

Beitrag zur Berechnung polygonal begrenzter Platten nach dem Differenzenverfahren

Von der Universität Stuttgart (TH)
zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl. -Ing. Walter Ludwig

geboren zu Saarbrücken



13.09.2008
2

Hauptberichter: Prof. Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer
Mitberichter: Prof. Dr. phil. Dr. -Ing. E. h. U. Wegner
Tag der Einreichung: 30. August 1967
Tag der mündlichen Prüfung: 5. Februar 1968

1968

Herrn Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer, der mir die Gelegenheit zur Anfertigung dieser Arbeit gab, danke ich herzlich für die gewährte Unterstützung und Förderung.

Herrn Professor Dr. phil. Dr. -Ing. E. h. U. Wegner gilt mein besonderer Dank für die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Außerdem danke ich Herrn Professor Dr. -Ing. W. Pelikan für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Walter Ludwig

Inhaltsverzeichnis

Schriftumsverzeichnis	Seite	5
Abkürzungsverzeichnis		8
1. Einleitung		10
2. Die isotrope Platte mit konstanter Dicke		12
2.1 Differentialgleichung der Platte		12
2.2 Durchbiegung und Randneigung eines aus der Platte herausgeschnittenen Streifens		14
2.3 Zerlegung polygonal begrenzter Platten in zwei Grundformen		17
2.4 Formulierung der Trägerrostbedingung für die beiden Grundformen		18
2.4.1 Rechteck mit allgemeinen Randbedingungen		18
2.4.2 Rechtwinkliges Dreieck mit allgemeinen Randbedingungen		22
3. Die isotrope Platte mit veränderlicher Dicke		26
3.1 Abschnittsweise konstante Plattendicke		26
3.2 Stetige Änderung der Plattendicke		27
4. Die orthotrope Platte		30
5. Formulierung der Randbedingungen		32
5.1 Randbedingungen der isotropen Platte mit konstanter Dicke		32
5.1.1 Rand $x = \text{const.}$		32
5.1.2 'Schiefer' Rand $n = \text{const.}$		34
5.2 Randbedingungen der isotropen Platte mit veränderlicher Dicke		38
5.3 Randbedingungen der orthotropen Platte		39
5.4 Untersuchung der Plattenecken		41
5.4.1 Rechtwinklige Plattenecke		41
5.4.2 Spitzwinklige Plattenecke		43
5.4.3 Einspringende Ecke		45

6.	Formulierung der Übergangsbedingungen	Seite	46
6.1	Übergang zwischen zwei Plattenfeldern		46
6.2	Übergang zwischen Platte und Randträger		48
7.	Ermittlung der Plattenverwindung		51
8.	Zusammenstellung der erforderlichen zweidimensionalen Differenzenformeln		53
8.1	Differenzenformeln zur Darstellung der Differentialgleichung der Platte		53
8.2	Differenzenformeln zur Ermittlung der Plattenverwindung		57
9.	Zahlenbeispiele		59
9.1	Rechteckplatten unter konstanter Querlast		59
9.2	Dreieckplatte unter konstanter Querlast		63
9.3	In ihrer Ebene gedrückte Platten		67
10.	Zusammenfassung und Diskussion		69
	Lebenslauf		72

Schriftumsverzeichnis

- [1] Stiglat, K. : Rechteckige und schiefe Platten mit Randbalken.
Verlag W. Ernst & Sohn Berlin, 1962.
- [2] Stiglat, K. : Einflußfelder rechteckiger und schiefer Platten mit Randbalken.
Verlag W. Ernst & Sohn Berlin, 1965.
- [3] Stiglat, K. u. Wippel, H. : Plattenstreifen; punktgestützte Platten; elastisch gestützte Platten.
Verlag W. Ernst & Sohn Berlin, 1966.
- [4] Balaš, J. u. Hanuška, A. : Influence Surfaces of Skew Plates.
Verlag der slowakischen Akademie der Wissenschaften Bratislawa, 1964.
- [5] Zurmühl, R. : Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren.
ZAMM 37 (1957) S. 1.
- [6] Palazzolo, A. : Die Berechnung von Parallelogrammplatten nach dem Mehrstellenverfahren.
Dissertation T. H. Karlsruhe, 1961.
- [7] Marcus, H. : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten.
Springer-Verlag Berlin, 1924.
- [8] Vogt, H. : Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten.
Dissertation T. H. Hannover, 1939.

- [9] Girkmann, K. : Flächentragwerke.
Springer-Verlag Wien, 1963. 6. Auflage.
- [10] Mansfield, E. H. : The Bending and Stretching of Plates.
Pergamon Press London, 1964.
- [11] Giencke, E. : Die Grundgleichung für die orthotrope
Platte mit exzentrischen Steifen.
Der Stahlbau 24 (1955) S. 128.
- [12] Collatz, L. : Numerische Behandlung von Differential-
gleichungen.
Springer-Verlag Berlin, 1955. 2. Auflage.
- [13] Rumpel, G. : Über das Verhalten dünner Platten in den
Eckpunkten.
Der Bauingenieur 33 (1958) S. 50.
- [14] Shen, M. -K. : Ein Paradoxon der Plattentheorie.
Der Bauingenieur 37 (1962) S. 23.
- [15] Brendel, G. : Die 'mitwirkende Plattenbreite' nach Theorie
und Versuch.
Beton- und Stahlbetonbau 55 (1960) S. 177.
- [16] Gurr, S. : Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter
Flächentragwerke unter besonderer Berück-
sichtigung ebener Stauwände, mit Hilfe von
Randwert- und Lastwertmatrizen.
Dissertation T. H. Stuttgart, 1964.
- [17] Czerny, F. : Betonkalender I 1964 und 1967.
Verlag W. Ernst & Sohn Berlin.

Tafeln für gleichmäßig vollbelastete Rechteck-
platten.
Bautechnik-Archiv Heft 11 (1955)

- [18] Timoshenko u. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells.
Mc. Graw-Hill New York, 1959.
- [19] Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik.
Springer-Verlag Berlin, 1958. 2. Auflage.
- [20] Giencke, E.: Ein einfaches und genaues finites Verfahren zur Berechnung von orthotropen Scheiben und Platten.
Der Stahlbau 36 (1967) S. 260 u. S. 303.

Abkürzungsverzeichnis

Geometrie

x, y, z	}	Kartesische Koordinatensysteme
n, t, z		
φ	[1]	Winkel zwischen x - und n -Achse
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_t$	[m]	Maschenweite des Gitters in x -, y -, t -Richtung
ϱ	[1]	Verhältnis $\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2$

Materialkonstanten

E	[Mp/m ²]	Elastizitätsmodul
μ, μ_x, μ_y	[1]	Querkontraktionszahlen
G	[Mp/m ²]	Schubmodul

Systemwerte

l_x, l_y	[m]	Seitenlängen der Platte
h	[m]	Plattendicke
K, K_x, K_y	[Mpm]	Biegesteifigkeiten der Platte
K_c	[Mpm]	Vergleichssteifigkeit
s	[1]	Verhältnis $\frac{K}{K_c}$
$2H$	[Mpm]	Effektive Drillsteifigkeit der orthotropen Platte
c	[1]	Verhältnis $\frac{2H}{K_x + K_y}$
EJ	[Mpm ²]	Biegesteifigkeit des Randträgers
GJ_T	[Mpm ²]	St. Venantscher Torsionswiderstand des Randträgers

Verformungen, Schnittgrößen

w	[m]	Plattendurchbiegung (positiv in z-Richtung)
X, Y, T	[1/m]	Plattenkrümmungen $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$
Z	[1/m]	Plattenverwindung $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$
m_x, m_y, m_n	[Mpm/m]	Biegemomente der Platte
m_{xy}, m_{nt}	[Mpm/m]	Drillmomente der Platte
A	[Mp]	Einzelkraft in der Plattenecke
q_x, q_y, q_n	[Mp/m]	Querkräfte der Platte
$\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_n$	[Mp/m]	Ersatzscherkräfte am Plattenrand

Sonstige Abkürzungen

p	[Mp/m ²]	Belastung der Platte
$\{ \mathcal{F}_{\alpha,b} \}$		Spaltenvektor mit (b+1) Elementen, der sich auf die α -te Zeile oder Spalte des Maschengitters bezieht.
$\{ \mathcal{F}_{\alpha,b} \}^T$		Transponierter Vektor zu $\{ \mathcal{F}_{\alpha,b} \}$

Weitere Bezeichnungen und Abkürzungen sind im Text erläutert.

1. Einleitung

Bei der Untersuchung von Platten mit dem Differenzenverfahren werden meist Formeln verwendet, die den Bipotentialoperator an einem betrachteten Punkt durch die Funktionswerte an benachbarten Punkten angenähert darstellen [1], [2], [3], [4]. In [5] und [6] werden sehr genaue Mehrstellenformeln für den Bipotentialoperator angegeben. Damit wird ein lineares Gleichungssystem für die Funktionswerte - also die Plattendurchbiegungen - an den Punkten des gewählten Gitters gewonnen. Besondere Schwierigkeiten bereitet dabei die Darstellung der statischen Randbedingungen.

Dieser Weg ist vor allem zur Ermittlung von Einflußflächen geeignet, da in diesem Fall die Durchbiegungen unmittelbar gesucht sind. Soll der Verlauf der Schnittkräfte in der Platte für einen Lastfall ermittelt werden, dann werden die zweiten bzw. dritten Ableitungen der Durchbiegung benötigt. Die erforderlichen numerischen Differentiationen bewirken, daß die praktisch wichtigen Schnittkräfte mit einem merklich größeren Fehler behaftet sind als die Durchbiegungen.

In [7], [8] wird die Differentialgleichung der Platte aufgespalten in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Durchbiegung und die Summe der Krümmungen. Mit Hilfe von Differenzenformeln lassen sich zwei gleich aufgebaute Gleichungssysteme für die Durchbiegung und die Krümmungssumme aller Gitterpunkte aufstellen. Für die rundum frei drehbar gelagerte Platte ist das Gleichungssystem für die Krümmungssumme unabhängig von den Durchbiegungen.

Da die Differentialausdrücke somit nur von zweiter Ordnung sind, ist die Darstellung durch Differenzenformeln recht einfach. Beim Zerlegen der Krümmungssumme in die beiden Krümmungen tritt jedoch ein wesentlicher Genauigkeitsverlust ein.

Für die beiden Plattenkrümmungen in Gitterrichtung wird in [20] ein Gleichungssystem aufgestellt. An jedem Gitterpunkt wird für diese beiden Unbekannten mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten eine Gleichgewichts- und

eine Verträglichkeitsbedingung formuliert. Die beiden Gleichungen lassen sich auch mit Mehrstellenformeln gewinnen. Bei der Darstellung der Randbedingungen erweist sich die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten als sehr vorteilhaft. Wegen der Dualität zwischen Platte und Scheibe werden mit dem gleichen Verfahren in [20] auch Scheiben behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein lineares Gleichungssystem für die Plattenkrümmungen in Gitterrichtung aufgestellt. Mit einem zweiten Gleichungssystem wird aus den Krümmungen die Plattenverwindung berechnet. Beide Systeme werden mit Hilfe von Differenzen- bzw. Mehrstellenformeln gewonnen, wobei teilweise die in der Baustatik üblichen W -Gewichte verwendet werden.

Es werden isotrope Platten mit konstanter und mit veränderlicher Dicke sowie orthotrope Platten mit konstanten Steifigkeiten behandelt.

2. Die isotrope Platte mit konstanter Dicke

2.1 Differentialgleichung der Platte

Mit der Bezeichnungsweise in [9] werden die Schnittkräfte der Platte unmittelbar angegeben. In Bild 2.1 sind die positiven Größen am Plattenelement eingetragen.

$$\text{Biegemoment} \quad m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\text{Drillmoment} \quad m_{xy} = - (1 - \mu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

$$\text{Querkraft} \quad q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Ersatzscherkraft} \quad \bar{q}_x &= q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \\ &= -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei gilt: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

m_y , q_y und \bar{q}_y ergeben sich durch Vertauschen von x und y in (2.1), (2.3) und (2.4).

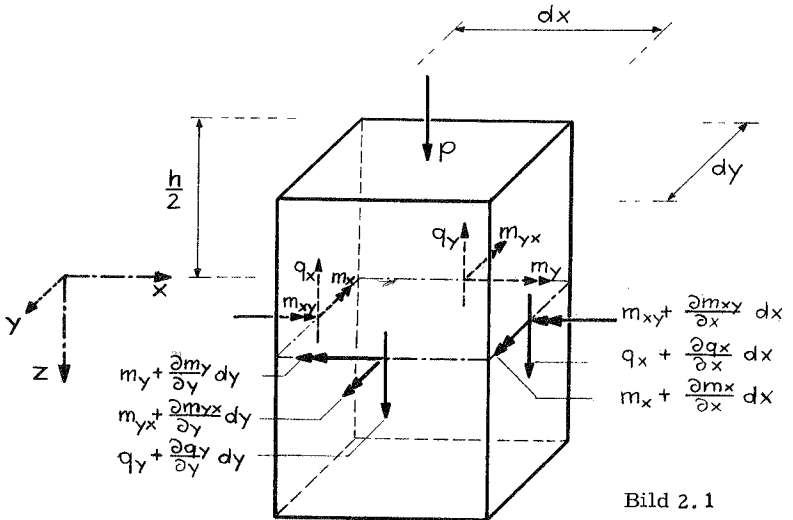


Bild 2.1

Mit Gleichung (2.3) ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in z - Richtung die Differentialgleichung der Platte:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{K} \quad (2.5)$$

Mit den Abkürzungen

$$X = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad Y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.6 \text{ a, b})$$

erhält die Plattengleichung die Form:

$$\Delta (X + Y) = \frac{p}{K} \quad (2.7)$$

Gleichung (2.7) beinhaltet das Gleichgewicht am Plattenelement unter Berücksichtigung der in der Kirchhoffschen Plattentheorie üblichen Voraussetzungen.

Zur Darstellung des Operators Δ werden in Abschnitt 8.1 verschiedene Differenzen- und Mehrstellenformeln angegeben. Sie werden zur Formulierung von Gleichung (2.7) an allen Gitterpunkten im Platteninneren verwendet. An jedem inneren Gitterpunkt steht damit die erste Gleichung in den Plattenkrümmungen zur Verfügung.

