$	Normalspannung $\sigma_z = 0$
Reissner, E. [45]	1944	ja	nein	nein	nein
Bolle, L. [46]	1947	ja	nein	ja	ja
Hencky, H. [47]	1947	ja	nein	ja	ja
Kromm, A. [48]	1953	nein	nein	ja	nein
Panc, V. [49]	1964	nein	nein	ja	ja
Fersht, S. [50]	1964	nein	nein	nein	nein

Diese Theorie soll später bei einigen Beispielen zur Anwendung kommen. Sie bereitet bei dem gewählten Berechnungsverfahren wenig Mehraufwand, da Lösungsanteile der Kirchhoffschen Theorie übernommen werden können.

Die verschärften Theorien können gegenüber der Kirchhoffschen folgende Vorteile geltend machen:

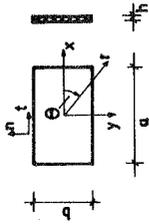
1. Sie erlauben in natürlicher Weise die Erfüllung aller Randbedingungen.
2. Der Verlauf der Randquerkräfte wird besser dargestellt. Einzelkräfte in den Ecken wie bei der Kirchhoffschen Theorie treten nicht auf.
3. Das Paradoxon der Plattentheorie entfällt. Das Paradoxon [51] besagt, daß die Lösung einer Polygonplatte bei immer kleiner werdenden Polygonseiten nicht gegen die Lösung der Kreisplatte strebt. Hanuska [52] führt dies auf die Vernachlässigung der Schubverformung zurück. Das Paradoxon zeigt, daß die Navier-Randbedingungen der Kirchhoffschen Theorie instabil sind, d. h. daß kleine Änderungen der Randform beträchtliche Änderungen in der Lösung zur Folge haben können.
4. Verschiedene Probleme können wirklichkeitsnaher erfaßt werden, zum Beispiel:
  - a) Bestimmung der Spannungen im Nahbereich eines Risses oder eines Loches [53]
  - b) Bestimmung der Schubspannungen der de Saint-Venantschen Torsion eines Plattenstreifens. Nach der Kirchhoffschen Theorie ergeben sich hier falsche Werte [53].
  - c) dynamische Probleme [54].
  - d) Probleme mit hohen Lastkonzentrationen.
  - e) Berechnung mäßig dicker Platten, d. h. Platten mit dem Verhältnis  $0,1 < \frac{\text{Dicke}}{\text{größte Längenausdehnung}} < 0,5$ .

Der Nachteil der verschärften Theorien liegt in dem aufwendigen und komplizierten Formelapparat, der zu bewältigen ist und dürfte auch dafür verantwortlich sein, daß diese Theorien nur wenig zur Anwendung kamen.

Wie die Tafel III ( S. 51 ff.) zeigt, wurde aus dem Bereich der praktischen Probleme nur die rundum gestützte Rechteck- oder Kreisplatte behandelt. Eine umfassende Vergleichsrechnung zur Kirchhoffschen Theorie fehlt.

Tafel III Anwendungbeispiele verschärfter Plattentheorien

III.1 Rechteckplatten



Autor	Jahr	Seitenverhältnis	Problem		Theorie	Lösungsmethode	Ergebnisse, Bemerkungen
			Seitenverhältnis	Randbedingung			
Reissner, E. [53]	1945	$a \neq b$	$w = \psi \frac{a}{2} y$ $m_x = 0$ $q_x = 0$ $m_y = m_{xy} = q_y = 0$ $\psi \dots \text{Verdrehwinkel}$	$x = +\frac{a}{2}$ $y = +\frac{b}{2}$	Reissner	Reihen	im Gegensatz zur Kirchhoff-Theorie ergeben sich die Schubspannungen der St. Venantschen Torsion ausreißend genau
Reissner, E. [55]	1947	$a \neq b$ Kragplatte	$w = w_n = w_t = 0$ $q_n = m_n = m_{nt} = 0$	$x = -\frac{a}{2}$ $y = +\frac{b}{2}$	Reissner	Reihen	Schubspannungsverteilung

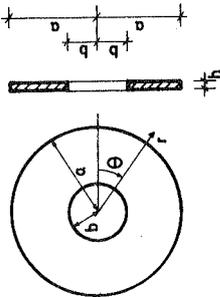
Schäfer, M. [56]	1952	$a \neq b$	$w = m_n = m_{nt} = 0$	$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$	Reissner	Reihen	keine aus- gewerteten Ergebnisse
Kromm, A. [57]	1955	$a = b$	$w = m_n = m_{nt} = 0$	$p = \text{konstant}$	Reissner, ver- einfacht	Reihen	Querkraftver- lauf am Rand
Salerno, V. L., Goldberg, M.A. [58]	1960	$a \neq b$	$w = m_n = w_t = 0$	$p = \text{konstant}$	Reissner, ver- einfacht	Einfach- reihen	Durchbiegung und Momente in Plattenmitte
Ainola, L. Y. [59]	1962	$a = b$	$w = m_n = w_t = 0$	$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$	Reissner, verfeinert; mit Quer- schnitts- verwölbung	Reihen	Schnittgrößen, Vergleich mit Reissner für verschiedene $h/a$
Rüdiger, D. [35]	1963	$a \neq b$	$w = w_n = w_t = 0$	$p = \text{konstant}$	Reissner	Reihen	Durchbiegung und Momente in Mitte Randquerkraft- verläufe
Panc, V. [49]	1964	$a = b$	$w = m_n = m_{nt} = 0$ und $w = w_n = w_t = 0$	$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$	Reissner, ver- einfacht	Reihen	Querkraft- und Drillmomenten- verlauf

Stavsky, Y. [60]	1965	a = b	$w = m_n = w_t = 0$	p = konstant	Reissner	Reihen	Mittendurchbiegung w; in Querrichtung unterschiedlicher Elastizitätsmodul
Zimmer, K. [61]	1966	a ≠ b	$w = m_n = w_t = 0$	p = konstant	3-dimensional	Reihen	Mittendurchbiegung w; in Querrichtung unterschiedlicher Elastizitätsmodul
Carley, G. Th., Langhaar, H. L. [62]	1968	a ≠ b	$w = m_n = m_{nt} = 0$	p = konstant $p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$	Reissner	Reihen	Querkräfte am Rand; baut auf der Arbeit von Schäfer auf
Srinivas, S., Rao, A. K., Rao, C. V. J. [63]	1969	a ≠ b	$w = m_n = w_t = 0$	p = konstant	Kirchhoff, Reissner, 3-dimensional	Reihen	max. Durchbiegung und Momente; Vergleich der 3 Theorien
Baumgart, F. [64]	1970	a = b	$w = m_n = w_t = 0$	$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$	3-dimensional	Reihen	Verschiebungs- und Spannungsgrößen; Vergleich mit Kirchhoff

Greimann, L. F., Lynn, P. P. [54]	1970	a = b	$w = m_n = w_t = 0$ und $w = w_n = w_t = 0$	p = konstant	Reissner, vereinfacht	Finite- Element- Methode	Mitteldurch- biegung Eigenwerte für freie Schwin- gung
Pryor, Ch. W., Barker, R. M., Frederick, D. [65]	1970	a = b	$w = m_n = w_t = 0$	p = konstant	Reissner, vereinfacht	Finite- Element- Methode	Mitteldurch- biegung Drillmomenten- verlauf Randquerkraft- verlauf
Krüger, J. [6]	1971	a = b	$w = m_n = w_t = 0$	p = konstant Teilflächenlast	drei- dimen- sional	Variations- differenzen- Verfahren	Verschiebungs- und Spannungs- größen für un- terschiedliche h/a
Roth, J. [66]	1972	a = b gelenkig Fundamentplatte mit veränderl. Plattendicke	$w = m_n = m_{nt} = 0$ und $p_n = m_n = m_{nt} = 0$	p = konstant	Reissner, erweitert	Differenzen- Verfahren	Schnittgrößen für verschiede- ne h/a und Querkontrak- tionszahlen $\mu$

Argyris, J. H., Scharpf, D. W. [67]	1972	a = b	$w = m_n = w_t = 0$ und $w = w_n = w_t = 0$	p = konstant	Reissner	Finite- Element- Methode	max. Momente und Durch- biegungen für Sandwichplatte
Srinivas, S., Rao, A.K. [68]	1973	a ≠ b	$w = m_n = m_{nt} = 0$ und $w = w_n = w_t = 0$ und $w = w_n = w_t = 0; y = +\frac{b}{2}$ $w = m_n = m_{nt} = 0; x = +\frac{a}{2}$	p = konstant	3-dimen- sional	Reihen	max. Momente und Durch- biegungen
Dieterle, H. [69]	1973	a = b  Fundament- platte	$v_n = m_n = m_{nt} = 0$	p = konstant unterschiedliche Lasteinleitung der Stützkraft	Reissner	Fehlerquadratmi- nimumverfahren + Versuche	Schnittgrößen $m_x, m_{xy}$ und $q_x$ in 1/10-Raster- punkten
Riehle, W. [70]	1974	a = b	$v_n = m_n = m_{nt} = 0$ $w = m_n = w_t = 0$ $x = +\frac{a}{2}$ $y = +\frac{b}{2}$ $x = -\frac{a}{2}$ $y = -\frac{b}{2}$	p = konstant	Reissner	Finite- Element- Methode	Schnittgrößen $m_x, m_{xy}$ und $m_l$

III. 2 Kreis (-ring-) platten



Woinowsky-Krieger, S. [71]	1933	$b = 0$	$w = w_n = w_t = 0; r = a$	konzentrierte Last	3-dimensional	Reihen	Spannungsverteilung in der Nähe der konzentrierten Last
Gajendar, N. [72]	1967	$b = 0$ teilweise elastisch gebettet	elast. Bettung: $0 \leq r \leq b$ versch. Bedingungen: $r = a$	$p = \text{konstant}$	Reissner	Reihen	Schnittgrößen in Abhängigkeit von $h/a$ und $b/a$
Koeller, R. [73]	1967	$b \neq 0$	$w = w_n = w_t = 0; r = a$ $q_n = m_n = m_{nt} = 0; r = b$	$0 \leq \theta \leq \pi: p = +p$ $\pi < \theta < 2\pi: p = -p$	Reissner vereinfacht	Reihen	max. Durchbiegung in Abhängigkeit von $b/a$
Hesse, G. [74]	1970	$b \neq 0$	$w = w_n = w_t = 0; r = a$ vorgegeb. Werte: $r = b$	Momenten- und Querkraftbelastung des Innenrandes	Reissner	Reihen	Schnittgrößen längs Mittellängs schneiden, Vergleich Kirchhoff-Reissner

Silva, M. A. G., Keer, L. M. [75]	1971	$b = 0$	$w_n = w_t = w_{tt} = 0; r = a$	$p = \text{konstant}$	3-dimen- sional	Reihen	Spannungen in Mittelschnitten für verschiede- ne $h/a$
--------------------------------------	------	---------	---------------------------------	-----------------------	--------------------	--------	---

### III. 3 Unendlich ausgedehnte Platten

Reissner, E. [53]	1945	unendlich ausgedehnte Platte mit Loch	$m_r = m_0 \cos 2\theta$ $m_{r\theta} = m_0 \frac{\sin 2\theta}{2}$ $q_r = 0$ $\left. \begin{array}{l} r = \infty \\ r = 0 \end{array} \right\}$	reine Biegung reine Verdrillung	Reissner	Reihen	Spannungskon- zentrationen - faktoren in Abhängigkeit vom Loch- durchmesser
Ariman, T. [76]	1968	$a \gg b$ Platten- streifen elastisch gebettet	$w = m_n = m_{nt} = 0$ längs $y = \pm \frac{b}{2}$	$p = \text{konstant}$	Reissner	Reihen	max. Momente, Querkräfte und Durchbiegungen in Abhängigkeit von $h/a$ und verschiedener Bettungszahlen

### 3.2 Ausgangsgleichungen der vereinfachten Reissnerschen und der Kirchhoffschen Theorie

Die vereinfachte Reissner-Theorie wurde erstmals von Bolle [46] angegeben. Die Ausgangsgleichungen sollen nicht im einzelnen abgeleitet, sondern nur kurz zusammengestellt werden. Beziehungen, die nur bei Kirchhoff zutreffen, sind unterstrichen (    ), Terme die bei Kirchhoff wegfallen, sind gestrichelt (    ) markiert.

#### Allgemeine Voraussetzungen

1. Elastisches isotropes und homogenes Material.
2. Kleine Verformungen im Vergleich zur Plattendicke (geometrisch und physikalisch lineare Theorie).

#### Annahmen für den Verschiebungszustand

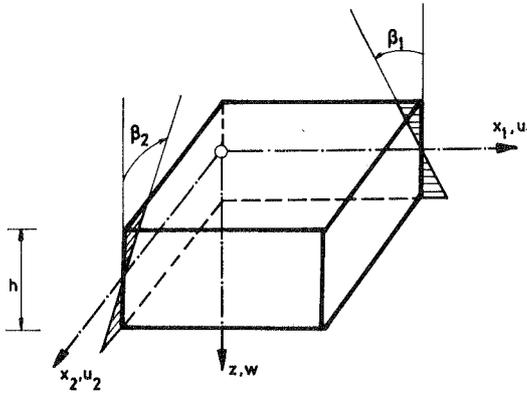


Bild 3.1: Verschiebungsgrößen

Verschiebungsgrößen:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, z) &= z \beta_i(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\underline{\beta_{,i}} = -w_{,i} \quad (3.1 a)$$

Verzerrungsgrößen:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{iz}^* = \frac{1}{2} (u_{i,z} + w_{,i})$$

$$\epsilon_{iz}^* = 0 \quad ; \quad u_{i,z} = -w_{,i}$$


---

Annahmen für den Spannungszustand

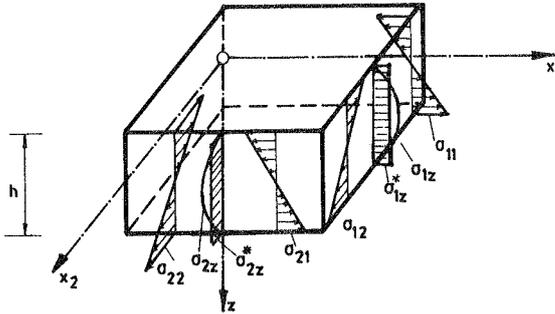


Bild 3.2:      Spannungen

Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  verlaufen linear über den Querschnitt. Aus Gleichgewichtsgründen ergeben sich dann die Spannungen  $\sigma_{iz}$  parabolisch. Diese Spannungsverteilung steht im Widerspruch zu den über die Dicke  $h$  konstant angenommenen Verzerrungen. Es wird daher eine gemittelte, über die Dicke  $h$  konstante Spannung  $\sigma_{iz}^*$  eingeführt.

Schnittgrößen und Belastung

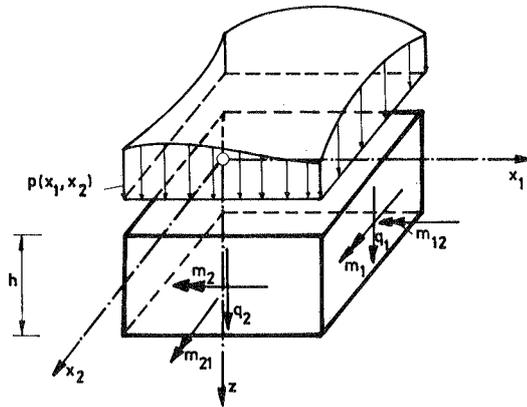


Bild 3.3: Schnittgrößen und Belastung

Beziehungen zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{12 \cdot z}{h^3} m_{ij} \\ \sigma_{iz} &= \frac{3 \cdot (h^2 - 4z^2)}{2 h^3} q_i \\ \sigma_{iz}^* &= \frac{1}{F_s} q_i = \frac{6}{5 \cdot h} q_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

$F_S$  wird über das Gleichsetzen der Formänderungsarbeiten von  $\sigma_{iz}$  und  $\sigma_{iz}^*$  gewonnen.

Statische Gleichungen

$$\begin{aligned} m_{ij,j} &= q_i \\ q_{i,i} &= -p \end{aligned} \quad (3.4)$$

Werkstoffgleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2 \cdot G \cdot \left( \epsilon_{ij} + \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \right) \\ \sigma_{iz}^* &= 2 \cdot G \cdot \epsilon_{iz}^* = G \cdot \gamma_{iz}^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  und  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ .

Die Werkstoffgleichungen in den Schnittgrößen  $m_{ij}$  erhält man durch Einsetzen von (3.3), (3.2) und (3.1) in (3.5) zu:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \frac{h^3}{12} \cdot 2 \cdot G \cdot \left[ \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \beta_{k,k} \cdot \delta_{ij} \right] \\ m_{ij} &= K \cdot (1-\mu) \cdot \left[ \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \beta_{k,k} \cdot \delta_{ij} \right] \\ q_i &= \frac{5}{6} h \cdot G \cdot (\beta_i + w_i) = K \cdot (1-\mu) \cdot \frac{5}{h^2} \cdot (\beta_i + w_i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(Die Querkräfte ergeben sich bei Kirchhoff direkt aus den statischen Gleichungen.)

Differentialgleichungen

Setzt man die Werkstoffgleichungen in die statischen Gleichungen ein, so bleiben 3 Gleichungen zur Bestimmung von  $\beta_i$  und  $w$ :

$$\begin{aligned} K \cdot (1-\mu) \cdot \left[ \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) + \frac{\mu}{1-\mu} \beta_{k,k} \delta_{ij} \right] &= K \cdot (1-\mu) \cdot \frac{5}{h^2} (\beta_i + w_i) \\ K (1-\mu) \frac{5}{h^2} (\beta_i + w_i) &= -p \end{aligned} \quad (3.7)$$

Durch Einführung von

$$\begin{aligned} w &= \omega - \frac{h^2}{5 \cdot (1-\mu)} \Delta \omega \\ \beta_1 &= - \left( \omega_{,1} + \frac{h^2}{5} \alpha_{1,2} \right) \\ \beta_2 &= - \left( \omega_{,2} - \frac{h^2}{5} \alpha_{1,1} \right) \end{aligned} ; \quad \alpha = \frac{1}{2} (\beta_{1,2} - \beta_{2,1}) \quad (3.8)$$

können die drei Gleichungen durch zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen in  $\omega$  und  $\alpha$  dargestellt werden

$$\Delta \Delta \omega = \frac{p}{K} \quad ; \quad \underline{\omega \equiv W} \quad (3.9 a)$$

$$\alpha - \frac{h^2}{10} \Delta \alpha = \sigma \quad ; \quad \underline{\alpha \equiv \sigma} \quad (3.9 b)$$

Mit diesen beiden Differentialgleichungen ist es möglich, an jedem Rand drei Bedingungen zu erfüllen.

Die Gleichungen gelten sowohl für kartesische Koordinaten als auch für Polarkoordinaten, wenn der Operator  $\Delta$  in der entsprechenden Form eingesetzt wird.

#### Schnitt- und Verschiebungsgrößen

Sind Lösungen für  $\omega$  und  $\alpha$  bekannt, so lassen sich die Schnitt- und Verschiebungsgrößen gemäß folgenden Formeln für kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten angeben.

In kartesischen Koordinaten ( $x_1, x_2$ ):

$$\begin{aligned} W &= \omega - \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta \omega \\ \beta_1 &= -\left(\omega_{,1} + \frac{h^2}{5} \alpha_{,2}\right) \\ \beta_2 &= -\left(\omega_{,2} - \frac{h^2}{5} \alpha_{,1}\right) \\ m_{11} &= -K \cdot \left(\omega_{,11} + \mu \cdot \omega_{,22}\right) - \underline{K \cdot (1-\mu) \frac{h^2}{5} \alpha_{,12}} \\ m_{22} &= -K \cdot \left(\omega_{,22} + \mu \cdot \omega_{,11}\right) + \underline{K \cdot (1-\mu) \frac{h^2}{5} \alpha_{,12}} \\ m_{12} &= -K \cdot (1-\mu) \cdot \omega_{,12} - \underline{K \cdot (1-\mu) \left(\alpha - \frac{h^2}{5} \alpha_{,11}\right)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$q_1 = -K \cdot \Delta \omega_{,1} \quad - \underline{K \cdot (1-\mu) \alpha_{,2}}$$

$$q_2 = -K \cdot \Delta \omega_{,2} \quad + \underline{K \cdot (1-\mu) \alpha_{,1}}$$

mit  $K = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$  ;  $\alpha \equiv \sigma$  ;  $W \equiv \omega$  ;  $\beta_i \equiv -W_{,i}$

in Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

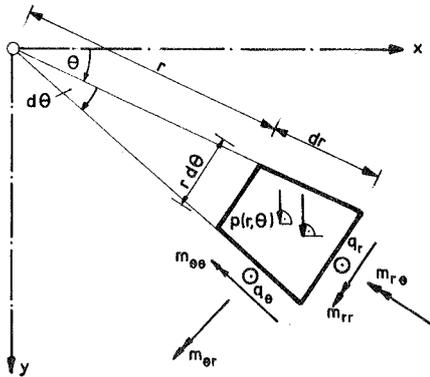


Bild 3.4: Schnittgrößen in Polarkoordinaten

$$W = \omega - \underline{\frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta \omega}$$

$$\beta_r = - \left( \omega_{,r} + \underline{\frac{h^2}{5} \frac{1}{r} \alpha_{,\theta}} \right)$$

$$\beta_\theta = - \left( \frac{1}{r} \omega_{,\theta} - \underline{\frac{h^2}{5} \alpha_{,r}} \right)$$

$$m_r = -K \cdot \left( \omega_{,rr} + \frac{\mu}{r} \omega_{,r} + \frac{\mu}{r^2} \omega_{,\theta\theta} \right) -$$

$$- K \cdot (1-\mu) \frac{h^2}{5} \left( \frac{1}{r} \alpha_{,\theta r} - \frac{1}{r^2} \alpha_{,\theta} \right)$$

$$m_\theta = -K \cdot \left( \frac{1}{r} \omega_{,r} + \frac{1}{r^2} \omega_{,\theta\theta} + \mu \omega_{,rr} \right) +$$

$$+ K \cdot (1-\mu) \frac{h^2}{5} \left( \frac{1}{r} \alpha_{,\theta r} - \frac{1}{r^2} \alpha_{,\theta} \right)$$

$$m_{T\theta} = -K \cdot (1-\mu) \cdot \left( \frac{1}{r} \omega_{,\theta r} - \frac{1}{r^2} \omega_{,\theta} \right) -$$

$$- K \cdot (1-\mu) \cdot \left( \alpha - \frac{h^2}{5} \alpha_{,rr} \right)$$

$$q_r = -K \cdot \Delta \omega_{,r} - K \cdot (1-\mu) \frac{1}{r} \alpha_{,\theta}$$

$$q_\theta = -K \cdot \frac{1}{r} \Delta \omega_{,\theta} + K \cdot (1-\mu) \alpha_{,r}$$

$$\underline{\alpha \equiv \sigma} \quad ; \quad \underline{W \equiv \omega} \quad ; \quad \underline{\beta_r \equiv -W_{,r}} \quad ; \quad \underline{\beta_\theta \equiv -\frac{1}{r} W_{,\theta}}$$

(3.11)

Vergleich mit den Gleichungen nach Reissner [45], [53]

Mit (3.8) lassen sich die Schnittgrößen  $m_{ij}$  (3.10) nach der vereinfachten Reissner Theorie auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= -K \cdot (W_{11} + \mu W_{22}) + \frac{h^2}{5} q_{1,1} - \frac{h^2}{5} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} \cdot P \\
 m_{22} &= -K \cdot (W_{22} + \mu W_{11}) + \frac{h^2}{5} q_{2,2} - \frac{h^2}{5} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} \cdot P \\
 m_{12} &= -K \cdot (1-\mu) \cdot W_{12} + \frac{h^2}{10} (q_{1,2} + q_{2,1})
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aus den statischen Gleichungen (3.4) erhält man mit (3.8) und (3.10) die Differentialgleichungen

$$-K \cdot \Delta W_i = q_i - \frac{h^2}{10} \Delta q_i + \frac{h^2}{10} \frac{1+\mu}{1-\mu} P_i \tag{3.13}$$

und

$$\Delta \Delta W = \frac{P}{K} - \frac{h^2}{5(1-\mu)} \frac{\Delta P}{K}$$

Die entsprechenden Beziehungen nach der Reissner-Theorie (mit Berücksichtigung der Querspannung) unterscheiden sich nur in den doppelt unterstrichenen Termen. Diese lauten nach Reissner [53] bei (3.12)  $-\frac{h^2}{10} \frac{\mu}{1-\mu} P$  und bei (3.13)  $\frac{h^2}{10} \frac{1}{1-\mu} P_i$  bzw.  $-\frac{h^2}{10} \frac{(2-\mu)}{(1-\mu)} \Delta P$ .

### 3.3 Bestimmung der Ansatzfunktionen in Polarkoordinaten

Die Ansatzfunktionen für  $w$  und  $\alpha$  müssen die Differentialgleichung(en) (3.9 a/b) erfüllen. Da diese linear sind, können die Ansatzfunktionen in einen partikularen und einen homogenen Anteil aufgespalten werden:

$$\bar{w} = \bar{w}^p + \bar{w}^h = \bar{w}^p + \sum_i c_i \cdot \omega_i \tag{3.14}$$

und

$$\bar{\alpha} = \sum_i d_i \cdot \alpha_i$$

Da die Ansatzfunktionen keine Randbedingungen erfüllen, können die Lösungsansätze für die Differentialgleichung (3.9 a) der Kirchhoffschen und vereinfachten Reissnerschen Theorie gleich gewählt werden. Für die Reissner-Theorie sind zusätzliche Funktionen, die die Differentialgleichung (3.9 b) erfüllen, zu bestimmen.

### 3.3.1 Ansatzfunktionen für $w$

#### a) Partikuläre Lösung

Partikuläre Lösungen für  $\Delta \Delta w^p = \frac{p}{K}$  können für verschiedene Lastfunktionen  $p$  und Lastsingularitäten aus der Literatur entnommen werden, z. B. [77], [78], [79]. Eine Zusammenstellung findet sich bei Pfaffinger [80].

Lösungsansätze der unendlich ausgedehnten Platte für verschiedene Teilflächenbelastungen sind von Kazuyosi Ono [81] ermittelt worden.

Einige Partikularlösungen, die zum Teil später verwendet werden, sind im folgenden aufgeführt.

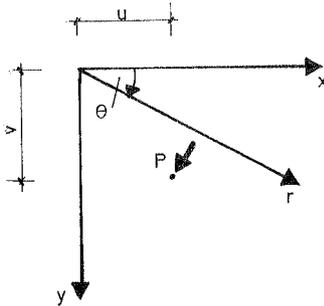
1. Die Lösung für die unendlich ausgedehnte Platte unter Gleichlast:

$$\omega^p = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot K} \quad (3.15)$$

2. die (singuläre) Lösung für die unendlich ausgedehnte Platte unter Einzellast:

$$\omega^p = \frac{p}{16 \pi K} \left[ (x-u)^2 + (y-v)^2 \right] \cdot \ln \left[ \frac{(x-u)^2 + (y-v)^2}{r_0^2} \right]$$

wobei mit  $u$  und  $v$  der Abstand vom Ursprung bezeichnet ist.  $r_0$  ist eine Vergleichslänge, z. B. die Längeneinheit.



In Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega^p &= \frac{P}{16 \pi K} \left[ r^2 - 2 \cdot r \cdot (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + u^2 + v^2 \right] \cdot \\ &\quad \cdot \ln \left[ \frac{r^2 - 2 \cdot r \cdot (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + u^2 + v^2}{r_0^2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Für randnahe Einzellasten ist es erforderlich, diesen partikularen Ansatz zu erweitern. Siehe Lebender [19].

3. Die (singuläre) Lösung für die unendlich ausgedehnte Kragplatte unter Einzellast.

$$\begin{aligned} \omega^p &= \frac{P}{8 \pi K} \left\{ 2 \cdot r \cdot \cos \theta \cdot u - \frac{1}{2} \left[ r^2 - 2 \cdot r \cdot (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^2 + v^2 \right] \cdot \ln \left[ \frac{r^2 - 2 \cdot r \cdot (-u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + u^2 + v^2}{r^2 - 2 \cdot r \cdot (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + u^2 + v^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

4. Die Lösungen 2) und 3) können zur Bestimmung von Einflußflächen herangezogen werden. Werden die Koordinaten u und v als Koordinaten des Aufpunktes angesehen, so stellen die Lösungen 2) und 3) die Singulärlösung der Einflußfläche für die Durchbiegung dar. Die Singulärlösungen der Einflußflächen für Schnittgrößen können daraus durch entsprechende Ableitungen ermittelt werden.

Die Singularität der Einflußfläche für das Feldmoment  $m_x$  lautet z. B. nach der Kirchhoffschen Theorie (mit  $\omega \equiv w$ ) im Fall 2 :

$$\begin{aligned} \frac{P}{m_x} &= -K \cdot (W_{|uu}^P + \mu \cdot W_{|vv}^P) \\ \frac{P}{m_y} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ (1+\mu) \left[ \ln \frac{r^2 - 2r(u \cdot \cos\theta + v \cdot \sin\theta) + u^2 + v^2}{r_0^2} + 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \frac{r^2 \cos^2\theta - 2r \cdot u \cdot \cos\theta + u^2 + \mu(r^2 \sin^2\theta - 2r \cdot v \cdot \sin\theta + v^2)}{r^2 - 2r \cdot (u \cdot \cos\theta + v \cdot \sin\theta) + u^2 + v^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Einflußfläche einer Schnittgröße kann als Biegefläche einer speziellen singulären Belastung aufgefaßt werden und analog den Fällen 1) bis 3) behandelt werden.

### b) Homogene Lösung

Die Lösung von  $\Delta\Delta w = 0$  geht auf Clebsch zurück und lautet allgemein:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cdot \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^* \cdot \sin n\theta \\ n=0 : \quad R_0 &= c_{10} + c_{20} \cdot \ln r + c_{30} \cdot r^2 + c_{40} \cdot r^2 \cdot \ln r \\ n=1 : \quad R_1 &= c_{11} \cdot r + c_{21} \cdot r^{-1} + c_{31} \cdot r^3 + c_{41} \cdot r \cdot \ln r \\ R_1^* &= c_{11}^* \cdot r + c_{21}^* \cdot r^{-1} + c_{31}^* \cdot r^3 + c_{41}^* \cdot r \cdot \ln r \\ n > 1 : \quad R_n &= c_{1n} \cdot r^n + c_{2n} \cdot r^{-n} + c_{3n} \cdot r^{n+2} + c_{4n} \cdot r^{-n+2} \\ R_n^* &= c_{1n}^* \cdot r^n + c_{2n}^* \cdot r^{-n} + c_{3n}^* \cdot r^{n+2} + c_{4n}^* \cdot r^{-n+2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für Gebiete ohne Innenberandung entfallen die Terme mit den Koeffizienten  $c_2$ , bzw.  $c_2^*$ , und  $c_4$ , bzw.  $c_4^*$ , da die zugehörigen Funktionen unendliche Werte annehmen.

### 3.3.2 Ansatzfunktionen für $\alpha$

Die partielle Differentialgleichung

$$\alpha - \lambda^2 \Delta \alpha = 0 \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{h^2}{10}$$

kann mit einem Produktansatz der Art  $\alpha = \Phi\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \kappa(\theta)$  in ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen in  $\Phi$  und  $\kappa$  überführt werden. Für jedes  $n$  gilt:

$$\xi^2 \Phi_{,\xi\xi} + \xi \Phi_{,\xi} - (\xi^2 + n^2) \Phi = 0 \quad ; \quad \xi = \frac{r}{\lambda} \quad (3.20 \text{ a})$$

$$\kappa_{,\theta\theta} + n^2 \kappa = 0 \quad (3.20 \text{ b})$$

(3.20 a) ist die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, deren Lösung die modifizierten Bessel-Funktionen 1. und 2. Art  $I_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)$  und  $K_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)$  sind. Lösungen von (3.20 b) sind  $\kappa = \sin n\theta$  und  $\kappa = -\cos n\theta$ .

Die Gesamtlösung ergibt sich somit zu:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \cdot \cos n\theta + \sum Z_n^* \cdot \sin n\theta$$

$$Z_n = d_{1n} \cdot I_n\left(\frac{r}{\lambda}\right) + d_{2n} \cdot K_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

$$Z_n^* = d_{1n}^* \cdot I_n\left(\frac{r}{\lambda}\right) + d_{2n}^* \cdot K_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

(3.21)

Für Gebiete ohne Innenberandung entfallen die Terme mit den Koeffizienten  $d_2$ , bzw.  $d_2^*$ , da die Funktionen  $K_n$  für  $r = 0$  unendliche Werte annehmen.

### 3.4 Schnittgrößen und Verschiebungsgrößen für das lokale Koordinatensystem $(n, t)$ des Randes

Um beliebige polygonale Ränder erfassen zu können, ist es erforderlich, auf dem Rand ein lokales Koordinatensystem  $(n, t)$  einzuführen und die Schnitt- und Verformungsgrößen darauf zu beziehen.

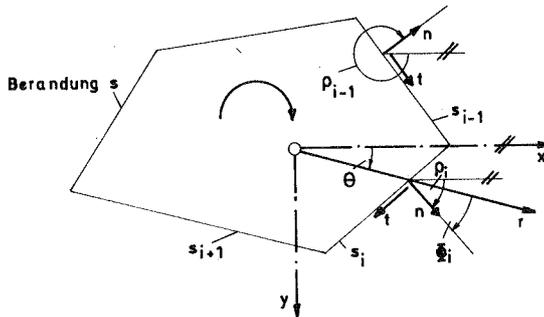


Bild 3.5: Koordinatensystem des Randes

Das lokale Koordinatensystem  $(n, t)$  ist um den Winkel  $\psi = -\theta + \rho_1$  gegenüber dem  $(r, \theta)$ -System im Uhrzeigersinn gedreht.  $(n, t)$  ist ein Rechtssystem.  $n$  steht rechtwinklig zum Rand und zeigt nach außen.

In Bild 3.6 sind die Beziehungen zwischen dem  $(r, \theta)$ -System und dem  $(n, t)$ -System dargestellt.

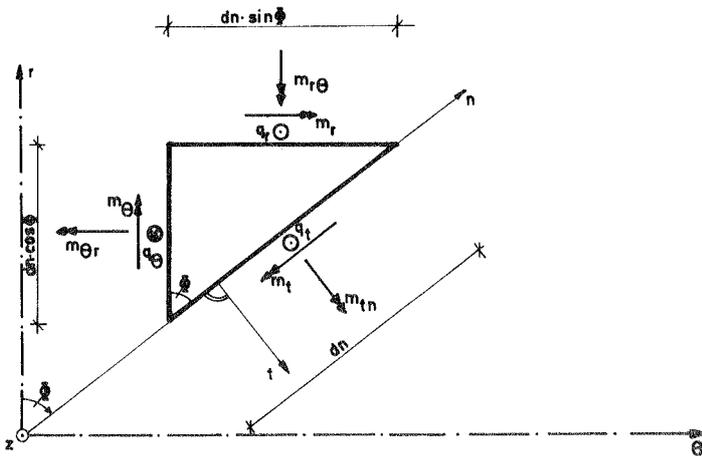
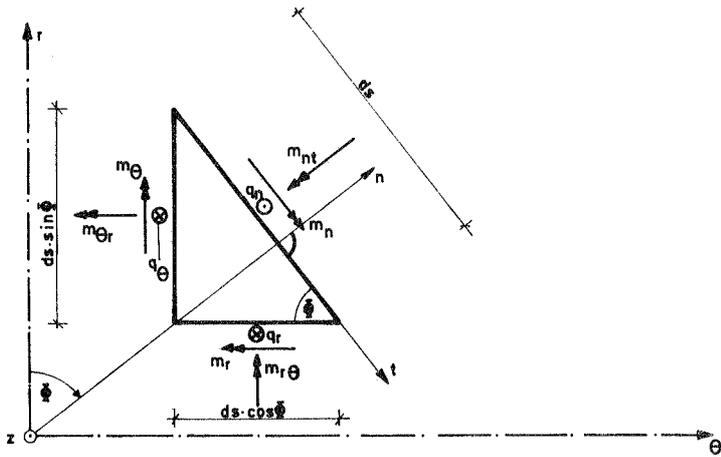


Bild 3.6: Beziehungen zwischen dem  $(r, \theta)$ -System und dem  $(n, t)$ -System

Die Verschiebungsgrößen sind der besseren Übersichtlichkeit wegen nicht in die Skizze eingetragen. Die Verschiebung  $w$  ist positiv in Richtung von  $z$ , positive Neigungswinkel sind wie die zugeordneten Momente definiert.

Aus Bild 3.6 sind folgende Beziehungen ablesbar:

$$\begin{aligned}W(n,t) &= W(r,\theta) \\W_n &= -\beta_n = -\beta_r \cdot \cos \Phi - \beta_\theta \cdot \sin \Phi \\W_t &= -\beta_t = +\beta_r \cdot \sin \Phi - \beta_\theta \cdot \cos \Phi \\q_n &= q_r \cdot \cos \Phi + q_\theta \cdot \sin \Phi \\m_n &= m_r \cdot \cos^2 \Phi + m_\theta \cdot \sin^2 \Phi + m_{r\theta} \cdot \sin 2\Phi \\m_{nt} &= \frac{1}{2} (m_\theta - m_r) \cdot \sin 2\Phi + m_{r\theta} \cdot \cos 2\Phi\end{aligned}\tag{3.22}$$

Bei der Kirchhoffschen Theorie sind die Neigungen im umgekehrten Drehsinn positiv. Um später mit gleich definierten Größen nach der vereinfachten Reissner-Theorie und der Kirchhoff-Theorie arbeiten zu können, werden hier  $w_n = -\beta_n$  und  $w_t = -\beta_t$  eingeführt. Mit den Beziehungen (3.11), (3.15) bis (3.19), (3.21) und (3.22) lassen sich alle Randgrößen in Abhängigkeit von den gewählten Ansatzfunktionen angeben.

Bei Rechnung nach der Kirchhoffschen Theorie entfallen die Anteile aus (3.21) und für  $w$  kann  $w$  in (3.15) bis (3.19) eingesetzt werden. Für den Fall, daß keine Innenberandung vorliegt, gilt z. B. bei konstanter Belastung:

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \bar{W}^p + \bar{W}^h \\ &= \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot K} + \sum_{n=0}^{N_1} C_{1n} \cdot r^n \cdot \cos n\theta + \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} \cdot r^{n+2} \cdot \cos n\theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* \cdot r^n \cdot \sin n\theta + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* \cdot r^{n+2} \cdot \sin n\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{W}_n &= \bar{W}_n^p + \bar{W}_n^h \\ &= \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot K} \cdot \cos \Phi + \sum_{n=0}^{N_1} C_{1n} \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot \cos(n\theta + \Phi) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} \cdot r^{n+1} [n \cdot \cos(n\theta + \Phi) + 2 \cdot \cos n\theta \cdot \cos \Phi] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot \sin(n\theta + \Phi) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* \cdot r^{n+1} [n \cdot \sin(n\theta + \Phi) + 2 \cdot \sin n\theta \cdot \cos \Phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{W}_t &= \bar{W}_t^p + \bar{W}_t^h \\ &= -\frac{p \cdot r^3}{16 \cdot K} \cdot \sin \Phi - \sum_{n=0}^{N_1} C_{1n} \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot \sin(n\theta + \Phi) - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} \cdot r^{n+1} [n \cdot \sin(n\theta + \Phi) + 2 \cdot \cos n\theta \cdot \sin \Phi] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot \cos(n\theta + \Phi) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* \cdot r^{n+1} [n \cdot \cos(n\theta + \Phi) - 2 \cdot \sin n\theta \cdot \sin \Phi]\end{aligned}$$

$$\bar{q}_n = q_n^p + q_n^h$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\rho \cdot r}{2} \cdot \cos \Phi - K \left\langle \sum_{n=0}^{N_1} C_{1n} \cdot \sigma + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} \cdot r^{n-1} \cdot 4 \cdot n(n+1) \cdot \cos(n\theta + \Phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* \cdot \sigma + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* \cdot r^{n-1} \cdot 4 \cdot n(n+1) \cdot \sin(n\theta + \Phi) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\bar{m}_n = m_n^p + m_n^h$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\rho \cdot r^2}{16} \cdot [2 \cdot (1+\mu) + (1-\mu) \cdot \cos 2\Phi] \\ &\quad - K \left\langle \sum_{n=0}^{N_1} C_{1n} (1-\mu) \cdot n(n-1) \cdot r^{n-2} \cos(n\theta + 2\Phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} (n+1) r^n [2(1+\mu) \cos n\theta + n(1-\mu) \cos(n\theta + 2\Phi)] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* (1-\mu) \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} \cdot \sin(n\theta + 2\Phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* (n+1) r^n [2(1+\mu) \sin n\theta + n(1-\mu) \sin(n\theta + 2\Phi)] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\bar{m}_{nt} = m_{nt}^p + m_{nt}^h$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho \cdot r^2}{16} (1-\mu) \sin 2\Phi - K \cdot (1-\mu) \left\langle \sum_{n=0}^{N_1} -C_{1n} \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} \cdot \sin(n\theta + 2\Phi) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{N_2} C_{3n} \cdot n(n+1) \cdot r^n \cdot \sin(n\theta + 2\Phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_3} C_{1n}^* \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} \cdot \cos(n\theta + 2\Phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_4} C_{3n}^* \cdot n(n+1) \cdot r^n \cdot \cos(n\theta + 2\Phi) \right\rangle \quad (3.23) \end{aligned}$$

Die Zahl der unbekanntem Ansatzparameter ist hierbei

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$

Bei Änderung der Belastungsfunktion muß nur der partikuläre Anteil ausgetauscht werden.

Bei Rechnung nach der vereinfachten Reissner-Theorie müssen sämtliche Anteile mitgenommen werden. Die Anteile aus (3.15) bis (3.18) entsprechen jenen der Kirchhoffschen Theorie. Für  $\bar{w}$  kann  $\bar{w}^K$  gesetzt werden, wenn mit dem übergestellten  $K$  der Anteil nach der Kirchhoff-Theorie gekennzeichnet wird. Entsprechendes gilt für die abgeleiteten Größen.

$$\bar{w} = \bar{w}^K - \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta \bar{w}^K$$

$$\begin{aligned} \bar{w} = \bar{w}^K - \frac{h^2}{5(1-\mu)} & \left\langle \frac{p \cdot r^2}{4K} + \sum_{n=0}^{N_2} c_{2n} \cdot \sigma + \right. \\ & + \sum_{n=0}^{N_2} c_{3n} \cdot 4 \cdot (n+1) \cdot r^n \cdot \cos n\theta \\ & + \sum_{n=1}^{N_3} c_{1n}^* \cdot \sigma + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{N_4} c_{3n}^* \cdot 4 \cdot (n+1) \cdot r^n \cdot \sin n\theta \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n = \bar{w}_n^K + \frac{h^2}{5} \cdot & \left\langle \sum_{n=0}^{N_5} d_{2n} \cdot \left[ \frac{1}{r} I_n \cdot n \cdot \sin n\theta \cdot \cos \phi + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{\lambda} \cdot I_n' \cdot n \cdot \cos n\theta \cdot \sin \phi \right] + \\ & \sum_{n=1}^{N_6} d_{1n}^* \cdot \left[ \frac{1}{r} I_n \cdot n \cdot \cos n\theta \cdot \cos \phi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \cdot I_n' \cdot n \cdot \sin n\theta \cdot \sin \phi \right] \left. \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_t = \frac{k}{W_t} + \frac{h^2}{5} \cdot \left\langle \sum_{n=0}^{N_5} d_{1n} \cdot \left[ -\frac{1}{r} \cdot I_n \cdot n \cdot \sin n\theta \cdot \sin \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda} I_n' \cdot \cos n\theta \cdot \cos \Phi \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N_6} d_{1n}^* \left[ -\frac{1}{r} I_n \cdot n \cdot \cos n\theta \cdot \sin \Phi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\lambda} I_n' \cdot \sin n\theta \cdot \cos \Phi \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_n = \frac{k}{q_n} - K \cdot (1-\mu) \cdot \left\langle \sum_{n=0}^{N_5} d_{1n} \left[ \frac{1}{r} I_n \cdot n \cdot \sin n\theta \cdot \cos \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda} I_n' \cdot \cos n\theta \cdot \sin \Phi \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N_6} d_{1n}^* \left[ \frac{1}{r} I_n \cdot n \cdot \cos n\theta \cdot \cos \Phi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\lambda} I_n' \cdot \sin n\theta \cdot \sin \Phi \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_n = \frac{k}{m_n} - K \frac{h^2}{5} (1-\mu) \cdot \left\langle \sum_{n=0}^{N_5} d_{1n} \cdot \left[ n \cdot \sin n\theta \cdot \cos 2\Phi \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\lambda} I_n' - \frac{1}{r} I_n \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos n\theta \cdot \sin 2\Phi \left( \frac{1}{\lambda^2} I_n'' - \frac{5}{h^2} I_n \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N_6} d_{1n}^* \cdot \left[ n \cdot \cos n\theta \cdot \cos 2\Phi \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\lambda} I_n' - \frac{1}{r} I_n \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin n\theta \cdot \sin 2\Phi \left( \frac{1}{\lambda^2} I_n'' - \frac{5}{h^2} I_n \right) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{nt} = \frac{k}{m_{nt}} - K \frac{h^2}{5} (1-\mu) \cdot \left\langle \sum_{n=0}^{N_5} d_{1n} \cdot \left[ n \cdot \sin n\theta \cdot \sin 2\Phi \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\lambda} I_n' - \frac{1}{r} I_n \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos n\theta \cdot \cos 2\Phi \left( \frac{1}{\lambda^2} I_n'' - \frac{5}{h^2} I_n \right) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N_6} d_{1n}^* \left[ -n \cdot \cos n\theta \cdot \sin 2\Phi \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\lambda} I_n' - \frac{1}{r} I_n \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin n\theta \cdot \cos 2\Phi \left( \frac{1}{\lambda^2} I_n'' - \frac{5}{h^2} I_n \right) \right] \right\rangle \quad (3.24) \end{aligned}$$

Die Zahl der unbekanntten Ansatzparameter ist

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

$I'_n$  und  $I''_n$  sind Ableitungen von  $I_n(\xi)$ , wobei  $\xi = \frac{r}{\lambda}$ :

$$I'_n \equiv \frac{dI_n}{d\xi} = \frac{1}{2} (I_{n-1} + I_{n+1})$$

$$I''_n \equiv \frac{d^2 I_n}{d\xi^2} = \frac{1}{4} (I_{n-2} + 2I_n + I_{n+2})$$

Zu beachten ist ferner:  $I_{-n} = I_n$ .

4. Das diskretisierte erweiterte Trefftz-Verfahren und das diskretisierte Randfehlerquadratminimumverfahren

Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Verfahren ist das Funktional (2.12). Für die hier betrachteten Randverfahren verbleibt nur der Term, der die Integration längs der Berandung  $s$  beinhaltet. Die Berandung  $s$  kann stückweise verschiedene Bedingungen aufweisen. Auf den Randteilen  $s_w, s_{w_n}, s_{w_t}$  ist die Randverschiebung  $w$ , die Randneigung  $w_n$  und die Randneigung  $w_t$  vorgegeben, auf den Randstücken  $s_{q_n}, s_{m_n}, s_{m_{nt}}$  die Randquerkraft, das Randbiegemoment und das Randdrillmoment. Vorgegebene verteilte Randgrößen (inhomogene Randbedingungen) werden mit einem  $\hat{\cdot}$  gekennzeichnet. Nebenbedingungen werden zunächst nicht mitgenommen. Das Funktional (2.12) schreibt sich dann

$$\pi = \sum_{j=1}^6 \int_{s_j} \psi_{s_j}^1 \cdot \psi_{s_j}^2 \cdot ds = \text{stationär} \quad (4.1)$$

Die Summe über  $j$  erstreckt sich über die sechs Randteile  $s_w, s_{w_n}, s_{w_t}, s_{q_n}, s_{m_n}, s_{m_{nt}}$ .

4.1 Das diskretisierte Randfehlerquadratminimumverfahren (DRFV)

Beim DRFV sind die Produkte  $\psi_{s_j}^1 \cdot \psi_{s_j}^2$  Fehlerquadrate der Randgrößen  $w, w_n, w_t, q_n, m_n$  oder  $m_{nt}$ , d.h. es ist

$$\psi_{s_j}^1 \cdot \psi_{s_j}^2 = \bar{f}_j - \hat{f}_j \quad (4.2)$$

$\bar{f}_j = \bar{f}_j^p + \bar{f}_j^h$  ist der Näherungswert, bestehend aus partikularem und homogenem Anteil, wobei mit

- $\bar{f}_1 = w$  die Verschiebung
- $\bar{f}_2 = w_n$  die Neigung rechtwinklig zum Rand
- $\bar{f}_3 = w_t$  die Neigung tangential zum Rand
- $\bar{f}_4 = q_n$  die Querkraft
- $\bar{f}_5 = m_n$  das Biegemoment
- und  $\bar{f}_6 = m_{nt}$  das Drillmoment bezeichnet ist.

Aus (4.1) wird

$$\pi_F = \sum_{j=1}^6 \int_{s_j} p_j \cdot (\bar{f}_j - \hat{f}_j) \cdot (\bar{f}_j - \hat{f}_j) \cdot ds = \text{stat.} \quad (4.3)$$

Die  $p_j$  stellen Gewichtsfunktionen dar, mit denen die Fehler unterschiedlicher Dimension multipliziert werden müssen. Die Gewichtsfunktionen sind willkürlich wählbar. Sie wurden bei Hain [36] und Becker [44] als Konstante zur Angleichung der Dimension der einzelnen Fehler gewählt. Ramm [16] hat auf die Gewichtung verzichtet, da die Ergebnisse auch ohne Gewichtung ausgezeichnet waren.

Mit (4.2) ergibt sich:

$$\pi_F = \sum_{j=1}^6 \int_{s_j} p_j \cdot f_j^h \cdot [f_j^h + 2(\hat{f}_j^P - \hat{f}_j^h)] ds = \text{stat.} \quad (4.4)$$

In (4.4) wurden die Integrale über die Produkte  $f_j^P \cdot f_j^P$ ,  $\hat{f}_j^h \cdot \hat{f}_j^h$  und  $f_j^P \cdot \hat{f}_j^h$  unterdrückt, da diese bei der späteren Ableitung nach den Ansatzkonstanten wegfallen.