2.2 Durchbiegung und Randneigung eines aus der Platte herausgeschnittenen Streifens

Aus der Platte sei längs einer Gitterlinie $\gamma = \text{const.}$ ein Streifen der Breite 1 herausgeschnitten. Einschließlich der Randpunkte enthalte er $(m+1)$ Gitterpunkte in gleichem Abstand λ_x . Die Randbedingungen seien allgemeiner Art.

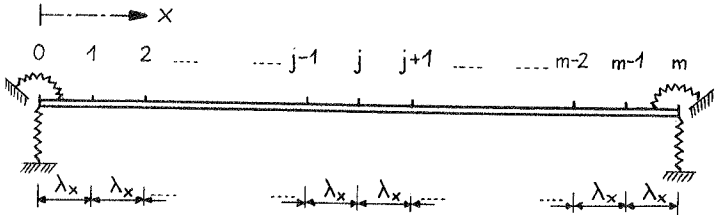


Bild 2.3

Nach der Mohrschen Analogie ergibt sich die Biegelinie eines Balkens auf zwei starren Lagern als Momentenfläche infolge der Belastung des Balkens mit der Krümmungsfläche. Allgemeine Randbedingungen werden durch eine gerade Schlußlinie berücksichtigt.

Bei der rechnerischen Durchführung werden in der Baustatik meist die sogenannten W - Gewichte verwendet. Diese sind die Knotenlasten, die infolge indirekter Belastung des Balkens durch die Krümmungsfläche auftreten.

Am Plattenstreifen nach Bild 2.3 ergibt sich mit Hilfe der Parabelformel das W - Gewicht in Punkt j zu:

$$W_j = - \frac{\lambda_x}{12} (X_{j-1} + 10 X_j + X_{j+1}) \quad (2.8)$$

Für die W - Gewichte in den Randpunkten gilt:

$$\begin{aligned} W_0 &= - \frac{\lambda_x}{24} (7 X_0 + 6 X_1 - X_2) \\ W_m &= - \frac{\lambda_x}{24} (-X_{m-2} + 6 X_{m-1} + 7 X_m) \end{aligned} \quad (2.9a,b)$$

Die Durchbiegung des Plattenstreifens an einem beliebigen Gitterpunkt i ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 w_i = & -\lambda_x^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{i}{m}\right) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} j X_j + \frac{i}{m} \cdot \sum_{j=i}^{m-1} (m-j) X_j \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{i}{m}\right) X_0 + \frac{i}{m} X_m - X_i \right) \right) \\
 & + w_0 \cdot \left(1 - \frac{i}{m}\right) + w_m \cdot \frac{i}{m}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Diese Gleichung lässt sich auch ohne statische Überlegungen mit folgender Mehrstellenformel aufstellen;

$$w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1} - \frac{\lambda_x^2}{12} \cdot (X_{j-1} + 10X_j + X_{j+1}) = 0$$

Diese Formel wird sukzessiv an den Punkten 1 bis $(m - 1)$ angewendet. Wenn diese $(m - 1)$ Beziehungen so kombiniert werden, daß alle Durchbiegungen außer w_0 , w_i und w_m entfallen, ergibt sich Gleichung (2.10).

Für die Randneigungen des Plattenstreifens gilt:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 &= w_0' + \frac{w_1 - w_0}{\lambda_x} \\
 &= -\frac{\lambda_x}{24} (7X_0 + 6X_1 - X_2) + \frac{w_1 - w_0}{\lambda_x}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m &= -w_m' + \frac{w_m - w_{m-1}}{\lambda_x} \\
 &= +\frac{\lambda_x}{24} (-X_{m-2} + 6X_{m-1} + 7X_m) + \frac{w_m - w_{m-1}}{\lambda_x}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Durch Gleichung (2.10) wird eine numerische zweifache Integration durchgeführt. Das erste nicht verschwindende Glied der Taylorentwicklung in (2.10) ist die vierte Ableitung der Krümmung des Plattenstreifens. In den Gleichungen (2.11) und (2.12) ist der Taylorabgleich um eine Ordnung niedriger als in (2.10), da die w - Gewichte in den Randpunkten keinen symmetrischen Aufbau haben.

Bei der Platte kreuzen sich in jedem Gitterpunkt eine Gerade $x = \text{const.}$ und eine Gerade $y = \text{const.}$ Für beide kann Gleichung (2.10) aufgestellt werden. Die Durchbiegung des Gitterpunktes wird so einmal durch die Krümmungen X längs der Linie $y = \text{const.}$ und einmal durch die Krümmungen Y längs $x = \text{const.}$ dargestellt. (Von den Randdurchbiegungen sei hier einmal abgesehen.) Durch Gleichsetzen beider Durchbiegungswerte entsteht die zweite Gleichung in den Plattenkrümmungen. Diese Gleichung erfüllt die Kontinuität in den Durchbiegungen der Plattenmitelfläche. Sie ist daher die Verträglichkeitsbedingung für die unbekanntenen Krümmungen X und Y . Im folgenden wird sie als Trägerrostbedingung bezeichnet, weil sie an einem Trägerrost, dessen Systemlinien die Gitterlinien sind, aufgestellt wird.

2.3 Zerlegung polygonal begrenzter Platten in zwei Grundformen

In der vorliegenden Arbeit wird ein rechtwinkliges Maschengitter verwendet. Da die Randbedingungen an Gitterpunkten formuliert werden müssen, kann nicht jede polygonal begrenzte Platte behandelt werden. Es muß möglich sein, das Plattenfeld in einige wenige Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen, deren Maschengitter an den 'Nähten' zueinander passen müssen. Bild 2.4 zeigt diese Zerlegung und die Maschengitter für vier Plattenformen.

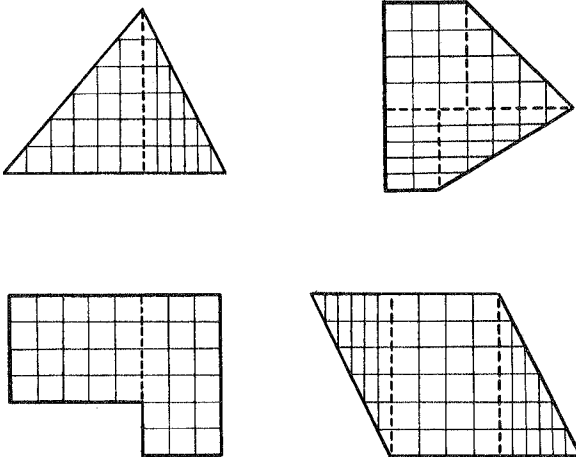


Bild 2.4

Wegen der großen Anzahl von Unbekannten, die bei der Berechnung auftreten, empfiehlt es sich, das Gleichungssystem durch eine elektronische Rechenanlage aufstellen und auflösen zu lassen. Dazu wird die Berechnung zurückgeführt auf die Behandlung zweier Grundformen: Rechteck und rechtwinkliges Dreieck mit allgemeinen Randbedingungen. Die tatsächliche Platte wird aus den Grundformen zusammengesetzt. Dabei muß entlang der 'Nähten' (----- Bild 2.4) die Kontinuität in Schnittkräften und Verformungen erfüllt werden.

2.4 Formulierung der Trägerrostbedingung für die beiden Grundformen

2.4.1 Rechteck mit allgemeinen Randbedingungen

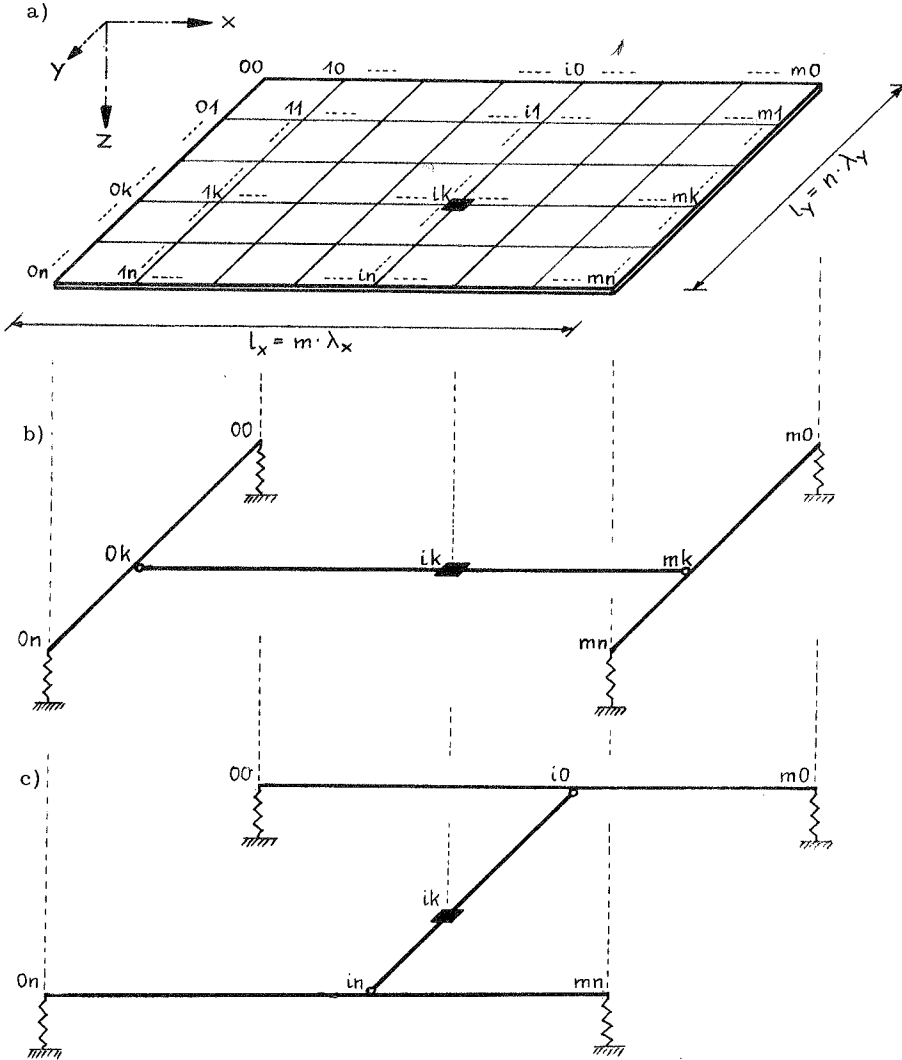


Bild 2.5

Als Unbekannte des Gleichungssystems sollen neben den Krümmungen X bzw. Y nur die Durchbiegungen der Plattenecken auftreten. Daher müssen in den Gleichungen (2.10), (2.11) und (2.12) die Randdurchbiegungen eliminiert werden.

In Bild 2.5 a ist eine Rechteckplatte mit den Bezeichnungen des Maschengitters dargestellt. Es wird ein beliebiger Gitterpunkt ik im Plattenfeld betrachtet. Seine Durchbiegung w_{ik} wird mit Hilfe von Gleichung (2.10) an dem Trägerrost nach Bild 2.5 b ermittelt.

$$\begin{aligned}
 w_{ik} = & -\lambda_x^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{i}{m}\right) \sum_{j=0}^{i-1} j \cdot X_{jk} + \frac{i}{m} \sum_{j=i}^{m-1} (m-j) \cdot X_{jk} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{i}{m}\right) X_{ok} + \frac{i}{m} X_{mk} - X_{ik} \right) \right) \\
 & - \left(1 - \frac{i}{m}\right) \lambda_y^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) \sum_{j=0}^{k-1} j \cdot Y_{0j} + \frac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} (n-j) \cdot Y_{0j} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) Y_{00} + \frac{k}{n} Y_{0n} - Y_{0k} \right) \right) \\
 & - \frac{i}{m} \lambda_y^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) \sum_{j=0}^{k-1} j \cdot Y_{mj} + \frac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} (n-j) \cdot Y_{mj} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) Y_{m0} + \frac{k}{n} Y_{mn} - Y_{mk} \right) \right) \\
 & + \left(1 - \frac{i}{m}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) w_{00} + \frac{k}{n} w_{0n} \right) \\
 & + \frac{i}{m} \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) w_{m0} + \frac{k}{n} w_{mn} \right)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Es werden folgende Spaltenvektoren eingeführt:

$$\left\{ F_{\alpha, b} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) \\ 1 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) \\ 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) \\ \vdots \\ \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) - \frac{1}{12} \\ \alpha \cdot (b - \alpha - 1) \\ \alpha \cdot (b - \alpha - 2) \\ \vdots \\ \alpha \cdot 2 \\ \alpha \cdot 1 \\ \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{erstes Element} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow (\alpha + 1)\text{-tes Element} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow (b + 1)\text{-tes Element} \end{matrix} \tag{2.14}$$

Dabei folgt aus (2.13) für $\{F_{\alpha, b}\}$: $0 < \alpha < b$ und $b \geq 2$. Durch die zusätzliche Bedingung $\{F_{\alpha, b}\} = 0$ für $\alpha = 0$ und $\alpha = b$ lassen sich die Durchbiegungen von Innen- und Randpunkten mit der gleichen Formel darstellen.

$$\{X_{a,b}\} = \begin{pmatrix} X_{0a} \\ X_{1a} \\ X_{2a} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{(b-2)a} \\ X_{(b-1)a} \\ X_{ba} \end{pmatrix} ; \{Y_{a,b}\} = \begin{pmatrix} Y_{a0} \\ Y_{a1} \\ Y_{a2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{a(b-2)} \\ Y_{a(b-1)} \\ Y_{ab} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Durch Einführen dieser Vektoren in Gleichung (2.13) ergibt sich:

$$\begin{aligned} w_{ik} = & -\lambda_x^2 \cdot \{F_{i,m}\}^T \{X_{k,m}\} \\ & - (1 - \frac{i}{m}) \lambda_y^2 \cdot \{F_{k,n}\}^T \{Y_{0,n}\} - \frac{i}{m} \lambda_y^2 \cdot \{F_{k,n}\}^T \{Y_{m,n}\} \\ & + (1 - \frac{i}{m}) \cdot \left\{ (1 - \frac{k}{n}) w_{00} + \frac{k}{n} w_{0n} \right\} \\ & + \frac{i}{m} \cdot \left\{ (1 - \frac{k}{n}) w_{m0} + \frac{k}{n} w_{mn} \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analog ergibt sich an dem Trägerrost nach Bild 2.5 c die Beziehung:

$$\begin{aligned} w_{ik} = & -\lambda_y^2 \cdot \{F_{k,n}\}^T \{Y_{i,n}\} \\ & - (1 - \frac{k}{n}) \lambda_x^2 \cdot \{F_{i,m}\}^T \{X_{0,m}\} - \frac{k}{n} \lambda_x^2 \cdot \{F_{i,m}\}^T \{X_{n,m}\} \\ & + (1 - \frac{k}{n}) \cdot \left\{ (1 - \frac{i}{m}) w_{00} + \frac{i}{m} w_{m0} \right\} \\ & + \frac{k}{n} \cdot \left\{ (1 - \frac{i}{m}) w_{0n} + \frac{i}{m} w_{mn} \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte für w_{ik} nach (2.16) und (2.17) entsteht die Trägerrostbedingung für die Rechteckplatte. Mit der Abkürzung: $\varphi = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2$ erhält sie die Form:

$$\begin{aligned} & \varphi \{F_{i,m}\}^T \cdot \left(-\{X_{k,m}\} + (1 - \frac{k}{n}) \{X_{0,m}\} + \frac{k}{n} \{X_{n,m}\} \right) \\ & + \{F_{k,n}\}^T \cdot \left(\{Y_{i,n}\} - (1 - \frac{i}{m}) \{Y_{0,n}\} - \frac{i}{m} \{Y_{m,n}\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