Ausführlich lautet (4.4):

$$\begin{aligned} \pi_F = & \int_{s_w} p_w \cdot \hat{w}^h [w^h + 2(\hat{w}^P - \hat{w}^h)] ds + \\ & + \int_{s_{w_n}} p_{w_n} \cdot \hat{w}_n^h [w_n^h + 2(\hat{w}_n^P - \hat{w}_n^h)] ds + \\ & + \int_{s_{w_t}} p_{w_t} \cdot \hat{w}_t^h [w_t^h + 2(\hat{w}_t^P - \hat{w}_t^h)] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{S_{q_n}} p_{q_n} \cdot q_n^h \cdot [q_n^h + 2(\hat{q}_n - \hat{q}_n)] ds + \\
 & + \int_{S_{m_n}} p_{m_n} \cdot m_n^h \cdot [m_n^h + 2(\hat{m}_n - \hat{m}_n)] ds + \\
 & + \int_{S_{m_{nt}}} p_{m_{nt}} \cdot m_{nt}^h \cdot [m_{nt}^h + 2(\hat{m}_{nt} - \hat{m}_{nt})] ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Bei Diskretisation geht (4.3) über in

$$\Pi_{DF} = \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^{M_j} p_{ji} (\bar{f}_{ji} - \hat{f}_{ji}) \cdot (\bar{f}_{ji} - \hat{f}_{ji}) \cdot \Delta S_{ji} = \text{stat}
 \tag{4.6}$$

Die zweite Summation läuft über  $\sum_{j=1}^6 M_j > N$  Punkte, wobei N die Anzahl der Freiwerte der Näherungsfunktion angibt.

(4.6) läßt sich durch einfache Matrixausdrücke darstellen:

$$\Pi_{DF} = \sum_{j=1}^6 [(\bar{F}_j - \hat{F}_j)_{(1, M_j)} \cdot \underline{G}_{(M_j, M_j)} \cdot (\bar{F}_j - \hat{F}_j)_{(M_j, 1)}] = \text{stat.}
 \tag{4.7}$$

G ergibt sich aus:

$$\underline{P}_j = \begin{bmatrix} p_{j1} & p_{j2} & \dots & \sigma \\ \sigma & & & \\ & & & \\ & & & p_{jM_j} \end{bmatrix}
 \tag{4.8}$$

und

$$\underline{DS}_j = \begin{bmatrix} \Delta s_1 & & & & & \\ & \Delta s_2 & & & & \\ & & \sigma & & & \\ & & & \ddots & & \\ \sigma & & & & & \\ & & & & & \Delta s_{M_j} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}_{j(M_i, M_j)} &= \underline{P}_{j(M_i, M_j)} \cdot \underline{DS}_{j(M_i, M_j)} \\ \underline{G}_j &= \underline{G}_j^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

$\underline{P}_j$  enthält die Gewichte von  $M_j$  Punkten,  $\underline{DS}_j$  die Abstände der  $M_j$  Punkte. Mit  $\underline{DS}_j$  ist es möglich, in bestimmten Abschnitten, beispielsweise im Nahbereich der Ecken, die Punkte zu verdichten.

$$\underline{F}_{j(M_i, 1)} = \underline{FP}_{j(M_i, 1)} + \underline{FH}_{j(M_i, 1)}$$

$$\underline{F}_j(M_i, 1) = \underbrace{\underline{FP}_j(M_i, 1)}_{\text{partikuläre}} + \underbrace{\underline{F}_{j(M_i, N)} \cdot \underline{c}_{(N, 1)}}_{\text{homogene Anteile}} \quad (4.11)$$

$\underline{F}_{j(N, 1)}$  (=  $\underline{W}$ ,  $\underline{WN}$ ,  $\underline{WT}$ ,  $\underline{QN}$ ,  $\underline{MN}$  oder  $\underline{MNT}$ ) enthält die Werte ( $w$ ,  $w_n$ ,  $w_t$ ,  $q_n$ ,  $m_n$  oder  $m_{nt}$ ) an  $M_j$  Punkten von jeweils  $N$  homogenen Ansatzfunktionen und der partikulären Funktion.  $\underline{c}_{(N, 1)}$  ist der Vektor der unbekanntten Ansatzparameter.

Nach Ausmultiplizieren von (4.6) ergibt sich die zu (4.4) entsprechende Gleichung. Produkte, die frei von Ansatzkonstanten sind, werden wiederum weggelassen.

$$\begin{aligned} \pi_{DF} &= \sum_{j=1}^6 \left[ \underline{c}^T \cdot \underline{F}_j^T \cdot \underline{G}_j \cdot \underline{F}_j \cdot \underline{c} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \underline{c}^T \cdot \underline{F}_j^T \cdot \underline{G}_j \cdot (\underline{FP}_j - \hat{\underline{F}}_j) \right] = \text{stat.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ausführlich:

$$\begin{aligned}
 \pi_{DF} &= \left[ \underline{c}^T \underline{W}^T \underline{G}_w \underline{W} \cdot \underline{c} + 2 \cdot \underline{c}^T \underline{W}^T \underline{G}_w (\underline{WP} - \hat{W}) \right]_{s_w} + \\
 &+ \left[ \underline{c}^T \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \underline{WN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} (\underline{WNP} - \hat{WN}) \right]_{s_{w_n}} + \\
 &+ \left[ \underline{c}^T \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \underline{WT} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} (\underline{WTP} - \hat{WT}) \right]_{s_{w_t}} + \\
 &+ \left[ \underline{c}^T \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \underline{QN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} (\underline{QNP} - \hat{QN}) \right]_{s_{q_n}} + \\
 &+ \left[ \underline{c}^T \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \underline{MN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} (\underline{MNP} - \hat{MN}) \right]_{s_{m_n}} + \\
 &+ \left[ \underline{c} \cdot \underline{MNT} \cdot \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNT} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \cdot \underline{MNT} \cdot \underline{G}_{m_{nt}} (\underline{MNTP} - \hat{MNT}) \right]_{s_{m_{nt}}} = \\
 &= \text{stat.}
 \end{aligned}$$

(4.13)

Die Anwendung der Stationaritätsbedingung  $\frac{\partial \pi_{DF}}{\partial \underline{c}} = 0$  auf (4.12) führt auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der N Ansatzparameter  $\underline{c}$ .

$$\sum_{j=1}^6 2 \cdot \underline{\bar{F}}_{(N, M_j)}^T \cdot \underline{G}_j \cdot \underline{\bar{F}}_{(M_j, N)} \cdot \underline{c}_{(N, 1)} +$$

$$+ 2 \underline{F}_{(N, M_j)}^T \cdot \underline{G}_j \cdot \left( \underline{\hat{F}}_j - \underline{\bar{F}}_j \right)_{(M_j, 1)} = \sigma$$

(4.14)

Ausführlich:

$$\left[ 2 \underline{W}^T \underline{G}_w \underline{W} \cdot \underline{c} + 2 \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot (\underline{WP} - \underline{\hat{W}}) \right]_{s_w} +$$

$$+ \left[ 2 \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \underline{WN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot (\underline{WNP} - \underline{\hat{WN}}) \right]_{s_{w_n}} +$$

$$+ \left[ 2 \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \underline{WT} \cdot \underline{c} + 2 \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot (\underline{WTP} - \underline{\hat{WT}}) \right]_{s_{w_t}} +$$

$$+ \left[ 2 \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \underline{QN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot (\underline{QNP} - \underline{\hat{QN}}) \right]_{s_{q_n}} +$$

$$+ \left[ 2 \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \underline{MN} \cdot \underline{c} + 2 \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot (\underline{MNP} - \underline{\hat{MN}}) \right]_{s_{m_n}} +$$

$$+ \left[ 2 \underline{MNT}^T \underline{G}_{m_{nt}} \underline{MNT} \cdot \underline{c} + 2 \underline{MNT}^T \underline{G}_{m_{nt}} \cdot (\underline{MNTP} - \underline{\hat{MNT}}) \right]_{s_{m_{nt}}} = \sigma \quad (4.15)$$

Übergang zum Kollokationsverfahren

Für den Fall, daß  $\sum_{j=1}^6 M_j = N$  gewählt wird, kann  $\sum_{j=1}^6 \bar{F}(M_j, N)$  in  $\bar{F}(N, N)$  zusammengefaßt werden. Nach Multiplikation von beiden Seiten mit  $\underline{F}^{-1}(N, N)$  bleibt:

$$\sum_{i=1}^6 \underline{G}_{i(M_i, M_i)} \cdot \bar{F}_{i(M_i, N)} \cdot \underline{e}_{N,1} + \underline{G}_{i(M_i, M_i)} \cdot (\underline{F} - \hat{F})_{(M_i, 1)} = \sigma \quad (4.16)$$

d. h. es wird an  $\sum_{j=1}^6 M_j = N$  Punkten die exakte Erfüllung bestimmter Randbedingungen gefordert.

4.2 Das diskretisierte, erweiterte Trefftz-Verfahren  
(DTVS bzw. DTVN)

Beim DTV beinhalten die Produkte  $\psi_{s_j}^1 \cdot \psi_{s_j}^2$  Energieterme. Werden mit

$$N_{s_j}^1 = \bar{v}_j - \hat{v}_j \quad (4.17a)$$

Fehler (Reste) in den Verschiebungsgrößen und mit

$$\psi_{s_j}^2 = \bar{k}_j - \hat{k}_j \quad (4.17b)$$

Fehler in den zugeordneten Kraftgrößen bezeichnet, so geht (4.1) über in

$$\pi_T = \sum_{j=1}^6 \int_{s_j} (\bar{k}_j - \hat{k}_j) (\bar{v}_j - \hat{v}_j) ds = \text{stat.} \quad (4.18)$$

Nebenbedingungen sind dabei zunächst außer acht gelassen. Die Funktionen  $k_j$  und  $v_j$  ergeben sich aus dem Potential, wenn dies in der speziellen Form für Ansatzfunktionen, die die Differentialgleichung erfüllen, erstellt wird und außerdem auftretende Flächenintegrale in Randintegrale umgeformt werden. Dies soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

#### 4.2.1 Das Potential der Platte

Die Ableitung geschieht für die vereinfachte Reissner-Theorie. Es wird später der Übergang zur Kirchhoff-Theorie vorgenommen und gezeigt, daß hierfür dieselben Formeln verwendet werden können. Es seien zunächst zwei Identitäten vorausgeschickt, die öfters Verwendung finden.

Mit dem Gaußschen Integralsatz gilt:

$$\begin{aligned}
 & - \int_F m_{ji} \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}) dF + \int_F q_i (-w_i + w_{,i}) dF = \\
 & = + \int_F m_{j,i,j} w_i dF - \int_F q_i w_i dF - \int_F q_{i,i} w dF + \\
 & + \int_S q_n \cdot w \cdot ds - \int_S m_n \cdot w_n ds - \int_S m_{nt} \cdot w_t ds = \\
 & = + \int_F (m_{j,i,j} - q_i) w_i dF - \int_F q_{i,i} \cdot w \cdot dF + \\
 & + \int_S q_n \cdot w \cdot ds - \int_S m_n \cdot w_n \cdot ds - \int_S m_{nt} \cdot w_t ds
 \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $m_{j,i,j} - q_i = 0$  und  $q_{i,i} = -p$ , ergibt sich als erste Identität:

$$\begin{aligned}
 & - \int_F m_{ji} \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}) dF + \int_F q_i (-w_i + w_{,i}) dF = \\
 & = + \int_F p \cdot w \cdot dF + \int_S q_n \cdot w \cdot ds - \int_S m_n \cdot w_n \cdot ds - \int_S m_{nt} \cdot w_t \cdot ds
 \end{aligned}$$

(4.I)

Sie beinhaltet den Arbeitssatz, der besagt, daß die negative innere Arbeit gleich der äußeren Arbeit ist. Die zweite Identität läßt sich mit Hilfe der ersten Identität und dem Satz von Betti herleiten. Dieser lautet bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes: "Die Arbeit einer Kräftegruppe 1 längs des Weges einer Kräftegruppe 2 ist gleich der Arbeit der Kräftegruppe 2 längs des Weges von 1."

In Formeln ausgedrückt:

$$\begin{aligned} & - \int_F \overbrace{m_{ji}}^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overbrace{w_{i,i}}^2 + \overbrace{w_{j,i}}^2) dF + \int_F \overbrace{q_i}^1 \cdot (-\overbrace{w_i}^2 + \overbrace{w_{j,i}}^2) dF = \\ & = - \int_F \overbrace{m_{ji}}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overbrace{w_{i,i}}^1 + \overbrace{w_{j,i}}^1) dF + \int_F \overbrace{q_i}^2 \cdot (-\overbrace{w_i}^1 + \overbrace{w_{j,i}}^1) dF \end{aligned}$$

In (4.I) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & + \int_F \hat{p} \cdot \hat{w} dF + \int_S \hat{q}_n \cdot \hat{w} ds - \int_S \hat{m}_n \cdot \hat{w}_n ds - \int_S \hat{m}_{nt} \cdot \hat{w}_t ds = \\ & = + \int_F \hat{p} \cdot \hat{w} dF + \int_S \hat{q}_n \cdot \hat{w} ds - \int_S \hat{m}_n \cdot \hat{w}_n ds - \int_S \hat{m}_{nt} \cdot \hat{w}_t ds \end{aligned}$$

Wird mit 1  $\equiv$  p der partikuläre Anteil, mit 2  $\equiv$  h der homogene Anteil der Funktionen bezeichnet und  $\hat{p} \equiv p$ ,  $\hat{p} \equiv 0$  eingesetzt, erhält man als zweite Identität:

$$\begin{aligned} \int_F p \cdot h dF & = + \int_S \hat{q}_n^h \cdot \hat{w}^p ds - \int_S \hat{m}_n^h \cdot \hat{w}_n^p ds - \int_S \hat{m}_{nt}^h \cdot \hat{w}_t^p ds - \\ & - \int_S \hat{q}_n^p \cdot \hat{w}^h ds + \int_S \hat{m}_n^p \cdot \hat{w}_n^h ds + \int_S \hat{m}_{nt}^p \cdot \hat{w}_t^h ds \end{aligned}$$

(4.II)

Das Potential der Platte ist

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_i + \overline{\Pi}_a \quad (4.19)$$

mit

$$\overline{\Pi}_i = -A_i = -\frac{1}{2} \int_F m_{ji} \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji}) dF + \frac{1}{2} \int_F \hat{q}_i (-w_i + w_{ji}) dF$$

und

$$\overline{\Pi}_a = -2A_a = -\int_F \rho \cdot w \cdot dF - \int_{S_{q_n}} \hat{q}_n \cdot w \cdot ds + \int_{S_{m_n}} \hat{m}_n \cdot w_n \cdot ds + \int_{S_{m_t}} \hat{m}_t \cdot w_t \cdot ds$$

Für Ansatzfunktionen, die keine Randbedingungen erfüllen, muß es um die geometrischen Randbedingungen  $w = \hat{w}$ ,  $w_n = \hat{w}_n$  und  $w_t = \hat{w}_t$  erweitert werden. Dies geschieht nach der Lagrange-Multiplikatorenmethode.

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_T &= \overline{\Pi}_i + \overline{\Pi}_a + \int_{S_w} \lambda_1 (w - \hat{w}) ds + \\ &+ \int_{S_{w_n}} \lambda_2 (w_n - \hat{w}_n) ds + \\ &+ \int_{S_{w_t}} \lambda_3 (w_t - \hat{w}_t) ds = \text{stat.} \end{aligned}$$

(4.20)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$  Lagrange-Multiplikatoren

Die Variation von (4.20) liefert die Eulerschen Gleichungen, aus denen die Lagrange-Parameter hervorgehen:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_T = & + \int_F (m_{ji,j} - q_i) \delta w_i dF - \int_F (q_{i,i} + p) \delta w dF + \\
 & + \int_{s_{q_n}} (q_n - \hat{q}_n) \delta w ds + \int_{s_w} (q_n + \lambda_1) \delta w ds + \\
 & - \int_{s_{m_n}} (m_n - \hat{m}_n) \delta w_n ds - \int_{s_{w_n}} (m_n - \lambda_2) \delta w_n ds - \\
 & - \int_{s_{m_t}} (m_t - \hat{m}_t) \delta w_t ds - \int_{s_{w_t}} (m_t - \lambda_3) \delta w_t ds + \\
 & + \int_{s_w} (w - \hat{w}) \delta \lambda_1 ds + \int_{s_{w_n}} (w_n - \hat{w}_n) \delta \lambda_2 ds + \int_{s_{w_t}} (w_t - \hat{w}_t) \delta \lambda_3 ds = \sigma
 \end{aligned}$$

(4.21)

Eulersche Gleichungen:

- |     |                         |                  |   |   |
|-----|-------------------------|------------------|---|---|
| 1)  | $m_{ji,j} - q_i = 0$    | im Gebiet        | } | statische Feldgleichungen                                 |
| 2)  | $q_{i,i} + p = 0$       | im Gebiet        |   | (Differentialgleichungen)                                 |
| 3)  | $q_n = \hat{q}_n$       | auf $s_{q_n}$    | } | statische<br>Randbedingungen                              |
| 4)  | $m_n = \hat{m}_n$       | auf $s_{m_n}$    |   |   |
| 5)  | $m_{nt} = \hat{m}_{nt}$ | auf $s_{m_{nt}}$ |   |   |
| 6)  | $w = \hat{w}$           | auf $s_w$        | } | geometrische<br>Randbedingungen                           |
| 7)  | $w_n = \hat{w}_n$       | auf $s_{w_n}$    |   |   |
| 8)  | $w_t = \hat{w}_t$       | auf $s_{w_t}$    |   |   |
| 9)  | $\lambda_1 = -q_n$      | auf $s_w$        | } | Bestimmungsgleichungen<br>für die<br>Lagrange - Parameter |
| 10) | $\lambda_2 = +m_n$      | auf $s_{w_n}$    |   |   |
| 11) | $\lambda_3 = +m_t$      | auf $s_{w_t}$    |   |   |

(4.22)

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \pi_T &= -\frac{1}{2} \int_F m_{ji} \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji}) dF + \frac{1}{2} \int_F \hat{q}_i (-w_i + w_j) dF - \\
 &\quad - \int_F \rho \cdot w \cdot dF - \int_{S_{q_n}} \hat{q}_n \cdot w \cdot ds + \int_{S_{m_n}} \hat{m}_n \cdot w_n \cdot ds + \int_{S_{m_{nt}}} \hat{m}_{nt} \cdot w_t \cdot ds \\
 &\quad - \int_{S_w} q_n \cdot (w - \hat{w}) \cdot ds + \int_{S_{w_n}} m_n (w_n - \hat{w}_n) \cdot ds + \int_{S_{w_t}} m_{nt} (w_t - \hat{w}_t) \cdot ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

$\pi_T$  wird nun mit den Identitäten (4. I) und (4. II) so umgeformt, daß nur noch Randintegrale auftreten.

(4. I) in (4.23):

$$\begin{aligned}
 \pi_T &= -\frac{1}{2} \int_F \rho \cdot w \cdot dF + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{S_{q_n}} (q_n - 2\hat{q}_n) \cdot w \cdot ds - \frac{1}{2} \int_{S_{m_n}} (m_n - 2\hat{m}_n) \cdot w_n \cdot ds - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{S_{m_{nt}}} (m_{nt} - 2\hat{m}_{nt}) \cdot w_t \cdot ds - \frac{1}{2} \int_{S_w} q_n (w - 2\hat{w}) \cdot ds + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{S_{w_n}} m_n (w_n - 2\hat{w}_n) \cdot ds + \frac{1}{2} \int_{S_{w_t}} m_{nt} (w_t - 2\hat{w}_t) \cdot ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Durch die Aufspaltung der Funktionen in partikuläre und homogene Anteile kann mit Hilfe der zweiten Identität (4. II) das letzte Flächenintegral in (4.24) beseitigt werden und die endgültige Form von  $\pi_T$ , nur

aus Randintegralen bestehend, gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
 \Pi_T &= -\frac{1}{2} \int_{S_W}^h q_n^h \left[ W^h + 2 \left( W^p - \hat{W} \right) \right] ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{S_{W_n}}^h m_n^h \left[ W_n^h + 2 \left( W_n^p - \hat{W}_n \right) \right] ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{S_{W_t}}^h m_{nt}^h \left[ W_t^h + 2 \left( W_t^p - \hat{W}_t \right) \right] ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{S_{q_n}}^h W^h \left[ q_n^h + 2 \left( q_n^p - \hat{q}_n \right) \right] ds - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{S_{m_n}}^h W_n^h \left[ m_n^h + 2 \left( m_n^p - \hat{m}_n \right) \right] ds - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{S_{m_{nt}}}^h W_t^h \left[ m_{nt}^h + 2 \left( m_{nt}^p - \hat{m}_{nt} \right) \right] ds = \text{stat.}
 \end{aligned}$$

(4.25)

Die Integrale über Produkte der Art  $f^p \cdot f$ ,  $f^p \cdot \hat{f}$  und  $\hat{f} \cdot \hat{f}$  sind wiederum weggelassen, da sie keine Ansatzkonstanten enthalten und bei der späteren Ableitung wegfallen.

Die Diskretisation geschieht wie beim Fehlerquadratminimum in 4.1.

Aus (4.25) wird:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_{DT} = & -\frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W} \cdot \underline{c} + \underline{c}^T \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WP} - \hat{\underline{W}}) \right]_{s_w} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN} \cdot \underline{c} + \underline{c}^T \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WNP} - \hat{\underline{WN}}) \right]_{s_{w_n}} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT} \cdot \underline{c} + \underline{c}^T \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WTP} - \hat{\underline{WT}}) \right]_{s_{w_t}} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{W}^T \underline{DS} \underline{QN} \underline{c} + \underline{c}^T \underline{W}^T \underline{DS} (\underline{QNP} - \hat{\underline{QN}}) \right]_{s_{q_n}} - \\
 & - \frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{WN}^T \underline{DS} \underline{MN} \underline{c} + \underline{c}^T \underline{WN}^T \underline{DS} (\underline{MNP} - \hat{\underline{MN}}) \right]_{s_{m_n}} \\
 & - \frac{1}{2} \left[ \underline{c}^T \underline{WT}^T \underline{DS} \underline{MNT} + \underline{c}^T \underline{WT}^T \underline{DS} (\underline{MNTP} - \hat{\underline{MNT}}) \right]_{s_{m_{nt}}} = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

$\underline{DS}_j$  ist die in Formel (4.9) angegebene Matrix, die die Abstände der Kollokationspunkte enthält. Bei gleichen Abständen kann sie gestrichen werden. Die einzelnen Ausdrücke in (4.26) sind bilineare Formen, deren Ableitung nach  $\underline{c}$  die zu (4.15) analogen Gleichungen liefert.

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{1}{2} (\underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W} + \underline{W}^T \underline{DS} \underline{QN}) \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{DS} (\underline{WP} - \hat{\underline{W}}) \right]_{s_w} + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} (\underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN} + \underline{WN}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN}) \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{DS} (\underline{WNP} - \hat{\underline{WN}}) \right]_{s_{wn}} + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} (\underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT} + \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT}) \underline{c} + \underline{MNT}^T \underline{DS} (\underline{WTP} - \hat{\underline{WT}}) \right]_{s_{wt}} + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} (\underline{W}^T \underline{DS} \cdot \underline{QN} + \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W}) \underline{c} + \underline{W}^T \underline{DS} (\underline{QNP} - \hat{\underline{QN}}) \right]_{s_{qn}} - \\
 & - \left[ \frac{1}{2} (\underline{WN}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN} + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN}) \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{DS} (\underline{MNP} - \hat{\underline{MN}}) \right]_{s_{mn}} - \\
 & - \left[ \frac{1}{2} (\underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT} + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT}) \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{DS} (\underline{MNTP} - \hat{\underline{MNT}}) \right]_{s_{mnt}} = \sigma
 \end{aligned} \tag{4.27a}$$

Die direkte Diskretisierung von  $\delta_{\pi_T}$  (4.21) führt auf:

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W} \cdot \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WP} - \hat{\underline{W}}) \right]_{s_w} + \\
 & + \left[ \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN} \cdot \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WNP} - \hat{\underline{WN}}) \right]_{s_{wn}} + \\
 & + \left[ \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT} \cdot \underline{c} + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WTP} - \hat{\underline{WT}}) \right]_{s_{wt}} + \\
 & + \left[ \underline{W}^T \underline{DS} \cdot \underline{QN} \cdot \underline{c} + \underline{W}^T \underline{DS} \cdot (\underline{QNP} - \hat{\underline{QN}}) \right]_{s_{qn}} - \\
 & - \left[ \underline{WN}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN} \cdot \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{MNP} - \hat{\underline{MN}}) \right]_{s_{mn}} - \\
 & - \left[ \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT} \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{MNTP} - \hat{\underline{MNT}}) \right]_{s_{mnt}} = \sigma
 \end{aligned} \tag{4.27b}$$

Der Widerspruch zwischen den Gleichungssystemen (4.27 a) und (4.27 b) ist nur scheinbar. Bei exakter Integration sind beide identisch. Bei diskretisierter Rechnung kann sowohl die eine als auch die andere Form verwendet werden. (4.27 a) ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, (4.27 b) ist nicht symmetrisch, wird aber bei steigender Zahl von Kollokationspunkten sich der Symmetrie annähern.

Bei den Beispielen in Kapitel 5 wird die Rechnung nach dem symmetrischen Gleichungssystem (4.27 a) mit DTVS und die nach dem unsymmetrischen (4.27 b) mit DTVN bezeichnet.

### Übergang zum Funktional für die Kirchhoff-Theorie

Der Übergang kann direkt vollzogen werden, wenn zum Funktional für die vereinfachte Reissner-Theorie die Nebenbedingungen  $w_i = w_{,i}$  im Gebiet und  $w_n = w_{,n}$  bzw.  $w_t = w_{,t}$  auf dem Rand hinzugefügt werden. Es kann gezeigt werden, daß das Funktional für die Kirchhoff-Theorie ebenfalls in der Form (4.25) dargestellt werden kann, d. h. daß für beide Theorien vom selben Funktional ausgegangen werden kann, wenn bei Kirchhoff für  $w_n = w_{,n}$  bzw.  $w_t = w_{,t}$  und bei der vereinfachten Theorie von Reissner für  $w_n = -\beta_n$  bzw.  $w_t = -\beta_t$  gesetzt wird. Dabei ist zu beachten, daß bei Kirchhoff  $s_{w_t}$  in  $s_w$  und  $s_{m_{nt}}$  in  $s_{qn}$  übergeht.

### Vergleich der Gleichungssysteme (4.15) und (4.27 a)

Die Gleichungssysteme nach dem DRFV lassen sich in das Gleichungssystem nach dem DTV überführen, wenn folgende Beziehungen in (4.15) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \underline{QN}^T \cdot \underline{P}_{q_n} &= + \frac{1}{2} \underline{W}^T & \underline{W}^T \cdot \underline{P}_w &= - \frac{1}{2} \underline{QN}^T \\ \underline{MN}^T \cdot \underline{P}_{m_n} &= - \frac{1}{2} \underline{WN}^T & \underline{WN}^T \cdot \underline{P}_{w_n} &= + \frac{1}{2} \underline{MN}^T \\ \underline{MNT}^T \cdot \underline{P}_{m_{nt}} &= - \frac{1}{2} \underline{WT}^T & \underline{WT}^T \cdot \underline{P}_{w_t} &= + \frac{1}{2} \underline{MNT}^T \end{aligned}$$

Tabelle 4.1  
 Gleichungen nach dem diskretisierten Fehlerquadratminimumverfahren  
 und dem erweiterten diskretisierten Trefftz Verfahren

Terme aus (4.15) bzw. (4.27 a, b)	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_w}$	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_{w_n}}$	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_{w_t}}$	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_{q_n}}$	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_{m_n}}$	$\left[ \begin{smallmatrix} (4.15) \\ (4.27 a, b) \end{smallmatrix} \right]_{s_{m_{nt}}}$
<u>eingespannter Rand</u>						
a) $w = w_n = w_t = 0$	x	x	x	-	-	-
b) $w = w_n = m_{nt} = 0$	x	x	-	-	-	x
<u>gelenkig gelagerter Rand</u>						
a) $w = m_n = w_t = 0$	x	-	x	-	x	-
b) $w = m_n = m_{nt} = 0$	x	-	-	-	x	x
<u>freier Rand</u>						
$q_n = m_n = m_{nt} = 0$	-	-	-	x	x	x
<u>Symmetrierand</u>						
$q_n = w_n = m_{nt} = 0$	-	x	-	x	-	x

--- bei Kirchhoff nicht zulässig . Bei Kirchhoff ist zu beachten, daß  $s_{w_t} \neq s_w$  und  $s_{m_{nt}} \neq s_{q_n}$  !

Die Terme [-] sind beim Fehlerquadratminimumverfahren aus (4.15) und beim Trefftz-Verfahren aus (4.27 a) oder (4.27 b) zu entnehmen.

#### 4.3 Erweiterung auf Mehrbereiche

Langgestreckte oder durchlaufende Platten lassen sich durch einen einzigen Ansatz, der sich über das ganze Gebiet erstreckt, schlecht erfassen. Eine Verbesserung der Ergebnisse kann auch durch Mitnahme von mehr Ansatzfunktionen nicht erreicht werden, da die Ansätze exponentiell ansteigen, so daß ihre numerischen Werte auf Rändern, die vom Ursprung stark verschiedene Abstände haben, von unterschiedlicher Größenordnung sind. Es empfiehlt sich hier, das Gebiet in Teilbereiche aufzuteilen und bereichsweise Ansätze zu wählen. Die einzelnen Bereiche müssen dann durch Übergangsbedingungen wieder gekoppelt werden. Die Idee der bereichsweisen Formulierung (für das Ritz-Verfahren) geht auf Courant zurück und wurde bei der Entwicklung der Methode der finiten Elemente wiederentdeckt.

Die Übergangsbedingungen zwischen einem betrachteten Element<sup>+</sup> und einem Nachbarelement<sup>-</sup> lauten:

$$\begin{aligned} w^+ &= w^-, & w_n^+ &= -w_n^-, & w_t^+ &= -w_t^- \\ q_n^+ &= -q_n^-, & m_n^+ &= m_n^-, & m_{nt}^+ &= m_{nt}^- \end{aligned}$$

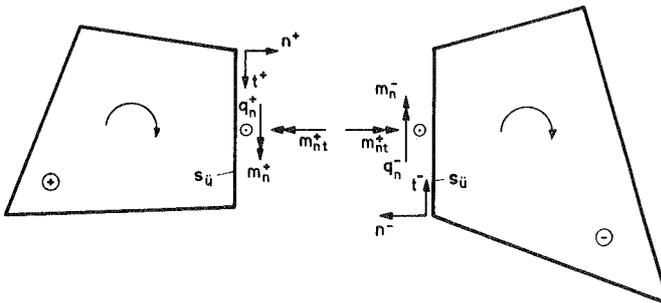


Bild 4.1: Bedingungen am Übergangsrand

Die Übergangsränder (Innenränder) werden mit  $s_{\ddot{u}}$  bezeichnet.

4.3.1 Diskretisiertes Fehlerquadratminimumverfahren für Mehrbereiche

Das Funktional setzt sich aus den Außenrandfehlerquadraten der K Bereiche nach Gleichung (4.5) und den Fehlerquadraten längs der Übergangsränder  $s_{\bar{u}}$  zusammen. Die Übergangsränder sollen nur einmal durchlaufen werden.

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbb{T}}_F = & \sum_{k=1}^K \mathbb{T}_{F_k} + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_w (w^+ - w^-) (w^+ - w^-) ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_{w_n} (w_n^+ + w_n^-) (w_n^+ + w_n^-) ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_{w_t} (w_t^+ + w_t^-) (w_t^+ + w_t^-) ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_{q_n} (q_n^+ + q_n^-) (q_n^+ + q_n^-) ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_{m_n} (m_n^+ - m_n^-) (m_n^+ - m_n^-) ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} \rho_{m_{nt}} (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

In diskretisierter Form schreibt sich Gleichung (4. 29):

$$\begin{aligned}
 \pi_{DF} &= \sum_{t=1}^K \pi_{DF}^t + \\
 &\left\{ + \underline{c}^T \underline{W}^T \underline{G}_w^+ \left[ \underline{W}^+ \underline{c} + 2 \underline{W}^+ \underline{p} - (\underline{W}^- \underline{c} + 2 \underline{W}^- \underline{p}) \right] + \right. \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{W}^- \underline{G}_w^- \left[ \underline{W}^- \underline{c} + 2 \underline{W}^- \underline{p} - (\underline{W}^+ \underline{c} + 2 \underline{W}^+ \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{W} \underline{N}^T \underline{G}_{w_n}^+ \left[ \underline{W} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{N}^+ \underline{p} + (\underline{W} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{N}^- \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{W} \underline{N}^- \underline{G}_{w_n}^- \left[ \underline{W} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{N}^- \underline{p} + (\underline{W} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{N}^+ \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{W} \underline{T}^T \underline{G}_{w_t}^+ \left[ \underline{W} \underline{T}^+ \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{T}^+ \underline{p} + (\underline{W} \underline{T}^- \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{T}^- \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{W} \underline{T}^- \underline{G}_{w_t}^- \left[ \underline{W} \underline{T}^- \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{T}^- \underline{p} + (\underline{W} \underline{T}^+ \underline{c} + 2 \underline{W} \underline{T}^+ \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{Q} \underline{N}^T \underline{G}_{q_n}^+ \left[ \underline{Q} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{Q} \underline{N}^+ \underline{p} + (\underline{Q} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{Q} \underline{N}^- \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{Q} \underline{N}^- \underline{G}_{q_n}^- \left[ \underline{Q} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{Q} \underline{N}^- \underline{p} + (\underline{Q} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{Q} \underline{N}^+ \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{M} \underline{N}^T \underline{G}_{m_n}^+ \left[ \underline{M} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N}^+ \underline{p} - (\underline{M} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N}^- \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{M} \underline{N}^- \underline{G}_{m_n}^- \left[ \underline{M} \underline{N}^- \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N}^- \underline{p} - (\underline{M} \underline{N}^+ \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N}^+ \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{M} \underline{N} \underline{T}^T \underline{G}_{m_{nt}}^+ \left[ \underline{M} \underline{N} \underline{T}^+ \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N} \underline{T}^+ \underline{p} - (\underline{M} \underline{N} \underline{T}^- \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N} \underline{T}^- \underline{p}) \right] + \\
 &\quad + \underline{c}^T \underline{M} \underline{N} \underline{T}^- \underline{G}_{m_{nt}}^- \left[ \underline{M} \underline{N} \underline{T}^- \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N} \underline{T}^- \underline{p} - (\underline{M} \underline{N} \underline{T}^+ \underline{c} + 2 \underline{M} \underline{N} \underline{T}^+ \underline{p}) \right] \Big\} \stackrel{\text{stat.}}{=} \stackrel{su}{=}
 \end{aligned}$$

(4. 30)

Auf dem Übergangsrand ist  $\underline{G}_{..}^+ = \underline{G}_{..}^-$  zu setzen.

Die Ableitungen nach den Konstanten  $\underline{c}^+$  des betrachteten Elementes  $^+$  ergeben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \left[ \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot \underline{W} \cdot \underline{c} + \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot (\underline{WP} - \hat{\underline{W}}) \right]_{s_w}^+ + \\
 & + 2 \cdot \left[ \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot \underline{WN} \cdot \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} (\underline{WNP} - \hat{\underline{WN}}) \right]_{s_{w_n}}^+ + \\
 & + 2 \cdot \left[ \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot \underline{WT} \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} (\underline{WTP} - \hat{\underline{WT}}) \right]_{s_{w_t}}^+ + \\
 & + 2 \cdot \left[ \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot \underline{QN} \cdot \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} (\underline{QNP} - \hat{\underline{QN}}) \right]_{s_{q_n}}^+ + \\
 & + 2 \cdot \left[ \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot \underline{MN} \cdot \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} (\underline{MNP} - \hat{\underline{MN}}) \right]_{s_{m_n}}^+ + \\
 & + 2 \cdot \left[ \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNT} \underline{c} + \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot (\underline{MNTP} - \hat{\underline{MNT}}) \right]_{s_{m_{nt}}}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot \underline{W} \cdot \underline{c} - \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot \underline{W} \cdot \underline{c} + \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot \underline{WP} - \underline{W}^T \underline{G}_w \cdot \underline{WP} \right]_{s_u}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot \underline{WN} \cdot \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot \underline{WN} \cdot \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot \underline{WNP} + \underline{WN}^T \underline{G}_{w_n} \cdot \underline{WNP} \right]_{s_u}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot \underline{WT} \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot \underline{WT} \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot \underline{WTP} + \underline{WT}^T \underline{G}_{w_t} \cdot \underline{WTP} \right]_{s_u}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot \underline{QN} \cdot \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot \underline{QN} \cdot \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot \underline{QNP} + \underline{QN}^T \underline{G}_{q_n} \cdot \underline{QNP} \right]_{s_u}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot \underline{MN} \cdot \underline{c} - \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot \underline{MN} \cdot \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot \underline{MNP} - \underline{MN}^T \underline{G}_{m_n} \cdot \underline{MNP} \right]_{s_u}^+ + \\
 & + 2 \left[ \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNT} \underline{c} - \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNT} \underline{c} + \right. \\
 & \left. + \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNTP} - \underline{MNT} \underline{G}_{m_{nt}} \cdot \underline{MNTP} \right] = \text{stat.}
 \end{aligned}$$

#### 4.3.2 Diskretisiertes Trefftz-Verfahren für Mehrbereiche

Ausdrücke der Form (4.23) müssen über alle K Bereiche summiert und die geometrischen Übergangsbedingungen hinzugefügt werden. Die folgenden Ableitungen lehnen sich an die Arbeit von Bufler [22] an.

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \sum_{k=1}^K \Pi_T^k + \\ &+ \int_{S_{\bar{u}}} \varepsilon_1 (W^+ - W^-) ds + \\ &+ \int_{S_{\bar{u}}} \varepsilon_2 (W_n^+ + W_n^-) ds + \\ &+ \int_{S_{\bar{u}}} \varepsilon_3 (W_t^+ + W_t^-) ds = \text{stat.} \end{aligned}$$

(4.32)

Die Variation liefert die Bestimmungsgleichungen für die Lagrange Parameter  $e_1, e_2, e_3$ . Mit (4.21) gilt

$$\delta \Pi_T = \sum_{k=1}^K \delta \Pi_T^k +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{S_{ii}} (q_n^+ \cdot \delta w^+ + q_n^- \cdot \delta \bar{w}) \, ds \quad - \\
 & - \int_{S_{ii}} (m_n^+ \cdot \delta w_n^+ + m_n^- \cdot \delta \bar{w}_n) \, ds \quad - \\
 & - \int_{S_{ii}} (m_{nt}^+ \delta w_t^+ + m_{nt}^- \cdot \delta \bar{w}_t) \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} \varepsilon_1 \delta (w^+ - \bar{w}) \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} (w^+ - \bar{w}) \delta \varepsilon_1 \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} \varepsilon_2 \delta (w_n^+ + w_n^-) \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} (w_n^+ + w_n^-) \delta \varepsilon_2 \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} \varepsilon_3 \delta (w_t^+ + w_t^-) \, ds \quad + \\
 & + \int_{S_{ii}} (w_t^+ + w_t^-) \delta \varepsilon_3 \, ds \quad = \quad \sigma
 \end{aligned}$$

(4.33)

Mit

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_{ii}} (\bar{a}^+ \cdot \bar{b}^+ + \bar{a}^- \cdot \bar{b}^-) \, ds \quad = \\
 & \int_{S_{ii}} \frac{1}{2} (\bar{a}^+ + \bar{a}^-) (\bar{b}^+ + \bar{b}^-) \, ds \quad + \quad \int_{S_{ii}} \frac{1}{2} (\bar{a}^+ - \bar{a}^-) (\bar{b}^+ - \bar{b}^-) \, ds
 \end{aligned}$$

(4.34)

können die einzelnen Terme zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned}
 \delta \pi_T &= \sum_{k=1}^k \delta \pi_T^k + \\
 &+ \int_{s_{ij}} \left[ \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (q_n^+ - q_n^-) \right] \delta (w^+ - w^-) ds + \\
 &+ \int_{s_{ij}} \frac{1}{2} (q_n^+ + q_n^-) \delta (w^+ + w^-) ds + \\
 &+ \int_{s_{ij}} \left[ \varepsilon_2 - \frac{1}{2} (m_n^+ + m_n^-) \right] \delta (w_n^+ + w_n^-) ds - \\
 &- \int_{s_{ij}} \frac{1}{2} (m_n^+ - m_n^-) \delta (w_n^+ - w_n^-) ds + \\
 &+ \int_{s_{ij}} \left[ \varepsilon_3 - \frac{1}{2} (m_{nt}^+ + m_{nt}^-) \right] \delta (w_t^+ + w_t^-) ds - \\
 &- \int_{s_{ij}} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) \delta (w_t^+ - w_t^-) ds + \\
 &+ \int_{s_{ij}} (w^+ - w^-) \delta \varepsilon_1 + \\
 &+ \int_{s_{ij}} (w_n^+ + w_n^-) \delta \varepsilon_2 + \\
 &+ \int_{s_{ij}} (w_t^+ + w_t^-) \delta \varepsilon_3 \quad \equiv \quad \sigma
 \end{aligned}$$

(4.35)

Als Eulersche Gleichungen ergeben sich neben den Bedingungen (4.22) für jedes Gebiet folgende Beziehungen für die Übergangsänder:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{2} (q_n^+ - q_n^-) \\ \varepsilon_2 &= +\frac{1}{2} (m_n^+ + m_n^-) \\ \varepsilon_3 &= +\frac{1}{2} (m_{nt}^+ + m_{nt}^-) \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichungen  
für die  
Lagrange-Parameter  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\begin{aligned} q_n^+ &= -q_n^- \\ m_n^+ &= +m_n^- \\ m_{nt}^+ &= +m_{nt}^- \end{aligned}$$

statische  
Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} W^+ &= +W^- \\ W_n^+ &= -W_n^- \\ W_t^+ &= -W_t^- \end{aligned}$$

geometrische  
Übergangsbedingungen

(4.36)

Damit ist  $\pi_T$  bekannt:

$$\begin{aligned} \pi_T &= \sum_{k=1}^k \pi_T^k - \\ &- \int_{S_U} \frac{1}{2} (q_n^+ - q_n^-) (W^+ - W) ds + \\ &+ \int_{S_U} \frac{1}{2} (m_n^+ + m_n^-) (W_n^+ + W_n^-) ds + \\ &+ \int_{S_U} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ + m_{nt}^-) (W_t^+ + W_t^-) ds = \text{stat.} \end{aligned}$$

(4.37)

Die Aufgabe besteht nun wieder darin, diesen Ausdruck zunächst so umzuformen, daß nur noch Randintegrale übrigbleiben und diese zu diskretisieren. Dazu müssen die zuvor abgeleiteten Identitäten (4.I) und (4.II) erweitert werden.

Aus (4.I) wird für ein Element <sup>+</sup>:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{F^+} m_{ji} \cdot \frac{1}{2} \cdot (w_{i,i} + w_{j,i}) \, dF + \int_{F^+} q_i \cdot (-w_i + w_{i,i}) \, dF = \\
 & = \int_{F^+} p \cdot w \, dF + \int_{s^+} q_n \cdot w \, ds - \int_{s^+} m_n \cdot w_n \, ds - \int_{s^+} m_{nt} \cdot w_t \, ds + \\
 & + \int_{s_{\bar{u}}} (q_n^+ \cdot w^+ + q_n^- \cdot w^-) \, ds - \\
 & - \int_{s_{\bar{u}}} (m_n^+ \cdot w_n^+ + m_n^- \cdot w_n^-) \, ds - \\
 & - \int_{s_{\bar{u}}} (m_{nt}^+ \cdot w_t^+ + m_{nt}^- \cdot w_t^-) \, ds
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & - \int_{F^+} m_{ji} \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji}) dF + \int_{F^+} q_i (-w_i + w_j) dF = \\ & = \int_{F^+} p \cdot w \cdot dF + \int_{s^+} q_n \cdot w \cdot ds - \int_{s^+} m_n \cdot w_n \cdot ds - \int_{s^+} m_{nt} \cdot w_t \cdot ds + \\ & + \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (q_n^+ + q_n^-) (w^+ + w^-) ds + \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (q_n^+ - q_n^-) (w^+ - w^-) ds - \\ & - \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (m_n^+ + m_n^-) (w_n^+ + w_n^-) ds - \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (m_n^+ - m_n^-) (w_n^+ - w_n^-) ds - \\ & - \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ + m_{nt}^-) (w_t^+ + w_t^-) ds - \int_{s_{ii}^-} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) (w_t^+ - w_t^-) ds \end{aligned}$$

(4. III)

Aus der Identität (4. II) wird:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{F}^+} \rho \cdot W^h \cdot dF &= - \int_{s^+} \bar{q}_n^P \cdot W^h \cdot ds + \int_{s^+} \bar{m}_n^P \cdot W_n^h \cdot ds + \int_{s^+} \bar{m}_{nt}^P \cdot W_t^h \cdot ds - \\
 &- \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{q}_n^+ + \bar{q}_n^-) (W^+ + \bar{W})^h \cdot ds - \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{q}_n^+ - \bar{q}_n^-) (W^+ - \bar{W})^h \cdot ds + \\
 &+ \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_n^+ + \bar{m}_n^-) (W_n^+ + \bar{W}_n)^h \cdot ds + \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_n^+ - \bar{m}_n^-) (W_n^+ - \bar{W}_n)^h \cdot ds + \\
 &+ \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_{nt}^+ + \bar{m}_{nt}^-) (W_t^+ + \bar{W}_t)^h \cdot ds + \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_{nt}^+ - \bar{m}_{nt}^-) (W_t^+ - \bar{W}_t)^h \cdot ds + \\
 &+ \int_{s^+} \bar{q}_n^h \cdot W^P \cdot ds - \int_{s^+} \bar{m}_n^h \cdot W_n^P \cdot ds - \int_{s^+} \bar{m}_{nt}^h \cdot W_t^P \cdot ds + \\
 &+ \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{q}_n^+ + \bar{q}_n^-) (W^+ + \bar{W})^P \cdot ds + \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{q}_n^+ - \bar{q}_n^-) (W^+ - \bar{W})^P \cdot ds - \\
 &- \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_n^+ + \bar{m}_n^-) (W_n^+ + \bar{W}_n)^P \cdot ds - \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_n^+ - \bar{m}_n^-) (W_n^+ - \bar{W}_n)^P \cdot ds - \\
 &- \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_{nt}^+ + \bar{m}_{nt}^-) (W_t^+ + \bar{W}_t)^P \cdot ds - \int_{s_{\bar{u}}} \frac{1}{2} (\bar{m}_{nt}^+ - \bar{m}_{nt}^-) (W_t^+ - \bar{W}_t)^P \cdot ds
 \end{aligned}$$

(4. IV)

Mit der Identität (4. III) ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Pi}_T &= \sum_{k=1}^K \bar{\Pi}_T^k - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (q_n^+ - q_n^-) (w^+ - w^-) ds + \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (q_n^+ + q_n^-) (w^+ + w^-) ds - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (m_n^+ - m_n^-) (w_t^+ - w_t^-) ds + \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (m_n^+ + m_n^-) (w_t^+ + w_t^-) ds - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) (w_t^+ - w_t^-) ds + \frac{1}{2} \int_{Sü} \frac{1}{2} (m_{nt}^+ + m_{nt}^-) (w_t^+ + w_t^-) ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

und mit (4. IV) schließlich:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Pi}_T &= \sum_{l=1}^K \bar{\Pi}_T^l + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{Sü} (q_n^+ \cdot \bar{w} + q_n^- \cdot \bar{w}) ds - \int_{Sü} (q_n^+ \cdot \bar{w}^+ + q_n^- \cdot \bar{w}^-) ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{Sü} (q_n^+ \cdot \bar{w} + q_n^- \cdot \bar{w}^+ + q_n^+ \cdot \bar{w}^- + q_n^- \cdot \bar{w}^+) ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{Sü} (m_n^+ \cdot \bar{w}_n + m_n^- \cdot \bar{w}_n) ds + \int_{Sü} (m_n^+ \cdot \bar{w}_n^+ + m_n^- \cdot \bar{w}_n^-) ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{Sü} (m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_n + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_n + m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_n^- + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_n^+) ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{Sü} (m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_t + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_t) ds + \int_{Sü} (m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_t^+ + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_t^-) ds + \\
 &+ - \int_{Sü} (m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_t + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_t^+ + m_{nt}^+ \cdot \bar{w}_t^- + m_{nt}^- \cdot \bar{w}_t^+) ds = \text{stat.}
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Integrale über Produkte partikularer Größen sind weggelassen.

In diskretisierter Form:

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}_{DT} &= \sum_{\ell=1}^K \hat{\pi}_{DT}^{\ell} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \bar{c}^T \cdot \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \cdot \bar{c} + \bar{c}^T \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \cdot \bar{c} + \right. \\
 &+ \bar{c}^T \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{Q} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{Q} \bar{N} \bar{P} + \\
 &+ \bar{c}^T \bar{W}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{Q} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{Q} \bar{N} \bar{P} - \bar{c}^T \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{P} - \bar{c}^T \bar{Q} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{P} + \\
 &+ \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \cdot \bar{c} + \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \cdot \bar{c} + \\
 &+ \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} - \\
 &- \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} - \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \\
 &+ \bar{c}^T \cdot \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \cdot \bar{c} + \bar{c}^T \cdot \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \cdot \bar{c} + \\
 &+ \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} - \\
 &- \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} - \bar{c}^T \bar{W} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{M} \bar{N} \bar{P} + \\
 &+ \bar{c}^T \cdot \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} + \bar{c}^T \cdot \bar{M} \bar{N}^T \cdot \bar{D} \bar{S} \cdot \bar{W} \bar{N} \bar{P} \left. \right\}_{Sü} = \text{stat.} \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Auf dem Übergangsrand ist  $\underline{DS}^+ = \underline{DS}^-$  zu setzen.