In dieser Gleichung treten die Durchbiegungen der Plattenecken nicht mehr auf.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.11) und (2.12) läßt sich die Randneigung der Platte ausdrücken. Dabei ergibt sich $\frac{\partial W}{\partial x}$ am Trägerrost nach Bild 2.5 b und $\frac{\partial W}{\partial y}$ am Trägerrost nach Bild 2.5 c. Mit den vereinbarten Vektoren gilt zum Beispiel für $\frac{\partial W}{\partial x}$ im Punkt $0k$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{0k} = & -\frac{\lambda_x}{24} (7 X_{0k} + 6 X_{1k} - X_{2k}) \\ & - \lambda_x \cdot \{F_{1,m}\}^T \{X_{k,m}\} \\ & + \lambda_x \frac{1}{9m} \cdot \{F_{k,n}\}^T \cdot (\{Y_{0,n}\} - \{Y_{m,n}\}) \\ & + \frac{1}{m\lambda_x} \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) (W_{m0} - W_{00}) + \frac{k}{n} (W_{mn} - W_{0n}) \right) \end{aligned} \quad (2.19 a)$$

und im Punkt mk :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{mk} = & +\frac{\lambda_x}{24} (-X_{(m-2)k} + 6 X_{(m-1)k} + 7 X_{mk}) \\ & + \lambda_x \cdot \{F_{(m-1),m}\}^T \{X_{k,m}\} \\ & + \lambda_x \frac{1}{9m} \cdot \{F_{k,n}\}^T \cdot (\{Y_{0,n}\} - \{Y_{m,n}\}) \\ & + \frac{1}{m\lambda_x} \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) (W_{m0} - W_{00}) + \frac{k}{n} (W_{mn} - W_{0n}) \right) \end{aligned} \quad (2.19 b)$$

2.4.2 Rechtwinkliges Dreieck mit allgemeinen Randbedingungen

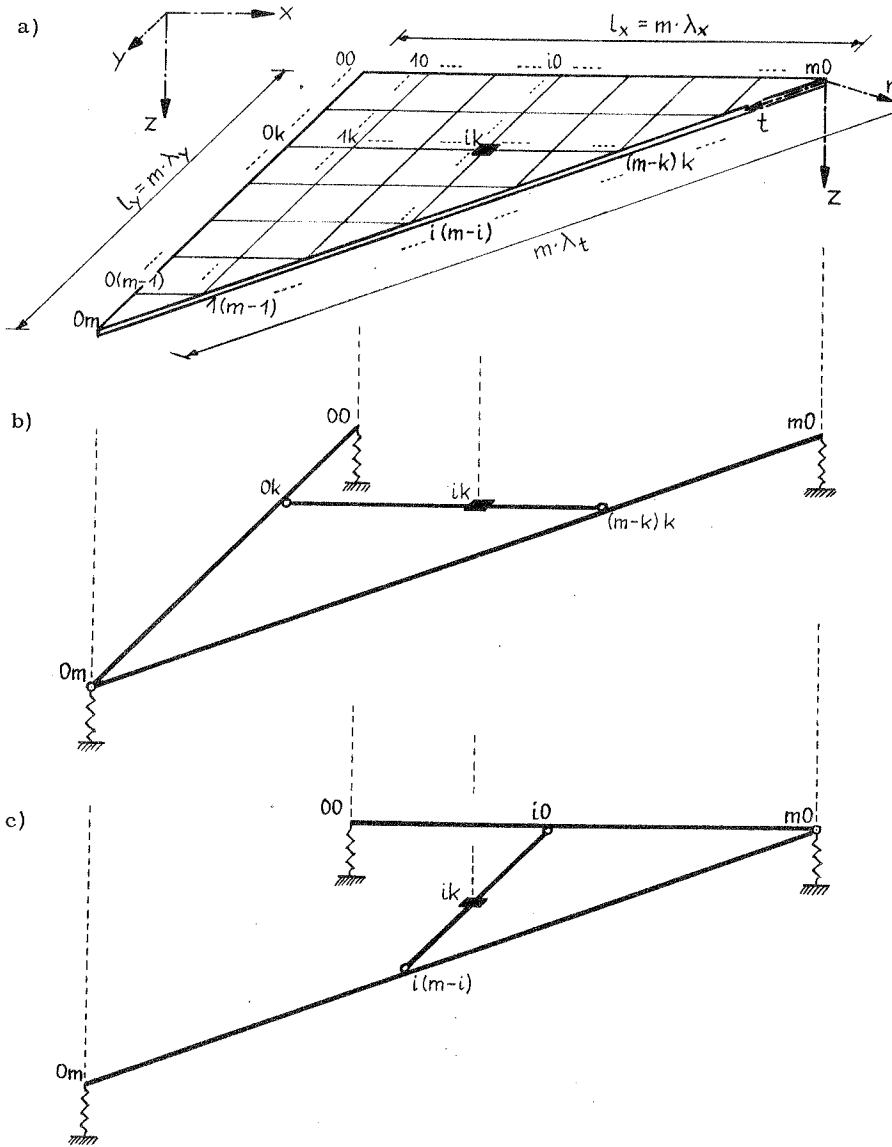


Bild 2.6

Als Unbekannte des Gleichungssystems erscheinen neben den Krümmungen X und Y auch die Durchbiegungen der Plattenecken und entlang dem 'schiefen' Rand die Krümmungen in Randrichtung.

In Bild 2.6 a ist eine rechtwinklige Dreieckplatte dargestellt. Es wird ein beliebiger Gitterpunkt (i, k) im Plattenfeld betrachtet. Seine Durchbiegung w_{ik} wird mit Hilfe von Gleichung (2.10) an dem Trägerrost nach Bild 2.6 b ermittelt.

Mit

$$\tau = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} w_{ik} = & -\lambda_x^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{i}{m-k}\right) \sum_{j=0}^{i-1} j \cdot X_{jk} + \frac{i}{m-k} \sum_{j=i}^{m-k-1} (m-k-j) \cdot X_{jk} \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{i}{m-k}\right) X_{0k} + \frac{i}{m-k} X_{(m-k)k} - X_{ik} \right) \right) \\ & - \left(1 - \frac{i}{m-k}\right) \lambda_y^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{m}\right) \sum_{j=0}^{k-1} j \cdot Y_{0j} + \frac{k}{m} \sum_{j=k}^{m-1} (m-j) \cdot Y_{0j} \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{k}{m}\right) Y_{00} + \frac{k}{m} Y_{0m} - Y_{0k} \right) \right) \\ & - \frac{i}{m-k} \lambda_t^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{k}{m}\right) \sum_{j=0}^{k-1} j \cdot T_{(m-j)j} + \frac{k}{m} \sum_{j=k}^{m-1} (m-j) \cdot T_{(m-j)j} \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left(\left(1 - \frac{k}{m}\right) T_{m0} + \frac{k}{m} T_{0m} - T_{(m-k)k} \right) \right) \\ & + \frac{m-k-i}{m} w_{00} + \frac{i}{m} w_{m0} + \frac{k}{m} w_{0m} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Krümmungen τ längs des 'schiefen' Randes werden ebenfalls zu einem Vektor zusammengefaßt.

$$\{T_{R,m}\} = \begin{pmatrix} T_{m0} \\ T_{(m-1)1} \\ T_{(m-2)2} \\ \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ T_{2(m-2)} \\ T_{1(m-1)} \\ T_{0m} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Mit den vereinbarten Vektoren erhält Gleichung (2.21) die Form:

$$\begin{aligned}
 W_{ik} = & -\lambda_x^2 \cdot \{F_{i,(m-k)}\}^T \{X_{k,(m-k)}\} \\
 & - (1 - \frac{i}{m-k}) \lambda_y^2 \cdot \{F_{k,m}\}^T \{Y_{0,m}\} \\
 & - \frac{i}{m-k} \cdot \lambda_t^2 \cdot \{F_{k,m}\}^T \{T_{R,m}\} \\
 & + \frac{m-i-k}{m} W_{00} + \frac{i}{m} W_{m0} + \frac{k}{m} W_{0m}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Analog ergibt sich an dem Trägerrost nach Bild 2.6 c die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 W_{ik} = & -\lambda_y^2 \cdot \{F_{k,(m-i)}\}^T \{Y_{i,(m-i)}\} \\
 & - (1 - \frac{k}{m-i}) \lambda_x^2 \cdot \{F_{i,m}\}^T \{X_{0,m}\} \\
 & - \frac{k}{m-i} \lambda_t^2 \cdot \{F_{(m-i),m}\}^T \{T_{R,m}\} \\
 & + \frac{m-i-k}{m} W_{00} + \frac{i}{m} W_{m0} + \frac{k}{m} W_{0m}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wegen der Bedingung $\{F_{\alpha,\beta}\} = 0$ für $\alpha=0$ und $\alpha=\beta$ gelten die Gleichungen (2.23) und (2.24) auch für die Durchbiegungen eines Randpunktes.

Durch Gleichsetzen der beiden Werte für W_{ik} nach (2.23) und (2.24) an jedem Innenpunkt des Plattenfeldes entsteht die Trägerrostbedingung für die rechtwinklige Dreieckplatte.

$$\begin{aligned}
 & -g \{F_{i,(m-k)}\}^T \{X_{k,(m-k)}\} + g (1 - \frac{k}{m-i}) \{F_{i,m}\}^T \{X_{0,m}\} \\
 & + \{F_{k,(m-i)}\}^T \{Y_{i,(m-i)}\} - (1 - \frac{i}{m-k}) \{F_{k,m}\}^T \{Y_{0,m}\} \\
 & + (g+1) \left(-\frac{i}{m-k} \{F_{k,m}\}^T + \frac{k}{m-i} \{F_{(m-i),m}\}^T \right) \cdot \{T_{R,m}\} = 0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Auch hier entfallen die Durchbiegungen der Plattenecken.

Die Randneigung $\frac{\partial w}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial w}{\partial y}$ wird an dem Trägerrost nach Bild 2.6 b bzw. c mit Hilfe der Gleichungen (2.11) und (2.12) ermittelt. Es ergibt sich zum Beispiel für $\frac{\partial w}{\partial x}$ im Punkt $0k$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{0k} = & -\frac{\lambda_x}{24} (7 X_{0k} + 6 X_{1k} - X_{2k}) \\ & - \lambda_x \{F_{1,(m-k)}\}^T \{X_{k,(m-k)}\} \\ & + \lambda_x \frac{1}{\varrho(m-k)} \{F_{k,m}\}^T \cdot \left[\{Y_{0,m}\} - (\varrho+1) \{T_{R,m}\} \right] \\ & + \frac{1}{m\lambda_x} (w_{m0} - w_{00}) \end{aligned} \quad (2.26 a)$$

und im Punkt $(m-k)k$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(m-k)k} = & +\frac{\lambda_x}{24} (-X_{(m-k-2)k} + 6X_{(m-k-1)k} + 7X_{(m-k)k}) \\ & + \lambda_x \{F_{(m-k-1),(m-k)}\}^T \{X_{k,(m-k)}\} \\ & + \lambda_x \frac{1}{\varrho(m-k)} \{F_{k,m}\}^T \cdot \left[\{Y_{0,m}\} - (\varrho+1) \{T_{R,m}\} \right] \\ & + \frac{1}{m\lambda_x} (w_{m0} - w_{00}) \end{aligned} \quad (2.26 b)$$

Hierbei gilt: $k < m-1$. Auf die Punkte nahe der spitzen Ecke wird bei der Formulierung der Randbedingungen in Abschnitt 5 eingegangen.

3. Die isotrope Platte mit veränderlicher Dicke

3.1 Abschnittsweise konstante Plattendicke

Es wird angenommen, daß eine sprunghafte Änderung der Plattendicke symmetrisch zur Plattenmittelfläche auftritt. Außerdem soll die Änderung nur entlang gerader Linien in der xy - Ebene erfolgen.

Die Platte wird längs dieser Linien in Plattenfelder mit konstanter Dicke zerlegt. Für diese Plattenfelder gelten die in Abschnitt 2 aufgestellten Gleichungen. Die Zerlegung ist erforderlich, da entlang der Unstetigkeit der Plattendicke in einer Krümmung, einem Biegemoment und dem Drillmoment Sprungstellen auftreten. Diese werden in den Übergangsbedingungen beim Zusammensetzen der Plattenfelder berücksichtigt.

3.2 Stetige Änderung der Plattendicke

Für die Plattensteifigkeit gilt: $K = K(x, y)$. Die Differentialgleichung der Platte ist [10] entnommen. Sie lautet mit den hier verwendeten Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} K \cdot \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial K}{\partial x} \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} + 2 \frac{\partial K}{\partial y} \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} \\ + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für die Schnittkräfte gilt:

$$\text{Biegemoment} \quad m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\text{Drillmoment} \quad m_{xy} = -(1-\mu) K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Querkraft} \quad q_x = -K \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ - (1-\mu) \frac{\partial K}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Ersatzscherkraft} \quad \bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ - \frac{\partial K}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ - 2(1-\mu) \frac{\partial K}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Wirkung der Schnittkräfte ist aus Bild 2.1 ersichtlich.