Die Ableitung nach dem Ansatzkonstantenvektor  $\bar{c}$  eines Bereiches  $+$  liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W} + \underline{W}^T \underline{DS} \cdot \underline{QN}) \cdot \underline{c} + \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WP} - \underline{\hat{W}}) \right]_{s_w}^+ + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN} + \underline{WN}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN}) \cdot \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WNP} - \underline{\hat{WN}}) \right]_{s_{wn}}^+ + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT} + \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT}) \cdot \underline{c} + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{WTP} - \underline{\hat{WT}}) \right]_{s_{wt}}^+ + \\
 & + \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{QN} + \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{W}) \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{QNP} - \underline{\hat{QN}}) \right]_{s_{qn}}^+ - \\
 & - \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{WN}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN} + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WN}) \cdot \underline{c} + \underline{WN}^T \underline{DS} \cdot (\underline{MNP} - \underline{\hat{MN}}) \right]_{s_{mn}}^+ - \\
 & - \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{WT}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT} + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WT}) \cdot \underline{c} + \underline{WT}^T \underline{DS} \cdot (\underline{MNTP} - \underline{\hat{MNT}}) \right]_{s_{mnt}}^+ + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ (\underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{W}} + \underline{\bar{W}}^T \underline{DS} \cdot \underline{QN}) \cdot \underline{c} - \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WP} + \underline{\bar{W}}^T \underline{DS} \cdot \underline{QNP} + \right. \\
 & \quad \left. + \underline{QN}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{WP}} + \underline{\bar{W}}^T \underline{DS} \cdot \underline{QNP} \right]_{s_{\bar{w}}} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ (\underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{WN}} + \underline{\bar{WN}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MN}) \cdot \underline{c} + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{WNP} - \underline{\bar{WN}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNP} + \right. \\
 & \quad \left. + \underline{MN}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{WNP}} + \underline{\bar{WN}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNP} \right]_{s_{\bar{wn}}} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ (\underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{WT}} + \underline{\bar{WT}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNT}) \cdot \underline{c} + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{WTP} - \underline{\bar{WT}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNTP} + \right. \\
 & \quad \left. + \underline{MNT}^T \underline{DS} \cdot \underline{\bar{WTP}} + \underline{\bar{WT}}^T \underline{DS} \cdot \underline{MNTP} \right]_{s_{\bar{wt}}} = 0
 \end{aligned}$$

wobei  $\underline{\bar{DS}} = \underline{DS}^T$

#### 4.3.3 Übergang zur Finiten-Element-Methode

Wird das Gebiet in viele einzelne Bereiche unterteilt, ist die in 4.3.2 und 4.3.1 gezeigte Methode ungünstig. In diesem Falle ist es besser, nach der Methode der finiten Elemente zu verfahren und die zu den einzelnen Bereichen gehörenden Ansatzparameter durch mechanische Randgrößen zu ersetzen. Auf diese Weise können Steifigkeitsmatrizen, Nachgiebigkeitsmatrizen oder auch kombinierte Steifigkeits-Nachgiebigkeitsmatrizen aufgestellt werden. Der Zusammenbau erfolgt dann wie bei der üblichen Finiten-Element-Methode. Der Vorteil eines 'Trefftz-Elementes' liegt darin, daß durch die partikularen Teillösungen Spannungsspitzen erfaßt werden können.

#### 4.4 Diskretisierte kombinierte Verfahren

##### 4.4.1 Kombination Trefftz-Verfahren und Fehlerquadratminimumverfahren (DTVS-F bzw. DTVN-F)

Die Kombination erfolgt in der in 2.2.2 beschriebenen Weise. Bei einzelnen Beispielrechnungen in Kapitel 5 werden zum Trefftz-Funktional Fehlerquadrate über  $s_w$ ,  $s_{w_n}$  oder  $s_{w_t}$  hinzugefügt. Die Gewichtsfunktionen werden hierbei gleich eins gesetzt.

##### 4.4.2 Kombination Trefftz-Verfahren und Kollokation (DTVS-K bzw. DTV-K)

Dieses Verfahren ist ebenfalls in 2.2.2 beschrieben. Bei den Beispielrechnungen in Kapitel 5 werden verschiedene Bedingungen an ausgewählten Punkten mittels Lagrangescher Multiplikatoren zum Funktional hinzugenommen. Die Zahl der Unbekannten erhöht sich dabei um die Zahl der gestellten Bedingungen.

## 5. Zahlenbeispiele

Zur Berechnung der Beispiele wurde ein Programm in FORTRAN geschrieben, das sämtliche gewünschten Schnittgrößen und Verschiebungsgrößen an beliebigen Stellen errechnet. Die Ergebnisse können durch ein am Institut für Baustatik von Herrn R. Rembold entwickeltes Plotterprogramm automatisch aufgezeichnet werden.

Die Rechenzeiten bewegen sich pro Beispiel (mit Ausgabe aller Schnitt- und Verschiebungsgrößen in einem Raster von  $11 * 11$  Punkten) zwischen 10 sec für einfache Probleme, 300 - 400 sec für kompliziertere Beispiele. Die Angabengelten für die CDC 6600. Die Rechenzeiten für die größeren Probleme lassen sich mit Sicherheit durch eine Optimierung des Programms wesentlich herunterdrücken.

Gewählt wurden die in Abschnitt 3.3 angegebenen Funktionen, die lediglich die Differentialgleichung erfüllen. Es wurden maximal 60 Funktionen angesetzt (in der Regel 20). Symmetrien müssen nicht beachtet werden, da die Freiwerte der unsymmetrischen Funktionen sich sehr klein ergeben. Es empfiehlt sich aber, erkennbare Symmetrien in der Funktionswahl zu berücksichtigen, um die Zahl der Unbekannten zu reduzieren.

Die mit diesen Funktionen erzielte Genauigkeit war bei allen gerechneten Beispielen zufriedenstellend, teilweise sehr gut. Sind höhere Genauigkeiten erwünscht oder sollen bestimmte Bereiche, z. B. Eckbereiche, exakter erfaßt werden, kann dies durch Wahl von speziellen Partikularfunktionen und zugehörigen homogenen Funktionen, die auch einen Teil der Randbedingungen erfüllen, geschehen. Solche Funktionen sind z. B. bei Gericke [79] für eine Vielzahl von Problemen angegeben. Eine derartige Spezialisierung wurde nicht verfolgt, da gezeigt werden sollte, daß mit einem einzigen Funktionensatz sehr viele Probleme behandelt werden können.

Gerechnet wurde nach dem in Abschnitt 4 beschriebenen diskretisierten, erweiterten Trefftz-Verfahren DTVS. Bei einigen Beispielen kamen auch die anderen Verfahren DRFV, DTVS-K und DBV zur

Anwendung. Es war nicht Ziel der Arbeit, diese Verfahren miteinander zu vergleichen, aus den wenigen Beispielen kann jedoch gefolgert werden, daß

- a) das DTVS integral gesehen am besten abschneidet,
- b) das DRFV nur bei ringsum vorliegenden geometrischen Randbedingungen gleich gute Ergebnisse wie das DTVS liefert,
- c) die mit DBV bezeichneten Verfahren, die aus der Kombination von DTVS und Termen aus DRFV konstruiert werden können, keine Verbesserung bringen,
- d) das DTVS-K gleich gute Ergebnisse liefert, wenn nicht zuviele Kollokationsbedingungen hinzugefügt werden. Es hat außerdem den Vorteil, daß es in allen Fällen auch die Verschiebungsfunktion und die Näherungslösung voll und nicht nur bis auf konstante oder lineare Funktionen angibt.

### 5.1 Übersicht über die gerechneten Beispiele

Um die Methode auszutesten und eine gewisse Erfahrung für ihre Anwendung zu sammeln, waren sehr viel mehr Beispielrechnungen als hier angegeben erforderlich. Versuchsrechnungen wurden durchgeführt mit

- unterschiedlicher Wahl von Ansatzfunktionen,
  - unterschiedlicher Zahl von Ansatzfunktionen,
  - unterschiedlicher Zahl von Kollokationspunkten
- und unterschiedlicher Dichte von Kollokationspunkten.

Dabei war nicht beabsichtigt, für alle Probleme gültige, diesbezügliche Annahmen herauszuarbeiten. Was die Zahl der erforderlichen Kollokationspunkte betrifft, kann festgestellt werden, daß diese beim DTVS höher anzusetzen ist als beim DRFV und daß sie insbesondere beim DTVS mit der Zahl der Funktionen und der Höhe der darin vorkommenden Reihenglieder sehr stark anwächst.

Mit den im folgenden angegebenen Beispielen werden entsprechend der Aufgabenstellung drei Ziele verfolgt:

1. a Es soll an einfachen Plattenbeispielen, für die exakte Lösungen vorliegen, die Methode getestet und ihre Genauigkeit festgestellt werden. Außerdem werden die modifizierten Verfahren und das Fehlerquadratminimumverfahren zum Vergleich angewendet. Dazu dienen die Beispiele
  1. 1 gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast
  1. 2 eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast
  1. 3 Kreisringplatte unter Gleichlast
  1. 4 gleichseitige Dreieckplatte ( $60^{\circ}$ ) unter Gleichlast
1. b An weiteren Beispielen soll gezeigt werden, daß auch bei unterschiedlichen Randbedingungen das Verfahren ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Dazu zählen die Beispiele
  1. 5 Quadratplatte mit zwei eingespannten, einem gelenkig gelagerten und einem freien Rand unter Gleichlast
  1. 6 Rechteckplatte mit drei eingespannten und einem freien Rand unter Gleichlast (langgestrecktes Gebiet)
  1. 7 Durchlaufplatten unter Gleichlast  
In den Beispielen 1.7 kommt die Mehrbereichsrechnung zur Anwendung.
2. Die zweite Beispielreihe umfaßt anspruchsvollere Probleme der Plattenstatik, für die das Verfahren besonders geeignet ist. Hierzu gehören:
  2. 1 eingespannte Quadratplatte unter Einzellast
  2. 2 Innenfeld einer Pilzdecke unter Gleichlast
  2. 3 Platte mit kreisrunder Aussparung unter Gleichlast
3. In der dritten Beispielreihe werden Plattenprobleme nach der vereinfachten Reissnerschen Theorie berechnet und mit den Ergebnissen nach der Kirchhoffschen Theorie verglichen. Als Beispiel wurden ausgewählt:
  3. 1 gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast
  3. 2 über Eck eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast
  3. 3 über Eck gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

- 3.4 eingespannte Rautenplatte ( $60^\circ$ ) unter Gleichlast
- 3.5 gelenkig gelagerte Rautenplatten ( $60^\circ, 30^\circ$ ) unter Gleichlast

Für die Beispiele 3.1 und 3.3 liegen Vergleichswerte nach verschärften Plattentheorien vor. Für die restlichen konnten nur für die Kirchhoff-Theorie Vergleichswerte in der Literatur gefunden werden.

### Bemerkungen

Bei den folgenden Beispielen werden zum Teil auch die Querkraftverläufe angegeben, da die Güte der Ergebnisse bei Näherungsverfahren hauptsächlich in der Wiedergabe der höheren Ableitungen bewiesen wird. Leider werden in der Literatur meist keine Schnittkraftverläufe, sondern nur Werte an ausgesuchten Punkten angegeben.

Die Fehlerangaben einer Größe  $g$  beziehen sich auf den absoluten maximalen Wert. Der Fehler  $\Delta g$  in Prozent ergibt sich damit zu

$$\Delta g [\%] = \frac{\bar{g} - g}{|g|_{\max}} \cdot 100 [\%]$$

wobei  $\bar{g}$  ... Istwert  
 $g$  ... Sollwert

### 5.2 Untersuchung der Plattenecken

Da die über Näherungsmethoden gewonnenen Schnittgrößen vornehmlich in Eckbereichen unsicher sind, soll mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen versucht werden, Aussagen zu treffen, insbesondere für die bei der Bemessung interessierende Momentenbeanspruchung. Die Ableitung ist ausführlich in der Arbeit von Rumpel [83] beschrieben. Hier werden nur die Ausgangsbeziehungen angegeben und die daraus ableitbaren Schlußfolgerungen in einer Tabelle zusammengefaßt. Ergänzt werden Beziehungen, die auf der Reissnerschen Theorie basieren. Vorausgesetzt wird jeweils, daß in den Eckpunkten keine eingepprägten Randmomente wirken. Diese Einschränkung ist jedoch nicht bindend.

Gleichgewichtsbedingungen im Eckbereich:

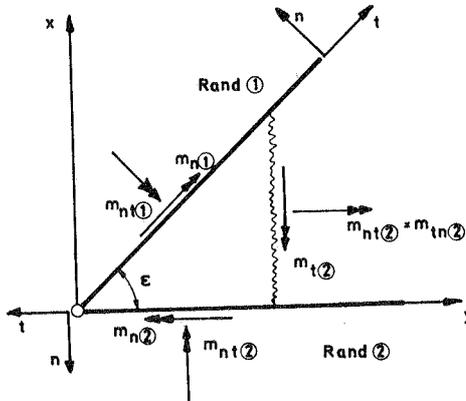


Bild 5.1: Momente im Eckbereich

$\Sigma M_x = 0$  liefert:

$$m_{nt1} \cdot \cos \varepsilon - m_{n1} \cdot \sin \varepsilon - m_{nt2} \cdot \cos \varepsilon + m_{t2} \cdot \sin \varepsilon = \sigma \quad (5.1)$$

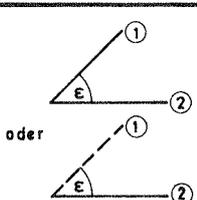
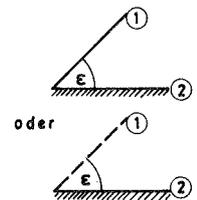
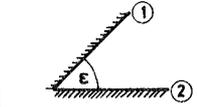
$\Sigma M_y = 0$  liefert:

$$m_{nt1} \cdot \sin \varepsilon + m_{n1} \cdot \cos \varepsilon + m_{nt2} \cdot \sin \varepsilon - m_{n2} \cdot \cos \varepsilon = \sigma \quad (5.2)$$

Querkräfte werden vernachlässigt, da ihre Beiträge von höherer Kleinheitsordnung sind.

Außerdem sind die konstitutiven Gleichungen (3.10) erforderlich.

**Tabelle 5.1 Aussagen über Biege- und Drillmomente im Eckbereich**

Ecktyp	Kirchhoff-Theorie	(vereinf.) Reissner-Theorie	Kirchhoff-Theorie	(vereinf.) Reissner-Theorie
	$\epsilon = 90^\circ$		$\epsilon \neq 90^\circ \neq 180^\circ$	
 <p>oder</p>	$m_n = 0$ $m_{nt} \neq 0$ möglich  → Einzelkraft	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$  → verteilte Querkräfte	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$  → verteilte Querkräfte	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$  → verteilte Querkräfte
 <p>oder</p>	$\mu \neq 0$ : $m_n = 0$ $m_{nt} = 0$  $\mu = 0$ : $m_{n(2)} \neq 0$ $m_{nt} = 0$	$m_{n(2)} \neq 0$ möglich $m_{nt} = 0$	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$m_{n(2)} = 0$ $m_{nt} = 0$
	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$m_t = 0$ $m_n \neq 0$ möglich $m_{nt} = 0$	$m_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$m_n \neq 0$ möglich $m_{nt} = 0$

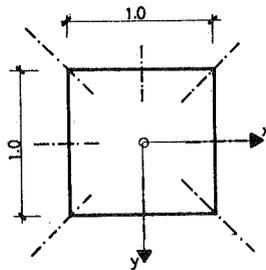
Randbedingungen	Kirchhoff - Theorie	(vereinf.) Reissner - Theorie
	$w = m_n = w_t = 0$	$w = m_n = m_{nt} = 0$
	$w = w_n = w_t = 0$	$w = w_n = m_{nt} = 0$
	$q_n = m_n = m_{nt} = 0$	$q_n = m_n = m_{nt} = 0$

### 5.3 Beispielreihe 1

a) Testbeispiele, für die exakte Lösungen vorliegen.

#### Beispiel 1.1:

Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast  $p$  (Kirchhoff-Theorie)



$$p = 1.0$$

$$\mu = 0.3$$

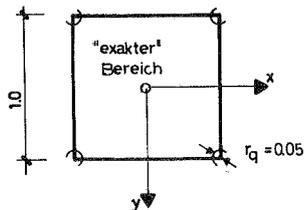
$$h = 0.1$$

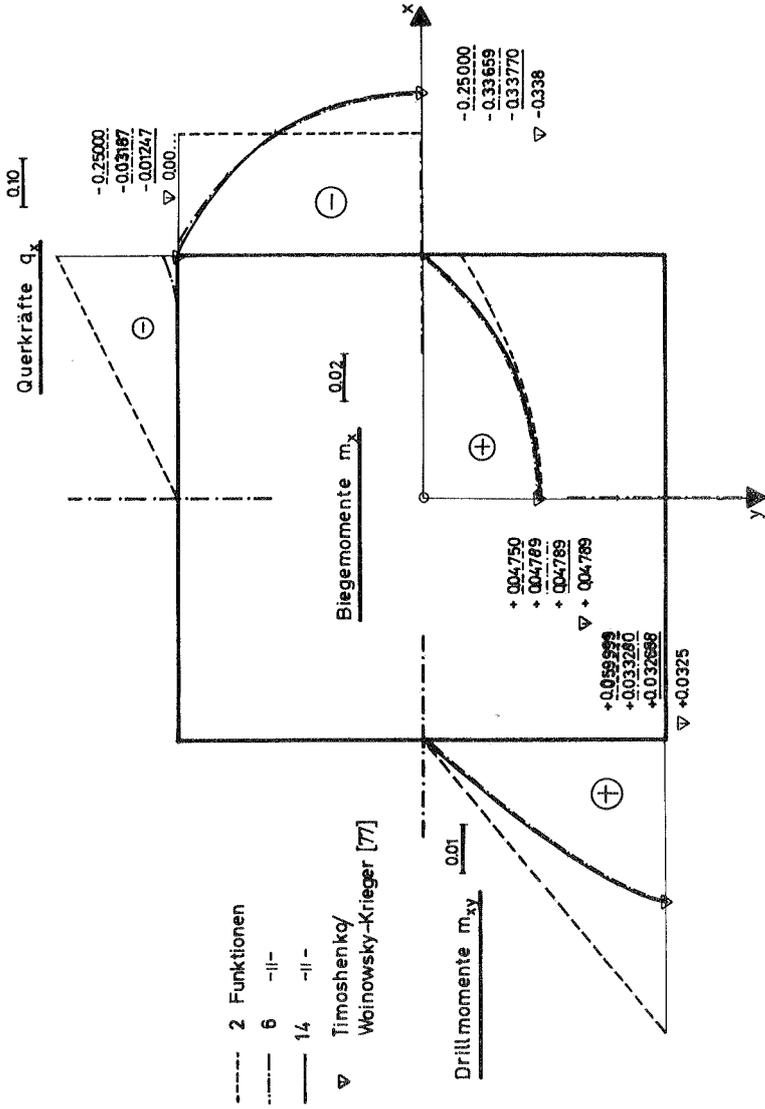
Randbedingung:

$$w = m_n = w_t = 0$$

An diesem Beispiel soll für eine unterschiedliche Zahl von Funktionen die Konvergenz der Schnittgrößen beim DTVS gezeigt werden.

Bei Mitnahme von 14 Funktionen sind die Ergebnisse praktisch exakt. Lediglich in einem kleinen Eckbereich mit Radius  $r_q = 0,05 \cdot a$  sind die Querkräfte unsicher. Der Fehler beträgt hier  $< 4\%$ . (Bild 5.2)





--- 2 Funktionen

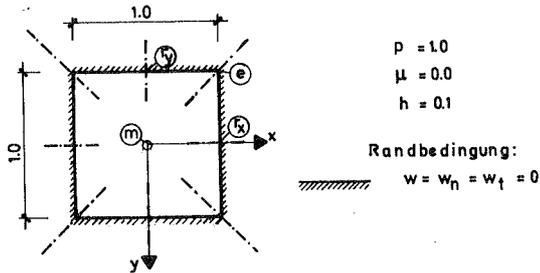
-.-.- 6

— 14

▽ Timoshenko/  
Woinowsky-Krieger [77]

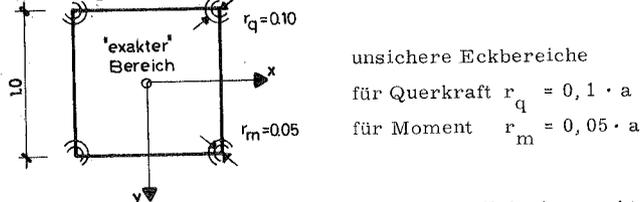
Bild 5.2 : Konvergenz der Schnittgrößen beim disk. Trefftz Verfahren, symm. (DTVS)

Beispiel 1. 2: Eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast p



Bei diesem Beispiel kommen die verschiedenen Verfahren (DTVS, DTVN, DBV, DRFV, DTVS-K) zur Anwendung, siehe Tabelle 5.2. In Tabelle 5.3 sind Ergebnisse für unterschiedliche Anzahl von Kollokationspunkten enthalten. Tabelle 5.4 gibt Ergebnisse bei veränderter Lage des Koordinatenursprungs. In Bild 5.3 sind die Schnittgrößen für eine Berechnung nach dem DTVS mit 8 Unbekannten aufgetragen.

In der Näherungslösung (8 Unbekannte) bleibt ein Fehler für die Querkraft von  $\approx 20\%$ , der auf einen kleinen Bereich beschränkt ist. Der Fehler in den Momenten beträgt  $< 3\%$  in den Ecken. Im restlichen Bereich sind die Ergebnisse praktisch exakt.



Durch Steigerung der Zahl der Unbekannten und der Kollokationspunkte können die Eckfehler noch verringert werden.

Vergleich mit der Finiten-Element-Methode [84]

Für gleichwertige Ergebnisse sind pro Plattenviertel mindestens 16 geometrisch verträgliche Elemente erforderlich. Das entspricht  $9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 39$  Unbekannten. Die Querkräfte weisen dabei auch im Bereich und in Randmitte Fehler bis 25% auf, die durch Verbesserungsmaßnahmen auf 10% gedrückt werden können.

Tabelle 5.2 Vergleich verschiedener Verfahren

Verfahren, 8 Unbekannte	$m_{x_m}$	$m_{x_e}$	$m_{x_{Tx}}$	$m_{x_{Ty}}$	$q_{x_{Tx}}$	$q_{x_e}$	$m_{x_{xy}}$
Reihen, Czerny [85]-Exakt	$+0.0176$	$0.00...$	$-0.0515$	$0.00...$	$-0.446...$	$0.00...$	$0.00...$
DTVS	$+0.01762$	$+0.00186$	$-0.05142$	$+0.00004$	$-0.444173$	$+0.009154$	$+0.000773$
DTVN	$+0.01762$	$+0.00043$	$-0.05100$	$+0.00009$	$-0.44210$	$+0.004468$	$+0.000019$
DRFV	$+0.01762$	$+0.00193$	$-0.05146$	$+0.00005$	$-0.44210$	$+0.009375$	$+0.000061$
DBV (DTVS + $\sum w_i^2$ )	$+0.01762$	$+0.00203$	$-0.05144$	$+0.00001$	$-0.44250$	$+0.00027$	$+0.000096$
DTVS - F	$+0.01762$	$+0.00203$	$-0.05144$	$+0.00001$	$-0.44249$	$+0.00005$	$+0.000085$
DTVS - K ( $w_e=0$ )	$+0.01762$	$+0.00195$	$-0.05145$	$+0.00003$	$-0.44226$	$+0.009356$	$0.00...$

Tabelle 5.3 Variation der Zahl der Kollokationspunkte

Verfahren, 8 Unbekannte	$m_{x_m}$	$m_{x_e}$	$m_{x_{Tx}}$	$m_{x_{Ty}}$	$q_{x_{Tx}}$	$q_{x_e}$	$m_{x_{xy}}$
DTVS, 15 Punkte	$+0.01645$	$+0.00899$	$-0.06665$	$-0.00295$	$-0.60680$	$+1.72660$	$+0.01365$
DTVS, 112 Punkte	$+0.01762$	$+0.00186$	$-0.05143$	$-0.00004$	$-0.44173$	$+0.009454$	$+0.000073$
DTVS, 2048 Punkte	$+0.01762$	$+0.00145$	$-0.05119$	$-0.00005$	$-0.43779$	$+0.006879$	$+0.000058$

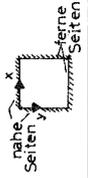


Tabelle 5.4 Änderung des Koordinatenursprungs

Verfahren, 40 Unbekannte	$m_{x_m}$	$m_{x_e}$	$m_{x_{Tx}}$	$m_{x_{Ty}}$	$q_{x_{Tx}}$	$q_{x_e}$	$m_{x_{xy}}$
DTVS Werte auf naher Seite	$+0.01761$	$+0.00165$	$-0.05219$	$-0.00006$	$+0.48257$	$-0.10498$	$+0.00317$
DTVS Werte auf ferner Seite	$+0.01761$	$+0.00440$	$-0.05137$	$+0.00051$	$-0.44575$	$+0.15456$	$+0.00523$

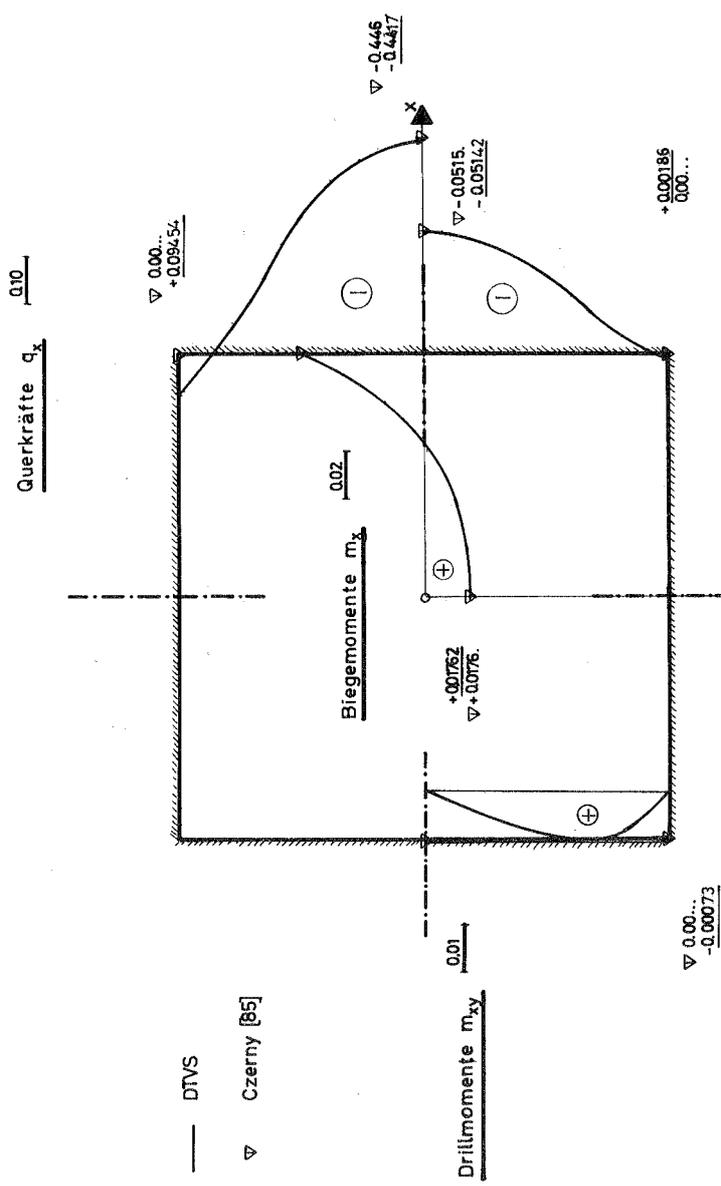
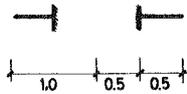
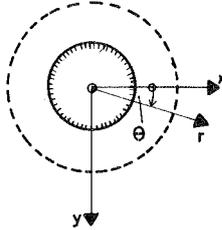


Bild 5.3 Eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast

Beispiel 1.3:

Eingespannte Kreisringplatte unter Gleichlast p



$$\mu = 0,0$$

$$p = 1$$

$$\text{Randbedingung innen: } w = w_n = w_t = 0$$

$$\text{Randbedingung außen: } q_n = m_n = m_{nt} = 0$$

Dieses Beispiel wurde gewählt, um die Beziehungen für den Innenrand zu testen. Hier ist der vollständige Funktionensatz, wie in Abschnitt 3.3 angegeben, zu wählen. Das Beispiel zeigt außerdem die Anwendbarkeit der Methode auf ein gewöhnliches Differentialgleichungsproblem. Es kann dabei eine beliebige Anzahl von Funktionen verwendet werden; die Freiwerte der nicht zum gewöhnlichen Problem gehörenden Funktionen werden praktisch zu Null. Die errechneten Werte sind exakt (Bild 5.4 ).