Als Unbekannte des Gleichungssystems werden hier nicht die Krümmungen unmittelbar, sondern die mit einem Steifigkeitsverhältnis multiplizierten Krümmungen gewählt. Es werden eingeführt:

$$X^* = \frac{K}{K_c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad Y^* = \frac{K}{K_c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

K_c ist dabei eine Vergleichssteifigkeit. Für das Steifigkeitsverhältnis wird die Abkürzung $s = \frac{K}{K_c}$ eingeführt.

$$X^* = s \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad Y^* = s \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.6)$$

Längs des 'schiefen' Randes werden die Krümmungen selbst als Unbekannte beibehalten.

$$T = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Mit (3.6) erhält die Differentialgleichung der Platte die einfachere Form:

$$K_c \cdot \Delta(X^* + Y^*) - (1-\mu) \frac{1}{s} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} Y^* + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} X^* \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p \quad (3.8)$$

Diese Gleichung enthält neben den Krümmungen noch die Plattenverwindung als weitere Unbekannte. Für den im Bauwesen häufig auftretenden Fall $\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} = 0$ entfällt der Term mit der Verwindung. Dieser Fall tritt z. B. auf, wenn die Plattendicke in x - oder y - Richtung konstant bleibt und sich nur in der anderen Richtung ändert. Aus Schalungsgründen ist das im Betonbau die Regel. Mit dieser Einschränkung erhält Gleichung (3.8) die Form:

$$\Delta(X^* + Y^*) - \frac{1-\mu}{s} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} Y^* + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} X^* \right) = \frac{p}{K_c} \quad (3.9)$$

Gleichung (3.9) wird durch Differenzen- bzw. Mehrstellenformeln angenähert dargestellt. Diese sind in Abschnitt 8.1 angegeben. An jedem inneren Gitterpunkt steht damit die erste Gleichung in den Plattenkrümmungen zur Verfügung.

Die Formulierung der Trägerrostbedingung kann von Abschnitt 2 übernommen werden. Die Platte wird wieder in die beiden Grundformen: Rechteck und rechtwinkliges Dreieck zerlegt. Die dafür aufgestellten Gleichungen (2.13) - (2.26) bleiben gültig, müssen aber auf die neuen Unbekannten umgeschrieben werden.

Das geschieht über die Beziehungen:

$$\{X_{\alpha,b}\} = \begin{pmatrix} X_{0\alpha}^* / S_{0\alpha} \\ X_{1\alpha}^* / S_{1\alpha} \\ X_{2\alpha}^* / S_{2\alpha} \\ \vdots \\ X_{(b-2)\alpha}^* / S_{(b-2)\alpha} \\ X_{(b-1)\alpha}^* / S_{(b-1)\alpha} \\ X_{b\alpha}^* / S_{b\alpha} \end{pmatrix} ; \{Y_{\alpha,b}\} = \begin{pmatrix} Y_{\alpha 0}^* / S_{\alpha 0} \\ Y_{\alpha 1}^* / S_{\alpha 1} \\ Y_{\alpha 2}^* / S_{\alpha 2} \\ \vdots \\ Y_{\alpha(b-2)}^* / S_{\alpha(b-2)} \\ Y_{\alpha(b-1)}^* / S_{\alpha(b-1)} \\ Y_{\alpha b}^* / S_{\alpha b} \end{pmatrix} \quad (3.10).$$

Durch Einführen von (3.10) in (2.18) bzw. (2.25) kann die zweite Gleichung pro Gitterpunkt aufgestellt werden.

Damit stehen an jedem inneren Gitterpunkt zwei Gleichungen in den mit dem Steifigkeitsverhältnis multiplizierten Krümmungen zur Verfügung.

4. Die orthotrope Platte

Die in [9] angegebene Differentialgleichung der orthotropen Platte mit konstanten Steifigkeiten (Huber - Gleichung) lautet:

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (4.1)$$

Für die Schnittkräfte gilt:

$$\text{Biegemoment} \quad m_x = -K_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\text{Drillmoment} \quad m_{xy} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.3)$$

$$\text{Querkraft} \quad q_x = -K_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (K_x \mu_y + 2C) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (4.4)$$

$$\text{Ersatzscherkraft} \quad \bar{q}_x = -K_x \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{4C}{K_x} + \mu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (4.5)$$

Zwischen den Konstanten besteht der Zusammenhang: $2H = K_x \mu_y + K_y \mu_x + 4C$

Anstelle der Huber-Gleichung (4.1) kann auch die in [11] angegebene Differentialgleichung als Ausgangspunkt genommen werden. In dieser Gleichung wird die sogenannte effektive Drillsteifigkeit $2H$ durch die Ersatzsteifigkeit $2H^*$ ersetzt. H^* wird an der wirklichen orthotropen Platte ermittelt, ohne daß die Steifigkeiten in Längs- und Querrichtung 'verschmiert' werden. Gegenüber Huber ändern sich für die weitere Rechnung nur die Konstanten in den Gleichungen (4.2) - (4.5), wobei $m_{xy} \neq m_{yx}$ wird.

Als Unbekannte werden eingeführt:

$$X^0 = K_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad Y^0 = K_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Mit der Abkürzung: $c = \frac{2H}{K_x + K_y}$ erhält die Differentialgleichung der orthotropen Platte die Form:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X^0 + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) Y^0 = p \quad (4.7)$$

In Abschnitt 8 wird diese Gleichung mit Hilfe einer Differenzenformel dargestellt. Damit entsteht die erste Gleichung für jeden inneren Gitterpunkt.

Die Formulierung der Trägerrostbedingung kann von Abschnitt 2 übernommen werden. Die Einführung der neuen Unbekannten geschieht mit den Beziehungen

$$X_{ik} = \frac{1}{K_x} \cdot X_{ik}^0 \quad ; \quad Y_{ik} = \frac{1}{K_y} \cdot Y_{ik}^0 \quad (4.8)$$

Durch Einführen von (4.8) in (2.18) bzw. (2.25) kann die zweite Gleichung pro Gitterpunkt aufgestellt werden.

Damit stehen an jedem inneren Gitterpunkt zwei Gleichungen in den mit der Plattensteifigkeit multiplizierten Krümmungen zur Verfügung.

5. Formulierung der Randbedingungen

Es werden nacheinander die Randbedingungen für die drei behandelten Plattenarten untersucht. Anschließend werden die Verhältnisse in den Plattenecken betrachtet.

5.1 Randbedingungen der isotropen Platte mit konstanter Dicke

5.1.1 Rand $x = \text{const.}$

Randbedingung $W = f(y)$:

($f(y)$ sei eine beliebige stetige Funktion.)

$$\text{Dann gilt: } \gamma = \frac{d^2 f}{dy^2} \quad (5.1)$$

Die Durchbiegungen und die Krümmungen γ längs des Randes sind damit für die Berechnung bekannte Größen.

Randbedingung $\frac{\partial W}{\partial x} = f(y)$:

Die Randneigung wird mit Hilfe der Gleichungen (2.11) und (2.12) dargestellt. Für die Ränder $x=0$ und $x=l_x$ ist die Neigung der Rechteckplatte mit (2.19) und die Neigung der rechtwinkligen Dreieckplatte mit (2.26) angegeben.

Für den Punkt $0(m-1)$ der Dreieckplatte nach Bild 2.6 wird eine Sonderformel benötigt. Das W - Gewicht kann hier nur mit der Trapezformel ermittelt werden.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{0(m-1)} = -\frac{\lambda x}{6} (2 X_{0(m-1)} + X_{1(m-1)}) + \frac{W_{1(m-1)} - W_{0(m-1)}}{\lambda x} \quad (5.2)$$

Nach Elimination der Durchbiegungen mit Gleichung (2.23) folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{0(m-1)} = & -\frac{\lambda x}{6} (2 X_{0(m-1)} + X_{1(m-1)}) \\ & + \frac{\lambda x}{9} \{F_{(m-1),m}\}^T \cdot \{ \{Y_{0,m}\} - (g+1) \{T_{R,m}\} \} \\ & + \frac{1}{m\lambda x} (W_{m0} - W_{00}) \end{aligned}$$

Randbedingung $m_x = f(y) :$

Durch Einführen von (2.6) in (2.1) ergibt sich:

$$m_x = -K (X + \mu Y) \quad (5.4)$$

Längs des Randes wird daher gefordert:

$$X + \mu Y = -\frac{f(y)}{K} \quad (5.5)$$

Randbedingung $\bar{q}_x = f(y) :$

Durch Einführen von (2.6) in (2.4) ergibt sich:

$$\bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial X}{\partial x} + (2-\mu) \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \quad (5.6)$$

Diese Bedingung wird mit Hilfe einer in [12] angegebenen Differenzenformel durch die Krümmungen X und Y dargestellt.

$$\text{Rand } x=0 : \quad (\bar{q}_x)_{0k} = \frac{K}{2\lambda_x} \left\{ 3X_{0k} - 4X_{1k} + X_{2k} + (2-\mu)(3Y_{0k} - 4Y_{1k} + Y_{2k}) \right\} \quad (5.7)$$

$$\text{Rand } x=l_x : \quad (\bar{q}_x)_{mk} = -\frac{K}{2\lambda_x} \left\{ X_{(m-2)k} - 4X_{(m-1)k} + 3X_{mk} + (2-\mu)(Y_{(m-2)k} - 4Y_{(m-1)k} + 3Y_{mk}) \right\} \quad (5.8)$$

Das Restglied beginnt hier mit den fünften Ableitungen der Durchbiegung.

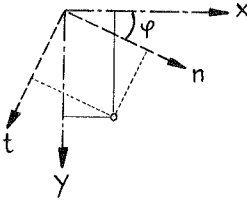
Für den Punkt $0(m-1)$ der Dreieckplatte nach Bild 2.6 wird eine Sonderformel benötigt. Mit einer Differenzenformel aus [12], deren Restglied bereits mit den vierten Ableitungen der Durchbiegung beginnt, ergibt sich:

$$(\bar{q}_x)_{0(m-1)} = \frac{K}{\lambda_x} \left\{ X_{0(m-1)} - X_{1(m-1)} + (2-\mu)(Y_{0(m-1)} - Y_{1(m-1)}) \right\} \quad (5.9)$$

Ein Rand $y = \text{const.}$ wird nicht gesondert untersucht, da nur die Formeln für den Rand $x = \text{const.}$ sinngemäß umzuändern sind.

5.1.2 'Schiefer' Rand $n = \text{const.}$

Zusammenhang zwischen x, y - und n, t - Koordinatensystem:



$$\begin{aligned} x &= n \cdot \cos \varphi - t \cdot \sin \varphi \\ y &= n \cdot \sin \varphi + t \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.10 \text{ a, b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial n} &= \cos \varphi & ; & \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -\sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= \sin \varphi & ; & \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.11 \text{ a-d})$$

Bild 5.1

Damit ergibt sich für die Ableitungen der Durchbiegung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n} &= \frac{\partial W}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial W}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial y} \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.12 \text{ a, b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} 2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \sin^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin^2 \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} 2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cos^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial t} &= \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (5.13 \text{ a-c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial n^3} &= \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \cos^3 \varphi + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} 3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \sin^3 \varphi \\ \frac{\partial^3 W}{\partial n \partial t^2} &= \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} (-2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \sin^3 \varphi) \\ &\quad + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} (-2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi) + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (5.14 \text{ a, b})$$

Dabei gilt: $\sin \varphi = \frac{\lambda_x}{\lambda_t} \quad ; \quad \cos \varphi = \frac{\lambda_y}{\lambda_t}$ (5.15)

Randbedingung $w = f(t)$:

Wie in Abschnitt 5. 1. 1 werden auch hier die Krümmungen T längs des Randes in einer Vorberechnung ermittelt und als bekannte Größen in das Gleichungssystem eingeführt.

Randbedingung $\frac{\partial w}{\partial n} = f(t)$:

Durch Gleichung (5. 12 a) wird $\frac{\partial w}{\partial n}$ durch $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ ausgedrückt.

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi \quad (5. 12 a)$$

Die beiden Neigungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ lassen sich mit Hilfe von (2. 11) bzw. (2. 12) darstellen. Als Beispiel ist $\frac{\partial w}{\partial x}$ an einem Punkt des 'schiefen' Randes mit (2. 26 b) angegeben.

Für $\frac{\partial w}{\partial x}$ im Punkt $(m-1)$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ im Punkt $(m-1)1$ gilt eine Sonderformel analog Gleichung (5. 3).

Randbedingung $m_n = f(t)$:

$$m_n = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

In dieser Gleichung muß $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$ durch die Krümmungen X, Y und T ausgedrückt werden. Aus den Gleichungen (5. 13 a, b) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= X + Y - T \end{aligned}$$

Längs des Randes gilt daher:

$$X + Y - (1-\mu) T = - \frac{f(t)}{K} \quad (5. 16)$$

Randbedingung $\bar{q}_n = f(t)$:

$$\bar{q}_n = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right)$$

Nach Einführen von (5. 14) folgt:

$$\begin{aligned} \bar{q}_n &= -K \left(a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + a_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \\ &= -K \left(a_1 \frac{\partial X}{\partial x} + a_2 \frac{\partial X}{\partial y} + a_3 \frac{\partial Y}{\partial x} + a_4 \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (5. 17) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \varphi \left(1 + (1-\mu) \sin^2 \varphi \right) \\ a_2 &= \sin \varphi \left(1 + (1-\mu) (1-3 \cos^2 \varphi) \right) \\ a_3 &= \cos \varphi \left(1 + (1-\mu) (1-3 \sin^2 \varphi) \right) \\ a_4 &= \sin \varphi \left(1 + (1-\mu) \cos^2 \varphi \right) \end{aligned}$$

In Gleichung (5. 17) werden die zur Darstellung von \bar{q}_x verwendeten Differenzenformeln eingeführt. Für den beliebigen Punkt $i k$ auf dem 'schiefen' Rand der Dreieckplatte ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\bar{q}_n)_{ik} &= -\frac{K}{2\lambda_x} \left((3X_{ik} - 4X_{(i-1)k} + X_{(i-2)k}) \cdot a_1 + (3Y_{ik} - 4Y_{(i-1)k} + Y_{(i-2)k}) \cdot a_3 \right) \\ &\quad - \frac{K}{2\lambda_y} \left((3X_{ik} - 4X_{i(k-1)} + X_{i(k-2)}) \cdot a_2 + (3Y_{ik} - 4Y_{i(k-1)} + Y_{i(k-2)}) \cdot a_4 \right) \end{aligned} \quad (5. 18)$$

Für die Punkte $(m-1)1$ und $1(m-1)$ müssen Sonderformeln analog (5. 9) verwendet werden.

$$\begin{aligned} (\bar{q}_n)_{(m-1)1} &= -\frac{K}{2\lambda_x} \left((3X_{(m-1)1} - 4X_{(m-2)1} + X_{(m-3)1}) \cdot a_1 + (3Y_{(m-1)1} - 4Y_{(m-2)1} + Y_{(m-3)1}) \cdot a_3 \right) \\ &\quad - \frac{K}{\lambda_y} \left((X_{(m-1)1} - X_{(m-1)0}) \cdot a_2 + (Y_{(m-1)1} - Y_{(m-1)0}) \cdot a_4 \right) \end{aligned} \quad (5. 19a)$$

$$\begin{aligned} (\bar{q}_n)_{1(m-1)} &= -\frac{K}{\lambda_x} \left((X_{1(m-1)} - X_{0(m-1)}) \cdot a_1 + (Y_{1(m-1)} - Y_{0(m-1)}) \cdot a_3 \right) \\ &\quad - \frac{K}{2\lambda_y} \left((3X_{1(m-1)} - 4X_{1(m-2)} + X_{1(m-3)}) \cdot a_2 + (3Y_{1(m-1)} - 4Y_{1(m-2)} + Y_{1(m-3)}) \cdot a_4 \right) \end{aligned}$$

Zusätzliche Gleichung für die Krümmungen Γ längs des Randes $\eta = \text{const.}$:
Längs des 'schiefen' Randes treten in jedem Gitterpunkt drei unbekannte Krümmungen X , Y und Γ auf. Daher muß dort eine weitere Bedingung formuliert werden. Dazu dient Gleichung (5. 12 b):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi \quad (5. 12 b)$$

Die Neigung $\frac{\partial w}{\partial t}$ läßt sich auch durch Anwenden einer Differenzenformel längs des 'schiefen' Randes darstellen. Daraus folgt für den beliebigen Punkt ik auf dem 'schiefen' Rand der Dreieckplatte:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{ik} = \frac{1}{2\lambda_t} (w_{(i-1)(k+1)} - w_{(i+1)(k-1)}) + \frac{\lambda_t}{12} (-T_{(i-1)(k+1)} + T_{(i+1)(k-1)}) \quad (5.20)$$

Das Restglied beginnt mit den fünften Ableitungen der Durchbiegung.

Durch Kombination von (5.12 b) und (5.20) entsteht die gesuchte zusätzliche Gleichung für Punkt ik des 'schiefen' Randes:

$$\begin{aligned} -\lambda_x \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} (w_{(i-1)(k+1)} - w_{(i+1)(k-1)}) \\ &+ \frac{\lambda_t^2}{12} (-T_{(i-1)(k+1)} + T_{(i+1)(k-1)}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die Neigungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ lassen sich mit Hilfe von (2.11) bzw. (2.12) darstellen. Als Beispiel ist $\frac{\partial w}{\partial x}$ an einem Punkt des 'schiefen' Randes mit (2.26 b) angegeben. Für $\frac{\partial w}{\partial x}$ im Punkt $1(m-1)$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ im Punkt $(m-1)1$ muß eine Gleichung analog (5.3) verwendet werden. Die Durchbiegungen in (5.21) werden durch (2.23) bzw. (2.24) ausgedrückt.

5.2 Randbedingungen der isotropen Platte mit veränderlicher Dicke

Es wird nur die Platte mit stetig veränderlicher Dicke betrachtet. Für abschnittsweise konstante Plattendicke gilt Abschnitt 5.1 ebenfalls.

Rand $x = \text{const.}$:

Bezüglich der Randbedingungen $w = f_1(y)$, $\frac{\partial w}{\partial x} = f_2(y)$ und $m_x = f_3(y)$ kann auf Abschnitt 5.1.1 verwiesen werden. Es muß nur beachtet werden, daß hier als Unbekannte die mit dem Steifigkeitsverhältnis multiplizierten Krümmungen auftreten, d. h. es muß Gleichung (3.10) eingearbeitet werden.

Randbedingung $\bar{q}_x = f(y)$:

$$\begin{aligned} \bar{q}_x = & -K \cdot \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ & - \frac{\partial K}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\mu) \frac{\partial K}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Gegenüber der Ersatzscherkraft der Platte mit konstanter Dicke sind die beiden letzten Terme hinzugekommen. Während der erste Zusatzterm einfach zu berücksichtigen ist, erfordert der zweite eine sehr kompliziert aufgebaute Formel. Da angenommen werden darf, daß beide Terme nur Korrekturglieder sind, werden sie hier vernachlässigt. Damit können die Gleichungen (5.7) - (5.9) unter Berücksichtigung von (3.10) zur angenäherten Darstellung von \bar{q}_x verwendet werden. Der Einfluß dieser Vernachlässigung muß jedoch an Zahlenbeispielen überprüft werden.

'Schiefer' Rand $\eta = \text{const.}$:

Wie am Rand $x = \text{const.}$ wird die Darstellung der Randbedingungen von Abschnitt 5.1.2 übernommen, wobei Gleichung (3.10) berücksichtigt werden muß. Die Unbekannten T sind dabei nicht mit dem Steifigkeitsverhältnis behaftet.

5.3 Randbedingungen der orthotropen Platte

Für den Rand $x = \text{const.}$ kann in allen Fällen und für den Rand $n = \text{const.}$ bezüglich der Randbedingungen in den Verformungen auf Abschnitt 5.1 verwiesen werden. In die Formeln müssen nur die Konstanten der orthotropen Platte nach den Gleichungen (4.2) - (4.5) eingeführt werden. Außerdem muß Gleichung (4.8) berücksichtigt werden, da die mit der Steifigkeit multiplizierten Krümmungen als Unbekannte auftreten.

Biegemoment und Ersatzscherkraft am Rand $n = \text{const.}$:

Durch Gleichgewichtsbetrachtung an einem dreieckigen Plattenelement mit den Rändern x, y bzw. $n = \text{const.}$ ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + (m_{xy} + m_{yx}) \sin \varphi \cos \varphi \\ m_{nt} &= -(m_x - m_y) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos^2 \varphi - m_{yx} \sin^2 \varphi \\ q_n &= q_x \cos \varphi + q_y \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.22 \text{ a-c})$$

Mit den Gleichungen (5.13) und (4.2), (4.3) ergibt sich für das Biegemoment:

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(-K_x \cos^2 \varphi - (K_y \mu_x + 2C) \sin^2 \varphi \right) \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \left(-K_y \sin^2 \varphi - (K_x \mu_y + 2C) \cos^2 \varphi \right) \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \cdot 2C \end{aligned}$$

Mit $X^0 = K_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $Y^0 = K_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, $T = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ läßt sich die Randbedingung $m_n = f(t)$ darstellen in der Form:

$$X^0 \cdot b_1 + Y^0 \cdot b_2 + T \cdot b_3 = f(t) \quad (5.23)$$

mit

$$\begin{aligned} b_1 &= -\cos^2 \varphi - \frac{K_y \mu_x + 2C}{K_x} \sin^2 \varphi \\ b_2 &= -\sin^2 \varphi - \frac{K_x \mu_y + 2C}{K_y} \cos^2 \varphi \\ b_3 &= 2C \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Ersatzscherkraft wird Gleichung (5.22 b) für das Drillmoment m_{nt} mit (5.13) umgeformt und nach t abgeleitet.

$$\begin{aligned}\bar{q}_n &= q_n + \frac{\partial m_{nt}}{\partial t} \\ \bar{q}_n &= \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \left[(-K_x(1 + \sin^2 \varphi) + K_y \mu_x \sin^2 \varphi) \cos \varphi \right. \\ &\quad + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \left[(K_x - K_y \mu_x + 4C) \cos^2 \varphi - K_y \mu_x - 4C \right] \sin \varphi \\ &\quad + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \left[(K_y - K_x \mu_y + 4C) \sin^2 \varphi - K_x \mu_y - 4C \right] \cos \varphi \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \left[-K_y(1 + \cos^2 \varphi) + K_x \mu_y \cos^2 \varphi \right] \sin \varphi \right\}\end{aligned}$$

Mit den Unbekannten X^0 , Y^0 und T ergibt sich:

$$\bar{q}_n = c_1 \frac{\partial X^0}{\partial x} + c_2 \frac{\partial X^0}{\partial y} + c_3 \frac{\partial Y^0}{\partial x} + c_4 \frac{\partial Y^0}{\partial y} \quad (5.24)$$

mit

$$\begin{aligned}c_1 &= \left[-(1 + \sin^2 \varphi) + \frac{K_y}{K_x} \mu_x \sin^2 \varphi \right] \cos \varphi \\ c_2 &= \left[\left(1 - \frac{K_y \mu_x - 4C}{K_x}\right) \cos^2 \varphi - \frac{K_y \mu_x + 4C}{K_x} \right] \sin \varphi \\ c_3 &= \left[\left(1 - \frac{K_x \mu_y - 4C}{K_y}\right) \sin^2 \varphi - \frac{K_x \mu_y + 4C}{K_y} \right] \cos \varphi \\ c_4 &= \left[-(1 + \cos^2 \varphi) + \frac{K_x}{K_y} \mu_y \cos^2 \varphi \right] \sin \varphi\end{aligned}$$

Damit kann die Randbedingung $\bar{q}_n = f(t)$ mit Hilfe der Gleichung (5.18) und (5.19) formuliert werden. Es müssen nur die Konstanten c_j anstelle der Werte $-K \cdot \alpha_j$ eingeführt werden.

5.4 Untersuchung der Plattenecken

5.4.1 Rechtwinklige Plattenecke

In einer rechtwinkligen Plattenecke treten bei der Berechnung im allgemeinen Fall drei Unbekannte des Gleichungssystems auf; die beiden Krümmungen X , Y und die Durchbiegung. Es können für den Eckpunkt daher auch nur drei Gleichungen formuliert werden, obwohl theoretisch vier Bedingungen (zwei von jedem Rand) zu erfüllen sind. Bei elastischer Lagerung oder freien Rändern muß außerdem noch eine Bedingung für das Drillmoment eingehalten werden. Die Ursache dieser Schwierigkeit ist die Vernachlässigung der Schubverzerrungen in der Kirchhoffschen Plattentheorie.

Es wird unterschieden in wesentliche und unwesentliche Randbedingungen, wobei als wesentlich für die Krümmungen die Bedingungen bezüglich Randneigung und Randmoment angesehen werden. Bedingungen bezüglich der Ersatzscherkraft werden als unwesentlich betrachtet und im Eckpunkt nicht berücksichtigt. Die wesentlichen Randbedingungen im Eckpunkt ergeben zwei Gleichungen, die den beiden unbekanntenen Krümmungen zugeordnet sind.

Der dritten Unbekannten, der Eckdurchbiegung, entspricht eine Gleichung bezüglich der im Eckpunkt auftretenden Einzelkraft. Diese ist proportional dem Drillmoment.

Die Verwindung des Eckpunktes wird ermittelt, indem die Randneigung in einer Richtung nach der zweiten abgeleitet wird. Dazu wird eine Differenzenformel aus [12] verwendet.

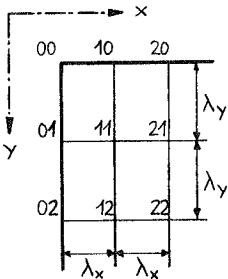


Bild 5.1

In Bild 5.1 ist eine rechtwinklige Plattenecke dargestellt. Die Verwindung soll im Punkt 00 durch Ableiten von $\frac{\partial w}{\partial x}$ nach y ermittelt werden.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{00} = \frac{1}{2\lambda_y} \left\{ -3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{00} + 4\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{01} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{02} \right\}$$

(5.25 a)

Das Restglied beginnt mit den vierten Ableitungen der Durchbiegung.

Für relativ genaue Rechnungen ist das Restglied in Formel (5.25 a) zu groß. Ihre Anwendung ist nur bei Rechnungen mit grobem Raster zweckmäßig. Eine Differenzenformel, deren Restglied mit den sechsten Ableitungen der Durchbiegung beginnt, lautet:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{00} = \frac{1}{12 \lambda_y} \left\{ -25 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{00} + 48 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{01} - 36 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{02} \right. \\ \left. + 16 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{03} - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{04} \right\} \end{aligned} \quad (5.25 \text{ b})$$

Die im Eckpunkt auftretende Einzelkraft A ist gleich dem doppelten Drillmoment.

$$A_{00} = -2(1-\mu)K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{00} \quad (5.26)$$

Die Richtung der Einzelkraft ergibt sich aus den Drillmomenten nach Bild 2.1. Bei der orthotropen Platte tritt $2C$ an die Stelle von $(1-\mu)K$.

Für jede rechtwinklige Ecke mit unbekannter Durchbiegung besteht eine Bedingung für die Eckkraft A , die mit Hilfe von (5.25) und (5.26) aufgestellt wird.

5.4.2 Spitzwinklige Plattenecke

Wie in der rechtwinkligen Plattenecke treten auch hier mehr Bedingungen als Unbekannte auf. In [13] wird gezeigt, daß darüber hinaus in nicht rechtwinkligen Plattenecken bei starr eingespannten, frei drehbar gelagerten oder freien Rändern immer die Verwindung zu Null wird. Die Erfüllung dieser Bedingung kann bei einer Plattenberechnung nach dem Differenzenverfahren zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen. Die Durchbiegung hat in der Nähe des Eckpunktes einen sehr komplizierten Verlauf. Eine wirklichkeitsnahe Darstellung mit einfachen, stetigen Funktionen ist unter Erfüllung aller Randbedingungen unmöglich. Daher wird nur bei zwei freien oder zwei elastisch gelagerten Rändern eine Bedingung an die Verwindung gestellt, um der Einzelkraft in der Ecke Rechnung zu tragen. Bei allen anderen Rändern werden nur zwei Bedingungen in den Krümmungen erfüllt.

Unabhängig vom Berechnungsverfahren macht sich in nicht rechtwinkligen Ecken die Vernachlässigung der Schubverzerrungen stark bemerkbar. In [14] wird an einem Beispiel gezeigt, daß die Erfüllung aller Randbedingungen in nicht rechtwinkligen Ecken falsche Ergebnisse bewirkt. Es werden dort die gleichseitige Polygonplatte mit vielen Ecken und die Kreisplatte einander gegenübergestellt. Die aufgezeigten Widersprüche lassen sich im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie teilweise beheben, wenn bei der Polygonplatte nicht alle Randbedingungen erfüllt werden.