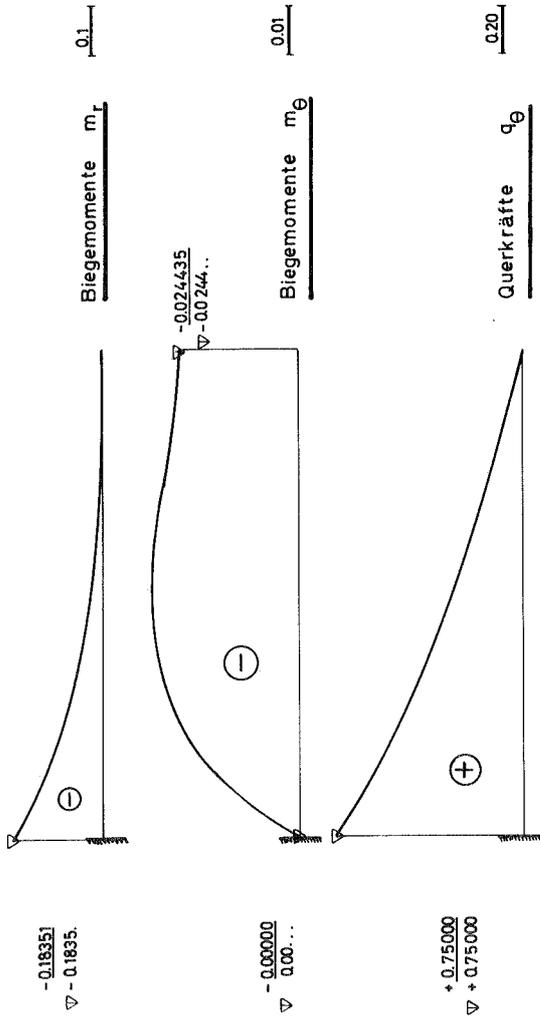
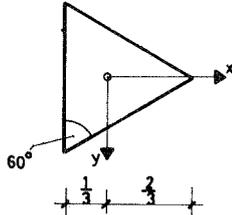


Bild 5.4 : Kreisringplatte unter Gleichlast

Beispiel 1.4:

Gleichseitige Dreieckplatte unter Gleichlast  $p$



$$\mu = 0,3$$

$$p = 1$$

$$\text{Randbedingung } w = m_n = w_t = 0$$

Für diese Platte liegt ebenfalls eine exakte Lösung vor (Girkmann, K. [86 ], S. 236). Bild 5.5 zeigt die Übereinstimmung der Querkraft und der Biegemomente, die bis auf kleine Eckfehler sehr gut ist. Gerechnet wurde mit 10 Unbekannten.

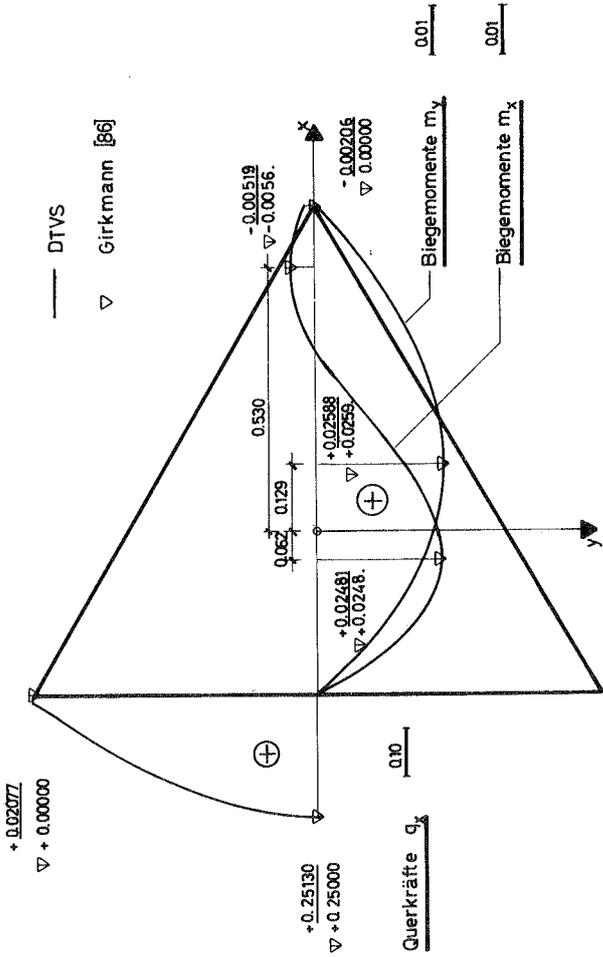
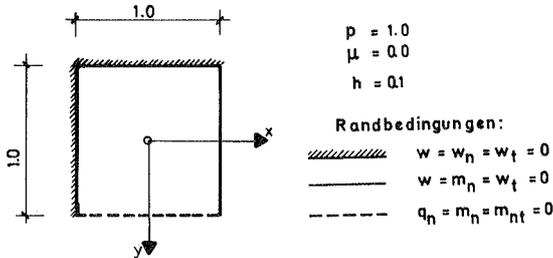


Bild 5.5 : Gelenkig gelagerte gleichseitige Dreieckplatte unter Gleichlast

b) Weitere Testbeispiele

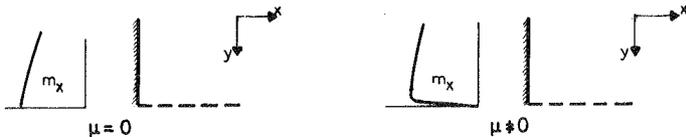
Beispiel 1.5:

Quadratplatte mit zwei eingespannten, einem gelenkig gelagerten und einem freien Rand unter Gleichlast  $p$



Das Beispiel wurde nach dem DTVS-K und dem DRFV berechnet, wobei bei dem DTVS-K an den 4 Eckpunkten jeweils  $w = 0$  gefordert wurde (44 bzw. 40 Unbekannte). Bild 5.6 zeigt, daß bei unterschiedlichen Randbedingungen das DRFV schlechte Ergebnisse bringt. Das DTVS-K liefert richtige Werte.

Betrachtung des Eckpunktes, an dem der eingespannte und der freie Rand zusammenlaufen.



Aus Gleichgewichtsbetrachtungen an der abgeschnittenen Ecke ergibt sich nach Rumpel [83] für  $\epsilon = \frac{\pi}{2}$  die Gleichung  $\mu m_x = 0$ , d. h. daß für  $\mu \neq 0$   $m_x$  in der Ecke zu Null werden muß, wohingegen für  $\mu = 0$   $m_x$  einen Wert ungleich Null annehmen kann. Diese Ergebnisse werden durch die Ausführungen von Woinowsky/Krieger [87] und Koiter [88] bestätigt, die Untersuchungen an einer unendlich ausgedehnten keilförmigen Platte durchgeführt haben.

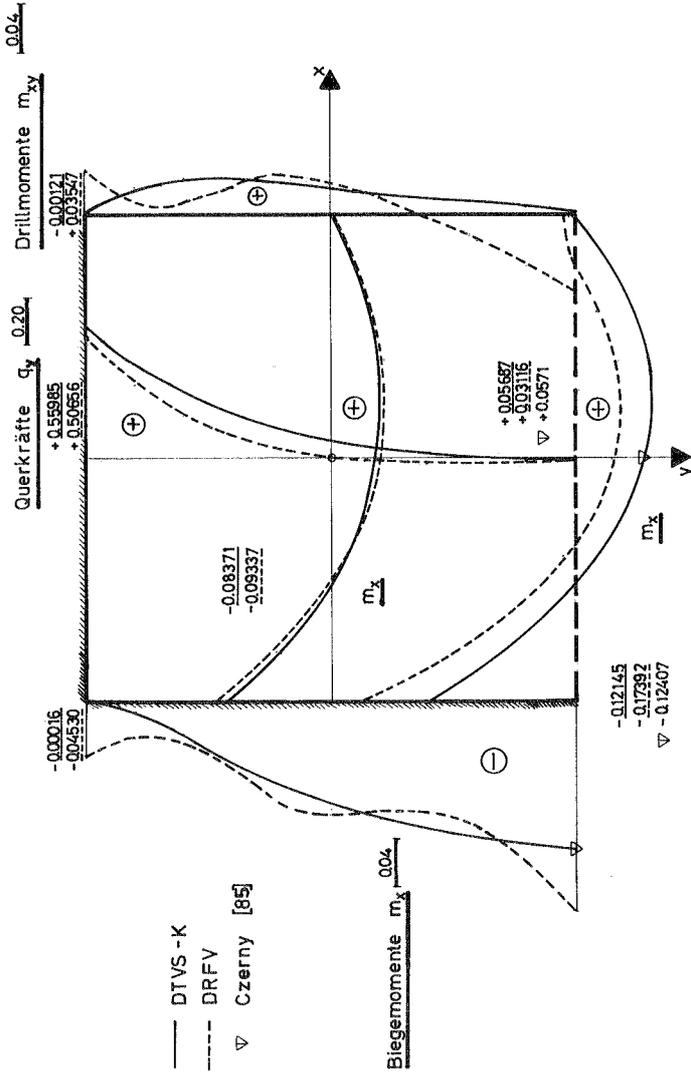
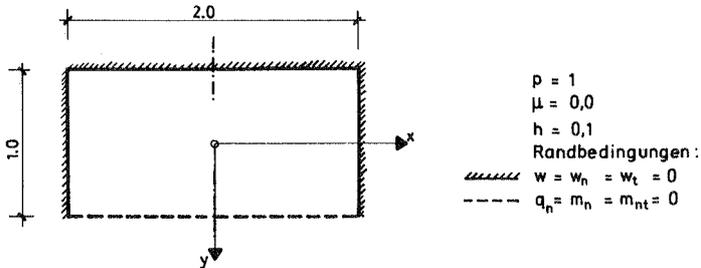


Bild 5.6 : Quadratplatte mit unterschiedlichen Randbedingungen unter Gleichlast

Beispiel 1.6

Rechteckplatte mit drei eingespannten und einem freien Rand unter Gleichlast (langgestrecktes Gebiet)



Hier soll gezeigt werden, daß auch bei etwas langgestreckten Plattentypen die Methode noch gute Ergebnisse liefert. Gerechnet wurde nach dem DTVS und dem DTVS-K (4 Bedingungen  $w = 0$  in den Ecken) mit 20 Unbekannten, Bild 5.7 gibt den Verlauf der Randquerkräfte wieder. Längs der eingespannten Ränder ist die Auflagerkraft gleich der hier errechneten Querkraft. Eine grobe graphische Integration längs dieser Ränder beweist, daß die Belastung im Gleichgewicht mit den Lagerreaktionen steht. Die Integration längs des freien Randes ergibt näherungsweise Null, da sich die Randfehler insgesamt ausgleichen.

Grobe Gleichgewichtskontrolle:

$$\oint q_n \cdot ds \approx 2 \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot (0,83 + 0,43) - 1 \cdot 1 \cdot 0,43 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1,6 + 0,4) - 0,4 \cdot 1 \right]$$

$$\oint q_n \cdot ds \approx 2,02$$

$$\oint q_n \cdot ds \stackrel{!}{=} 2,0 \quad \checkmark$$

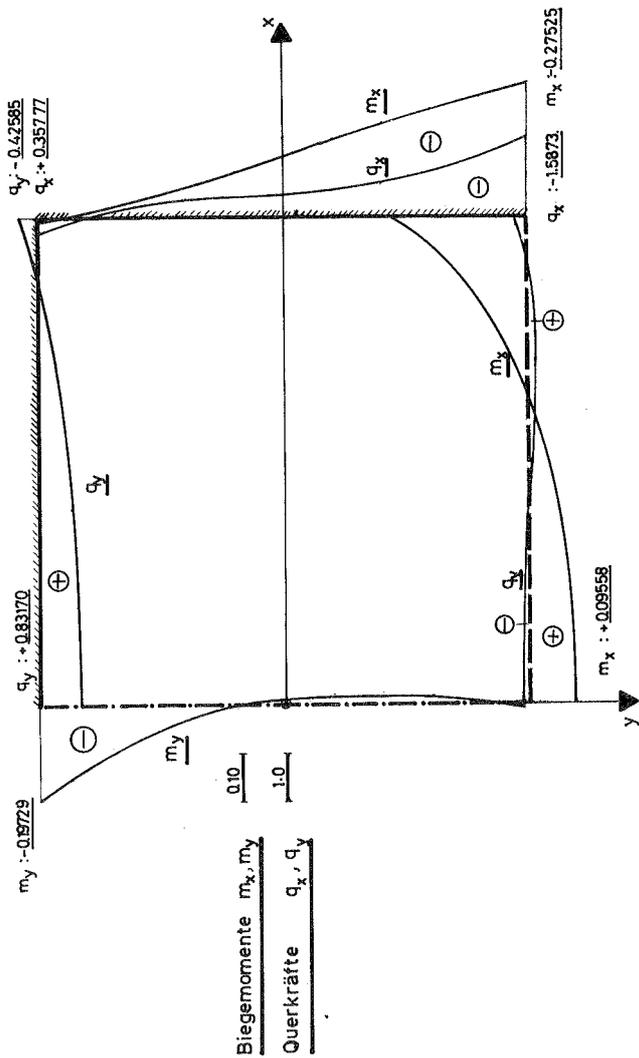


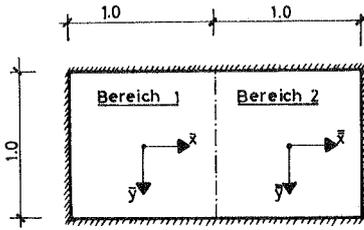
Bild 5.7 : Dreiseitig eingespannte Rechteckplatte unter Gleichlast

Beispiel 1.7: Anwendung der Mehrbereichsberechnung

Bei diesen Beispielen wird das Plattengebiet in große Teilbereiche aufgeteilt und für diese jeweils getrennte Ansätze gemacht. Es soll mit diesen Beispielen nur demonstriert werden, daß die Methode auch bei bereichsweiser Formulierung funktioniert. Für eine allgemeine Anwendung müßte sie im Sinne der Methode der finiten Elemente weiterentwickelt werden, d. h. zum Beispiel daß die Ansatzkonstanten durch mechanische Größen ersetzt werden. Dieses Ziel wurde hier nicht verfolgt.

In den Bildern 5.8 bis 5.9 sind einige Beispiele von Durchlaufplatten aufgetragen. Für das Beispiel zwei (Bild 5.9) mußten zusätzlich die Gleichungen für den unterstützten Übergangsrand gebildet werden. Diese lassen sich durch Addition der Terme für den Übergangsrand und dem Term  $[-]_{sw}$  konstruieren. Siehe Tabelle 4.1 in Abschnitt 4.

Die Zahl der Funktionen betrug  $2 * 20$  beim ersten Beispiel (Bild 5.8 ) und  $2 * 30$  beim zweiten Beispiel (Bild 5.9 ).



$p = 1,0$

$\mu = 0,0$

$h = 0,1$

Randbedingung:

$w = w_n = w_t = 0$

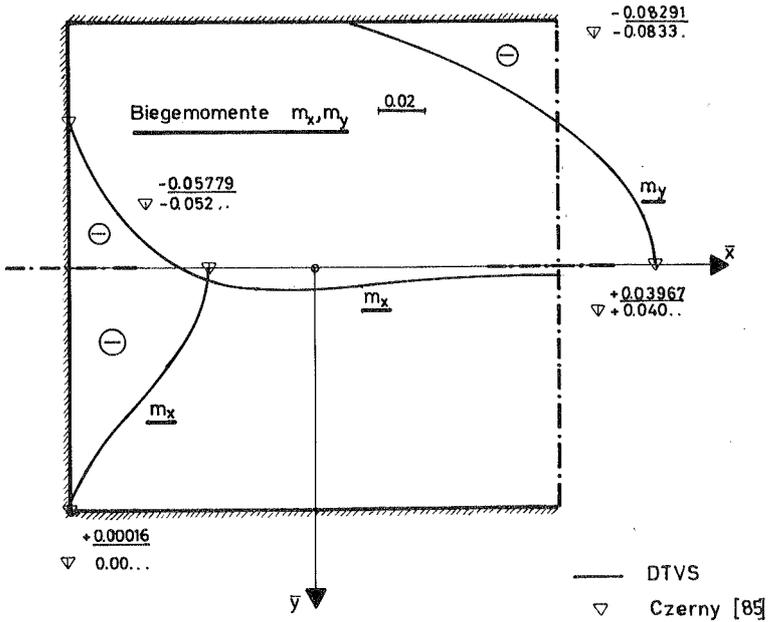
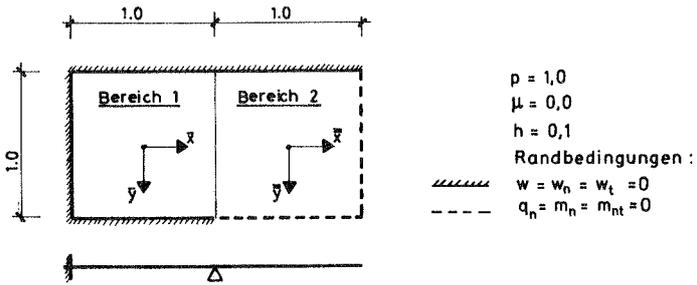
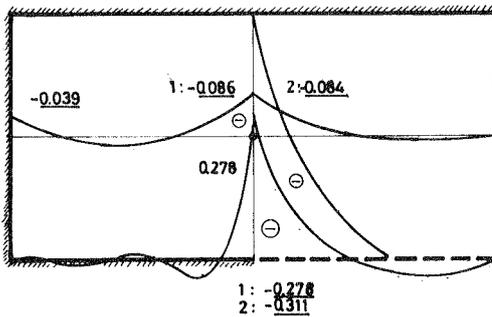


Bild 5.8 :Eingespannte Rechteckplatte unter Gleichlast ;  
zwei Bereiche



Biegemomente  $m_x, m_x$   $\overline{0,10}$



Biegemomente  $m_y, m_y$   $\overline{0,10}$

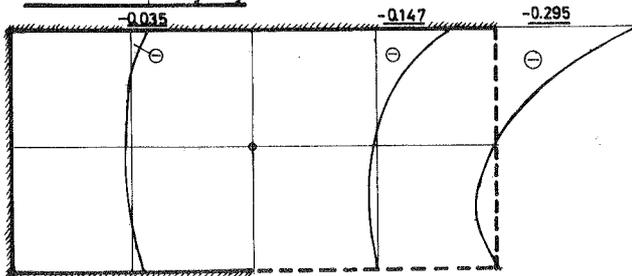
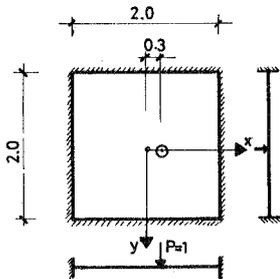


Bild 59 : Rechteckplatte mit unterschiedlichen Randbedingungen unter Gleichlast: zwei Bereiche

#### 5.4 Beispielreihe 2

##### Beispiel 2.1:

Eingespannte Quadratplatte unter exzentrischer Einzellast



$$P = 1$$

$$\mu = 0$$

$$h = 0,1$$

Randbedingung :

$$W = W_n = W_t = 0$$

Für die Einzellast wird ebenfalls die Lösung für die unendlich ausgedehnte Platte (siehe Abschnitt 3.3) als Partikularlösung verwendet. Die Einzellast kann irgendwo im inneren Bereich stehen. Für den äußeren Bereich ist es sinnvoll, die Partikularlösung in der von Lebender [19] vorgeschlagenen Weise zu modifizieren. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wird die Last wie bei Lebender [19] einachsrig exzentrisch aufgestellt (Bild 5.10, 20 Unbekannte, DTVS).

Bemerkung:

In der Praxis treten keine Punktlasten, sondern konzentrierte Flächenlasten auf. Diese können auf verschiedene Weise erfaßt werden:

- Durch Auswertung der von Kazuyosi Ono [81] angegebenen Formeln für Teilflächenbelastung der unendlich ausgedehnten Platte.
- Durch Wahl der partikularen Lösung der gelenkig gelagerten Platte unter konzentrierter Belastung. Siehe Girkmann [86], S. 243.
- Näherungsweise nach dem von Nadai in [78], S. 64, gemachten Vorschlag. Nach Nadai sind bei konzentrierten Flächenlasten die Schnittgrößen näherungsweise gleich denen der entsprechenden Punktlast. Eine Korrektur ist nur erforderlich im Belastungs-

bereich. Die Schnittgrößen können demnach auch für konzentrierte Flächenlasten über statisch gleichwertige Punktlasten gewonnen werden.

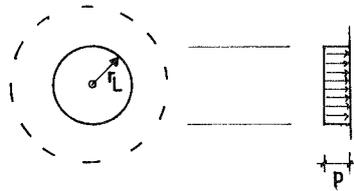
Die Änderungen der Momente im Mittelpunkt der Belastungsfläche gibt er in Abhängigkeit der Lastverteilung an, z. B.

$$m = m_{r_L} + m_o$$

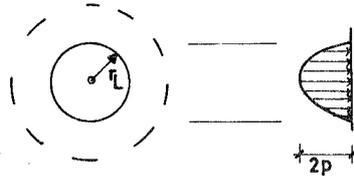
wobei  $m_{r_L}$  = Moment aus äquivalenter Punktlast  $P$  im Abstand  $r_L$  ;  
 $r_L$  ist der Radius der Belastungsfläche

$$P = \frac{p}{\pi \cdot r_L^2}$$

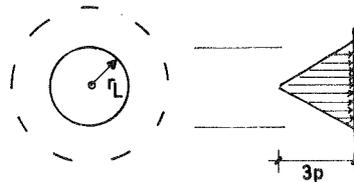
und  $m_o = 0,065 P$



$m_o = 0,094 P$



$m_o = 0,103 P$



Die zuletzt genannte Möglichkeit ist allgemein anwendbar und für die Praxis völlig ausreichend.

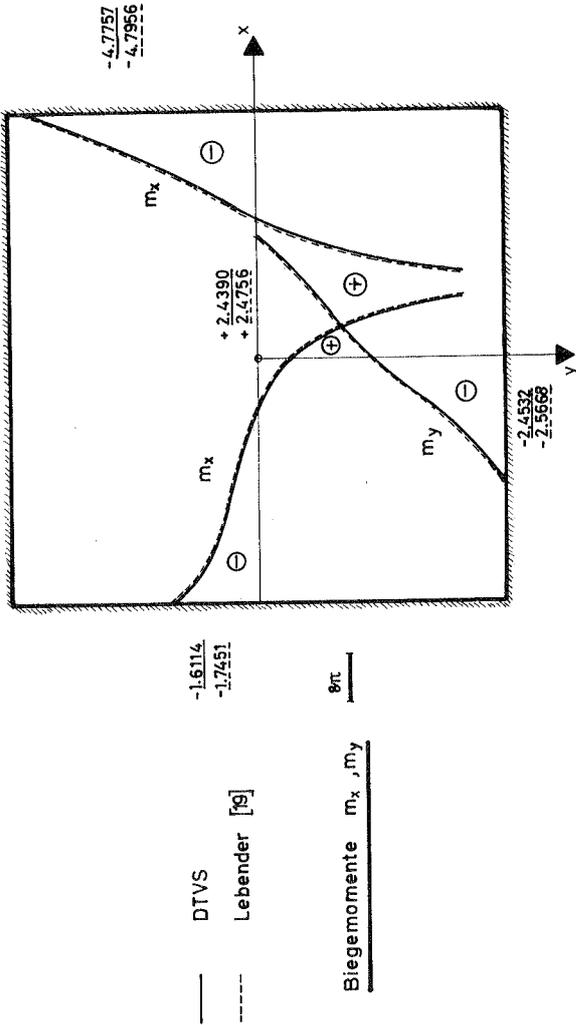


Bild 5.10 : Eingespannte Quadratplatte unter exzentrischer Einzellast

Beispiel 2.2:

Innenfeld einer Pilzdecke mit quadratischem Stützenraster unter Gleichlast

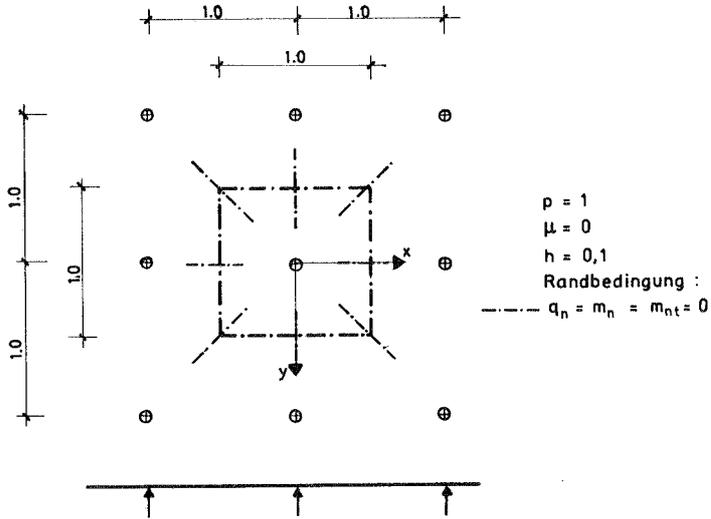


Bild 5.11 zeigt die Ergebnisse nach dem DTVS mit 10 Unbekannten im Vergleich zu anderen Lösungen. Zu bemerken ist, daß Riehle/Stein [84] von einer Stütze endlicher Querschnittsfläche ausgehen.

Eine endliche Stützenfläche kann auch bei diesem Verfahren berücksichtigt werden:

- a) wenn die Funktionen für den Innenrand mitgenommen werden und an diesem zusätzliche Randbedingungen gefordert werden.
- b) näherungsweise, wenn der Spannungszustand im Nahbereich der - kreisrunden - Stütze rotationssymmetrisch angenommen wird.

Es genügt dann, aus den Funktionen für den Innenrand die rotations-symmetrischen hinzuzufügen und die zwei zugehörigen Konstanten aus der Bedingung  $w = w, r = 0$  längs des Stützen-randes  $r = r_s$  direkt zu bestimmen.

Nach Versuchsergebnissen, die von Dieterle in [69] angegeben werden, berühren sich Platte und Stütze nur entlang des Stützenumfanges, d. h. die Stützenkraft wird in Form einer Linienlast entlang des Stützenum-fangs auf die Platte übertragen. Auch diese Art der Lasteintragung kann berücksichtigt werden, wenn als Partikularlösung z. B. die Lö-sung für die mit einer gleichmäßig verteilten Linienbelastung längs eines Kreises beanspruchte Kreisplatte aus Girkmann [86], S. 246, verwendet wird.

Gleichgewichtskontrolle für das gerechnete Beispiel:

Zu einer groben Gleichgewichtskontrolle darf der Spannungszustand im Bereich der Stütze als rotations-symmetrisch angenommen werden. Im Abstand  $r_s = 0,1$  ist  $q_n = -1,541$ . Damit gilt:

$$-\int_0^{2\pi} r_L \cdot q_n \cdot d\theta \stackrel{!}{=} 1 \cdot 1^2 = 1,0$$

$$-\int_0^{2\pi} r_L \cdot q_n \cdot d\theta = 2\pi \cdot 0,1 \cdot 1,541 = 0,97 \cong 1,0$$

d. h.  $\Sigma V$  ist erfüllt.

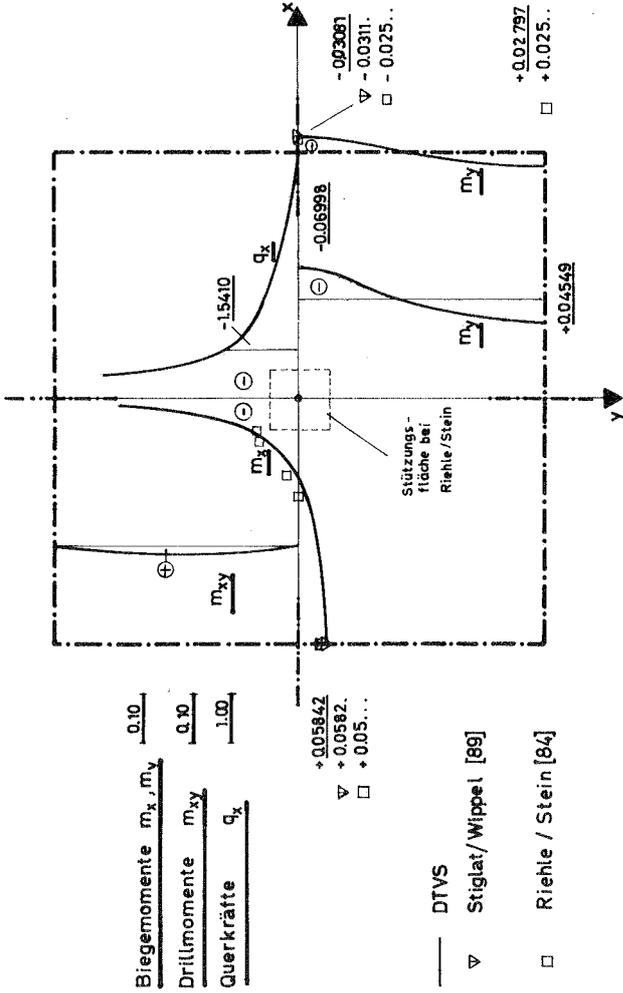
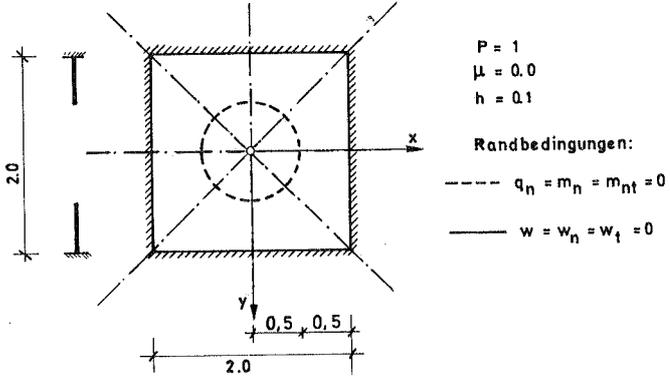


Bild 5.11 : Innenfeld einer Pilzdecke mit quadr. Stützenraster; Gleichlast

Beispiel 2.3:

Platte mit kreisrunder Aussparung unter Gleichlast



Besonders geeignet ist das Verfahren für Platten mit Aussparungen. In Bild 5.12 sind die Biegemomente nach der Kirchhoff-Theorie aufgetragen. Entsprechend Beispiel 1.3 müssen hier die Funktionen mitgenommen werden, die es erlauben, auch die Innenrandbedingungen zu befriedigen (siehe Abschnitt 3.3). Die Berechnung erfolgte nach dem DTVS (20 Unbekannte).

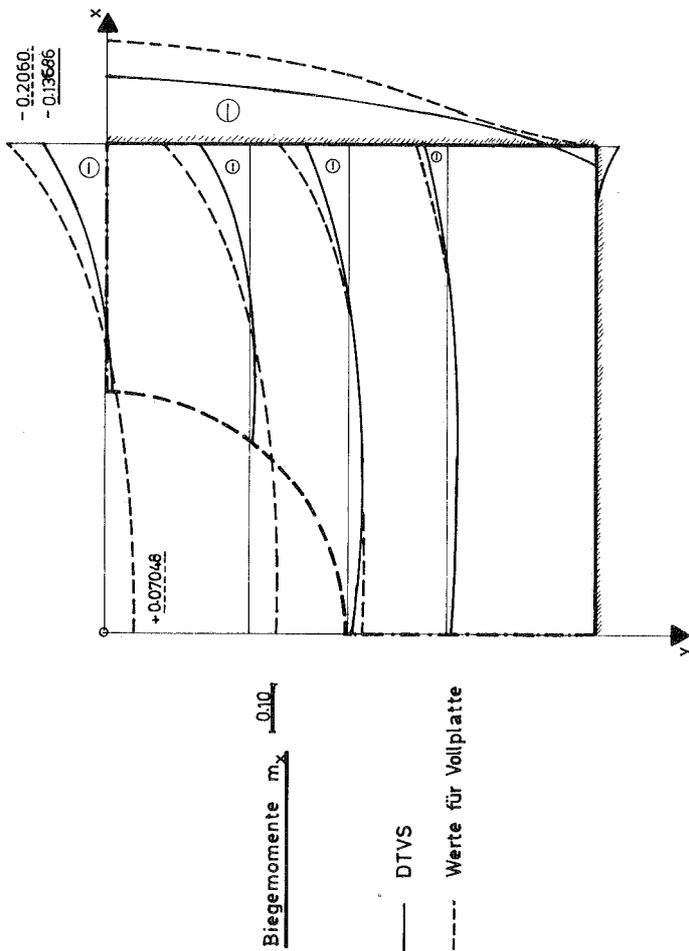
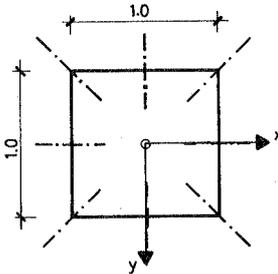


Bild 5.12 : Eingespannte Quadratplatte mit kreisrunder Öffnung unter Gleichlast

### 5.5 Beispielreihe 3

Beispiel 3.1: Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast  $p$



$p = 1$   
 $\mu = 0,3$                        $\mu = 0,3$                        $\mu = 0,2$   
 $h = 0,05$                        $h = 0,2$                        $h = 0,1$   
Randbedingungen:  
—  $w = m_n = m_{nt} = 0$   
bzw:  $w = m_n = w_t = 0$

An diesem einfachen Beispiel soll zunächst im Vergleich mit exakten Lösungen aus der Literatur gezeigt werden, daß die Methode (DTVS) auch auf die vereinfachte Reissnersche Plattentheorie angewendet werden kann.

Gewählt wurden unter Beachtung der Symmetrien 14 Funktionen für den homogenen Anteil von  $w$  und 7 Funktionen zur Näherung von  $\alpha$ . Als partikularer Anteil von  $w$  wurde wiederum die Lösung für die unendlich ausgedehnte Platte angesetzt. Die Schnitt- und Verschiebungsgrößen sind durch die Größen  $w$  und  $\alpha$  sowie ihren Ableitungen gemäß (3.24) gegeben.

Hauptsächlich interessiert hierbei der Verlauf der Querkraft. Bild 5.13 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung des Querkraftverlaufes - auch in der Ecke - mit den Werten von Kromm [57]. Kromm hat die Aufgabe mit Reihen für den Sonderfall seiner Theorie (Ebenbleiben der Querschnitte), die mit der hier angewandten übereinstimmt, gelöst. Die Werte von Girkmann [86] sind nach der Reissnerschen Theorie errechnet. Als Belastung wurde nur das erste Reihenglied der Fourierreihe für die Gleichlast angesetzt. Die Eckquerkräfte werden aus diesen beiden Gründen stärker von den hier errechneten Werten abweichen. Entsprechendes gilt für die Lösung von Panc [49].

Eine grobe Kontrolle der Randquerkräfte liefert:

$$-\oint q_n \cdot ds \stackrel{!}{=} 4 \cdot 1^2 = 4,0 \quad (1 \text{ ist die aufgebrauchte Belastung})$$

$$-\oint q_n \cdot ds = -4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 0,42 - \frac{1}{2} \cdot 1,43 \cdot 0,03 \right) = 4,04 \approx 4,0$$

d. h.  $\Sigma V$  ist erfüllt.

Bild 5.16 stellt für  $\mu = 0,2$  und  $h = 0,1$  den Verlauf der Schnittgrößen dar. Der Vergleich mit den Ergebnissen nach Roth (Differenzenrechnung) [6] zeigt ebenfalls eine gute Übereinstimmung.

Bild 5.17 zeigt für  $\mu = 0,3$ ,  $h = 0,2$  den Verlauf der Schnittgrößen nach der vereinfachten Reissner-Theorie und nach der Kirchhoff-Theorie; einmal für die Randbedingung  $w = m_n = m_{nt} = 0$  und einmal für  $w = m_n = w_t = 0$ . Hierbei ist ersichtlich, daß für die Randbedingung  $w = m_n = w_t = 0$  die Ergebnisse nach beiden Theorien weniger verschieden sind. Dies ist plausibel, da durch diese Randbedingung der Einfluß der Schubverformungen im Randbereich vermindert wird. Die bei der Reissner-Theorie auftretenden Randmomente  $m_t$  sind auf den Einfluß der Schubverformungen zurückzuführen. Es ist festzustellen, daß die Randbedingung  $w = m_n = m_{nt} = 0$  bei Verwendung der Kirchhoff-Theorie im Randbereich zu Störungen führt (oszillierender Verlauf).

#### Ergänzung

Im Oktober 1974 erschien der Aufsatz von Deshmukh/Archer [94]. Die Verfasser behandeln ebenfalls das Beispiel 3.1 für  $\mu = 0,3$  und  $h = 0,05$ . Zur Berechnung wird die Methode der gewichteten Reste herangezogen. Es werden Ansatzfunktionen gewählt, die die Reissnersche Differentialgleichung im Gebiet erfüllen, nicht aber die Randbedingungen. Als Wichtungsfunktionen werden trigonometrische Funktionen verwendet. In Bild 5.13 ist der Verlauf der Querkraft nach dieser Methode eingetragen. Zur Berechnung wurden 76 Funktionen (76 Unbekannte) benötigt. Das DTVS erforderte lediglich 21 Funktionen. Aus Bild 5.13 geht außerdem hervor, daß der Verlauf der Querkraft nach dem DTVS besser ist.

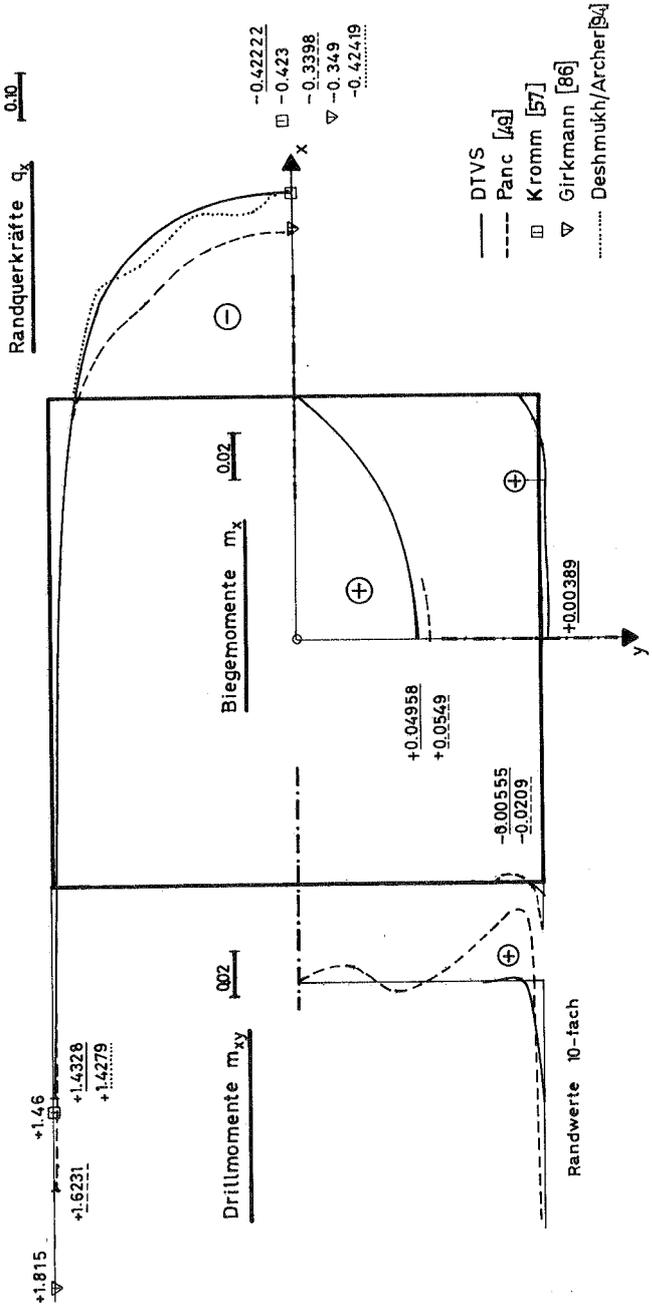


Bild 5.13 : Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

Bild 5.14  
Perspektivisches Bild der  
Querkräfte  $q_x$  im  
oberen rechten Viertel  $\overline{0.20}$

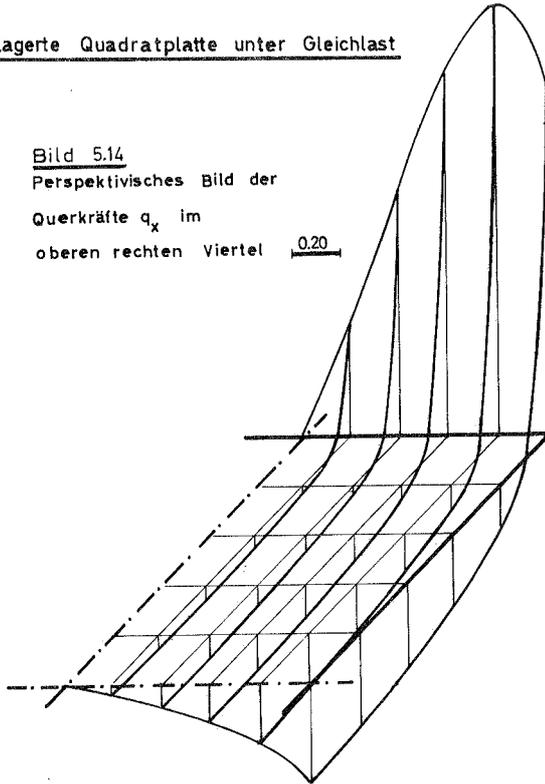
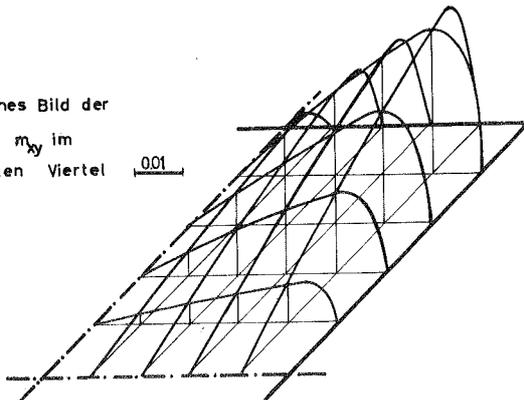


Bild 5.15  
Perspektivisches Bild der  
Drillmomente  $m_{xy}$  im  
oberen rechten Viertel  $\overline{0.01}$



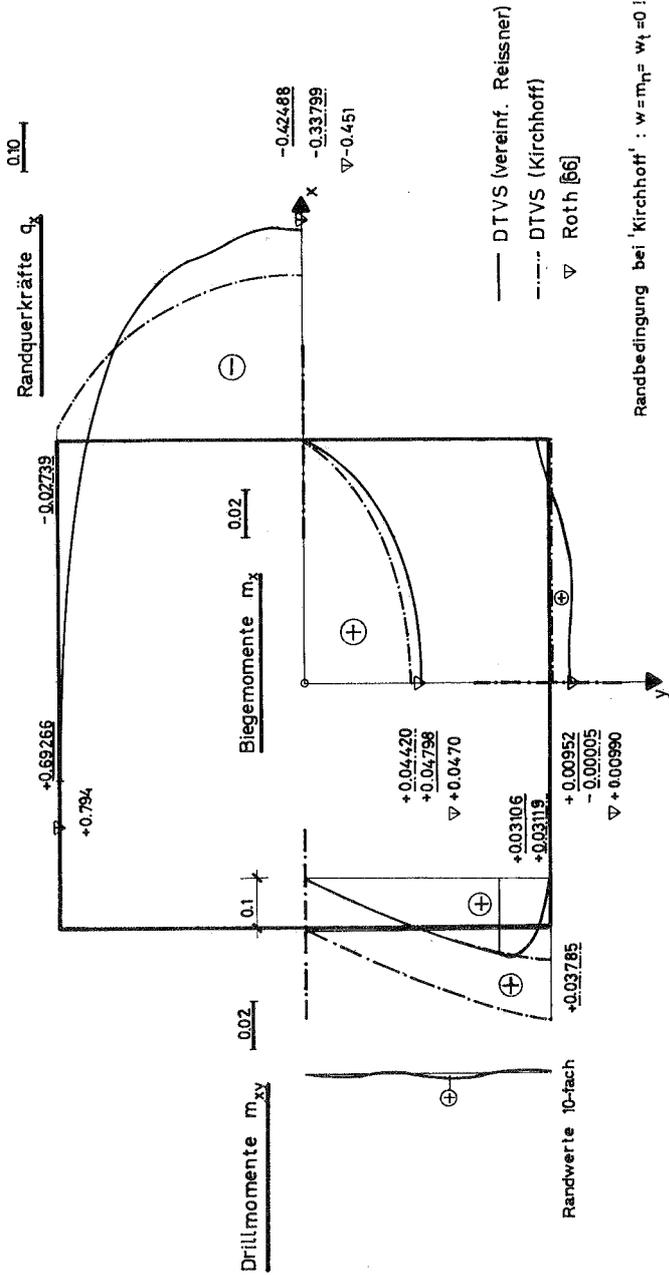


Bild 5.16 : Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

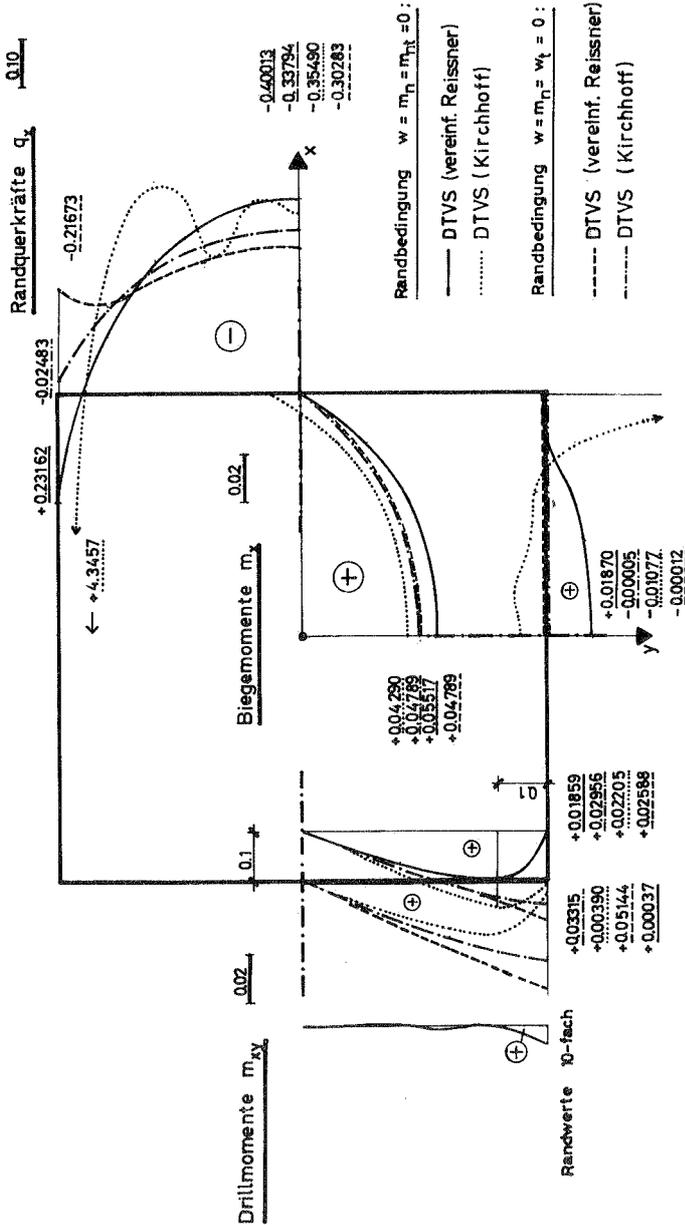
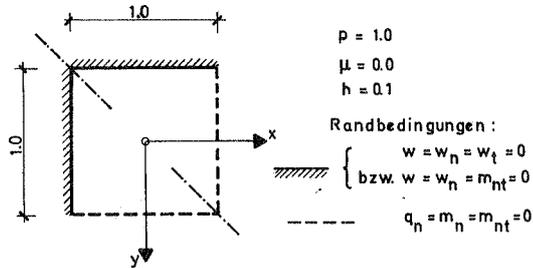


Bild 5.17 : Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

Beispiel 3. 2:

Über Eck eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast p



In den Bildern 5. 18 und 5. 19 sind Ergebnisse nach der Kirchhoffschen und vereinfachten Reissnerschen Theorie aufgetragen.