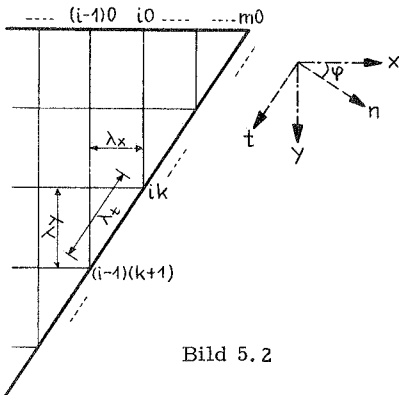


Bild 5.2

In Bild 5.2 ist die spitzwinklige Ecke m_0 einer Dreieckplatte dargestellt. Für die Einzelkraft in der Plattenecke gilt:

$$A_{m_0} = m_{y_x} + m_{n_t}$$

Für die isotrope Platte folgt mit (5.13):

$$A_{m_0} = -(1-\mu)K \cdot \cot \varphi (\gamma - T) \quad (5.27)$$

Für die orthotrope Platte ergibt sich mit (5.22 b):

$$m_{yx} + m_{nt} = - (m_x - m_y) \sin \varphi \cos \varphi + (m_{xy} + m_{yx}) \cos^2 \varphi$$

Durch Einführen von (4.2), (4.3) und (5.13) gilt damit für die Einzelkraft:

$$\begin{aligned} A_{m0} &= X^0 \sin \varphi \cos \varphi \left(1 - \frac{K_y u_x + 2C}{K_x} \right) \\ &\quad - Y^0 \sin \varphi \cos \varphi \left(1 - \frac{K_x u_y - 2C \cdot \cot^2 \varphi}{K_y} \right) \\ &\quad + T \cot \varphi \cdot 2C \end{aligned} \quad (5.28)$$

Außerdem muß noch die zusätzliche Gleichung für die Krümmung T im Eckpunkt formuliert werden. Hierzu wird der Zusammenhang zwischen der Verwindung $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$ und den Krümmungen X, Y, T verwendet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} 2 \sin \varphi &= - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} 2 \sin \varphi &= - X \cdot \sin^2 \varphi + Y \cdot \cos^2 \varphi - T \end{aligned} \quad (5.29)$$

Zudem ergibt sich $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$ entsprechend (5.25) als die Ableitung von $\frac{\partial W}{\partial x}$ nach t .

Durch Gleichsetzen beider Darstellungen von $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$ entsteht die gesuchte zusätzliche Gleichung im Eckpunkt $m0$.

Im Eckpunkt $0m$ gelten völlig analog aufgebaute Beziehungen.

5.4.3 Einspringende Ecke

In einer einspringenden Ecke, an der starr eingespannte oder frei drehbar gelagerte Ränder zusammenstoßen, sind die Krümmungen längs der beiden Randlinien im Eckpunkt selbst gleich Null und unmittelbar daneben in der Platte sehr groß. Bei zwei freien Rändern gilt das gleiche für die Randbiegemomente.

Da mit der Differenzenrechnung diese sprunghafte Änderung nicht erfaßt werden kann, werden die beiden Krümmungen bzw. die Randbiegemomente in der Ecke nicht gleich Null gesetzt. Dafür wird gefordert, daß im Eckpunkt die Plattenneigungen in Richtung der beiden Ränder stetig sind.

Wenn die Eckdurchbiegung unbekannt ist, muß wie zuvor in den Abschnitten 5.4.1 und 2 noch eine Bedingung für die Verwindung aufgestellt werden.

6. Formulierung der Übergangsbedingungen

6.1 Übergang zwischen zwei Plattenfeldern

Bei der Berechnung wird die Platte in die beiden Grundformen; Rechteck und rechtwinkliges Dreieck zerlegt. Beim Zusammenbau dieser Plattenfelder muß Kontinuität in den Verformungen und den Schnittkräften erfüllt werden.

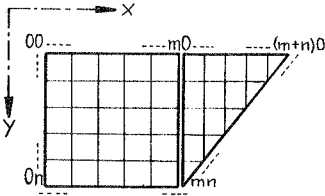


Bild 6.1

In Bild 6.1 ist eine Trapezplatte dargestellt, die zur Berechnung in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt wird. Längs der Linie $m0-mn$ müssen die Übergangsbedingungen formuliert werden. Dabei wird das rechteckige Plattenfeld mit der Hochzahl (1) und das dreieckige mit (2) gekennzeichnet.

Durch Gleichsetzen der Krümmungen X, Y längs der 'Naht' und der Durchbiegungen in $m0, mn$ für beide Plattenfelder wird Kontinuität in Durchbiegung und Biegemoment erreicht. Für die Plattenneigung quer zur 'Naht' wird mit (2.11), (2.12) bzw. (5.3) die Bedingung: $(\frac{\partial W}{\partial x})^{(1)} = (\frac{\partial W}{\partial x})^{(2)}$ in jedem Punkt mk gefordert. Im Eckpunkt mn wird $(\frac{\partial W}{\partial x})^{(2)}$ mit (5.12 b) durch $\frac{\partial W}{\partial t}$ und $\frac{\partial W}{\partial y}$ dargestellt. Außerdem muß Kontinuität im Verlauf der Ersatzscherkraft erfüllt werden. Diese Bedingung: $(\bar{q}_x)^{(1)} = (\bar{q}_x)^{(2)}$ wird mit Hilfe von (5.7) - (5.9) aufgestellt.

Im Eckpunkt mn kann $(\bar{q}_x)^{(2)}$ nicht unmittelbar angeschrieben werden. Die Ableitungen nach x müssen durch solche nach t und y ersetzt werden. Mit dem Zusammenhang:

$$x = y \cot \varphi - t \frac{1}{\sin \varphi} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cot \varphi \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{1}{\sin \varphi}$$

läßt sich die Ersatzscherkraft angeben als:

$$\bar{q}_x = - \frac{K}{\sin \varphi} \left\{ \frac{\partial X}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial X}{\partial t} + (2-\mu) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) \right\} \quad (6.1)$$

Mit einer Differenzenformel ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
 (\bar{q}_x)_{mn}^{(2)} = & -\frac{K}{2\lambda_x} \left\{ (3X_{mn} - 4X_{m(n-1)} + X_{m(n-2)}) \right. \\
 & - (3X_{mn} - 4X_{(m+1)(n-1)} + X_{(m+2)(n-2)}) \\
 & + (3Y_{mn} - 4Y_{m(n-1)} + Y_{m(n-2)}) \cdot (2-\mu) \\
 & \left. - (3Y_{mn} - 4Y_{(m+1)(n-1)} + Y_{(m+2)(n-2)}) \cdot (2-\mu) \right\} \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

Für die isotrope Platte veränderlicher Dicke ist diese Bedingung nur eine Näherung. Bei der orthotropen Platte treten in (6.1), (6.2) andere Konstanten, aber die gleichen Ableitungsgrößen auf.

Bei der isotropen Platte mit abschnittsweise konstanter Plattendicke bewirkt die unterschiedliche Steifigkeit beider Plattenfelder einen Sprung im Biegemoment m_y , im Drillmoment m_{xy} und der Krümmung X . Längs der 'Naht' $x = \text{const.}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 m_x^{(1)} &= m_x^{(2)} \\
 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^{(1)} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^{(2)}
 \end{aligned}$$

Für die Krümmungen X und Y gelten daher die Übergangsbedingungen:

$$Y^{(1)} = Y^{(2)} = Y \quad (6.3)$$

$$K^{(1)} X^{(1)} - K^{(2)} X^{(2)} = -\mu (K^{(1)} - K^{(2)}) \cdot Y \quad (6.4)$$

Die anderen Übergangsbedingungen gelten auch hier.

6.2 Übergang zwischen Platte und Randträger

Wenn die Platte an einen elastischen Randträger anschließt, treten außer den Schnittmomenten auch Normalkräfte in der Platte auf. Diese Scheibenwirkung entfällt nur dann, wenn die Schwerlinie des Trägers in Höhe der Plattenmittelfläche liegt. Die Berücksichtigung der Scheibenwirkung ist erforderlich, da durch sie die Plattenbiegemomente quer zum Rand vergrößert werden. Wie in [1] gezeigt wird, läßt sich das Tragverhalten durch Annahme einer 'mitwirkenden Plattenbreite' für praktische Fälle ausreichend genauer fassen. Der Näherungswert für die 'mitwirkende Plattenbreite' kann [15] oder der dort angegebenen Literatur entnommen werden. Damit ergibt sich eine ideelle Biegesteifigkeit EJ des Randträgers.

Die Formulierung der Übergangsbedingungen geschieht an einem Rand $x = l_x$. Der Randträger habe über die gesamte Länge den gleichen Querschnitt. Das Plattenbiegemoment m_x längs des Randes wirkt auf den Träger als Torsionsmomentenbelastung. Bei Annahme reiner St. Venantscher Torsion ergibt sich die Bedingung:

$$-K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = +GJ_T \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}$$

Außerdem wirkt die Ersatzscherkraft der Platte als Querbelastung auf den Träger.

$$-K \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$$

Durch Einführen von (2.6) erhalten die Übergangsbedingungen die Form:

$$X + \mu Y + \frac{GJ_T}{K} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + (2-\mu) \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{EJ}{K} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (6.6)$$

Mit Differenzenformeln aus [12] ergibt sich für den beliebigen Punkt m_k :

$$X_{mk} + \mu Y_{mk} + \frac{GJ_T}{K} \cdot \frac{1}{2\lambda_x} (Y_{(m-2)k} - 4Y_{(m-1)k} + 3Y_{mk}) = 0 \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_x}{2} (X_{(m-2)k} - 4X_{(m-1)k} + 3X_{mk}) \\ & + \frac{\lambda_x}{2} (Y_{(m-2)k} - 4Y_{(m-1)k} + 3Y_{mk}) \cdot (2-\mu) \\ & - \frac{EJ}{K} g (Y_{m(k-1)} - 2Y_{mk} + Y_{m(k+1)}) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die Restglieder in (6.7) und (6.8) beginnen mit den fünften Ableitungen der Durchbiegung. Die Gleichungen gelten auch für die isotrope Platte veränderlicher Dicke und für die orthotrope Platte. Bei veränderlicher Plattendicke ist (6.8) nur eine Näherung.

Am Rand $\gamma = \text{const.}$ gelten völlig analoge Beziehungen. Die Kontinuitätsbedingungen am 'schiefen' Rand $\eta = \text{const.}$ ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.13) und (5.14).

Die Übergangsbedingungen werden auch benötigt, wenn die Platte im Feld durch einen Unterzug verstärkt ist. Zur Berechnung wird die Platte entlang des Unterzugs aufgeschnitten. Anschließend muß sowohl zwischen den Plattenfeldern als auch zwischen Platte und Unterzug Kontinuität erfüllt werden.

Plattenecke, in der zwei elastische Randträger zusammentreffen:

Für die Momente wird Gleichung (6.7) in den beiden Richtungen senkrecht zu den Rändern angesetzt. Außerdem muß die in der Plattenecke auftretende Einzelkraft A von den beiden Randträgern aufgenommen werden. Die Einzelkraft A ist daher gleich der Differenz der Eckquerkräfte in den Randträgern. Bei gleichem Querschnitt beider Träger gilt für den Eckpunkt m_0 der Rechteckplatte nach Bild 2.5:

$$\begin{aligned} A_{m_0} &= + E J \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) \\ &= + E J \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Mit einer Differenzenformel aus [12] ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{m_0} &= + \frac{E J}{2} \left(\frac{1}{\lambda_x} (X_{(m-2)0} - 4 X_{(m-1)0} + 3 X_{m_0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_y} (3 Y_{m_0} - 4 Y_{m_1} + Y_{m_2}) \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Das Restglied beginnt mit den fünften Ableitungen der Durchbiegung. Für den Eckpunkt m_0 der Dreieckplatte nach Bild 2.6 ergibt sich auf gleiche Art:

$$\begin{aligned} A_{m_0} &= +EJ \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} \right) \\ &= +EJ \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ A_{m_0} &= +\frac{EJ}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda_x} (X_{(m-2)0} - 4X_{(m-1)0} + 3X_{m0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_t} (3T_{m0} - 4T_{(m-1)1} + T_{(m-2)2}) \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Einzelkraft A_{m_0} wird entsprechend Gleichung (5.26) bzw. (5.28) ermittelt und mit (6.10) bzw. (6.11) gleichgesetzt.

7. Ermittlung der Plattenverwindung

Wenn die Krümmungen der Platte in jedem Gitterpunkt bekannt sind, lässt sich die Verwindung nur am 'schiefen' Rand unmittelbar angeben. Aus Gleichung (5.13) folgt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

Mit der Abkürzung

$$Z = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{7.1}$$

ergibt sich:

$$2Z = X \cdot \tan \varphi + Y \cdot \cot \varphi - T \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \tag{7.2}$$

Die Verwindung in einer rechtwinkligen Plattenecke wird nach Gleichung (5.25) berechnet.

An allen anderen Gitterpunkten erfolgt die Ermittlung von Z über die Beziehungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{7.3}$$

Dazu wird die Differentialbeziehung $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ zwischen zwei Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ durch einen Zusammenhang zwischen den Funktionswerten f und g an benachbarten Gitterpunkten angenähert dargestellt.

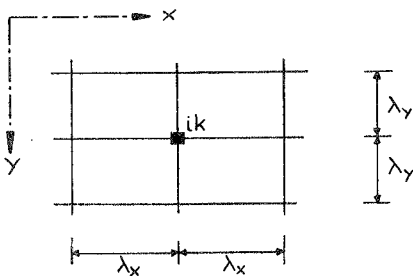


Bild 7.1 zeigt einen Ausschnitt des Maschengitters mit dem beliebigen Innenpunkt ik . Mit einer Mehrstellenformel wird für jede der drei Gitterlinien $y = \text{const.}$ eine Beziehung zwischen f und $\frac{\partial f}{\partial x}$ und für jede der drei Gitterlinien $x = \text{const.}$ eine Beziehung zwischen g und $\frac{\partial g}{\partial y}$ aufgestellt.

Bild 7.1

Aus einer Linearkombination dieser sechs Beziehungen lassen sich mit Hilfe der Differentialbeziehungen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ die ersten Ableitungen eliminieren. Damit entsteht der gesuchte Zusammenhang zwischen den Funktionswerten f und g , der die Differentialbeziehung angenähert darstellt.

Mit anderen Mehrstellenformeln wird analog die gleiche Differentialbeziehung für einen Randpunkt des Gitters dargestellt.

Die so aufgestellten Formeln sind in Abschnitt 8.2 angegeben.

Beim Aufstellen des Gleichungssystems muß von beiden Differentialbeziehungen (7.3) ausgegangen werden, da sonst ein linear abhängiges Gleichungssystem entsteht. Dabei kann z. B. die erste Beziehung an allen Innenpunkten des Gitters und die zweite an allen Randpunkten verwendet werden.