Für den eingespannten Rand gilt bei Verwendung der Kirchhoffschen Theorie  $w = w_n = w_t = 0$  und bei Reissner - Theorie  $w = w_n = m_{nt} = 0$ . Es wurden 30 bzw. 45 (bei Reissner) Funktionen unter Beachtung der Symmetrie angesetzt. Die Schnittgrößen nach beiden Theorien unterscheiden sich wenig, ausgenommen  $q_x$  längs  $y = +\frac{1}{2}$  und  $m_{xy}$  am freien Rand. (Am eingespannten Rand verschwinden die Drillmomente nach beiden Theorien). Zu  $q_x$  nach der Kirchhoffschen Theorie kommt noch der Anteil aus  $\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$  hinzu, beide zusammen bilden die Ersatzquerkraft, die der Randquerkraft  $q_x$  nach der Reissner-Theorie entspricht. Die Güte der Lösung ist vergleichbar mit der von Mathai [ 90 ] nach einem erweiterten Differenzenverfahren erzielten. Mathai benötigt jedoch eine spezielle Partikularfunktion für dieses Beispiel.

Grobe Gleichgewichtskontrolle:

$$\oint q_n ds \approx 1,12 \cdot 0,9 - 0,3 \cdot 0,1 = 1,05$$

$$\oint q_n ds \stackrel{!}{=} 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 1,0$$

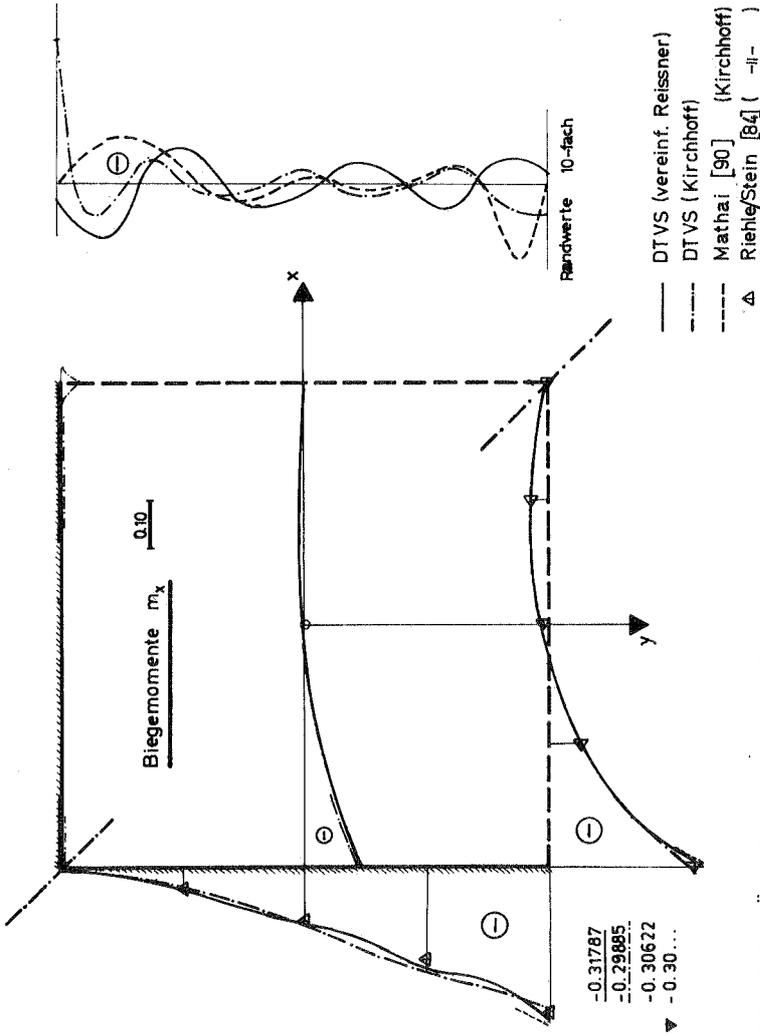
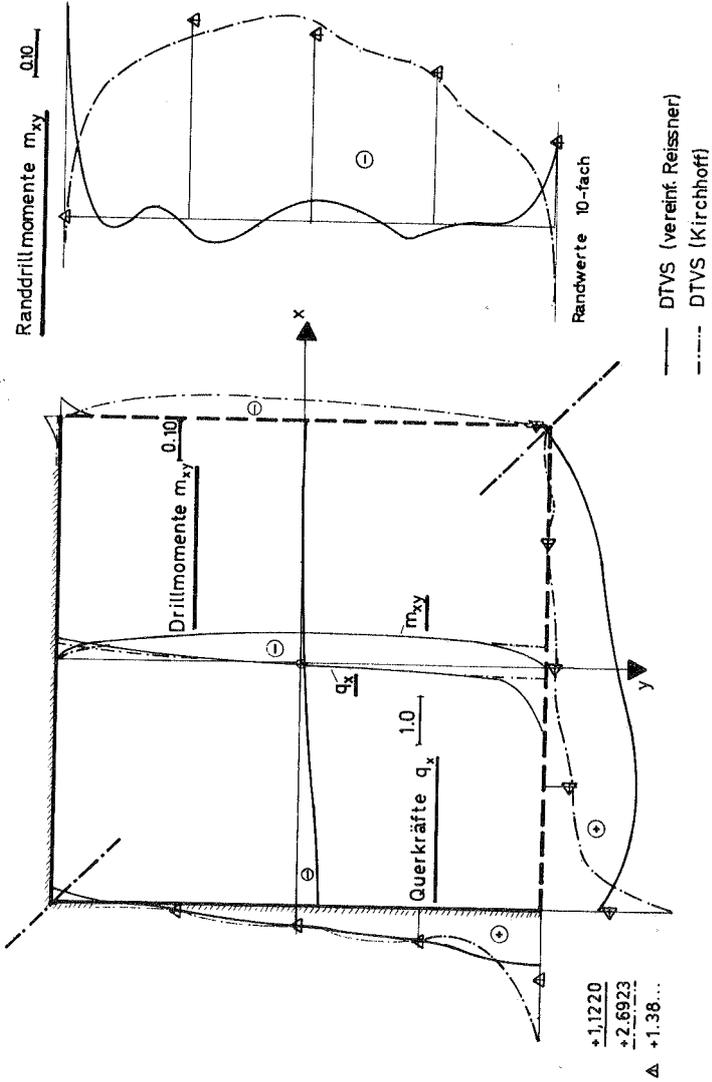


Bild 5.18 : Über Eck eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast

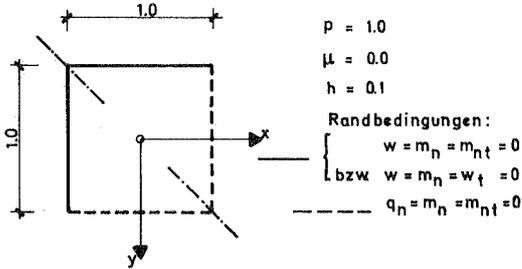


$\Delta$  Riehle/Stein [B4] (Kirchhoff)

Bild 5.19 : Über Eck eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast

Beispiel 3.3:

Über Eck gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast  $p$



Die Bilder 5.20 bis 5.21 entsprechen 5.18 bis 5.19 und dienen zum Vergleich des unterschiedlichen Tragverhaltens der beiden Platten. Außerdem ist zu ersehen, daß der Randbereich nach der Kirchhoffschen Theorie stark gestört ist. Die Werte im Innenbereich sind für beide Theorien wenig verschieden. Das zeigt sich insbesondere im Verlauf der Drillmomente. Interessant ist die Verteilung der Querkkräfte, die im Eckbereich einen sehr starken Anstieg aufweisen. Nach der Kirchhoffschen Theorie ergeben sich Eckeinzelkräfte.

Grobe Gleichgewichtskontrolle:

$$\oint q_n \cdot ds \approx \sigma \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 7,1 \cdot \sigma,1 + \sigma,6 \cdot \sigma,8 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot \sigma,1 \right) = 1,52$$

$$\oint q_n \cdot ds \stackrel{!}{=} 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 1,0$$

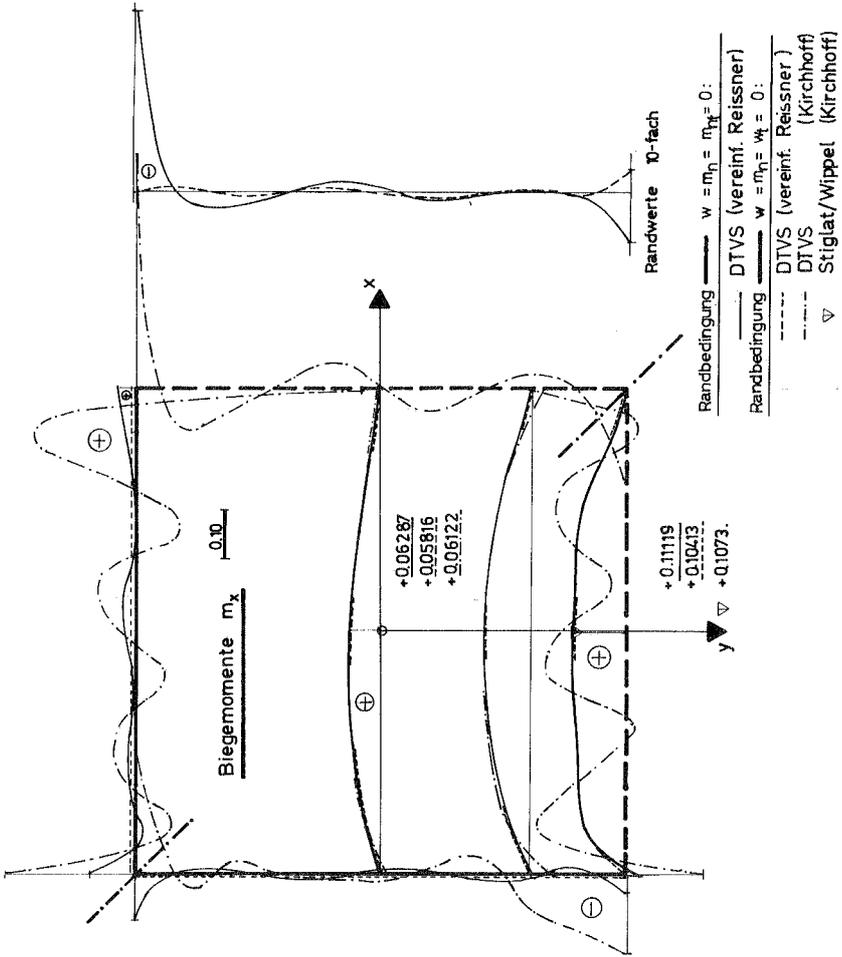


Bild 5.20 : Über Eck gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

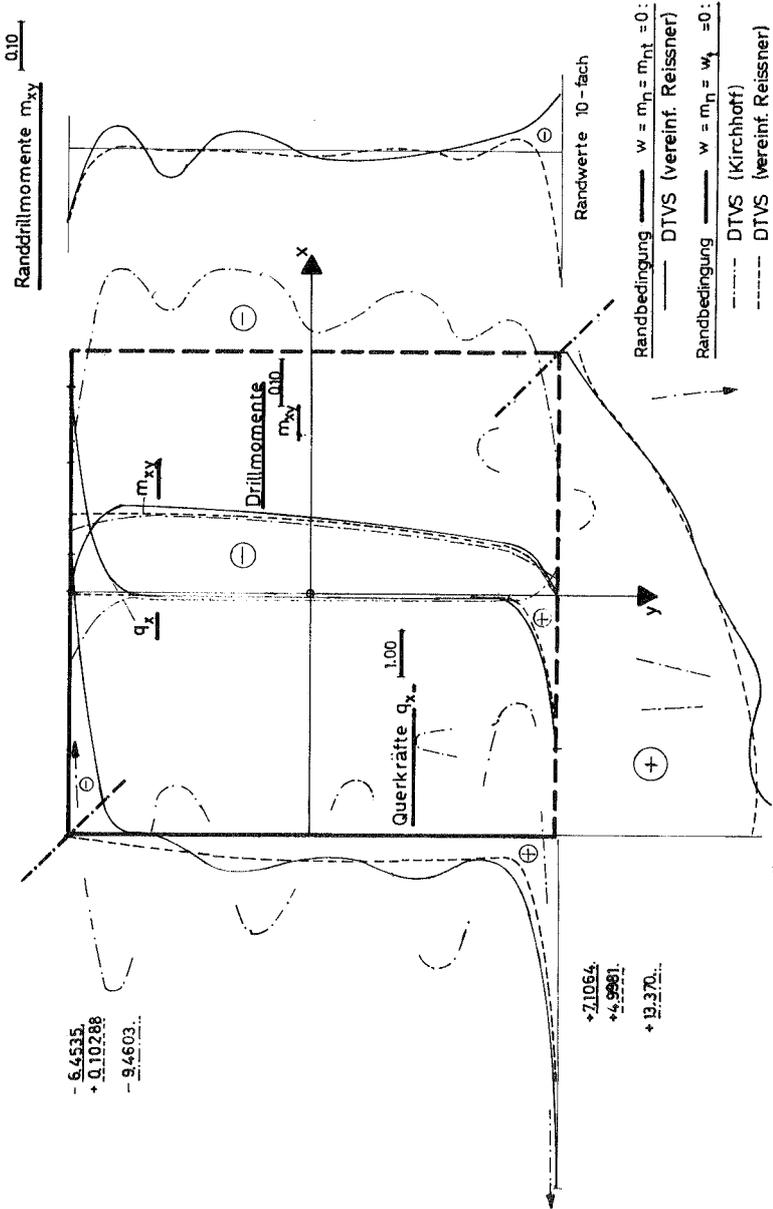
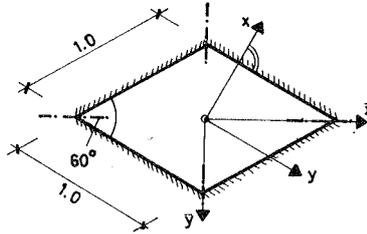


Bild 5.21 : Über Eck gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast

Beispiel 3. 4:

Eingespannte schiefe Platte ( $60^\circ$ ) unter Gleichlast  $p$



$$\mu = 1/6 \quad h = 0,1$$

$$p = 1$$

Randbedingung

$$w = w_n = w_t = 0 \quad (\text{Kirchhoff})$$

$$w = w_n = m_n = 0 \quad (\text{Reissner})$$

Bild 5.22 zeigt Ergebnisse für 20 bzw. 30 Unbekannte nach dem DTVS im Vergleich zu den von Gericke [79] errechneten Größen. Gericke hat für seine Lösung 12 Eigenfunktionen verwendet. Die Übereinstimmung ist sehr gut, wobei zu beachten ist, daß die Randverläufe für die Auflagerkraft und das Einspannmoment aus der Arbeit von Gericke herausgemessen wurden. Auffallend ist bei der Lösung nach der Reissnerschen Theorie der Anstieg der Momente (und Querkräfte) im Eckbereich. Diese Tendenz ist auch bei der eingespannten Rechteckplatte feststellbar (siehe Rüdiger [35]) und steht im Einklang mit den Folgerungen aus den Gleichgewichtsbetrachtungen (Tabelle 5.1).

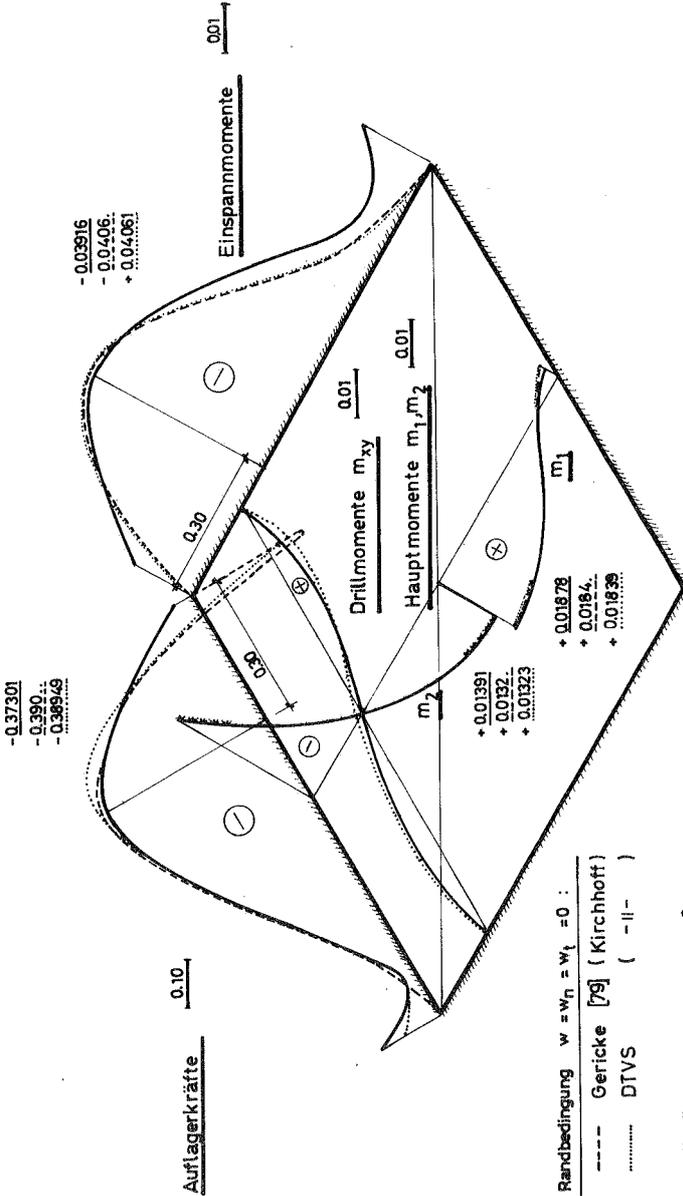
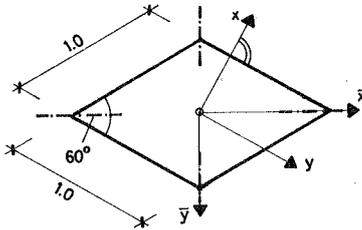


Bild 5.22 : Eingespannte Rautenplatte (60°) unter Gleichlast

Beispiel 3.5:

Gelenkig gelagerte schiefe Platten unter Gleichlast  $p$



$$\mu = 1/6 \quad h = 0,1$$

$$p = 1$$

Randbedingung

$$w = m_n = w_t = 0 \quad (\text{Kirchhoff})$$

$$w = m_n = mn_t = 0 \quad (\text{Reissner})$$

In Bild 5.23 sind Ergebnisse für die  $60^\circ$  schiefe Rautenplatte nach beiden Theorien aufgetragen. Es wurden zur Berechnung nach dem DTVS 20 bzw. 30 Funktionen angesetzt. Da keine Vergleichswerte in der Literatur gefunden werden konnten, wurde eine zweite Platte mit  $\alpha = 30^\circ$  berechnet und Ergebnisse für die Hauptmomente mit Argyris [92] und Holz [93] verglichen, um so die Verlässlichkeit der Aussagen für  $\alpha = 60^\circ$  zu überprüfen. Argyris [92] braucht für den Fall  $\alpha = 30^\circ$  mit dem Verfahren der finiten Elemente 1167 Unbekannte, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Holz [93], der die Singularitäten in den Ansätzen für die finiten Elemente berücksichtigt, kommt mit 35 Unbekannten aus. Ab 407 Unbekannten waren die Mittenmomente auch bei weiterer Steigerung der Zahl der Unbekannten unverändert. Eine Lösung nach dem Differenzenverfahren wird von Holz mit 225 erforderlichen Unbekannten angegeben.

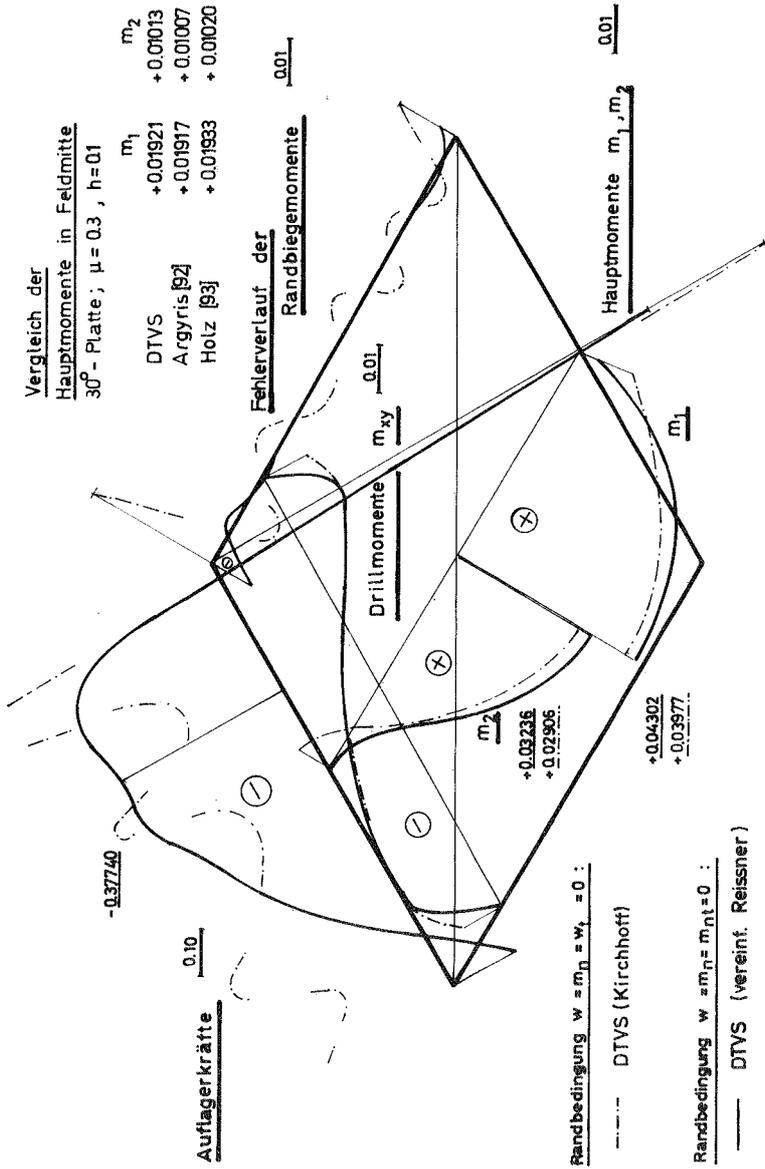


Bild 5.23 : Gelenkig gelagerte Rautenplatte (60°) unter Gleichlast

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

In der Arbeit wird zunächst gezeigt, daß alle Variationsverfahren der Elastizitätstheorie der Methode der gewichteten Residuen untergeordnet werden können. Um die erforderliche Rechenarbeit zu verringern, werden die Integrationsvorschriften durch Summationen über eine endliche Anzahl von Punkten ersetzt. Eine solche Diskretisierung erlaubt die Formulierung der Beziehungen in einfachen Matrizenausdrücken. In Einzelfällen kann es sinnvoll sein, das Gebiet in Bereiche aufzuteilen und für diese getrennte Näherungsansätze zu machen (Mehrbereichsberechnung). Hierfür werden die Beziehungen für die Bereichsgrenzen angegeben.

Der Sonderfall der Methode der gewichteten Reste, bei dem die Ansatzfunktionen die Differentialgleichung erfüllen (erweitertes Trefftz-Verfahren), wird ausführlich behandelt und auf das Problem der Berechnung von Platten angewandt. Es kann als gewichtetes diskretisiertes Fehlerquadratminimumverfahren (als Randverfahren) aufgefaßt werden. Die Grundgleichungen werden so aufgebaut, daß sie sowohl für die Kirchhoffsche Theorie als auch für eine vereinfachte Reissner-Theorie, bei der der Einfluß der Querspannung vernachlässigt wird, verwendet werden können.

An ausgewählten Beispielen wird die Leistungsfähigkeit des Verfahrens im Vergleich zu anderen Lösungen demonstriert. Bei einigen Beispielen wird die vereinfachte Reissner-Theorie zugrunde gelegt. Es zeigt sich, daß vor allem bei Vorliegen unterschiedlicher Randbedingungen die gewählte Methode bessere Ergebnisse aufweist als die verwandte diskretisierte Fehlerquadratminimum-Methode. Besonders geeignet ist die Methode zur Erfassung singulärer Lastfälle (z. B. zur Bestimmung von Einflußflächen) oder konzentrierter Belastungen und bei Vorliegen beliebiger Randbedingungen. Die Zahl der erforderlichen Kollokationspunkte und Ansatzfunktionen wurde aufgrund der gemachten Erfahrungen festgelegt. Hierüber wurde keine systematische Untersuchung durchgeführt. Die Kollokationspunkte wurden äquidistant verteilt. Inwieweit eine unterschiedliche Verteilung zur Verbesserung beiträgt, wurde ebenfalls nicht weiter verfolgt.

Interessant wäre eine Weiterentwicklung der Mehrbereichsberechnung nach Art der Methode der finiten Elemente, bei der die Ansatzparameter durch mechanische Größen ersetzt werden.

Die Methode kann ohne Schwierigkeit auf andere Differentialgleichungsprobleme (Membrane, Torsion, Scheibe, Schale) übertragen werden. Die zu der Methode der gewichteten Reste gezählten Verfahren können in entsprechender Weise aufbereitet werden.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74 - 1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74 - 2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen  
zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und  
verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74 - 3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elasti-  
scher Unterlage.
- 74 - 4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale  
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten  
Plattenelemente.
- 75 - 1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.