8. Zusammenstellung der erforderlichen zweidimensionalen Differenzenformeln

Die Formeln werden als sogenannte Differenzensterne entsprechend Bild 8.1 dargestellt. Der Koeffizient der Entwicklungsstelle ist jeweils unterstrichen. Die Ordnung des ersten nicht abgeglichenen Gliedes der Taylorentwicklung ist angegeben. $R(\lambda^j)$ bedeutet, daß der erste Term des Restgliedes aus den j -ten Ableitungen der Unbekannten X, Y bzw. f, g besteht.

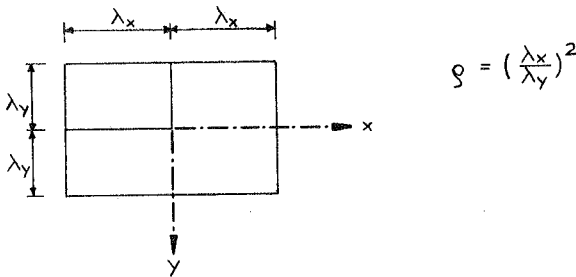


Bild 8.1

8.1 Differenzenformeln zur Darstellung der Differentialgleichung der Platte

Bei der Herleitung der Formeln wurde von den in [16] angegebenen Koeffizienten der Taylorentwicklung Gebrauch gemacht.

Die Wahl der zu verwendenden Formel richtet sich vor allem nach der Plattenbelastung. Die genaueren Formeln sind nur zweckmäßig, wenn ein stetiger Verlauf der Belastung vorliegt.

Das Differenzenverfahren bringt ganz allgemein nur dann befriedigende Ergebnisse, wenn die Plattenbelastung über einen größeren Bereich der Platte verteilt ist. Bei Punkt- und Streckenlasten sowie Flächenlasten geringer Ausdehnung müssen die Unstetigkeiten durch eine Partikularlösung der Plattengleichung erfaßt werden. Mit dem Differenzenverfahren werden dann die Randbedingungen erfüllt.

Formeln für die isotrope Platte mit konstanter Dicke

$$\Delta (X + Y) = \frac{p}{K} \quad (2.7)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & +\varrho & \\
 +1 & \frac{-2(1+\varrho)}{} & +1 \\
 & +\varrho &
 \end{array} \cdot (X + Y) \\
 + \quad \boxed{\frac{-1}{}} \cdot \lambda_x^2 \frac{p}{K} = 0 + R(\lambda^4) \quad (A)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 -(1+\varrho) & +2(1-5\varrho) & -(1+\varrho) \\
 +2(\varrho-5) & \frac{+20(1+\varrho)}{} & +2(\varrho-5) \\
 -(1+\varrho) & +2(1-5\varrho) & -(1+\varrho)
 \end{array} \cdot (X + Y)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & +1 & \\
 +1 & \frac{+8}{} & +1 \\
 & +1 &
 \end{array} \cdot \lambda_x^2 \frac{p}{K} = 0 + R(\lambda^6) \quad (B)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 -1 & -4 & -1 \\
 -4 & +20 & -4 \\
 -1 & -4 & -1 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot (X+Y) \\
 \\
 + \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 +1 & +1 & +1 \\
 +1 & +82 & +1 \\
 +1 & +1 & +1 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot \frac{\lambda^2}{15} \frac{p}{K} \\
 \\
 + \begin{array}{|c|}
 \hline
 +3 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot \frac{\lambda^4}{10} \frac{\Delta p}{K} = 0 + R(\lambda^8) \quad (C)
 \end{array}$$

Formel (C) ist [12] entnommen. Sie gilt nur für $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 -(1+g) & +2(1-5g) & -(1+g) \\
 +2(g-5) & +20(1+g) & +2(g-5) \\
 -(1+g) & +2(1-5g) & -(1+g) \\
 \hline
 \end{array} & \cdot 60 (X+Y) \\
 \\
 + \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 5+3g & \frac{50-6g}{+36g^2} & 5+3g \\
 86-6g & \frac{428+12g}{-72g^2} & 86-6g \\
 5+3g & \frac{50-6g}{+36g^2} & 5+3g \\
 \hline
 \end{array} & \cdot \lambda_x^2 \frac{p}{K} \\
 \\
 + \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 +18 & 0 & -18 \\
 \hline
 \end{array} & \cdot \lambda_x^3 \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \\
 + \begin{array}{|c|}
 \hline
 +18g^{3/2} \\
 0 \\
 -18g^{3/2} \\
 \hline
 \end{array} & \cdot \lambda_x^3 \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \\
 = 0 + 3\lambda_y^6 g(1-g^2) \frac{\partial(X+Y)}{\partial y^6} + R(\lambda^8) \quad (D)
 \end{array}$$

Formeln für die isotrope Platte mit veränderlicher Dicke

$$\Delta(X^* + Y^*) = \frac{p}{K_c} + \frac{1-\mu}{s} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot Y^* + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \cdot X^* \right) \quad (3.9)$$

In einer Vorberechnung muß der Ausdruck $\Delta(X^* + Y^*)$ an jedem Gitterpunkt aufgestellt werden. Das Steifigkeitsverhältnis $s = \frac{K}{K_c}$ ist in der Regel als Funktion von x und y gegeben. Daraus müssen die Werte $\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ und $\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ für jeden Gitterpunkt ermittelt werden. Wenn der Steifigkeitsverlauf nur in diskreten Punkten vorliegt, ist dazu eine numerische Differentiation erforderlich.

Mit den Größen $\Delta(X^* + Y^*)$ kann Formel (A) oder (B) an jedem Gitterpunkt angewendet werden. Es muß dort nur $\frac{p}{K}$ durch $\Delta(X^* + Y^*)$ ersetzt werden. Das Restglied der Formeln bezieht sich dann auf die Ableitungen der Unbekannten X^* und Y^* .

Formel für die orthotrope Platte

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X^0 + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) Y^0 = p \quad (4.7)$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|} \hline +c \cdot q \\ \hline +1 \quad \frac{-2(1+c \cdot q)}{\quad} \quad +1 \\ \hline +c \cdot q \\ \hline \end{array} \cdot X^0 \\
 + \begin{array}{|c|} \hline +q \\ \hline +c \quad \frac{-2(c+q)}{\quad} \quad +c \\ \hline +q \\ \hline \end{array} \cdot Y^0 \\
 + \frac{-1}{\quad} \cdot \lambda_x^2 p = 0 + R(\lambda^4)
 \end{array} \quad (E)$$

8.2 Differenzenformeln zur Ermittlung der Plattenverwindung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{mit} \quad f = f(x, y) ; g = g(x, y)$$

+ 1	0	- 1
+ 4	0	- 4
+ 1	0	- 1

· f

+

- 1	- 4	- 1
0	0	0
+ 1	+ 4	+ 1

· g √g = 0 + R(λ⁵)

(F)

+ 9	0	- 9
+ 54	0	- 54
+ 27	0	- 27

· f

+

- 10	- 40	- 10
- 9	- 36	- 9
+ 18	+ 72	+ 18
+ 1	+ 4	+ 1

· g √g = 0 + R(λ⁵)

(G)

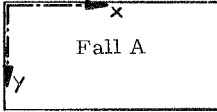
$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|} \hline -1,5 & \underline{0} & -1,5 \\ \hline -1,5 & 0 & -1,5 \\ \hline \end{array} \cdot f \\ + \\ \begin{array}{|ccc|} \hline -1 & \underline{-4} & -1 \\ \hline +1 & +4 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot g\sqrt{g} = 0 + R(\lambda^3) \\ \text{(H)} \end{array}$$

Formel (F) gilt für Innenpunkte des Gitters. An Randpunkten und Gitterpunkten nahe des 'schiefen' Randes wird Formel (G) oder (H) verwendet. Die Anwendung von (H) ist nur bei grobem Raster sinnvoll.

9. Zahlenbeispiele

9.1 Rechteckplatten unter konstanter Querlast

Es werden zwei Rechteckplatten mit dem Seitenverhältnis 2 : 1 unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung p untersucht. Die Randbedingungen sind:



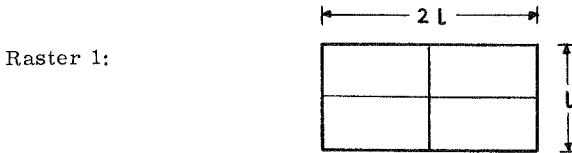
alle vier Ränder frei drehbar
gelagert



drei Ränder eingespannt,
ein Rand frei

Fall A ist äußerst 'gutmütig', während bei Fall B die Biegefläche einen relativ komplizierten Verlauf hat. Die Genauigkeit der Ergebnisse ist in beiden Fällen etwa gleich, wenn die Rasterweiten λ_x , λ_y bei B halb so groß wie bei A gewählt werden.

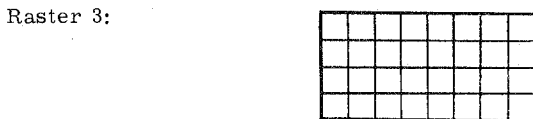
Durch Verfeinern des Maschengitters soll die Wirkungsweise des Verfahrens gezeigt werden. Es werden folgende Rasterteilungen verwendet:



$$\lambda_x = l$$
$$\lambda_y = \frac{l}{2}$$



$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{l}{2}$$



$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{l}{4}$$

Anzahl der unbekanntten Krümmungen X bzw. Y bei Ausnutzung der Symmetrie von Platte und Belastung:

Raster	Fall A	Fall B
1	2	6
2	4	10
3	16	36

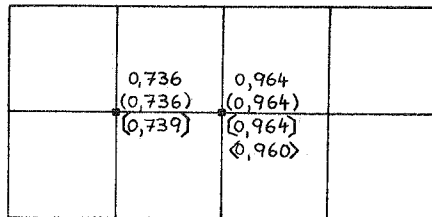
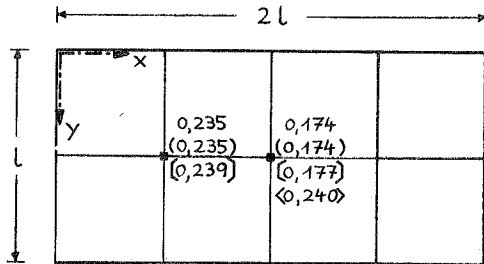
Zur Darstellung der Plattengleichung (2. 7) wird Differenzenstern (B) verwendet. Zum Aufstellen der Trägerrostbedingung (2. 18) werden die benötigten Vektoren $\{F_{a,b}\}$ vorberechnet. Bei Raster 1 ist ein Vektor, bei Raster 2 sind drei und bei Raster 3 sechs Vektoren erforderlich.

Ergebnisse :

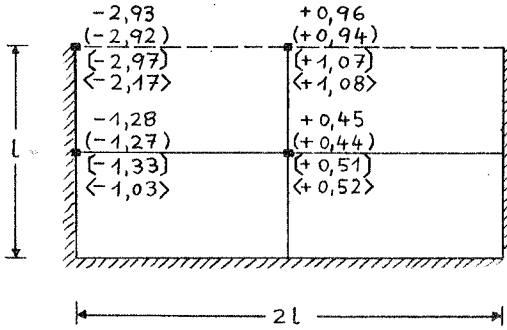
Es werden die $(-10 \frac{K}{pl^2})$ - fachen Werte der Krümmungen und der Verwindung angegeben und mit den Ergebnissen von [17] verglichen. Für die folgende Darstellung gilt:

- ... Ergebnis aus Raster 3
- (—) ... Ergebnis aus [17]
- (—) ... Ergebnis aus Raster 2
- <—> ... Ergebnis aus Raster 1

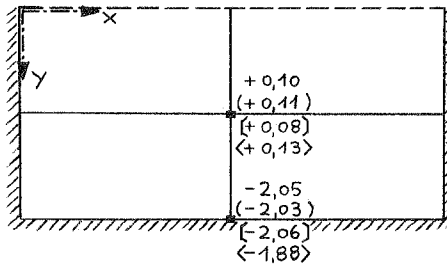
Fall A:



Fall B:



$$- 10 \frac{K}{pl^2} \cdot X$$



$$- 10 \frac{K}{pl^2} \cdot Y$$

Die Plattenverwindung wird hier nur für Fall A angegeben, da für Fall B keine Vergleichswerte in [17] angegeben sind.

Aus den Krümmungen X , Y infolge Raster 3 wird mit Formel (5.25 b) die Verwindung Z_{00} im Platteneckpunkt berechnet:

$$Z_{00} = 0,0658 \frac{pl^2}{K}$$

Für die Verwindung an den anderen Gitterpunkten wird ein Gleichungssystem aufgestellt. Dabei wird in allen Randpunkten $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ mit Formel (G) und in den Innenpunkten $\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ mit Formel (F) dargestellt.

0,425 (0,426)	0,218 (0,219)	Symm. -Achsen	
0,658 (0,661)	0,312		

$$- 10 \frac{K}{pl^2} \cdot Z$$

Die Vergleichswerte in () sind [17] entnommen.

Die Ersatzscherkraft, also die Auflagerkraft längs der Ränder, läßt sich mit (5.7) bzw. (5.8) berechnen. In der Mitte des kurzen Randes ergibt sich $\bar{q}_x = 0,53 \text{ pl}$ und in der Mitte des langen Randes $\bar{q}_y = 0,52 \text{ pl}$. Die in [17] angegebenen Werte sind $\bar{q}_x = 0,55 \text{ pl}$ bzw. $\bar{q}_y = 0,52 \text{ pl}$.

9.2 Dreieckplatte unter konstanter Querlast

Es wird ein gleichseitiges Dreieck mit frei drehbar gelagerten Rändern unter gleichmäßiger Vollbelastung p untersucht. Die exakte Lösung für diesen Fall ist in [18] angegeben.

Wegen Symmetrie kann die Untersuchung auf die Hälfte der Platte beschränkt werden.

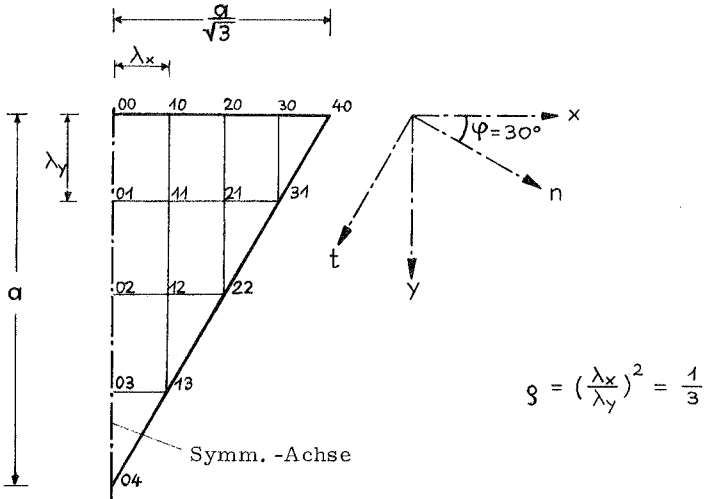


Bild 9.1

In Bild 9.1 ist die betrachtete Plattenhälfte mit dem gewählten Raster dargestellt. Die Randbedingungen lauten

für die Symmetrieachse $x = \text{const.} : \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \bar{q}_x = 0$

für den Rand $y = \text{const.} : X = 0 \quad , \quad Y = 0$

für den 'schiefen' Rand $n = \text{const.} : X + Y = 0 \quad , \quad T = 0$

Außerdem gilt am 'schiefen' Rand die zusätzliche Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi = 0$$

Nach Berücksichtigung der Randbedingungen, die direkte Aussagen über X , Y oder T machen, verbleiben 15 unbekannte Krümmungen.

Zur Darstellung der Plattengleichung (2.7) wird Differenzenstern (A) verwendet. Für die Trägerrostbedingung (2.25) müssen hier vier verschiedene Vektoren $\{\bar{F}_{a,b}\}$ vorberechnet werden.

Wegen des sehr groben Rasters ist die Darstellung der Randbedingungen in den Punkten 03, 13 und 31 nahe der spitzen Ecken von großem Einfluß. Bei Verwendung von (5.9) für \bar{q}_x in 03 ergeben sich völlig unbefriedigende Ergebnisse. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen wurde daher eine Formel hergeleitet, deren Restglied mit den fünften Ableitungen der Durchbiegung beginnt. Als Differenzenstern geschrieben lautet diese Formel:

$$\begin{aligned} & \boxed{\frac{-2}{+2}} \cdot (X + (2-\mu) Y) + \underline{2} \cdot \lambda_x \frac{\bar{q}_x}{K} \\ & + \underline{1} \cdot \left[-\lambda_x^2 \frac{p}{K} + \boxed{\frac{+1}{-2}} \cdot \varrho (Y + \mu X) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

Die Faktoren der Entwicklungsstelle sind jeweils unterstrichen.

Die so ermittelten Krümmungen sind jedoch in der Nähe der spitzen Ecken noch mit sehr großem Fehler behaftet. Die Ursache dafür ist die relativ ungenaue Darstellung der Randneigung durch Gleichung (5.3). Diese Gleichung wird für $\frac{\partial w}{\partial x}$ in 03 und 13 und für $\frac{\partial w}{\partial y}$ in 31 benötigt.

Eine wesentliche Verbesserung wird durch folgende Annahme erreicht: Im Eckbereich ergebe sich die zweite Ableitung von X bzw. Y längs der Winkelhalbierenden als arithmetisches Mittel aus den zweiten Ableitungen von X bzw. Y längs der beiden Randlinien. Damit wird ein angenäherter parabolischer Verlauf von X bzw. Y längs 03 - 13 bzw. 30 - 31 angesetzt.

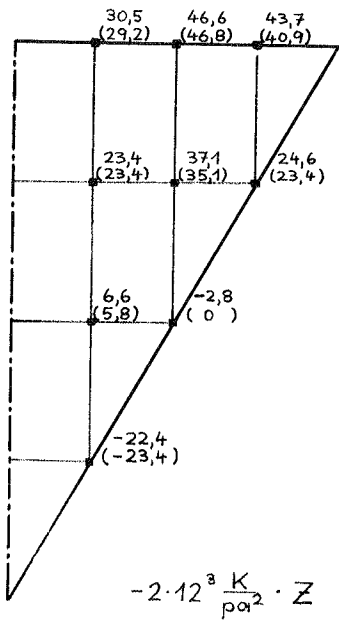
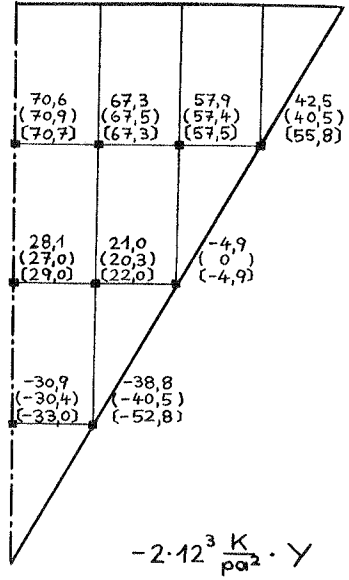
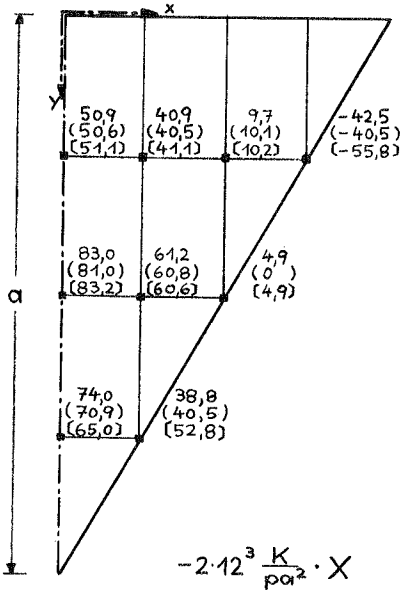
Die Plattenverwindung Z in den Punkten 31, 22, 13 des 'schiefen' Randes wird mit Gleichung (7.2) ermittelt. Für die Verwindung in den anderen Punkten wird ein Gleichungssystem aufgestellt. Dabei wird in den Punkten 10, 20, 11 von der Beziehung $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ und in 30, 21, 12 von $\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ausgegangen. In Punkt 11 wird Formel (F) und in den anderen Punkten Formel (H) verwendet.

Für die folgende Darstellung der Ergebnisse gilt:

- ... Ergebnis unter Verwendung der verbesserten Darstellung der Randneigungen und von (9.1) für \bar{q}_x nahe der spitzen Ecken
- (—) ... Werte aus [18]
- [—] ... Ergebnis unter Verwendung von (5.3) für die Randneigungen und von (9.1) für \bar{q}_x nahe der spitzen Ecken (nur für die Krümmungen angegeben)

Die Zahlenwerte bedeuten die $(-2 \cdot 12^3 \cdot \frac{K}{\rho \alpha_2})$ -fachen Krümmungen bzw. Verwindungen.

Der größte Fehler in den Krümmungen tritt an Punkt 22 auf. Innerhalb der zwei Maschen 13-22-31 verlaufen die Zahlenwerte von + 40,5 auf - 40,5. Die Symmetriebedingung: $X_{22} = Y_{22} = 0$ wurde nicht in die Rechnung eingeführt, um eine weitere Kontrolle für die Genauigkeit zu erhalten.



9.3 In ihrer Ebene gedrückte Platten

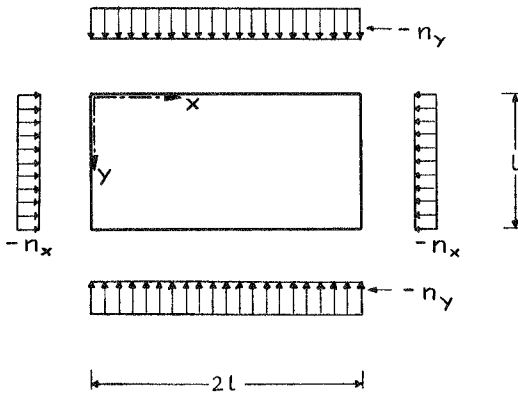
Es wird eine Platte konstanter Dicke betrachtet, die außer Querbelastung noch Randlasten in Plattenebene erhält. Die Stützung der Platte soll Verschiebungen des Randes parallel zur Plattenmittelfläche nicht behindern. Bei kleinen Durchbiegungen darf angenommen werden, daß die Durchbiegung keinen Einfluß auf den Scheibenspannungszustand hat. Die zugehörige verallgemeinerte Plattengleichung ist in [9] angegeben.

$$K \cdot \Delta \Delta w = p + n_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

n_x , n_{xy} , n_y sind die Schnittkräfte aus dem Scheibenspannungszustand.

Für den Fall: $n_{xy} = 0$ kann diese Differentialgleichung mit dem gezeigten Verfahren behandelt werden. Der Sonderfall: $p = 0$ gilt für Beulen der Platte.

Es wird der folgende einfache Stabilitätsfall untersucht:



Alle Ränder sind frei drehbar gelagert. Die Randdruckkräfte $-n_x, -n_y$ sind gleichmäßig verteilt. Es wird die Beullast ermittelt für $n_x = n_y$ und für $n_y = 0$. Die exakten Werte sind in [19] angegeben.

Die Plattengleichung lautet hier:

$$K \cdot \Delta \Delta w = n_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$K \cdot \Delta (X+Y) = n_x \cdot X + n_y \cdot Y$$

Mit $\eta = -\frac{n_x}{K}$ ergibt sich:

$$\Delta (X+Y) = -\eta (X + \frac{n_y}{n_x} \cdot Y)$$

Es wird ein Maschengitter mit $\lambda_x = \lambda_y = \frac{l}{2}$ gewählt. Das zugehörige Gleichungssystem enthält sechs Unbekannte. Der Eigenwert η ist aber nur in den drei Gleichungen vertreten, die sich aus der Plattengleichung (hier mit Differenzenstern (B) dargestellt) ergeben.

	$n_x = n_y$			$n_y = 0$		
	$\eta \cdot (\frac{l}{2})^2$		Art der Knick - figur	$\eta \cdot (\frac{l}{2})^2$		Art der Knick - figur
	berechnet	aus [19]		berechnet	aus [19]	
Erster (krit.) Eigenwert	3,05	$\frac{5}{16} \pi^2 = 3,08$	symm.	10,0	$\pi^2 = 9,9$	antim.
Zweiter Eigenwert	5,00	$\frac{1}{2} \pi^2 = 4,94$	antim.	11,7	$(\frac{13}{12} \pi)^2 = 11,6$	symm.
Dritter Eigenwert	7,79	$\frac{13}{16} \pi^2 = 8,02$	symm.	14,9	$(\frac{5}{4} \pi)^2 = 15,4$	symm.

Die Angabe über die Art der Knickfigur gilt für die Symmetrieeigenschaft bezüglich einer Parallelen zur y - Achse durch die Plattenmitte.

Die zum Eigenwert zugehörige Beullast ergibt sich zu:

$$-n_x = K \cdot \eta \quad ; \quad n_y = n_x \quad \text{bzw.} \quad n_y = 0$$

10. Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit werden isotrope Platten mit konstanter und mit veränderlicher Dicke sowie orthotrope Platten mit konstanten Steifigkeiten behandelt. Untersucht werden polygonal begrenzte Platten mit beliebigen Randbedingungen. Es wird das Differenzen- bzw. Mehrstellenverfahren angewendet, wobei von einem rechteckigen Maschengitter ausgegangen wird. Als Unbekannte werden die beiden Plattenkrümmungen in Gitterrichtung eingeführt.

An jedem Innenpunkt des Gitters werden die folgenden beiden Gleichungen formuliert:

Die Differentialgleichung der Platte, also das Gleichgewicht am Plattenelement, wird in den beiden Krümmungen ausgedrückt und durch eine Mehrstellenformel angenähert dargestellt.

Die Kontinuität der Biegefläche wird an einem Trägerrost formuliert, dessen Systemlinien mit dem gewählten Maschengitter zusammenfallen. Diese Verträglichkeitsbedingung für die Plattenkrümmungen wird - im Hinblick auf die Darstellung der Randneigung - mit Hilfe von \bar{W} -Gewichten aufgestellt. Sie sind ein Sonderfall des Mehrstellenverfahrens und haben für den Bauingenieur den Vorteil der Anschaulichkeit.

Für die Darstellung der Randbedingungen in den Plattenkrümmungen gilt:

Aussagen über den Verlauf der Randedurchbiegung oder das Randediegemoment lassen sich unmittelbar in den Krümmungen der Randpunkte ausdrücken. Die Plattenneigung normal zum Rand wird durch \bar{W} -Gewichte und die Ersatzscherkraft durch eine Differenzenformel dargestellt.

Außer den Krümmungen in Gitterrichtung treten im allgemeinen Fall die Durchbiegungen der Plattenecken und die Krümmungen längs eines 'schiefen' Randes als weitere Unbekannte auf. Die zugehörigen Gleichungen werden wie die Randbedingungen mit Hilfe von Differenzenformeln bzw. \bar{W} -Gewichten aufgestellt.

Nach der Berechnung der Krümmungen wird die Verwindung der Platte ermittelt. Die Differentialbeziehungen zwischen den Krümmungen und der Verwindung werden mit Hilfe von Mehrstellenformeln beschrieben. Damit wird ein lineares Gleichungssystem für die Verwindung an den Gitterpunkten aufgestellt.

Querkraft und Ersatzscherkraft ergeben sich durch einmalige numerische Differentiation, wobei ein geringfügiger Genauigkeitsverlust auftritt.

Mit dem gezeigten Verfahren wird der Verlauf der Schnittgrößen infolge vorgegebener Lastfälle ermittelt. Zum Aufstellen von Einflußflächen ist dieser Weg ungeeignet.

An jedem Innenpunkt des Gitters treten zwei Unbekannte - die Plattenkrümmungen - auf. Bei der üblichen Anwendung des Differenzenverfahrens wird nur eine Unbekannte - die Durchbiegung - benötigt. Mit den Plattenkrümmungen ist aber die zu behandelnde Differentialgleichung nur von zweiter Ordnung. Daher liefert schon ein relativ grobes Gitter brauchbare Ergebnisse.

Eine veränderliche Dicke bei isotropen Platten bringt nur geringfügigen Mehraufwand gegenüber konstanter Dicke. Die zur Berechnung notwendige Voraussetzung $\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} = 0$ für die Plattensteifigkeit K ist im Bauwesen in der Regel erfüllt.

Lebenslauf

5. 4. 1939 geboren in Saarbrücken als Sohn des Sparkassenbeamten Wilhelm Ludwig und seiner Ehefrau Hanna, geb. Beuerle
- 1945 - 1949 Besuch der Volksschule in Saarbrücken
- 1949 - 1958 Besuch der Staatlichen Oberrealschule Saarbrücken
Reifeprüfung: März 1958
- 1958 - 1964 Sechs Monate Baupraktikum in Saarbrücken
Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau
Abschluß: Mai 1964
- Seit 1964 Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baustatik,
Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer