

ZUM TRAGVERHALTEN DES AUFLAGER- BEREICHS VON FLACHDECKEN

von
HANS-PETER ANDRÄ



Bericht Nr 82-3
aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Direktor Professor Dr -Ing. F W Bornscheuer
Stuttgart 1983

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen
Titel als Dissertation der Fakultät 2 Bauingenieur- und
Vermessungswesen am 28.10.1981 vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung:

5. Juli 1982

Berichte können über das Institut für Baustatik,
Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140,
7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

K u r z f a s s u n g

ANDRÄ, HANS-PETER:

Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken

Als Ergebnis von Versuchen und FE-Berechnungen wird ein Traglastmodell für den rotationssymmetrisch belasteten Auflagerbereich von Stahlbeton-Flachdecken entwickelt.

Das Modell besteht aus vom Stützenrand ausstrahlenden schalenförmigen Betondruckgliedern, in die in der Ebene der oberen Bewehrung die Deckenlast über schalenförmige Betonzugglieder eingeleitet wird. Biegemomente werden durch ringförmige Zug- und Druckgurte aufgenommen.

Die geometrischen Abmessungen des Modells ergeben sich aus der Betonzugfestigkeit und der flachsten möglichen Druckstrebenneigung.

Die Tragfähigkeit hängt von der Druckfestigkeit der schalenförmigen Betondruckglieder am Stützenrand ab und kann mit Hilfe der Plastizitätstheorie berechnet werden.

Summary

A load capacity model for the axisymmetrically loaded support of flat slabs is derived from test results and finite element analyses.

The model consists of a fan of concrete compression shells radiating from the column edge, loaded through concentric concrete tension shells.

The dimensions of the model result from the tensile strength of the concrete and from the flattest possible strut inclination.

The capacity depends on the compressive strength of the concrete at the column edge, and can be calculated by means of the theory of plasticity.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

1. Aufgabenstellung	8
2. Literatur-Übersicht	10
3. Schnittkräfte im Auflagerbereich von Kreisplatten nach der technischen Biegelehre	29
4. Verwendung nichtlinearer Werkstoffgesetze für Stahlbeton im elektronischen Rechenprogramm ADINA	40
5. Nachrechnung einiger Versuche mit Hilfe des elektronischen Rechenprogrammes	56
6. Versuche mit Modellen aus Mikrobeton	91
7. Vereinfachtes Modell zur Erläuterung des Tragmechanismus im Auflagerbereich von Flachdecken und Herleitung eines Rechenverfahrens	100
8. Überprüfung des Rechenverfahrens anhand von Versuchen	129
9. Bewertung und Ausblick	136
10. Zusammenfassung	142
11. Literatur-Verzeichnis	143

Bezeichnungen

1. Längen, Höhen, Abstände

- a Abstand der Bewehrungsstäbe, Breite der Elementkreisringe einer Kreisplatte
- d Plattendicke
- h Nutzhöhe
- r_s Radius einer Stütze mit Kreisquerschnitt
- r_r Radius einer kreisförmigen Ersatzplatte
- x Abstand der Nulllinie vom gedrückten Rand
- z Hebelarm der inneren Kräfte

2. Bewehrung, Bewehrungsgrad

- A_s Querschnitt der Biegebewehrung
- a_s Querschnitt der Biegebewehrung, auf die Längeneinheit bezogen
- $\mu = \frac{a_s}{h}$ Biegebewehrungsgrad

3. Kennwerte der Baustoffe, Festigkeiten

- E Elastizitätsmodul
- K Plattensteifigkeit

μ	Querdehnungszahl des Betons
β_C	Zylinderdruckfestigkeit des Betons
β_P	Prismenfestigkeit des Betons
β_R	Rechenwert der Druckfestigkeit des Betons
β_W	Würfeldruckfestigkeit des Betons
β_S	Streckgrenze des Stahls
β_Z	Zugfestigkeit des Betons

4. Lasten, Schnittgrößen

P	Stützenlast
Q	wirksame Querkraft für die Bemessung auf Durchstanzen
Z	Ringzugkraft
k	Druckkraft in Richtung der Erzeugenden von der Kegelschale, bezogen auf den Stützenumfang
m	Biegemoment, auf die Längeneinheit bezogen
p	Linienlast
q	Querkraft, auf die Längeneinheit bezogen
$u = \frac{r}{z}$	horizontale Umlenkraft der Biegebewehrung

5. Spannungen, Dehnungen, Verformungen

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Spannungen in Richtung x, y, z
σ_r, σ_φ	Spannungen in radialer und tangentialer Richtung
ϵ_s, ϵ_b	Stahldehnung, Betondehnung
σ_s, σ_b	Stahlspannung, Betonspannung
τ	Schubspannung
p	Auflagerpressung geneigter Druckstreben - bzw. Schalen in der Platte am Stützenrand
Δ_r	Radiale Verformung der Platte
w	Durchbiegung der Platte
φ	Rotationswinkel der verformten Platte am Stützenrand

6. Fusszeiger

e	... elastisch
b	... des Betons
s	... der Bewehrung
u	... beim Bruch
y	... beim Fließen der Bewehrung

Hier nicht aufgeführte, in den zitierten Veröffentlichungen verwendete Bezeichnungen werden im Text erläutert.

1. Aufgabenstellung

Zur Ermittlung der örtlichen Beanspruchungen im Auflagerbereich von Flachdecken unter Berücksichtigung des nicht-linearen Werkstoffverhaltens und der Rissbildung gibt es unterschiedliche Rechenansätze.

In der Baupraxis werden Schnittkräfte auf der Grundlage der Elastizitätstheorie ermittelt, die Bemessung erfolgt in der Regel getrennt für die Beanspruchungen infolge Querkraft und Moment. Genormte Richtwerte für die Beurteilung der Schubtragfähigkeit wurden aus Versuchsergebnissen gewonnen. Der örtliche Versagensmechanismus bei Versuchen (Durchstanzen) wird in der Literatur unterschiedlich beschrieben und bewertet.

Diese unterschiedliche Bewertung ist darauf zurückzuführen, dass sich bei Versuchen einerseits die jeweils spezifischen Randbedingungen in der Auswertung nicht vollständig eliminieren lassen und andererseits die Auswahl und Deutung der Messergebnisse zum Teil von der Interpretation des jeweiligen Forschers abhängen.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe einer FE-Berechnung mit nicht-linearem Werkstoffgesetz der Tragmechanismus gerissener Stahlbetonplatten im stützennahen Bereich analysiert. Aus der Analyse der Rechenergebnisse wird ein Modell zur Beschreibung des Trag- und Versagensmechanismus abgeleitet. Die mathematische Beschreibung des Modells liefert ein Rechenverfahren, dessen Gültigkeit anhand der Nachrechnung von Versuchsergebnissen überprüft wird.

Für die Untersuchung der örtlichen Beanspruchungen wird es als ausreichend angesehen, anstelle eines Flachdeckensystems nur einen Kreisplattenausschnitt mit entsprechender Biege- und Querkraftbeanspruchung im Auflagerbereich zu betrachten.

Die Untersuchung wird auf rotationssymmetrische Belastung und kreisförmigen Stützenquerschnitt beschränkt.

2. Literatur-Übersicht

2.1 Allgemeines

Eine umfassende chronologische Zusammenstellung der Literatur über das Tragverhalten von Flachdecken wurde von Stiglat in [2-1] veröffentlicht. In [2-2] wurden vom Verfasser nationale Bemessungsvorschriften miteinander verglichen und die Wirkungsweise einer Schubbewehrung experimentell untersucht.

In der vorliegenden Übersicht wird versucht, die Literatur nach den Versagensmechanismen zu ordnen, von denen die Autoren direkt oder indirekt bei ihren Ableitungen ausgegangen sind.

2.2 Das Biegebruchmodell

Das Biegebruchmodell, Bild 2-1, das dem Ansatz von Reimann [2-3] zugrunde liegt, geht davon aus, dass die Tragfähigkeit einer Platte erschöpft ist, wenn ihre Betondruckspannungen in der Nähe der Stütze infolge tangentialer Biegemomente die Betondruckfestigkeit überschreiten.

Als Rechenmodell nimmt Reimann eine sich elastisch verhaltende anisotrope Kreisringplatte an, die mit dem unendlich steifen Mittelteil durch ein Gelenk mit Feder verbunden ist, Bild 2-2.

In der Kreisringplatte wirken tangentiale Biegemomente $m_{t,p}$ infolge der Last P , die am inneren Rand als Linienlast q angreift, und tangentiale Biegemomente $m_{t,m}$ infolge des Einspannmoments m_s , welches durch die Feder

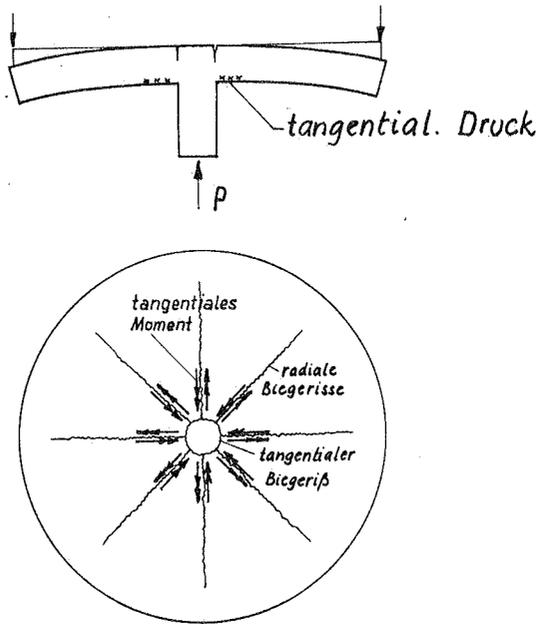


Bild 2-1 Biegebruchmodell in Schnitt und Draufsicht

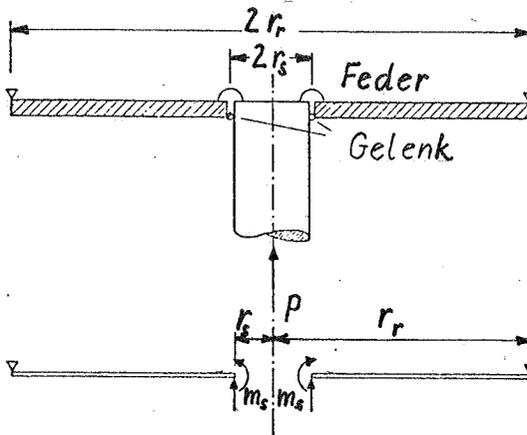


Bild 2-2 Radial anisotrope Kreisringplatte, mit einem unendlich steifen Mittelteil durch Gelenk und Feder verbunden, als Grundlage der Bruchtheorie von Reimann

übertragen wird. Ist m_u das Biegebruchmoment des Plattenquerschnitts pro Längeneinheit, so ergibt sich die Biegebruchlast vereinfacht zu

$$P_u = P \cdot \frac{m_u}{m_p + m_s}$$

Bestimmt man die Bruchlast nach der Fliessgelenktheorie nach Johansen [2-4], so wird ebenfalls das Biegebruchmoment des Plattenquerschnitts massgebend. Hier geht man davon aus, dass sich im Stützenbereich ein fächerartiger Gelenkmechanismus analog Bild 2-1 ausgebildet hat, in dem die Biegemomente m_u (negative Momente) und m'_u (positive Momente) aktiviert werden (Bild 2-3).

Aus der Gleichsetzung von innerer und äusserer Arbeit erhält man

$$P_u \cdot \delta = 2\pi(r_r - r_s) m_u \cdot \psi + 2\pi \cdot r_s \cdot m_u \cdot \psi + 2\pi \cdot r_r \cdot m'_u \cdot \psi$$

Mit

$$\delta = (r_r - r_s) \cdot \psi$$

ist

$$P_u (r_r - r_s) = m_u \cdot 2\pi r_r + m'_u \cdot 2\pi r_r$$

Als Grenzwert ergibt sich für

$$r_s \ll r_r \text{ und}$$

$$|m'_u| \ll |m_u|$$

$$P_u = 2\pi m_u, \text{ vgl. [2-5]}$$

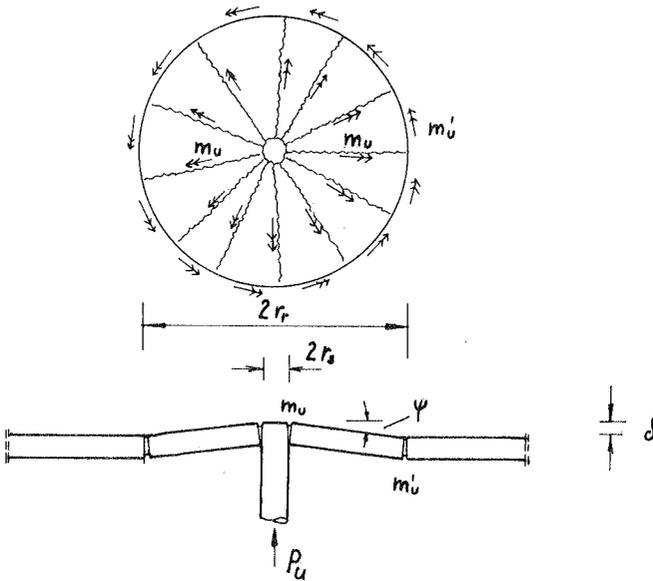


Bild 2-3 Gelenkmechanismus nach der Flie遡gelenktheorie

Es wird also das langns der radialen Gelenklinien wirkende Biegebruchmoment, d.h. das tangentielle Biegebruchmoment massgebend, siehe Bild 2-3.

Dieterle hat in [2-6] nachgewiesen, dass wegen der grossen Veränderung der radialen Biegemomente langns eines durch die Platte geführten Schnittes der Verbund der Biegebewehrung versagen kann, bevor das Biegebruchmoment durch das Flie遡ssen der Bewehrung mobilisiert werden kann.

Dieterle unterscheidet als Versagensursache dabei

1. das Erreichen der Verbundfestigkeit β_{r_1} und
2. das Abspalten der Betondeckung, wobei Spaltzugkräfte infolge der Verbundwirkung und lotrechte Zugspannungen durch die Druckstrebenkräfte zusammenwirken.

2.3 Das Biegeschubbruchmodell

Beim Biegeschubbruchmodell (Bild 2-4), das der Versuchsinterpretation von Kinnunen und Nylander [2-7] zugrunde liegt, wird die Platte durch einen um die Stütze verlaufenden geneigten Riss in einen inneren und äusseren Teil aufgeteilt, wobei der äussere Teil durch Radialrisse in einzelne Sektorelemente aufgeteilt wird. Die Sektoren stützen sich längs des Stützenumfangs auf eine gedachte Kegelschale ab und sind über das Bewehrungsnetz zugfest miteinander verbunden, Bild 2-5.

Aus den geometrischen Beziehungen und der Kräftegleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ am Sektorelement erhält man einen ersten Wert $P_{u,I}$ der Durchstanzlast als Funktion der Betondruckfestigkeit und der Geometrie.

$$P_{u,I} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot x \cdot \frac{1 + x/r_s}{1 + x/2r_s} \cdot \sigma_k \cdot f(\alpha)$$

σ_k ist die Betondruckfestigkeit in der gedachten Kegelschale, die von der Betonqualität und vom Verhältnis des Stützendurchmessers $2 r_s$ zur statischen Höhe h der Platte abhängig ist.

Aus der Betrachtung der Verformungen und aus der Momentengleichgewichtsbedingung wird ein zweiter Wert $P_{u,II}$ der Durchstanzlast P_u berechnet.

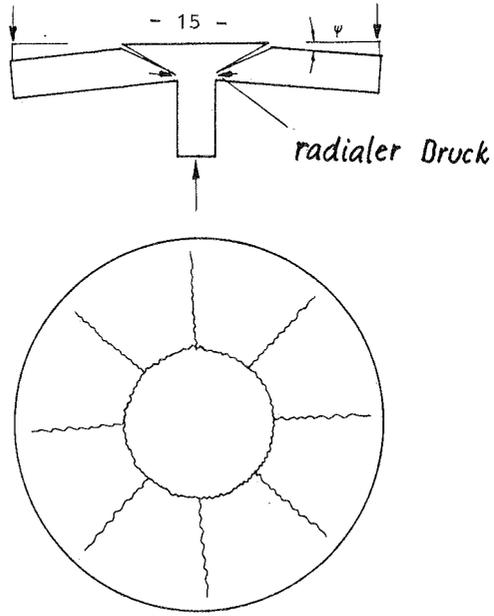


Bild 2-4 Biegeschubbruchmodell in Schnitt und Draufsicht
(Rotation von Plattenteilen um die Stütze)

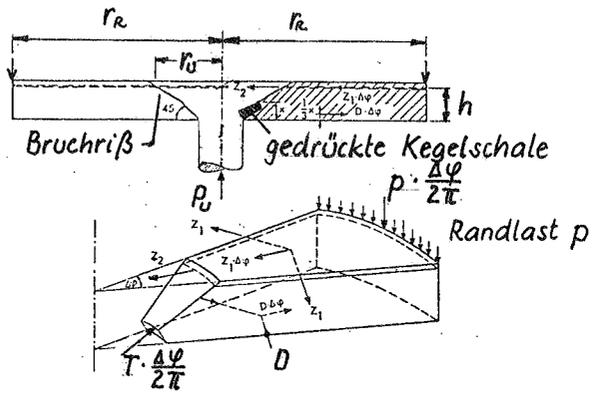


Bild 2-5 Modell zur Erklärung des Durchstanzens nach Kinnunen und Nylander [2-7]

Die möglichen Verformungswerte (Rotation der Platten-sektoren um das Rotationszentrum in Höhe der Nulllinie) sind Konstante aus Versuchsbeobachtungen und werden zahlenmässig wie folgt bestimmt:

$$\text{für } 0 < \frac{2r_s}{h} < 2 : \psi = 0,0035 \left(1 + \frac{r_s}{x}\right) \left(1 - 0,22 \frac{2r_s}{h}\right)$$

$$\text{für } \frac{2r_s}{h} \geq 2 \quad \psi = 0,0019 \left(1 + \frac{r_s}{x}\right)$$

Bei grossen Verdrehungen erreicht die Stahlspannung über der Stütze die Streckgrenze, dieser Bereich wird durch den Radius r_F abgegrenzt.

$$\frac{r_F}{h} = \frac{E_s}{E_{o,2}} \psi \left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

Der Radius r_u des Durchstanzkegels in der Höhe der Biegebewehrung wird mit

$$\frac{r_u}{h} = \frac{r_s}{h} + 1,8 \text{ definiert}$$

Für die Durchstanzlast $P_{u,II}$ erhält man schliesslich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{r_F}{h} \geq \frac{r_R}{h} : P_{u,II} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \beta_{o,2} \cdot h^2 \cdot \frac{r_R}{h} \cdot \frac{h - \frac{x}{3}}{r_R - r_s}$$

$$\frac{r_R}{h} \geq \frac{r_F}{h} \geq \frac{r_u}{h} : P_{u,II} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \beta_{o,2} \cdot h^2 \cdot \frac{r_F}{h} \left[1 + \xi_n \frac{r_R}{r_F}\right] \frac{h - \frac{x}{3}}{(r_R - r_s)}$$

$$\frac{r_F}{h} < \frac{r_u}{h} : P_{u,II} = 1,1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \beta_{0,2} \cdot h^2 \cdot \frac{r_F}{h} \cdot \left[1 + \alpha_n \frac{r_R}{r_u} \right] \cdot \frac{h - \frac{x}{3}}{(r_R - r_S)}$$

Damit ist ein Zusammenhang hergestellt zwischen der Bruchlast und den Abmessungen und Baustoffkennwerten der Platte. Eine explizite Darstellung von P_u ist allerdings nicht möglich, man kann jedoch, von einem geschätzten Wert ausgehend, durch Iteration denjenigen Wert P_u finden, der die Bedingungen

$$P_u = P_{u,I} = P_{u,II}$$

erfüllt.

In den Ausdrücken für P_u kommt keine Schubspannung oder Betonfestigkeit vor. Demnach tritt das Versagen entweder durch Erreichen der Streckgrenze des Stahles oder der 'Schubdruckfestigkeit' des Betons infolge der grossen Biegemomente am Stützenrand r_S ein.

Das Rechenverfahren von Kinnunen und Nylander enthält einige Hilfswerte, die letztlich bestimmte Versuchsbeobachtungen beschreiben und physikalisch nicht erklärt werden.

Der Kräfteverlauf innerhalb der einzelnen Sektorelemente selbst wird nicht verfolgt. Die Besonderheiten der durch die beobachtete Rotation entstehenden Biegelinie werden nicht kommentiert.

Damit ist die Theorie von Kinnunen und Nylander in einigen Punkten nicht ganz vollständig, sie liefert jedoch offensichtlich zuverlässige Ergebnisse und dient unter anderem als Grundlage für das vereinfachte Rechenverfahren der DIN 1045.

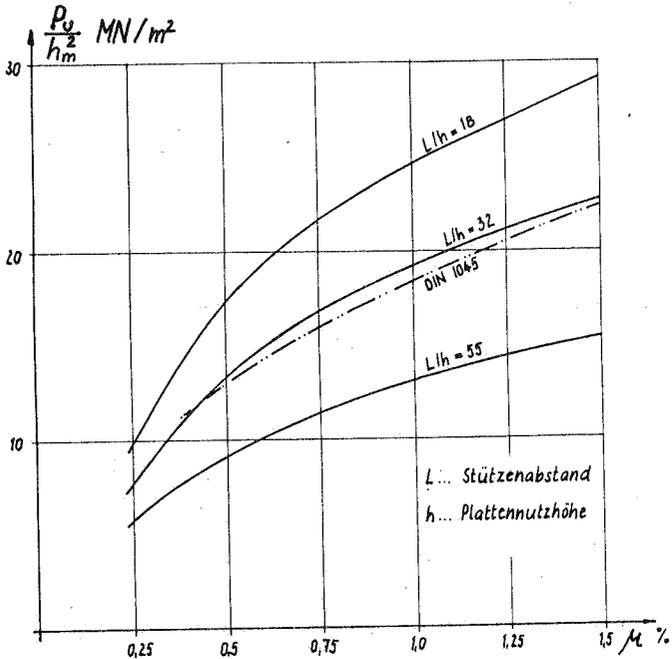


Bild 2-6 Durchstanzlasten P_u nach Kinnunen-Nylander und DIN 1045 ($\nu = 2,10$) für $\frac{d_s}{h_m} = 2,0$, B 25, aus [2-1]

Beim Gebrauchlast-Nachweis - nach DIN 1045 - geht man von einer zulässigen rechnerischen Schubspannung τ_r aus, die in einem definierten Schnitt in der Platte um die Stütze herum (bei Rundstützen im Abstand $h/2$ vom Stützenrand) eingehalten werden muss.

Die Grösse der zulässigen Schubspannung τ_r ist abhängig von der Betonqualität und vom Biegebewehrungsprozentsatz μ_g .

$$\begin{aligned}\tau_r &= 1,69 \sqrt{\mu_g} \tau_{011} & \mu_g < 1,5 \% < 25 \beta_{WN}/\beta_S \\ \tau_{011} &= 0,5 \text{ MN/m}^2 \quad \text{B 25} \\ &= 0,6 \text{ MN/m}^2 \quad \text{B 35}\end{aligned}$$

Mit dem Umfang u und dem Sicherheitsfaktor $\nu = 2,1$ ergibt sich die Durchstanzlast nach DIN 1045 zu

$$P_u = 2,1 \cdot u \cdot h \cdot \tau_r$$

In Bild 2-6 sind die Durchstanzlasten nach DIN 1045 mit denen nach Kinnunen und Nylander verglichen [aus 2-1]. Dabei wurde von einem Verhältnis des Stützendurchmessers $2 r_s = d_s$ zur mittleren statischen Höhe h_m der Platte $d_s/h_m = 2$ ausgegangen.

Bei baupraktisch üblichen Schlankheiten L/h ergibt sich eine gute Übereinstimmung der Werte nach DIN 1045 mit den Werten von Kinnunen und Nylander.

Herzog [2-8] kommt nach einer statistischen Auswertung von Versuchsergebnissen zu einer gleichartigen Formulierung wie die DIN 1045. Er geht ebenfalls von einer kritischen Rundschnittlänge u im Abstand $h/2$ vom Stützenrand aus, in dem die 'Schubspannung' τ wirkt. Die Bruch-

spannung τ_u wird nach Herzog wie folgt berechnet:

$$\tau_u = (0,07 + 0,018 \mu \beta_s) \sqrt{8,5 \beta_{WN}} < 0,167 \sqrt{8,5 \beta_{WN}} \text{ MN/m}^2$$

Die Bruchschubspannung und damit die Durchstanzlast ist also dem Produkt aus Bewehrungsprozentsatz μ und der Wurzel der Betondruckfestigkeit β_{WN} proportional.

In Bild 2-7 werden die zulässigen Schubspannungen nach DIN 1045 und nach Herzog miteinander verglichen.

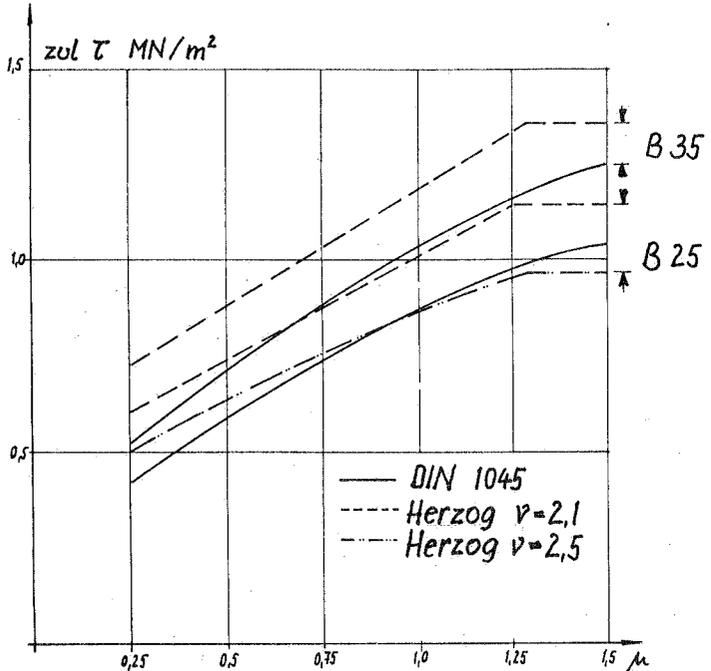


Bild 2-7 Zulässige Schubspannungen nach Herzog

($\nu = 2,1$ nach DIN 1045

$\nu = 2,5$ nach Vorschlag Herzog), aus [2-1]

Demnach ergeben sich bei beiden Verfahren annähernd gleich grosse Zahlenwerte.

Nach DIN 1045 dürfen bei der Ermittlung der Schubspannung keine grösseren Werte als $\mu = 1,5 \%$ eingesetzt werden, d.h. auch bei tatsächlich grösseren Bewehrungsprozentsätzen geht man davon aus, dass die Bruchschubspannung nicht mehr weiter zunimmt. In diesen Fällen tritt also ein anderer Versagensmechanismus auf, der im Abschnitt 2.3 erläutert wird.

Nach Herzog wird die Bewehrungsgrenze, von der ab keine Steigerung der Durchstanzlast mehr erzielt wird, bei $\mu \approx 1,3 \%$ erreicht.

Der Aufbau der Formel zur Berechnung der Durchstanzlast nach Moe [2-9] ist ebenfalls der Formel in DIN 1045 ähnlich. Als massgebender Rundschnitt wird hier allerdings der Stützenrand mit dem Umfang u_s angesehen.

Damit errechnet Moe die Durchstanzlast zu:

$$P_u = \frac{1,256 \left(1 - 0,075 \frac{ds}{hm}\right) \cdot \sqrt{\beta_{WN}} \cdot u_s \cdot h_m}{1 + 0,44 \frac{u_s \cdot h_m}{P_B} \cdot \beta_{WN}} \quad [N]$$

P_B ist die Stützkraft beim Erreichen der Biegetragfähigkeit der Platte.

Das Produkt der ersten beiden Terme kann wiederum als eine Schubspannung angesehen werden, deren Grösse von der Betonqualität und vom Biegebruchmoment der Platte abhängt.

2.4 Das Schubbruchmodell

Beim Schubbruchmodell, Bild 2-8, geht man davon aus, dass die Hauptzugspannungen in Stütznähe die massgebende Versagensursache sind. Die gleichzeitig wirkenden Biegebeanspruchungen dürfen dabei noch keine kritischen Werte annehmen. Bei der Überschreitung der Zugfestigkeit des Betons öffnet sich ein geneigter Schubriss, was zu einer gegenseitigen *T r a n s l a - t i o n* von Stütze und Platte (im Unterschied zur *R o t a t i o n* beim Biegebruch- sowie beim Biegeschubbruchmodell) und damit zum Versagen führt.

Dieses Bruchmodell wird also in den Fällen angenommen, in denen eine Vergrößerung der Bewehrung der Platte keine Steigerung der Durchstanzlast zur Folge hat, z.B. bei DIN 1045 für $\mu_G > 1,5 \%$.

Bei der US-amerikanischen Vorschrift ACI 318-77, bei der zwar ähnlich wie nach DIN 1045 Schubspannungen in einem kritischen Rundschnitt im Abstand $h_m/2$ vom Stützenrand nachzuweisen sind, wird die Biegetragfähigkeit der Platte gar nicht berücksichtigt.

Die Durchstanzlast ergibt sich zu

$$P_u = \tau_u \cdot u \cdot h_m$$

$$\tau_u = 0,332 \sqrt{B_C} \quad [\text{MN/m}^2]$$

Marti und Thürlimann leiten in [2-10] den oberen Grenzwert der Durchstanzlast auf der Grundlage der Plastizitätstheorie aus der Integration der auf der Mantelfläche des Durchstanzkegels 'umgewandelten Leistung' ab. (Bild 2-9 a)

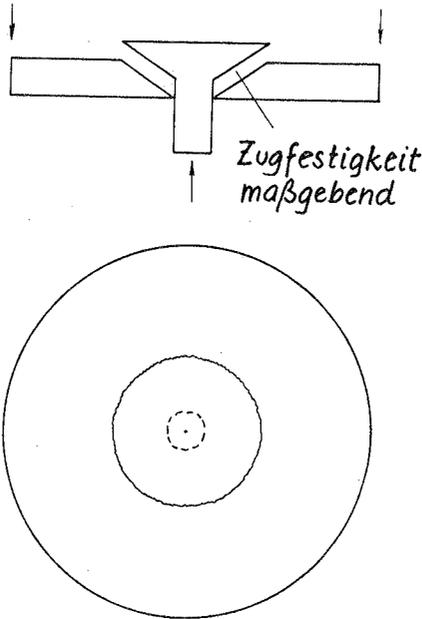


Bild 2-8 Schubbruchmodell in Schnitt und Draufsicht
(Translation der Platte gegenüber der Stütze)

Die Durchstanzlast ergibt sich zu

$$P_u = \pi \cdot h \cdot d_s \left[\frac{1}{2} \sqrt{\beta_p} \sqrt{\beta_z} + \frac{h}{4 d_s} (\beta_p - \beta_z) \right]$$

Dabei bedeuten β_z die Zugfestigkeit und β_p die Prismenfestigkeit des Betons. Sie gehen davon aus, dass sich das Versagen von Beton mit Hilfe des verallgemeinerten Coulombschen Gesetzes beschreiben lässt.

$$\tau + \sigma \tan \phi - c \leq 0$$

Der Zusammenhang zwischen der einachsigen Zug- und Druckfestigkeit, der Kohäsion c und dem Winkel der inneren

Reibung ϕ ergibt sich aus

$$\beta_z = \xi \cdot \beta_p = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 + \sin \phi} ; \quad \beta_p = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$
$$c = \frac{\beta_p}{2} \sqrt{\xi} ; \quad \tan \phi = \frac{1 - \xi}{2 \sqrt{\xi}}$$

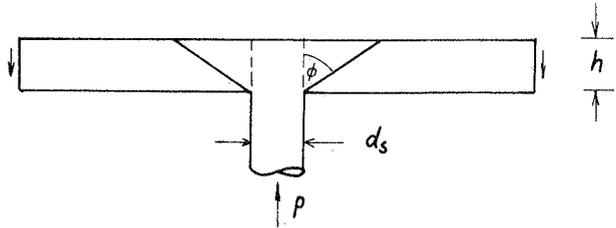


Bild 2-9 a Starrkörpermechanismus nach Marti/Thürli-
mann

Nielsen, Jensen und Bach [2-11] leiten die Durchstanzlast ebenfalls auf der Grundlage der Plastizitätstheorie unter Annahme des verallgemeinerten Coulombschen Materialgesetzes ab.

Mit Hilfe der Variationsrechnung ermitteln sie die Mantellinie des Durchstanzkegels bei der sich der kleinste obere Grenzwert der Durchstanzlast ergibt, Bild 2-9 b.

Die Mantellinie setzt sich aus einer Geraden und einer Kettenlinie zusammen.

In Abhängigkeit vom Verhältnis von Betonzugfestigkeit β_z zu Betondruckfestigkeit β_w ergeben sich die in Bild 2-10 dargestellten Mantellinien. Der Kurvenparameter ist dabei jeweils das Verhältnis von Stützendurchmesser zu Plattendicke d_s/h .

In Bild 2-11 sind die auf einen Plattenrundschnitt im Abstand h vom Stützenrand und auf die Betondruckfestigkeit bezogenen rechnerischen Bruchlasten für verschiedene Verhältnisse β_z/β_w aufgetragen.

Ebenfalls dargestellt sind die gemessenen Bruchlasten von einer Reihe von Versuchen.

Eine Übereinstimmung von Rechen- und Messwerten zeichnet sich ab, wenn das rechnerische Verhältnis von Zugfestigkeit zu Druckfestigkeit sehr klein, also $\beta_z/\beta_w \approx 1/400$ bis $1/1\,000$ gesetzt wird.

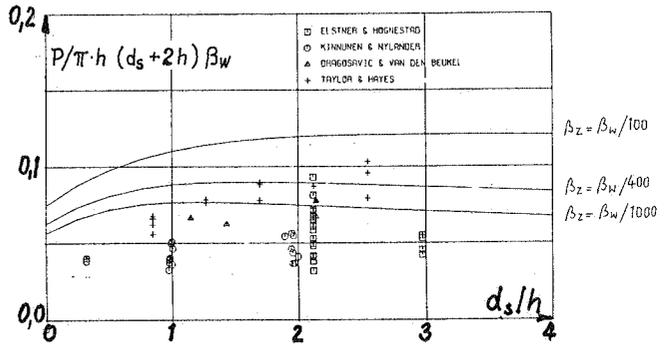


Bild 2-11 Vergleich der Bruchlasten aus Versuchen mit Rechenwerten nach [2-11] bei Variation des Verhältnisses von β_z/β_w

Nielsen, Jensen und Bach schliessen daraus, dass der Zugfestigkeit des Betons, die sich ja unter den üblichen Prüfbedingungen zu $1/10$ bis $1/15$ der Druckfestigkeit ergibt, keine massgebende Bedeutung zukommt.

Nach Ansicht des Verfassers ist diese Erklärung wenig befriedigend. Es erscheint widersprüchlich, ein verfeinertes Rechenverfahren vorzuschlagen, das nur dann brauchbare Ergebnisse liefert, wenn sich die Grössenordnung der rechnerischen Materialfestigkeit erheblich von der tatsächlichen Materialfestigkeit unterscheidet.

2.5 Schlussbemerkung

Es werden die gängigen Modellvorstellungen und Rechenansätze zur Bestimmung der Durchstanzlast zusammengestellt. In der Regel wurden kritische Schubspannungen definiert und ihre Grösse nach Versuchen in Abhängigkeit von der Bewehrung über der Stütze, von der Betonfestigkeit, vom Verhältnis des Stützendurchmessers zur Plattendicke usw. festgelegt.

$$\tau = f(\mu, \beta_p, \beta_z/\beta_s, d_s/h \dots)$$

Die Bewertung der einzelnen Einflüsse hängt von den Versuchsbedingungen und dem subjektiven Urteil des jeweiligen Forschers ab.

Beispiele für subjektive Beurteilung sieht der Verfasser bei der Herleitung unterschiedlicher Rechenverfahren darin, dass

- die charakteristische Mantellinie des Durchstanzkegels von vorne herein als gegeben angesehen wird, ohne dass den Ursachen nachgegangen wird, die zur Erzeugung dieser Bruchfläche geführt haben
- davon ausgegangen wird, dass die Bruchlast in einem bestimmten Verhältnis zur Fläche eines Plattenrundschnitts in bestimmtem Abstand vom Stützenrand stehen muss (Schubspannung)
- Besonderheiten der Beanspruchungen, die z.B. aus der örtlichen Kraffteinleitung herrühren können, nicht berücksichtigt werden.

In den folgenden Kapiteln soll daher eine konsequente Analyse der Beanspruchungen in einer Platte im Stützenbereich in Verbindung mit wirklichkeitsnahen Stoffgesetzen für Stahl und Beton versucht werden.

Aus dieser Analyse soll ein Tragmodell abgeleitet werden, das mit möglichst wenigen und eindeutigen Rechenannahmen berechnet werden kann. Bei diesem Tragmodell soll der Einfluss der verschiedenen Parameter physikalisch erklärbar sein.

Eine weitere Versuchsserie erscheint nach Kenntnis der Vielzahl unterschiedlicher Versuchsergebnisse und den daraus abgeleiteten, unterschiedlichen Theorien wenig erfolgversprechend.

3. Schnittkräfte im Auflagerbereich punktförmig unterstützter Platten nach der Plattentheorie

3.1 Allgemeines

Platten sind Flächentragwerke, die normal zu ihrer Mittelebene belastet werden und mit den üblichen Voraussetzungen der technischen Biegelehre berechnet werden können.

Bei gleichförmig belasteten Flachdecken, die durch Stützen in gleichen Abständen (z.B. Quadrat- oder Dreieck-Raster) unterstützt sind ist der Verlauf der Schnittkräfte in der Nähe kreisförmiger Innenstützen rotationssymmetrisch. D.h. die Hauptmomente verlaufen im Stützenbereich tangential und radial zum Stützenumfang.

Der geometrische Ort des Nulldurchgangs der Radialmomente m_r ist ein Kreis um den Stützenmittelpunkt mit einem Radius von etwa $r_r \approx 0,22 \ell$, wobei ℓ der Abstand der Stützenmittelpunkte ist.

Für die folgende Untersuchung wird ein Plattenausschnitt entlang dieses Kreises betrachtet, an dessen Rand nur die Querkräfte $q_r = \frac{Q_r}{2\pi r_r}$ wirken, wobei vereinfachend Q_r die ganze Last der Deckenplatte ist.

Die Zusammenhänge zwischen Belastung, Schnittkräften und Verformungen bei der dünnen Kreisplatte ergeben sich nach der Elastizitätstheorie aus der Lösung einer Differentialgleichung.

Sie wird an einem Plattenelement hergeleitet, das aus der Kreisplatte mit der Last $p = p(r)$ und der Dicke d bzw. h herausgeschnitten wird, und damit von zwei Zylindern

mit den Radien r und $r + dr$ und zwei den Winkeln $d\varphi$ einschliessenden Meridianebenen begrenzt wird (Bild 3-1).

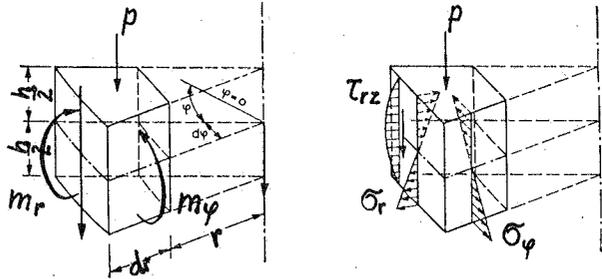


Bild 3-1 Plattenelement

Die Differentialgleichung der Kreisplatte mit gleichbeliebiger Dicke lautet:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{K}$$

wobei

$K = \frac{E d^3}{12 (1-\mu^2)}$ als Plattensteifigkeit bezeichnet wird.

In Abhängigkeit des dimensionslosen ortsbestimmenden Parameters

$$h = \frac{r}{a}$$

können mit der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung die Verformungen und Schnittkräfte wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 W &= W_0 + C_1 + C_2 Q^2 + C_3 Q^2 \ln Q + C_4 \ln Q \\
 m_r &= -\frac{K}{a^2} \left\{ \frac{d^2 W_0}{dQ^2} + \frac{\mu}{Q} \frac{dW_0}{dQ} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln Q \right) - C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{Q^2} \right] \right\} \\
 m_\varphi &= -\frac{K}{a^2} \left\{ \mu \frac{d^2 W_0}{dQ^2} + \frac{1}{Q} \frac{dW_0}{dQ} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln Q \right) + C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{Q^2} \right] \right\} \\
 q_r &= -\frac{K}{a^2} \left(\frac{d^3 W_0}{dQ^3} + \frac{d^2 W_0}{Q dQ^2} - \frac{dW_0}{Q^2 dQ} + 4C_3 \frac{1}{Q} \right)
 \end{aligned}$$

Für unterschiedliche Belastungen und Randbedingungen sind die Schnittkräfte und Verformungen von Kreisplatten in Fachbüchern tabellarisch zusammengestellt, z.B. in [3-1] .

3.2 Schnittkraft-Grenzwerte bei Stahlbetonplatten nach der Elastizitätstheorie

Über die Grenztragfähigkeit von Stahlbetonplatten lassen sich mit Hilfe der Elastizitätstheorie in der Regel keine zutreffenden Aussagen machen, weil sich im Laufe der Belastungsgeschichte durch die Rissbildung und nichtlineares Materialverhalten die Plattensteifigkeit örtlich sehr verändern kann, was Schnittkraftumlagerungen zur Folge hat.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Stahlbetonbalken können Schnittkraftumlagerungen durch wirklichkeitsnahe lastabhängige Verformungs-Schnittgrößen-Beziehungen berücksichtigt werden.

Vereinfachend werden im folgenden die Art und Weise der Schnittkraftumlagerungen sowie Schnittkraftgrenzwerte im Stützbereich einer Flachdecke durch Einführung von Gelenken an der Innenstützung aufgezeigt. Dabei wird von einer Kreis- bzw. Kreisringplatte mit Innenradius = Stützenradius r_s und Aussenradius r_r ausgegangen. Die Ergebnisse werden im Kapitel 5 den Ergebnissen einer nichtlinearen FE-Berechnung gegenübergestellt.

Es werden 3 verschiedene Randbedingungen untersucht, nämlich

1. Volleinspannung (Bild 3-2 a)
2. gelenkige Lagerung (Bild 3-2 b)
3. gelenkige Lochrand-
Lagerung (Bild 3-2 c)

Beim Vergleich mit den Ergebnissen der FE-Berechnung soll festgestellt werden, welche Randbedingungen das zutreffendste Bild der Lagerungsbedingungen einer Stahlbetonplatte im Zustand II darstellen.

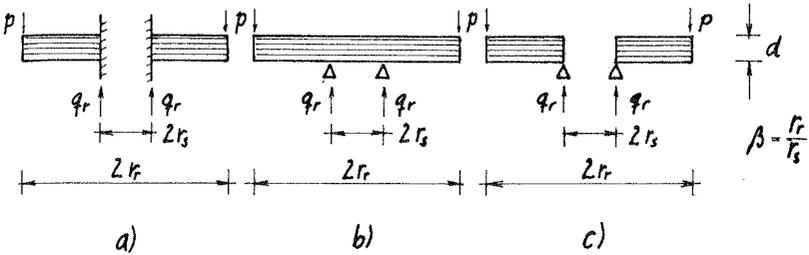


Bild 3-2 Verschiedene Randbedingungen für die Lagerung von Kreis- bzw. Kreisring-Platten

p = Belastung am freien Plattenrand
 q_r = Querkraft am unterstützten Rand

Für die angegebenen Randbedingungen ergeben sich die Schnittkräfte am Auflagerrand der Platte nach [3-1] wie folgt:

1. Volleinspannung

$$m_r = q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{2B} (1 - 2 c_2) \quad c_1 = 1 - \mu + (1 + \mu) B^2$$

$$m_\varphi = \mu \cdot m_r \quad c_2 = \left[1 + (1 + \mu) \ell_n B \right] \frac{B^2}{c_1}$$

2. Gelenkige Lagerung

$$m_r = - q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{4 B^2} \cdot c \quad c = (1 - \mu) \left(B - \frac{1}{B} \right) + 2(1 + \mu) B \ell_n B$$

$$m_\varphi = m_r$$

3. Gelenkige Lochrandlagerung

$$m_r = 0 \quad c = \frac{B^2}{1 - B^2} \ell_n B$$

$$m_\varphi = + q_r \cdot r_r \cdot \frac{1}{2B} (1 + \mu) \left(2 c - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)$$

Im Bild 3-3 sind die auf einen Vergleichswert bezogenen Momente m_r und m_φ in Abhängigkeit vom Verhältnis Plattenradius r_r : Stützenradius r_s aufgetragen

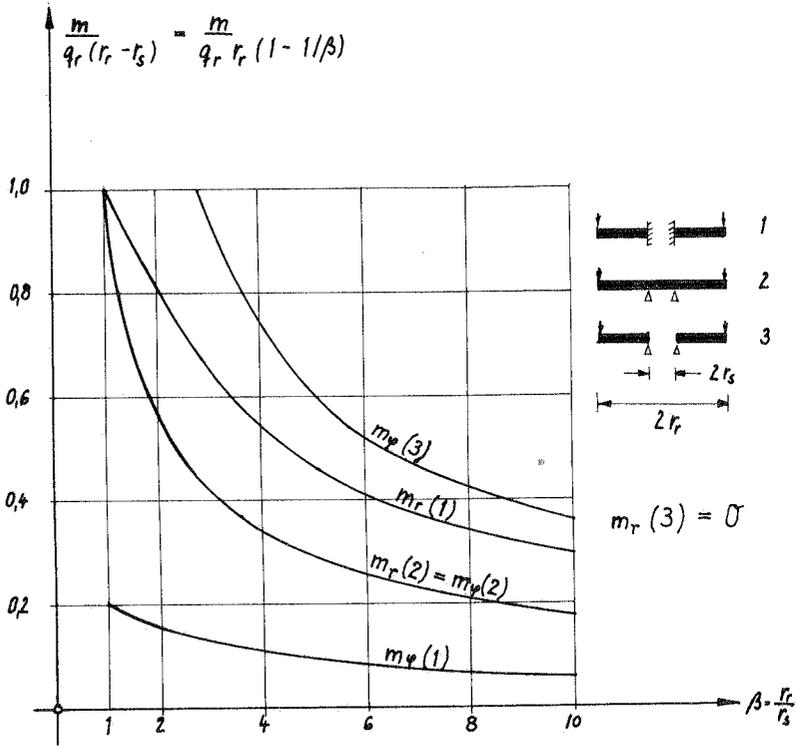


Bild 3-3 Momente m_r und m_φ am Auflagerrand von Kreisplatten, bezogen auf das Kragmoment des Kragbalkens bei gleicher Kragweite und gleicher Querkraft am Auflagerrand.

Als Vergleichswert für die Momente wurde das Kragmoment eines Kragbalkens entsprechend Bild 3-4

$$m = q_r (r_r - r_s)$$

gewählt.

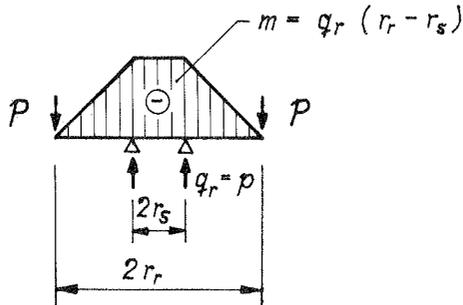


Bild 3-4 Vergleichswert für die Momente m_r und m_φ

Im Lagerungsfall 1 ergibt sich das vergleichsweise grösste Radialmoment m_r und das vergleichsweise kleinste Tangentialmoment m_φ . Im Lagerungsfall 3 ist das Radialmoment $m_r = 0$. Es ergibt sich jedoch das vergleichsweise grösste Tangentialmoment m_φ .

Im Lagerungsfall 2 ist $m_r = m_\varphi$, wobei im betrachteten Bereich $\beta = r_r/r_s \cdot m_r(2) < m_r(1)$ und $m_\varphi(2) < m_\varphi(3)$ ist.

Wenn in einer Stahlbetonplatte im Lagerungsfall (1) bei wachsender Belastung infolge $m_r(1)$ am Stützenrand ein Riss auftritt, d.h. die Biegesteifigkeit am eingespannten Rand durch den Übergang von Stadium I in Stadium II erheblich abnimmt, dann nähert man sich dem Lagerungsfall (3), d.h. mit wachsender Belastung tritt eine Momentenumlagerung ein, bei der die Tangentialmomente m_φ überproportional zu - und die Radialmomente überproportional abnehmen:

$$m_r(1) \rightarrow 0$$

$$m_\varphi(1) \rightarrow m_\varphi(3)$$

Bei dieser Art der Momentenumlagerung ist die Summe der Radial- und Tangentialmomente am Auflagerrand von Interesse.

Sie ist in Bild 3-5 dargestellt, wobei als Bezugswert wiederum das entsprechende Kragmoment des Kragbalkens gewählt wurde.

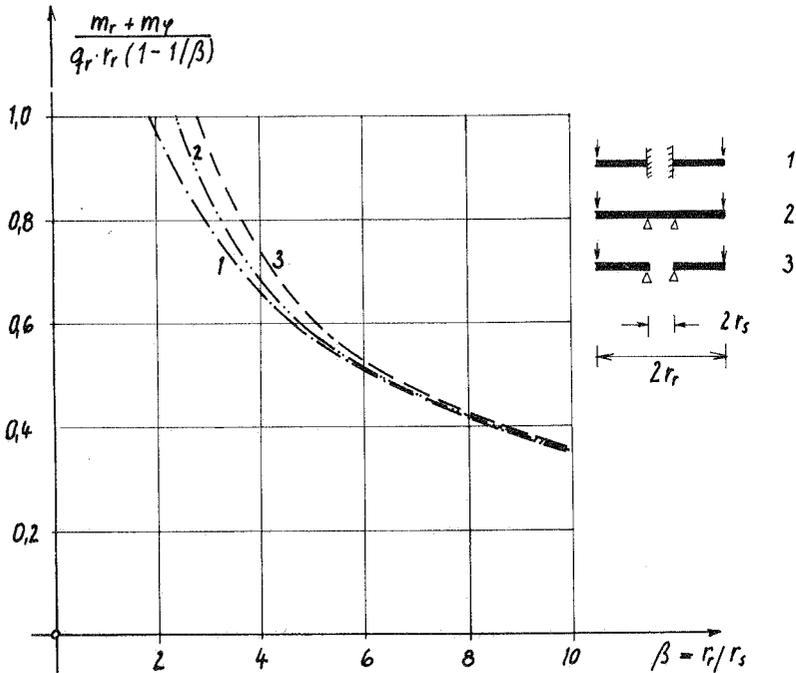


Bild 3-5 Summe der Momente $\Sigma m_r + m_\phi$ am Auflagerrand bei verschiedenen Lagerungsbedingungen

Die grössten Summenwerte ergeben sich bei der lochrandgestützten Platte (3), die kleinsten Werte bei Volleinspannung (1). Dies lässt sich physikalisch so erklären,

dass sich die volleingespannte Platte so verhält als würden zwischen den unterstützten Rändern ein Platten-
teil mit der Steifigkeit $K = \infty$ mitwirken, während bei der lochrandgestützten Platte der entsprechende Platten-
teil die Steifigkeit $K = 0$ hat. Die Beträge der
Momentsummen unterscheiden sich jedoch nur geringfügig
voneinander und sind für $\beta > 5$ vernachlässigbar klein. *
Wenn also bei Stahlbetonplatten eine unbegrenzte Mo-
mentenumlagerung zwischen radialen und tangentialen
Biegemomenten möglich wäre, so würde es genügen, die
Summe der Radial- und Tangentialmomente zu bestimmen
und entsprechend den aufnehmbaren Biegemomenten in
radialer und tangentialer Richtung zu verteilen.
Die Summe der Radial- und Tangentialmomente ist dabei
ungefähr gleich dem Tangentialmoment im Lagerungsfall 3

$$\underline{\sum m_r + m_\varphi \approx m_\varphi} \quad (3)$$

Die Auswirkung der unterschiedlichen Lagerungsbedingungen
ist auch am Verformungsverhalten zu erkennen.

In Bild 3-6 sind die Biegelinien bei den drei Lagerungs-
verhältnissen z.B für das Verhältnis $\beta = r_r/r_s = 5,3$
dargestellt.

Ein Durchstanzversuch an einer Stahlbetonplatte mit glei-
chem Verhältniswert β wird in [5-1] beschrieben und in
Kapitel 5 mit einem nichtlinearen FE-Programm nachgerechnet.

Die Biegelinien unterscheiden sich sowohl hinsichtlich
ihres Verlaufs als auch hinsichtlich der Beträge w
deutlich voneinander.

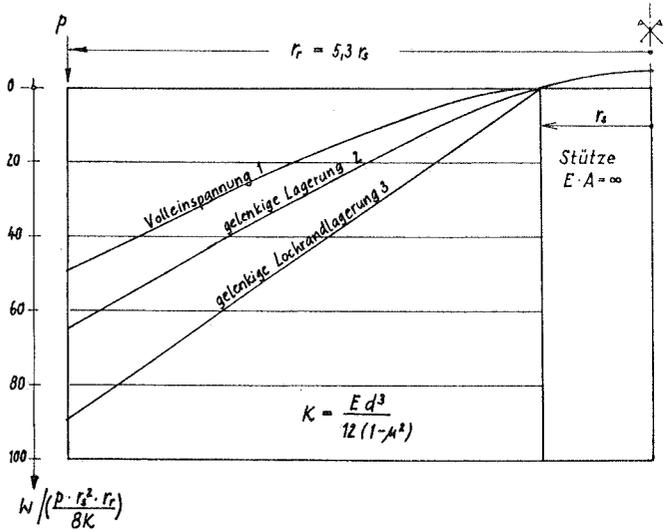


Bild 3-6 Biegelinien von Kreisplatten bei unterschiedlichen Lagerungsbedingungen

Bei Volleinspannung ist die Biegelinie entsprechend der vorherrschenden negativen radialen Biegemomente deutlich gekrümmt.

Die Biegelinie bei gelenkiger Lochrandlagerung ist hingegen eine Gerade.

Die Beträge der Verformungen bei gelenkiger Lochrandlagerung und bei Volleinspannung verhalten sich etwa wie 1,8 : 1.

Die Charakteristik der Biegelinien wird in Kapitel 5 zur Beurteilung der vorherrschenden Beanspruchungen einer gerissenen Stahlbetonplatte herangezogen.

3.3 Zusammenfassung

Es wurden die Schnittkräfte am Auflagerrand sowie die Verformungen einer längs ihres freien Randes linienförmig belasteten Kreis- bzw. Kreisringplatte ermittelt, und zwar für drei verschiedene Lagerungsbedingungen

1. Volleinspannung
2. gelenkige Lagerung
3. gelenkige Lochrandlagerung

Unter jeweils gleicher Belastung und damit gleicher Querkraftbeanspruchung längs des Auflagerrandes unterscheiden sich die jeweils entsprechenden Biegemomente (Radial- und Tangentialmomente) deutlich voneinander.

Die Summe aus Radial- und Tangentialmoment bei den Lagerungsbedingungen (1) und (2) ist jedoch nahezu gleich gross wie das Tangentialmoment bei der Lagerungsbedingung (3), d.h. die Radial- und Tangentialmomente bei den Lagerungsbedingungen (1) und (2) könnten durch entsprechende Aufteilung des Tangentialmomentes beim Lagerungsfall (3) bestimmt werden. Aus der Änderung der Lagerungsbedingungen von der Volleinspannung zur Lochrandlagerung folgt, dass mit zunehmender Belastung der Stahlbetonplatte eine Verlagerung der Momentenbeanspruchung von der radialen Richtung zur tangentialen Richtung hin zu erwarten ist.

Diese Umlagerung soll im folgenden Kapitel durch die Berechnung von Kreisplatten unter Berücksichtigung des nicht linearen Werkstoffverhaltens näher untersucht werden. In dieser Berechnung werden gleichzeitig die hier vernachlässigten Einflüsse der örtlichen Kräfteinleitung mit berücksichtigt.

4. Verwendung nichtlinearer Werkstoffgesetze für Stahlbeton
im elektronischen Rechenprogramm ADINA

4.1 Allgemeines

Gebräuchliche Methoden zur Lösung nichtlinearer Probleme der Baustatik sind u.a. in [4-1] zusammengestellt.

Es ist üblich, nichtlineare Probleme auf eine Folge linearer Probleme zurückzuführen. Die Belastung wird in kleinen Stufen, den sogenannten Inkrementen (bzw. time-steps) aufgebracht. Für jedes Inkrement ist ein elastisches Problem bei im allgemeinen ortsabhängigen inkrementellen Steifigkeit zu lösen.

$${}^t_K \underline{U} = \begin{matrix} t + \Delta t & t \\ \underline{R} & - \underline{F} \end{matrix}$$

Es bedeutet:

t_K = Tangentensteifigkeitsmatrix zum Zeitpunkt t

\underline{U} = Inkrement der Knotenpunktverschiebungen zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt $t + \Delta t$

d.h.

$$\underline{U} = {}^{t+\Delta t} \underline{U} - {}^t \underline{U}$$

${}^{t+\Delta t} \underline{R}$ = Vektor der äusseren Lasten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

${}^t \underline{F}$ = Vektor der Knotenkräfte die den Elementspannungen zum Zeitpunkt t entsprechen.

Die Zeit t hat für den hier behandelten statischen Fall nicht die Bedeutung eines echten Parameters. Sie dient nur zur Kennzeichnung des inkrementellen Vorgangs. In Abhängigkeit von den Nichtlinearitäten des Systems

und der Grösse der Inkremente driftet das Rechenergebnis vom genauen Steifigkeitsverlauf ab. Die Steifigkeit des untersuchten Systems wird überschätzt, wenn jeweils die zu Beginn des Lastinkrements erreichte Steifigkeitsmatrix als konstanter Wert verwendet wird, Bild 4-1.

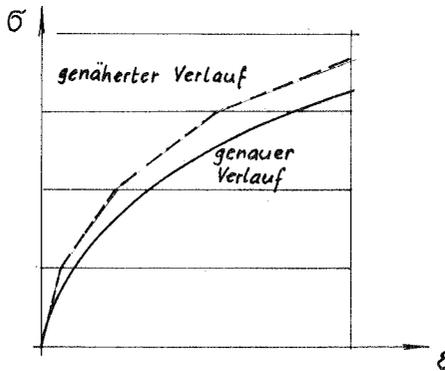


Bild 4-1 Abdriften des Rechenergebnisses vom genauen Steifigkeitsverlauf

Die Genauigkeit des Rechenergebnisses kann entweder durch Wahl genügend kleiner Inkremente oder durch Gleichgewichtsiteration oder durch die Kombination von der Wahl geeigneter Inkremente und Iteration verbessert werden.

Bei der Gleichgewichtsiteration können jedoch Konvergenzprobleme auftreten, wenn die Inkremente nicht genügend klein gewählt werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde auf Gleichgewichtsiteration verzichtet.

Die Inkrementeinteilung wurde durch Probeläufe so lange verfeinert, bis die Rechenergebnisse vor und nach der Verfeinerung keine deutlichen Unterschiede mehr aufwiesen.

Gleichgewichtskontrollen $\leq V$ wurden mit Hilfe der ausgedruckten Schubspannungen durchgeführt.

Nach Ansicht des Verfassers kommt es beim Ziel der Untersuchung, nämlich die Veranschaulichung der Beanspruchungen in der Platte für die Herleitung eines vereinfachten Tragmodells, auf besondere Genauigkeit in der Berechnung der Bruchlast und der Verformungen nicht an, insbesondere weil sich die Eingangswerte für die Materialgesetze nicht so zuverlässig angeben lassen wie es ein erhöhter Rechenaufwand verlangen würde.

4.2 Das Betonmodell in ADINA

Die Grundlagen des Programms ADINA sind in [4-2] und [4-3] zusammengefasst.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden daher nur noch die Eingabewerte für das Betonmodell erläutert.

Es sind folgende Eingabewerte zu definieren:

- a) die Parameter für das einachsige Spannungs-Dehnungsgesetz

$$\tilde{E}_0, \tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_c, \tilde{\epsilon}_c, \tilde{\sigma}_u, \tilde{\epsilon}_u$$

- b) die Querdehnungszahl ν ,

- c) die Versagenshüllkurve im Hauptspannungsraum, die durch 6 Werte $\tilde{\sigma}_{p1} / \sigma_c$, 18 Werte in der $\sigma_{p3} / \tilde{\sigma}_c - \sigma_{p2} / \tilde{\sigma}_c$ -Ebene und die Konstante β definiert sind.

- d) die Parameter

γ - als Maßstabsfaktor für σ'_c und σ'_u unter mehrachsiger Beanspruchung

η_n, η_s - als Faktoren zur Reduzierung von Normal- und Schubsteifigkeit nach der fiktiven Rissbildung

Diese Eingabewerte wurden wie folgt festgelegt:

- a) Die Parameter für das einachsige Spannungs-Dehnungsgesetz sind in Bild 4-2 dargestellt.

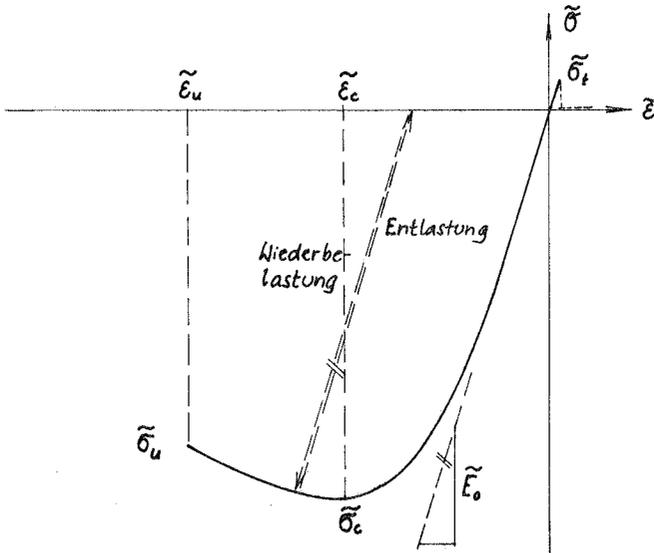


Bild 4-2 Parameter für das einachsige Spannungs-Dehnungsgesetz

Unter Zugbeanspruchung, also bei $\tilde{\epsilon}$ zum Zeitpunkt $t^{\tilde{\epsilon}} > 0$ ist die Spannungs-Dehnungslinie linear, es ist also

$$t_{\tilde{\sigma}} = \tilde{E}_0 \cdot t_{\tilde{\epsilon}}$$

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie bei $t \tilde{\epsilon} \cong 0$ wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$t \tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{E}_0 [1 - B (\frac{t \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c})^2 - 2 C (\frac{t \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c})^3]}{[1 + A (\frac{t \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}) + B (\frac{t \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c})^2 + C (\frac{t \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c})^3]^2}$$

mit

$$A = \left[\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_u} + (p^3 - 2 p^2) \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} - (2p^3 - 3p^2 + 1) \right] / \left[(p^2 - 2p + 1)p \right]$$

$$B = \left[(2 \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} - 3) - 2 A \right]$$

$$C = \left[(2 - \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s}) + A \right]$$

$$p = \tilde{\epsilon}_u / \tilde{\epsilon}_c$$

$$\tilde{E}_s = \tilde{\sigma}_c / \tilde{\epsilon}_c$$

$$\tilde{E}_u = \sigma_u / \tilde{\epsilon}_u$$

Folgende Zahlenwerte wurden eingesetzt:

$$\tilde{E}_0 = 18\,000 \sqrt{B_w} \text{ [daN/cm}^2 \text{]} \quad [5-4]$$

$$\tilde{\sigma}_c = 0,85 B_w$$

$$\tilde{\sigma}_u = 0,8 \tilde{\sigma}_c$$

$$\tilde{\epsilon}_c = 0,002$$

$$\tilde{\epsilon}_u = 0,0035$$

$$\tilde{\sigma}_t = 0,6 \cdot B_w^{2/3} \text{ [daN/cm}^2 \text{]} = 0,28 \cdot B_w^{2/3} \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

Die den Festigkeitswerten zugeordneten Dehnungen wurden in Anlehnung an die bekannte Spannungs-Dehnungsbeziehung in Bild 4-3 gewählt

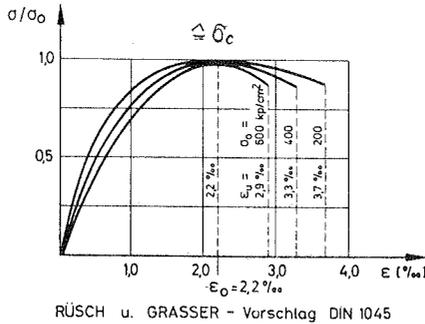


Bild 4-3 Einachsige Spannungsdehnungsbeziehung für Beton nach Rüsçh und Grasser aus [4-4]

Für die Zugfestigkeit wurde der Wert der zentrischen Zugfestigkeit eingesetzt, Bild 4-4, der sich als Funktion der Druckfestigkeit mit

$$\beta_z = 0,28 \beta_w^{2/3} \quad [N/mm^2]$$

angeben lässt.

Die zentrische Zugfestigkeit beträgt etwa 60 % der Biegezugfestigkeit. Der Unterschied rührt von der unterschiedlichen Beanspruchungsart und der unterschiedlichen Gestalt der Probekörper zur Bestimmung der Festigkeit her.

Bei der vorliegenden Untersuchung kann nicht von vorne herein davon ausgegangen werden, dass der Versuch zur Bestimmung der Biegezugfestigkeit mit einer Dehnungsgradienten über die Bauteilhöhe die Rissbildung in der Platte, insbesondere im Kräfteinleitungsbereich, zutreffend repräsentiert.

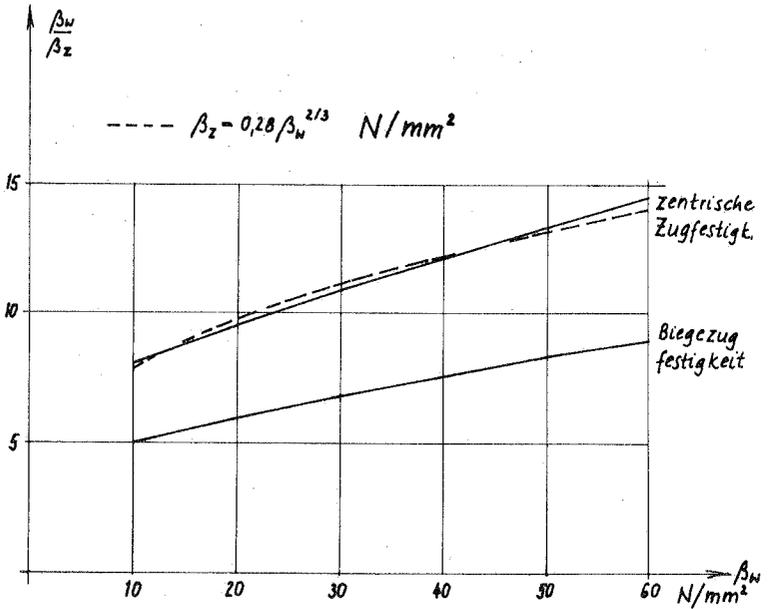


Bild 4-4 Verhältnis von Druckfestigkeit β_w zu Zugfestigkeit β_z in Abhängigkeit von der Druckfestigkeit nach Bonzel [4-5]

Der Verfasser hält zur Beurteilung der örtlichen Zugfestigkeiten im Kräfteinleitungsbereich einer Platte mit baupraktisch üblichen Abmessungen die Festigkeit aus dem zentrischen Zugversuch für das geeignetere Festigkeitskriterium.

b) Die Querdehnzahl wurde konstant zu

$$\mu = 0,2 \text{ angesetzt (DIN 1045, 15.1.2)}$$

Kupfer hat in [4-6] belastungsabhängige Querdehnzahlen veröffentlicht. Sie wurden z.B. von Link, Schäfer, Mehlhorn für ein Betonmodell in ein nicht lineares

FE-Programm aufgenommen [4-7], [4-8].

Diese Querdehnzahlen beinhalten jedoch auch die Ausdehnung infolge Rissbildung. Sie sind damit abhängig von Gestalt, Grösse und Lagerungsbedingung der Probekörper, sowie bei gleicher Beanspruchung abhängig vom Ort der Messung, siehe Bild 4-5 aus [4-4].

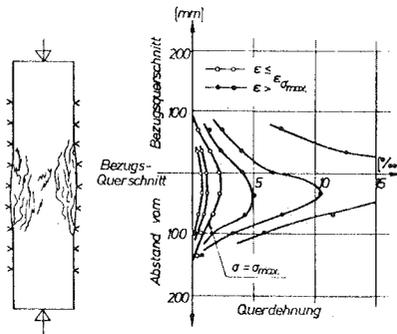


Bild 4-5 Querdehnung in Abhängigkeit des Abstandes vom Bezugsquerschnitt, aus [4-4]

Unter diesen Voraussetzungen ist es fraglich, ob durch Eingabe einer variablen Querdehnzahl das Rechenergebnis sinnvoll verbessert werden kann

c) Die Parameter der Versagenshüllkurve im Hauptspannungsraum $\sigma_{p1}/\sigma_{p2}/\sigma_{p3}$ sind in Bild 4-6 dargestellt. Sie wurden [4-9] und [4-10] entnommen.

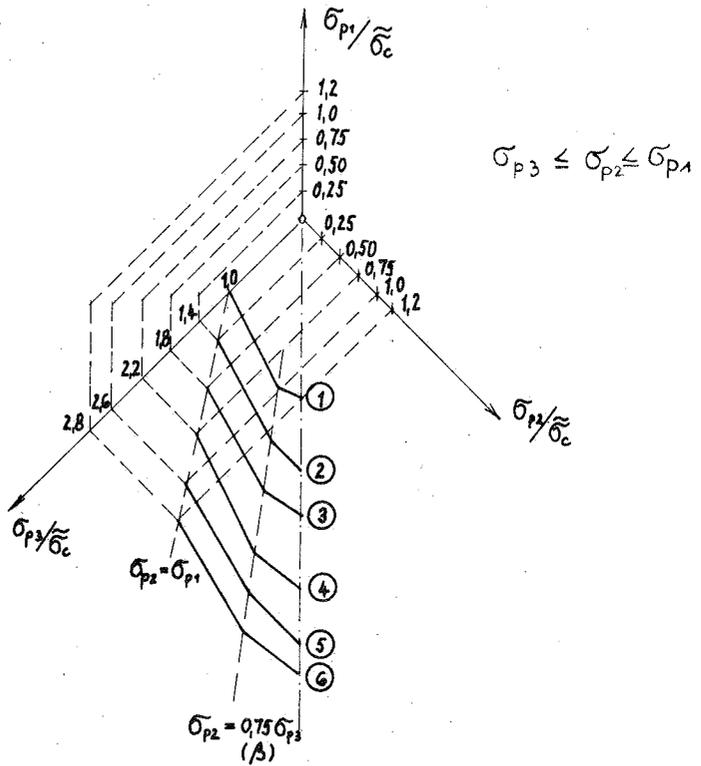


Bild 4-6 Versagenshüllkurven

Sind $\bar{\sigma}_{p1}$ und $\bar{\sigma}_{p2}$ gegeben, so kann aus diesem Diagramm die Hauptdruckfestigkeit $\bar{\sigma}_{p3}$ (crushing) $\bar{\sigma}_{p3} = \bar{\sigma}_c$ abgelesen werden. Zwischen den Kurven wird interpoliert.

- d) Der Maßstabsfaktor γ ergibt sich aus dem Verhältnis der räumlichen zur einachsigen Druckfestigkeit nach Bild 4-6

$$\gamma = \sigma_c' / \tilde{\sigma}_c$$

Die räumliche Spannungs-Dehnungsbeziehung wird durch Multiplikation der einachsigen Spannungs-Dehnungsbeziehung mit γ gewonnen:

$$\sigma_u' = \gamma \tilde{\sigma}_u$$

$$\varepsilon_c' = \gamma \tilde{\varepsilon}_c$$

$$\varepsilon_u' = \gamma \tilde{\varepsilon}_u$$

Die Reduzierung von Normal- und Schubsteifigkeit nach der fiktiven Rissbildung wird mit Hilfe der Faktoren η_n und η_s in der Spannungs-Dehnungsmatrix wie folgt modelliert:

Bei Zug- und gleichzeitiger mässiger Druckbeanspruchung ist z.B. die Spannungs-Dehnungsbeziehung vor dem Zugversagen

$$\underline{C} = \frac{t_E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$1-\nu$	ν	ν	0	0	0
	$1-\nu$	ν	0	0	0
		$1-\nu$	0	0	0
			$\frac{1-2\nu}{2}$	0	0
				$\frac{1-2\nu}{2}$	0
					$\frac{1-2\nu}{2}$

wobei t_E ein entsprechend der Gewichte der Hauptspannungsbeträge ermittelter Elastizitätsmodul zum Zeitpunkt t ist.

Wenn die Hauptzugspannung zum Zeitpunkt t σ_{p1} grösser als die Versagensspannung ist, dann ergibt sich die neue Spannungs-Dehnungsbeziehung zu

$$\underline{c} = \frac{t_E}{(1-\nu^2)}$$

η_n	$\nu\eta_n$	$\nu\eta_n$	0	0	0
	1	ν	0	0	0
		1	0	0	0
			$\eta_s \frac{1-\nu}{2}$	0	0
				$\eta_s \frac{1-\nu}{2}$	0
					$\frac{1-\nu}{2}$

Durch eine geeignete Wahl des Normalsteifigkeitsfaktors η_n kann

- der 'plastische Ast' der Spannungs-Dehnungsbeziehung beim Biegezugversuch und
- das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen für die Aufnahme der Biegezugkräfte durch die Bewehrung modelliert werden.

Wie aus Bild 4-7 hervorgeht, bricht Beton unter zentrischen Zugbeanspruchungen spröde und ohne plastisches Verformungsvermögen [aus 4-11].

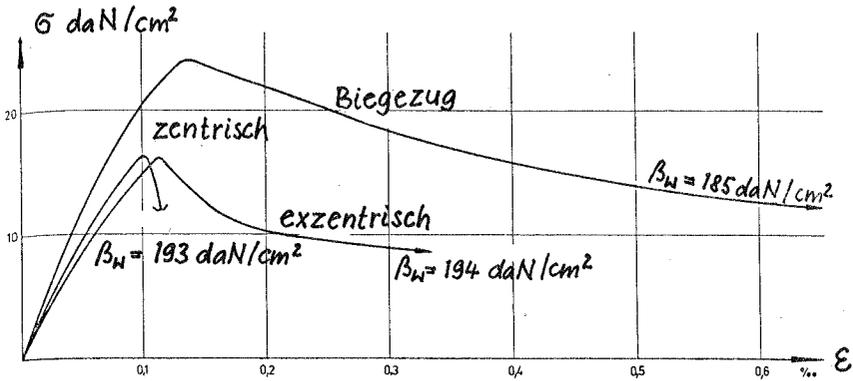


Bild 4-7 Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungslinie von der Belastungsart, aus [4-11]

Betongüte: $\beta_{w28} = 225 \text{ kp/cm}^2$, Betonalter: 7 Tage, Dehngeschwindigkeit: $0,00125 \text{ } ^\circ/\text{min}$

Wenn - wie hier angenommen- die zentrische Zugfestigkeit im Kräfteinleitungsbereich massgebend für die Tragfähigkeit bzw. für den Tragmechanismus ist, dann würde die Annahme einer Restzugfestigkeit normal zur Rissebene das Ergebnis im Sinne einer Überschätzung der Tragfähigkeit verfälschen. Um diese Überschätzung auszuschliessen und um den Gedanken der Vorgabe der zentrischen Zugfestigkeit konsequent durchzuführen, wird für η_n nach [4-3] ein sehr kleiner Wert, nämlich $\eta_n = 0,001$ eingesetzt, d.h. zunächst der nackte Zustand II angenommen.

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Biegezugrissen wird auf andere Weise berücksichtigt. Der Schubsteifigkeitsfaktor η_s hängt von einer Reihe physikalischer Gegebenheiten ab (Rauigkeit der Betonflächen, Kornverzahnung). Es besteht die Möglichkeit, η_s nach den Versuchen von Paulay und Loeber in Abhängigkeit von der Rissbreite als Variable einzuführen [4-12]. Inwieweit die Kornverzahnung auch nach zyklischer Belastung einen wesentlichen Beitrag zur Schubsteifigkeit in der Rissebene leistet ist nicht geklärt.

Um auch hier eine Überschätzung der Tragfähigkeit auszuschliessen erschien es angebracht, dem Beitrag der Kornverzahnung keine wesentliche Bedeutung für die Traglast zuzumessen.

Daher wurde für η_s anstelle des in [4-3] vorgeschlagenen Wertes von $\eta_s = 0,5$ ein kleinerer Wert $\eta_s < 0,1$ eingesetzt. Damit sind die Eingangsdaten für das Betonmodell in ADINA definiert.

Die Überprüfung der Materialeingabewerte für den Beton erfolgte anhand einer Modellberechnung für einen Betonprobezylinder, wie er zur experimentellen Bestimmung der Druckfestigkeit verwendet wird. Es zeigte sich, dass zwischen dem einachsigen Spannungs-Dehnungsdiagramm das für das einzelne Element eingegeben wird, und dem sogenannten einachsigen Spannungs-Dehnungsdiagramm, das man als Mittelwert beim Probekörper mit starrer Lagerung erhält (Mittelwert der Dehnung über die Höhe des Probekörpers) eine gute Übereinstimmung besteht, obwohl im Bereich der Lagerung ein dreiachsiger Spannungszustand herrscht, der in der Rechnung entsprechend Bild 4-6 berücksichtigt wird.

Die Werkstoffeigenschaften des Stahles können durch Vorgabe einer beliebigen polygonartigen oder elastisch-plastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung eingegeben werden.

Für die Beschreibung besonderer Eigenschaften des Verbundwerkstoffes Stahl - Beton, nämlich

- des Verbund-Schlupf-Verhaltens [4-13] und
- der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, z.B. nach [4-14]

ist in ADINA von Haus aus keine Parameter-Darstellung enthalten.

Man kann jedoch diese Eigenschaften durch geeignete Verknüpfung von Beton- und Stahlelementen und durch Verzerrung der Arbeitslinie modellieren.

Zur Beschreibung des Verbund-Schlupf-Verhaltens hat der Verfasser Probeläufe mit folgender Verknüpfung zwischen Beton- und Stahlelementen durchgeführt,

Bild 4-8 :

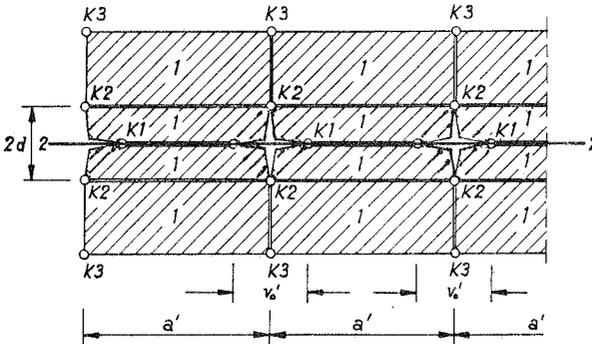


Bild 4-8 Verknüpfung von Betonelementen 1 mit Stahlelementen 2 zur Modellierung des Verbundes

In Bild 4-8 sind die Betonelemente 1 mit den Stabelementen 2 nur an den Knoten K1 verknüpft. Die Betonelemente untereinander sind an den Knoten K1, K2 und K3 miteinander verknüpft.

Es entstehen sternförmige Ausnehmungen längs der Elementkanten, die einerseits die Sekundärrisse, z.B. an den Stabrippen (siehe hierzu [4-14]), andererseits den verbundfreien Bereich v_0 im Riss modellieren sollen. Bei der Elementeneinteilung ist zu berücksichtigen, dass das Verhältnis v_0/a etwa dem Verhältnis des nach [4-14] näherungsweise abschätzbaren Verhältnisses von verbundfreiem Bereich v_0 zu Rissabstand a entsprechen soll. Mit dieser Verknüpfung liess sich u.a. auch der Effekt des günstigen Einflusses von Querdruck auf das Verbund-Schlupf-Verhalten wiedergeben.

In der vorliegenden Untersuchung werden Versuche an rotationssymmetrischen Platten unter rotationssymmetrischer Belastung mit konzentrischer Kreisringbewehrung nachgerechnet.

Bei der konzentrischen Kreisringbewehrung entsteht jedoch infolge der Biegebeanspruchung keine Änderung der Stahlzugkraft längs der Stabachse. Daher kann in diesem Anwendungsfall auf die Berücksichtigung des Verbund-Schlupf-Verhaltens verzichtet werden.

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bewirkt gegenüber dem nackten Bewehrungsstab lediglich eine Verringerung der (mittleren) Dehnung der Ringbewehrung. Es ergeben sich damit etwas geringere Verformungen, eine Auswirkung auf den Tragmechanismus des stützennahen Bereichs ist jedoch nicht zu erwarten. Für den mittig gezogenen Stahlbetonstab sind in [4-14] idealisierte σ - ϵ -Linien angegeben, mit deren Hilfe das Verformungsverhalten des gerissenen Verbundquerschnitts bei Erstbelastung genähert angegeben werden kann. In

analoger Weise wird die in Bild 4-9 dargestellte, idealisierte σ - ϵ -Linie für die Dehnung der Ringbewehrung zugrunde gelegt.

Dabei ist

$$\epsilon_z = \beta_z / E_b \quad (\text{Betondehnung beim 1. Riss})$$

$$\sigma_{SR1} = \beta_z \cdot W/z \cdot a_s \quad (\text{Stahlspannung beim 1. Riss})$$

$$\sigma_s^{II} = \text{Stahlspannung im nackten Zustand II}$$

$$\Delta \epsilon_s = \frac{\sigma_{SR1}^2}{E_s \cdot \sigma_s^{II}} \quad \text{nach [4-14]}$$

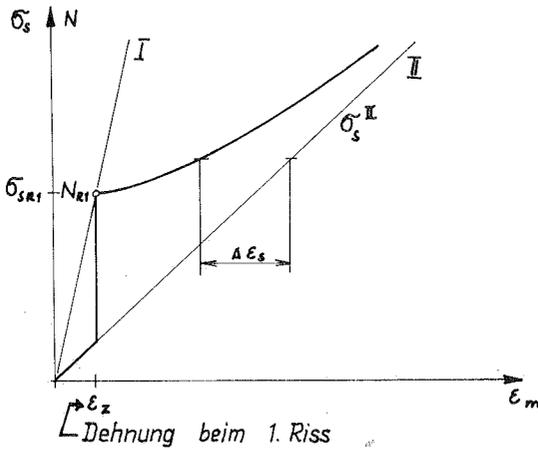


Bild 4-9 Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie des Verbundstabes bei Erstbelastung

5. Nachrechnung einiger Versuche

5.1 Allgemeines

Es werden Ergebnisse der Nachrechnung von 3 Durchstanzversuchen beschrieben, und zwar

- von den Durchstanzversuchen IB 15 a und IB 15 b, die von Kinnunen und Nylander [2-7] mit ringförmig bewehrten Versuchskörpern durchgeführt wurden und
- vom EMPA-Versuch [5-1], der von Schaeidt, Ladner und Rösli mit einem orthogonal bewehrten Versuchskörper durchgeführt wurde.

Die Modellierung dieser Bewehrung wird unten erläutert.

Einige ausgewählte Messergebnisse (Verformungen, Dehnungen in der Bewehrung, Riss- und Bruchlast) werden mit den Rechenergebnissen verglichen.

Darüberhinaus werden als Ergebnis der Berechnung Spannungsverläufe im Inneren des Lasteinleitungsbereiches bei unterschiedlichen Laststufen angegeben.

5.2 Nachrechnung des Kinnunen- und Nylander-Versuchs IB 15 a, IB 15 b

Ein Radialschnitt durch den Versuchskörper IB 15 a ist in Bild 5-1 dargestellt.

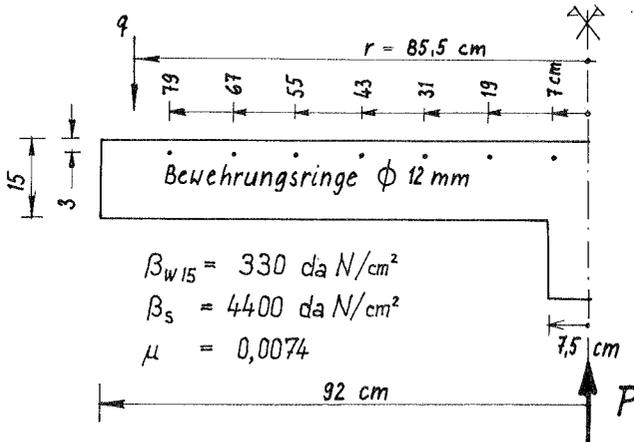


Bild 5-1 Versuchskörper IB 15 a

Die Bruchlasten P_u bei 3 Versuchen ergaben sich zu 192 bis 212 kN.

Beim Versuchskörper IB 15 b wurde gegenüber IB 15 a nur die Anzahl der Bewehrungsringe verdoppelt. Ein Radialschnitt durch den Versuchskörper ist in Bild 5-2 dargestellt.

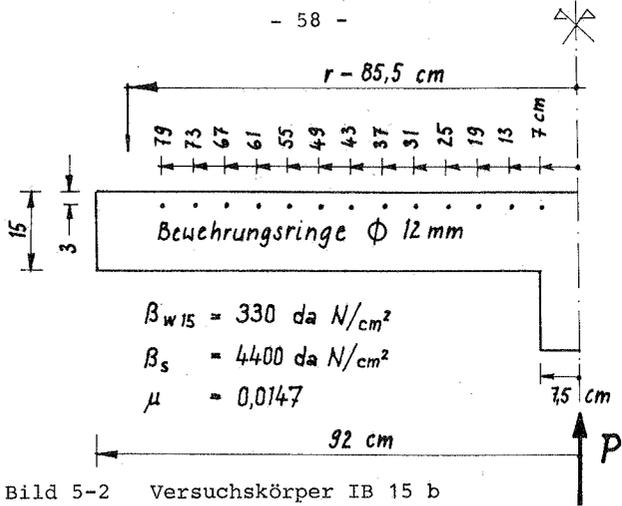


Bild 5-2 Versuchskörper IB 15 b

Die Bruchlasten P_u bei 3 Versuchen ergaben sich zu 229-232 kN.

Die Diskretisierung in zur z-Achse axialsymmetrischen Finiten Elemente erfolgte nach Bild 5-3.

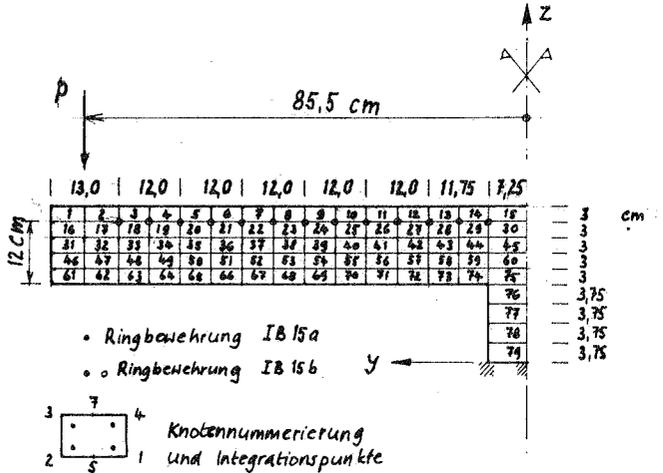


Bild 5-3 Diskretisierung der Kinnunen-Nylander-Versuche in zur z-Achse rotationsymmetrische Elemente

In Bild 5-4 bis 5-7 sind die Verläufe von Radialspannung σ_y , Tangentialspannung σ_x , Normalspannung σ_z und Schubspannung τ_{yz} im Zustand I ($P = 23,5 \text{ kN}$) am Stützenrand und etwa im Abstand der Plattendicke vom Stützenrand dargestellt. Die Spannungsverläufe gelten sowohl für IB 15 a als auch für IB 15 b. Im Element 72 (Bild 5-4 bzw. 5-6) sind die Radialspannungen kleiner als die Tangentialspannungen, im Element 74 sind sie grösser als die Tangentialspannungen. Die ausgeprägte Spannungsspitze der Radialspannungen am Stützenrand kann als Lasteinleitung über schräge Druckstreben gedeutet werden.

Betrachtet man die Radialspannungen als eine Überlagerung von Biegespannungen nach Navier und den Zusatzspannungen nach Schlee [5-2], so haben die Biegespannungen nach Navier etwa dieselbe Grössenordnung wie die Tangentialspannungen, obwohl nach Bild 3-3 im Lagerungsfall 1 die Radialmomente wesentlich grösser sind als die Tangentialmomente. Entsprechend den Spannungsverläufen der FE-Berechnung würde bei der untersuchten Kreisplatte (ohne eine über die Platte hinweg nach oben durchlaufende Stütze) der Lagerungsfall 2 nach Bild 3-3 die zutreffenderen Momente liefern.

$$\text{Mit } r_r/r_s \approx 85,5/7,5 = 11,4 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} q_r (r_r - r_s) &= (2350/2 \cdot \pi \cdot 7,5) \cdot 78 \\ &= 3892 \text{ da N} \cdot \text{cm/cm} \end{aligned}$$

beträgt im Lagerungsfall 2

$$\begin{aligned} m = m_r = m_\varphi &\approx 0,15 \cdot q_r (r_r - r_s) \\ &= 584 \text{ da N} \cdot \text{cm/cm} \end{aligned}$$

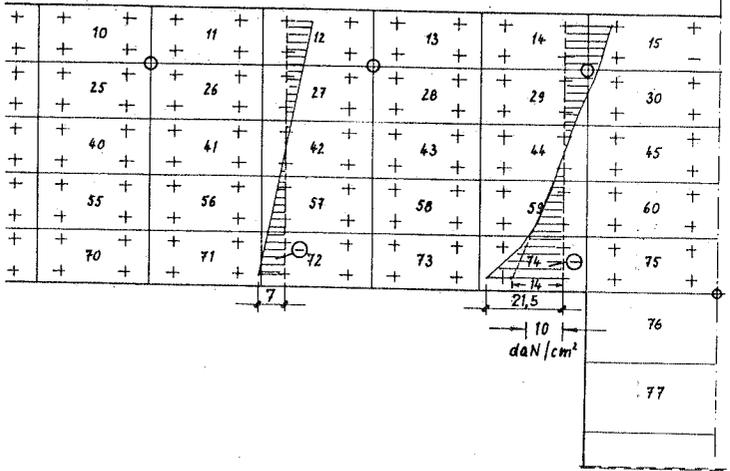


Bild 5-4 Radialspannungen σ_y bei $P = 23,5 \text{ kN}$ (Zustand I)

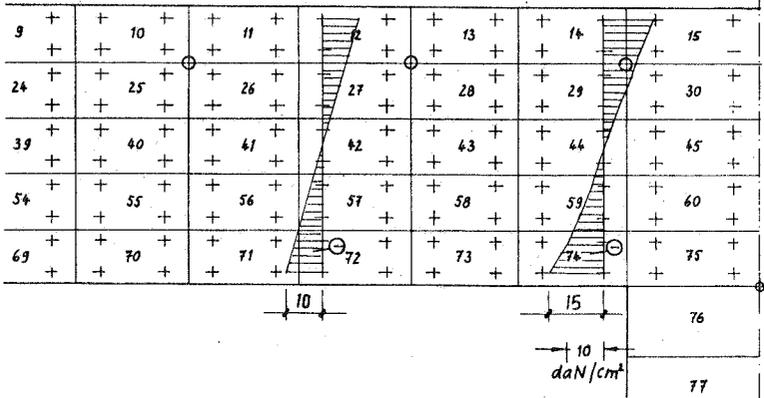


Bild 5-6 Tangentialspannungen σ_x bei $P = 23,5 \text{ kN}$

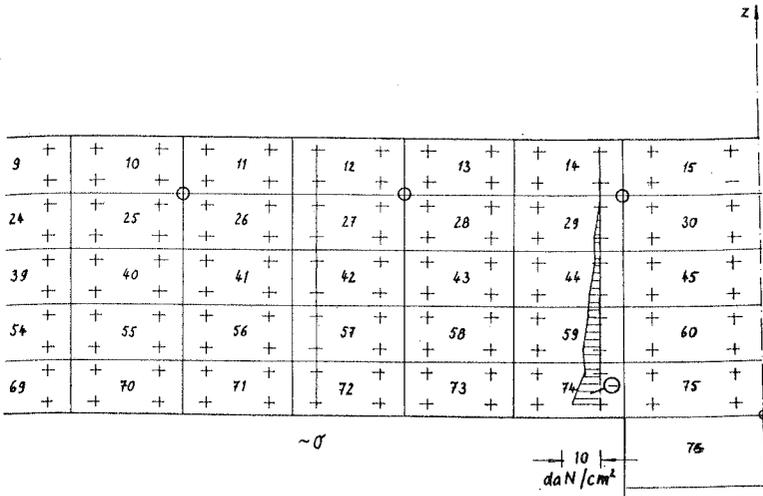


Bild 5-5 Normalspannungen σ_z bei $P = 23,5$ kN

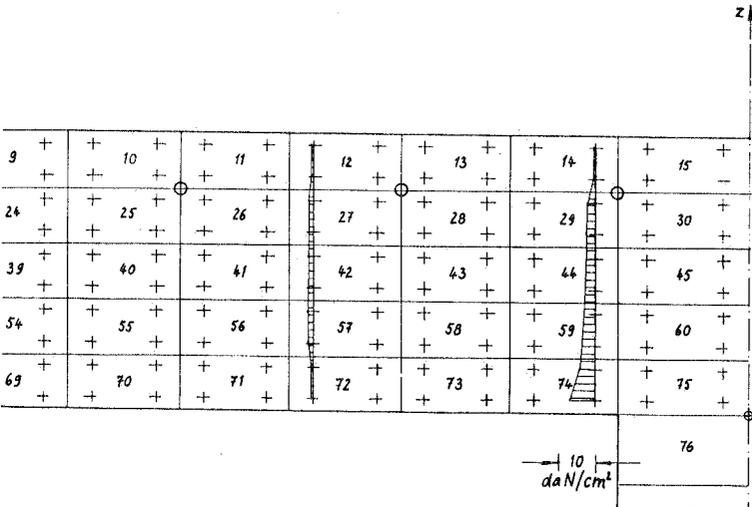


Bild 5-7 Schubspannungen τ_{yz} bei $P = 23,5$ kN

Damit ergibt sich die Tangentialspannung zu

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x = \frac{m}{w} = 584 \cdot (6/15^2) = 15,5 \text{ daN/cm}^2$$

in Übereinstimmung mit der tangentialen Randspannung nach der FE-Berechnung.

Schubspannung und Normalspannung haben am Stützenrand infolge der Krafteinleitung ihren Maximalwert am unteren Plattenrand, sie sind betragsmässig und in ihrem Verlauf nahezu gleich. (Bild 5-7 und 5-5) Im Abstand d vom Plattenrand hat sich in etwa der zu erwartende parabelförmige Verlauf der Schubspannungen eingestellt und die Normalspannungen sind nahezu auf Null abgeklungen.

In den Bildern 5-8 bis 5-11 sind die 4 berechneten Spannungskomponenten im Probekörper IB 15 a bei einer Last von 141 kN, - also bei etwa 73 % der Bruchlast beim Versuch - aufgetragen.

Deutlich ist der nichtlineare Verlauf der Radialspannungen zu erkennen, wobei die Spannungsspitze der Radialspannung am Stützenrand etwa das 1,7-fache der zugehörigen Tangentialspannung beträgt.

Die Betonzugzone ist in tangentialer Richtung ausgefallen. (Bild 5-8 und 5-10)

Der Verlauf der Schubspannung ist dem Verlauf der Normalspannung ähnlich mit einem Maximum von 83 daN/cm² im unteren Integrationspunkt des Elements 74. (Bild 5-9 und 5-11).

In den Bildern 5-12 bis 5-15 sind die Spannungen bei gleicher Last im Versuchskörper IB 15 b aufgetragen. Diese Last entspricht hier etwa 61 % der Bruchlast. Die Radialspannungen und Tangentialspannung (Bild 5-12 und 5-14) sind deutlich kleiner als beim Probekörper IB 15 a bzw. über die - infolge des höheren Bewehrungsgrades - grössere Druckzone verteilt.

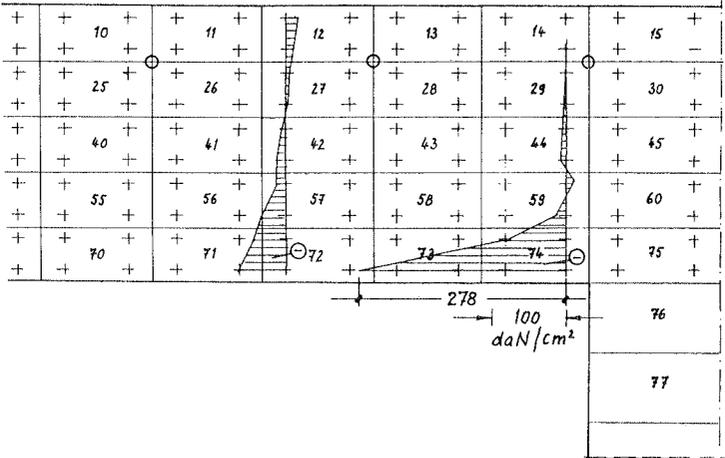


Bild 5-8 Radialspannungen σ'_y bei P = 141 kN, IB 15 a

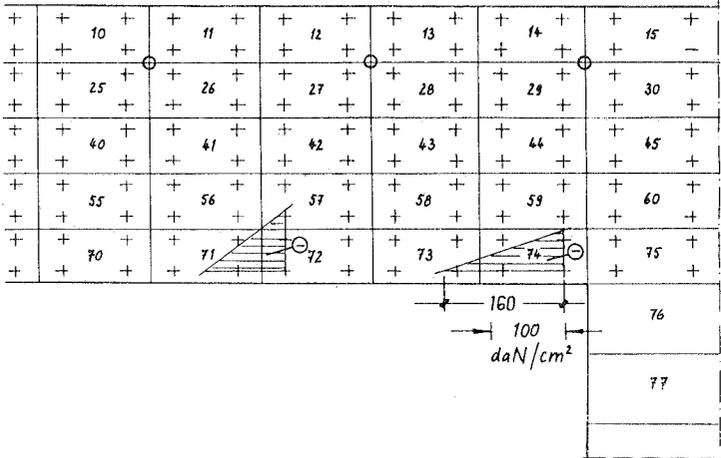


Bild 5-10 Tangentialspannungen σ_x bei P 141 kN

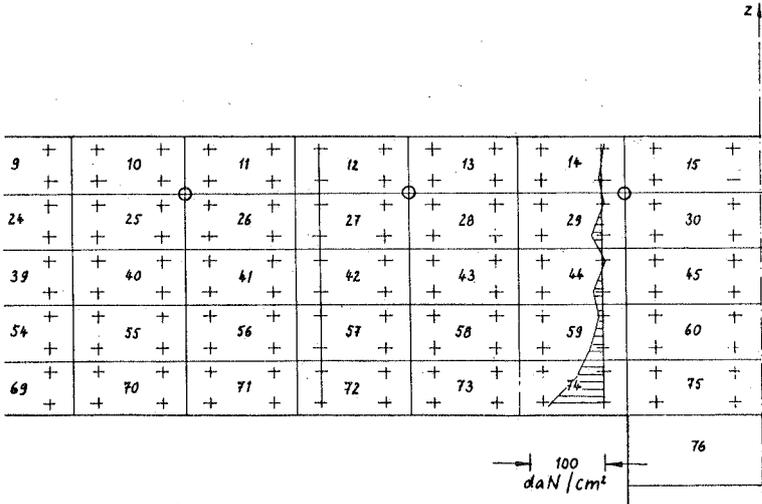


Bild 5-9 Normalspannung σ_z
bei P = 141 kN, IB 15 a

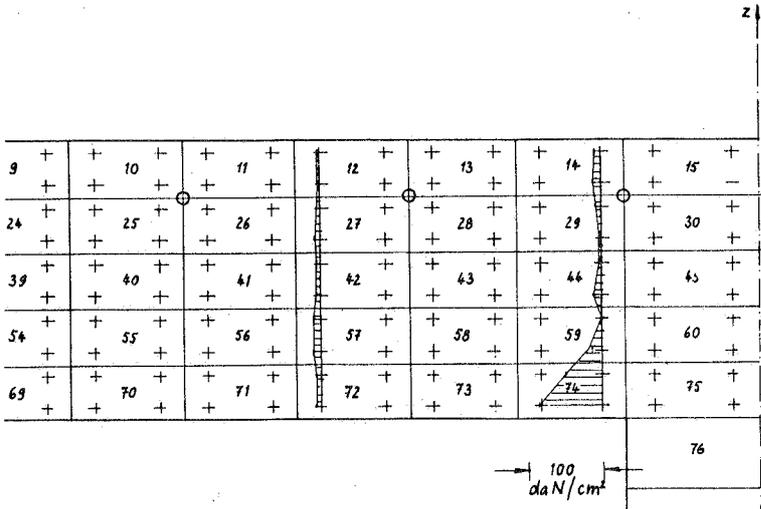


Bild 5-11 Schubspannungen σ_{yz}
bei P = 141 kN

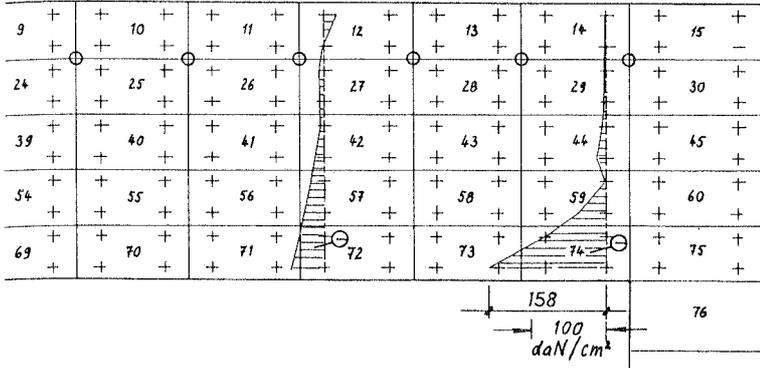


Bild 5-12 Radialspannungen σ_y
bei P = 141 kN, IB 15 b

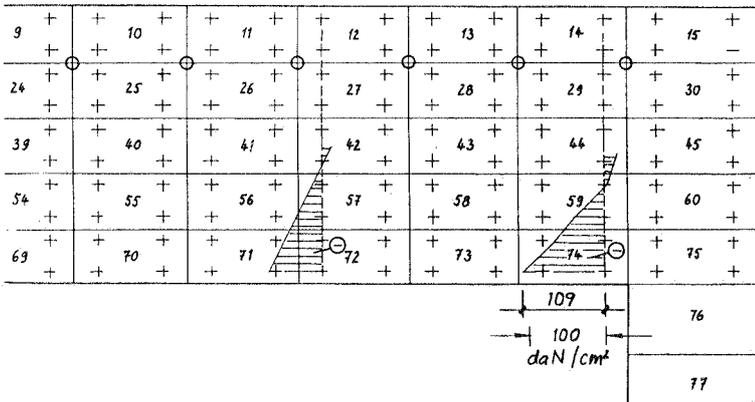


Bild 5-14 Tangentialspannungen σ_x
bei P = 141 kN, IB 15 b

z

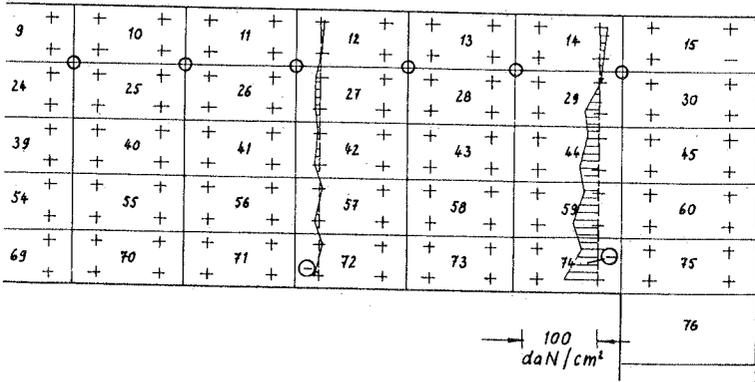


Bild 5-13 Normalspannungen σ_z
bei P = 141 kN, IB 15 b

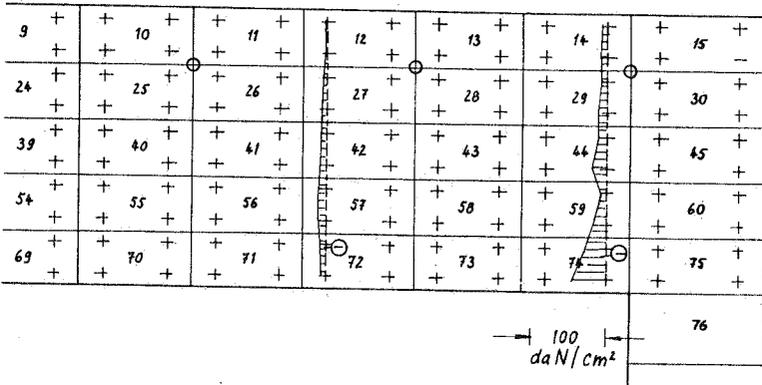


Bild 5-15 Schubspannungen σ_{yz}
bei P = 141 kN, IB 15 a

Der durch unterschiedliche Bewehrung bedingte unterschiedliche Grad der Beanspruchung wird auch in den Bildern 5-16 bis 5-18 verdeutlicht. In Bild 5-16 sind die Hauptdruckspannungsrichtungen im Zustand I aufgetragen. Die Richtung der Trajektorien ändert sich stetig von der Normalen am oberen Plattenrand aus zu einer Neigung von etwa 5° im unteren Integrationspunkt der unteren Elemente ausserhalb der Krafteinleitungszone in die Stütze. In der Einmündungszone der Trajektorien in die Stütze beträgt die Neigung etwa 22° . In Bild 5-17 ist u.a. die Eindringtiefe der radialen Risse beim Rechenmodell des Versuchskörpers IB 15 a unter der Last von $P = 141 \text{ kN}$ dargestellt.

Ebenfalls dargestellt sind die tangentialen Risse, die in Richtungen der Hauptdruckspannungen verlaufen. Die tangentialen Risse treten fast ausschliesslich in unmittelbarer Nähe der Stütze auf. Tangentiale Risse haben sich auch im Bereich der Krafteinleitungszone am Stützenrand ausgebildet. Sie können in dieser Zone als 'Spaltrisse' gedeutet werden.

Beim Modell des Versuchskörpers IB 15 b (Bild 5-18) ist die Rissbildung weit weniger fortgeschritten, insbesondere sind die radialen Risse weniger tief eingedrungen und im Bereich der Krafteinleitung sind weniger Risse vorhanden.

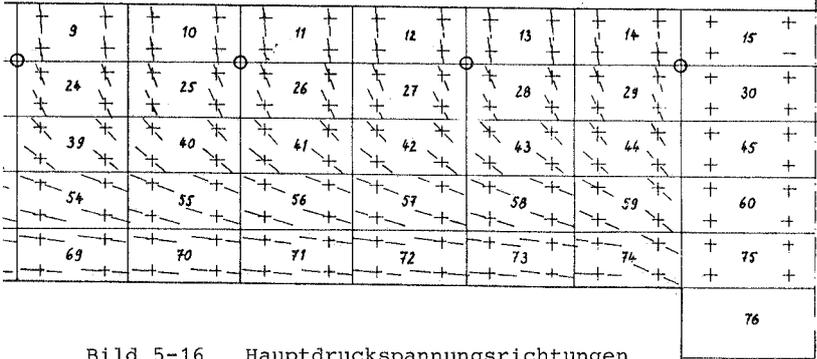


Bild 5-16 Hauptdruckspannungsrichtungen
im Zustand I - Versuchskörper IB 15 a
(IB 15 b etwa wie IB 15 a)

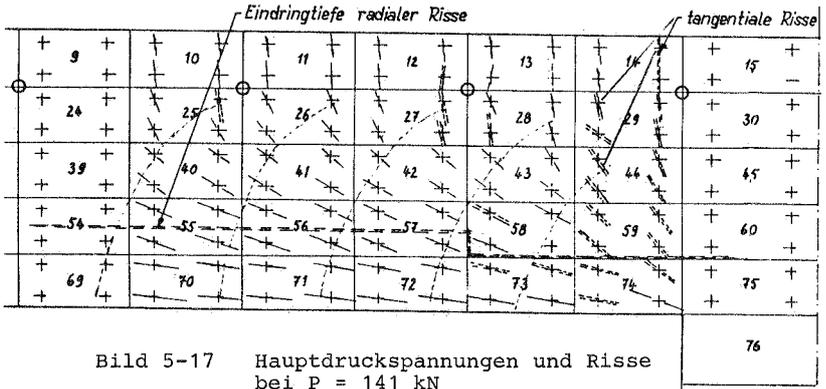


Bild 5-17 Hauptdruckspannungen und Risse
bei $P = 141 \text{ kN}$
Versuchskörper IB 15 a

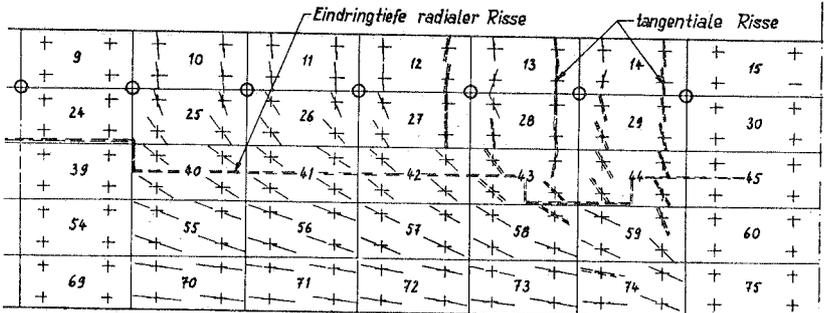


Bild 5-18 Hauptdruckspannungsrichtungen,
Risse bei $P = 141 \text{ kN}$
Versuchskörper IB 15 b

Bild 5-19 zeigt die Dehnung in einigen Bewehrungsringen des Versuchskörpers IB 15 a nach Rechnung und Versuch in Abhängigkeit von der äusseren Last.

Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung im Verlauf der Kurven, die bis zu einer Last von etwa 100 kN steil ansteigen und daran anschliessend über einen begrenzten Ausrundungsbereich (Rissbildung) eine flachere Neigung annehmen.

Auffallend ist, dass die Dehnungen der inneren Bewehrungsringe ($r = 190$) plötzlich bei zunehmender Last stehen bleiben, während die Dehnungen der äusseren Ringe weiter zunehmen. Kinnunen und Nylander erklären diesen Vorgang damit, dass die inneren Ringe bei der Bildung der tangentialen Risse von der sich weiter verformenden Platte abgetrennt werden, sie definieren die Last bei der diese Dehnungen stehen bleiben als 'Schubrisslast'.

Auch bei der FE-Berechnung bleiben die Dehnungen des inneren Bewehrungsringes ($r = 190$) bei einer bestimmten, allerdings etwas grösseren Last stehen.

In Bild 5-20 sind die Biegelinien der Platte nach Versuch und Rechnung aufgetragen.

Beim Versuch IB 15 a liegt die rechnerische Biegelinie an der oberen Grenze des Streubereichs der Messwerte, beim Versuch IB 15 b liegt sie über der oberen Grenze des Streubereichs.

In der Tendenz ist also eine Unterschätzung der Verformungen bei der Rechnung zu erwarten, weil in der Rechnung die deutliche zeitabhängige Zunahme der Verformungen unter hohen Lasten, die auch bei kurzzeitigen Belastungsversuchen mit Stahlbetonbauteilen auftreten, nicht erfasst wird.

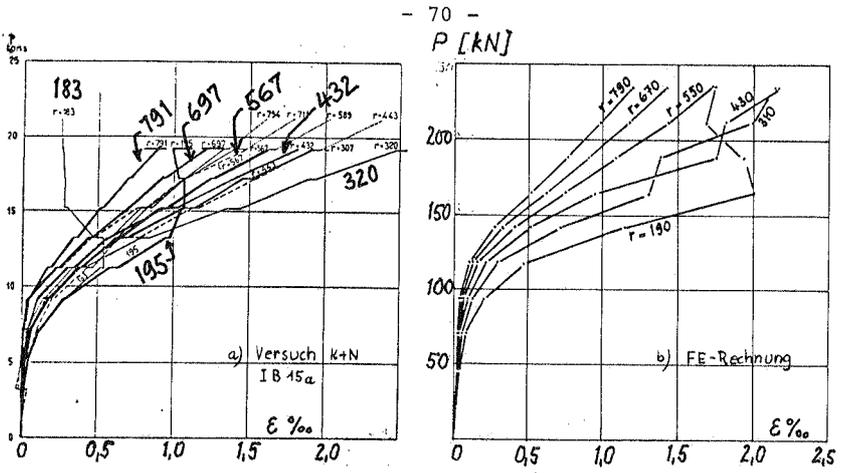


Bild 5-19 Dehnung in der Biegebewehrung nach Versuch und Rechnung

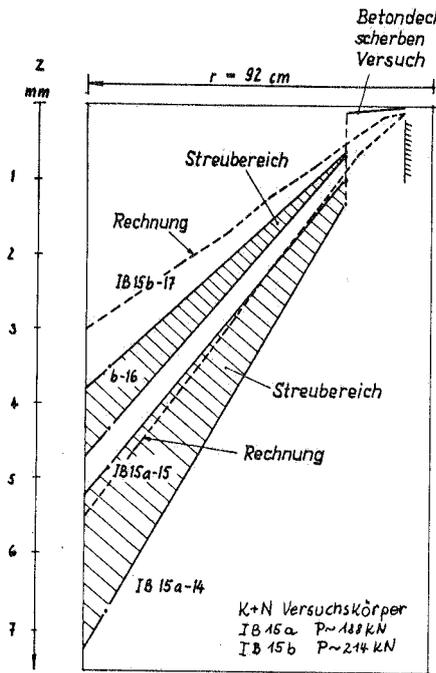


Bild 5-20 Mess- und Rechenwerte der Verformungen bei 93 % der Bruchlast

Daher kann die rechnerisch ermittelte Biegelinie grundsätzlich als zutreffend betrachtet werden.

Eine Last-Verformungskurve wird in [2-7] nicht überliefert. Ein entsprechender Vergleich zwischen Versuch und Rechnung wird bei der Nachrechnung des EMPA-Versuchs [5-1] beschrieben.

Zur Verdeutlichung, wie sich in der elektronischen Berechnung der Einfluss des unterschiedlichen Biegeabwehrungsprozentsatzes bei den Versuchen IB 15 a und IB 15 b auswirkt, sind in Bild 5-21 die rechnerischen Lastverformungskurven angegeben.

Die Verformungen sind bis zu einer Last von etwa 70 kN identisch.

Danach nehmen die rechnerischen Verformungen des geringer bewehrten Versuchskörpers IB 15 a überproportional zu, während die Verformungen des Versuchskörpers IB 15 b bis zu einer Last von etwa 140 kN linear zunehmen.

In Bild 5-21 sind darüberhinaus die Mittelwerte der Bruchlasten beim Versuch eingetragen. Ebenfalls markiert sind die Laststufen, bei denen in der Rechnung die räumliche Betondruckfestigkeit σ_c ('crushed' lt. Definition ADINA) zum ersten Male erreicht wurde.

Die Betondruckfestigkeit wurde bei beiden Berechnungen zum ersten Male im unteren rechten Integrationspunkt des Elements 74, also an der unteren Plattenseite am Stützenrand erreicht. Die Richtung dieser Hauptdruckspannung ist unter einem Winkel von $\alpha=19^\circ$ gegenüber der Plattenmittelfläche geneigt.

Die Laststufen, bei denen die rechnerische Druckfestigkeit erreicht wurde, liegen nahe bei den im Versuch ermittelten Bruchlasten (IB 15 b bei 106 % + IB 15 a bei 93 %). Es wird daher vermutet, dass die geneigten

radialen Druckspannungen bzw. die ihnen zugeordneten Quer-Zugspannungen am Stützenrand, deren Grösse insbesondere aus der örtlichen Krafteinleitung resultiert, massgebende Versagensursache sind.

Die Darstellung der rechnerisch ermittelten Risse (Bild 5-17 und 5-18) veranschaulicht, dass diese Krafteinleitungszone beim Erreichen der Druckfestigkeit in Richtung der Hauptdruckspannung aufgespalten wird.

Das Verhältnis von der im Programm ermittelten räumlichen Druckfestigkeit σ'_c zur vorgegebenen einachsigen Druckfestigkeit $\tilde{\sigma}_c$ beträgt $\sigma'_c / \tilde{\sigma}_c \cong 1,45$. Im ebenen Spannungszustand ist nach den vorgegebenen Versagenshüllkurven nur ein Verhältnis $\sigma'_c / \tilde{\sigma}_c = 1,2$ möglich. Die dritte Spannungskomponente (Normalspannung) wirkt sich damit deutlich auf die Steigerung der Festigkeit aus.

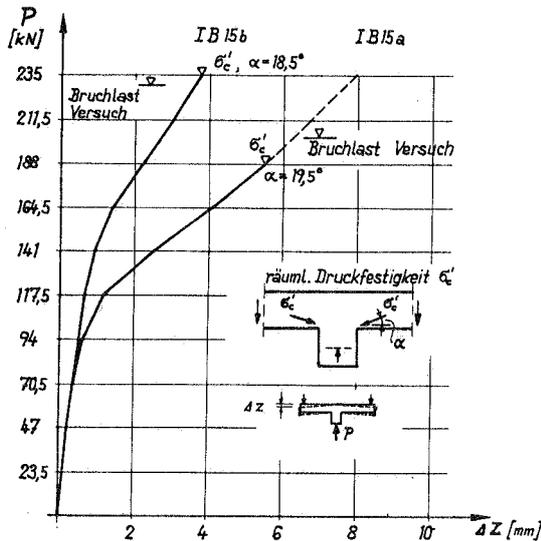


Bild 5-21

Rechnerische Last-Verformungskurven für die Kinnunen-Nyländer-Versuche IB 15 a und IB 15 b
 $\tilde{\sigma}_c = 245 \text{ daN/cm}^2$ - einachsige Druckfestigkeit, Eingabe

IB 15 a $\sigma'_c = 367 \text{ daN/cm}^2$ - räumliche Festigkeit von Adina ermittelt

IB 15 b $\sigma'_c = 356 \text{ daN/cm}^2$ - räumliche Festigkeit von Adina ermittelt

5.3 Nachrechnung des EMPA-Versuchs

Die Abmessungen und Bewehrung des EMPA-Versuchskörpers sind in Bild 5-22 dargestellt

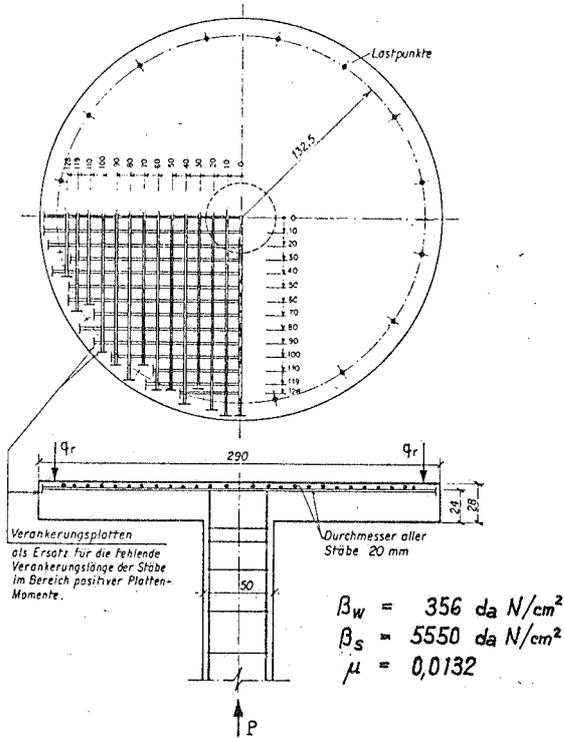


Bild 5-22 Abmessungen und Bewehrung des EMPA-Versuchskörpers
Gesamtlänge der Bewehrungsstäbe
 $L = 112 \text{ m}$

Die Bruchlast beim Versuch ergab sich zu 1 660 kN. Der EMPA-Versuchskörper wurde mit orthogonaler Netzbewehrung hergestellt. In [2-7] wurde darauf hingewiesen, dass orthogonale Netzbewehrung und Kreisringbewehrung mit in beiden Fällen gleichem Stababstand hinsichtlich des Tragverhaltens als praktisch gleichwertig anzusehen sind. In Vergleichsversuchen ergaben sich bei orthogonaler Netzbewehrung jedoch etwas grössere Bruchlasten. Zur Vereinfachung wurde die FE-Nachrechnung mit der Vorgabe von Kreisringbewehrung durchgeführt. Wie weit diese Vereinfachung berechtigt ist, wird an Hand des Vergleiches zwischen Rechnung und Messung später angegeben.

In der FE-Berechnung wurden die 27 Stäbe ϕ 20 mit $e = 10$ cm in jeder Richtung der orthogonalen Bewehrung ersetzt durch 13 konzentrische Bewehrungsringe aus Stäben ϕ 20 mit einem radialen Ringabstand a von im Mittel ebenfalls 10 cm.

Die Gesamtlänge der 2×27 orthogonalen Stäbe innerhalb des Kreises von $r = 132,5$ cm beträgt $L = 112$ m, während die Gesamtlänge der 13 Bewehrungsringe mit $L_o = 62$ m nur rund 55 % der Gesamtlänge der orthogonalen Bewehrungsstäbe beträgt.

Die Voraussetzung eines im Grundsatz gleichwertigen Tragverhaltens von orthogonaler Netzbewehrung und von Kreisringbewehrung führt, wie später bei der Ableitung eines vereinfachten Rechenmodells gezeigt wird, zu wesentlichen Vereinfachungen.

Die Einteilung in die in Bezug auf die z-Achse axial-symmetrischen finiten Elemente erfolgte nach Bild 5-23.

rung und Lochrandlagerung (siehe Kap. 3) ergeben. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit ist die Biegelinie der FE-Berechnung identisch mit der Biegelinie für gelenkige Lagerung.

Die entsprechende Übereinstimmung von FE-Rechenergebnissen im ungerissenen Zustand mit den Rechenergebnissen nach der Plattentheorie für die gelenkig gelagerte Kreisplatte war bei den Kinnunen-Nylander-Versuchen an Hand der Spannungsberechnung demonstriert worden.

Die Biegelinien bei Lasten nach der Rissbildung (Bild 5-25) sind Geraden und gleichen damit hinsichtlich des Verlaufs der Biegelinie bei Lochrandlagerung. Die Ordinaten der Biegelinie sind nach FE-Berechnung jedoch bei einer Last von $P = 660 \text{ kN}$ etwa doppelt so gross wie nach der Plattentheorie bei Lochrandlagerung und konstanter Plattensteifigkeit K , entsprechend Stadium I. Bei einer Last von $P = 1\,325 \text{ kN}$ ergeben sich entsprechend die 2,8-fachen Werte.

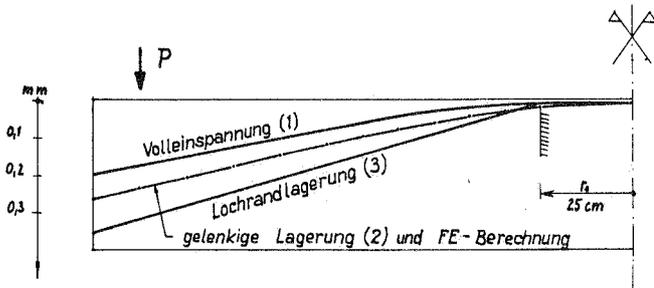


Bild 5-24 Vergleich der Biegelinie bei $P = 165 \text{ kN}$, Zustand I nach der FE-Berechnung und nach der Plattentheorie für die Lagerungsfälle 1, 2 und 3 (s. Seite 32)

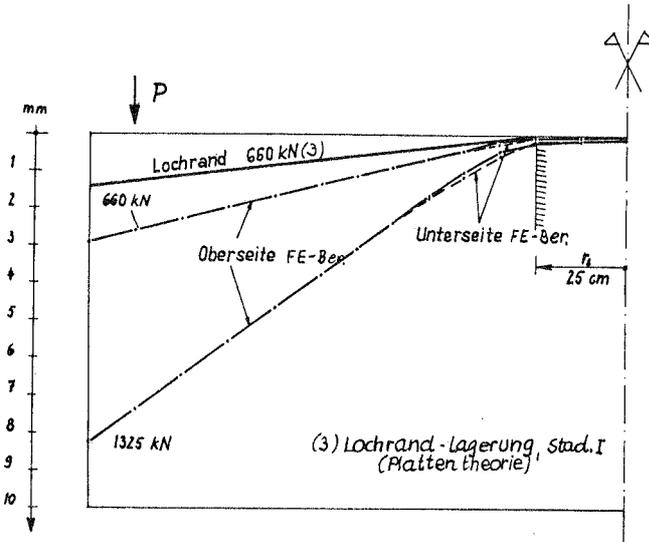


Bild 5-25 Biegelinie bei $P = 662 \text{ kN}$ und
 $P = 1385 \text{ kN}$

In Stützennähe sind die Biegelinien nach der FE-Berechnung für die Plattenoberseite bzw. für die Plattenunterseite etwas voneinander verschieden. Dies kann physikalisch damit erklärt werden, dass sich die Plattendicke durch die vom Stützenrand an der Plattenunterseite her ausstrahlende Auflagerkraft örtlich merklich verändert. In [2-2] wurden vom Verfasser entsprechende Messungen veröffentlicht.

In den Bildern 5-26 und 5-27 wird durch eine Darstellung der Risse bei $P = 330 \text{ kN}$ und bei $P = 500 \text{ kN}$ die Entwicklung der Rissbildung gezeigt.

Es bilden sich radiale Risse, die unter zunehmender Last tiefer eindringen und sich in radialer Richtung verlängern, während die tangentialen Risse nur in unmittelbarer Nähe der Stütze auftreten. Die tangentialen Risse verlaufen am oberen Plattenrand normal zur Plattenmittelfläche und ändern mit zunehmender Eindringtiefe ihre Richtung zum Stützenrand an der Plattenunterseite hin. Die Eindringtiefe radialer und tangentialer Risse in die Platte ist ungefähr gleich gross.

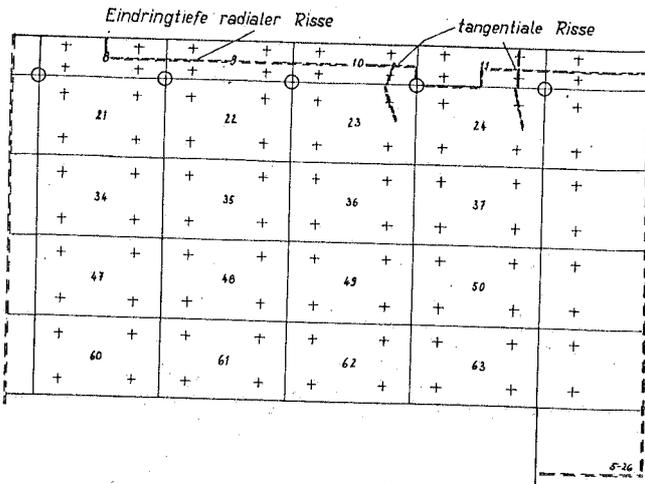


Bild 5-26 Risse bei $P = 330 \text{ kN}$

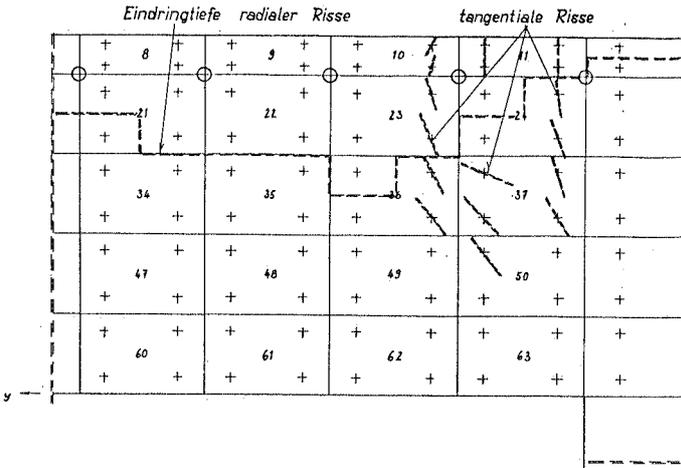


Bild 5-27 Risse bei $P = 500 \text{ kN}$

In den Bildern 5-28 bis 5-35 sind die Spannungsverläufe bei einer Last von $P = 660 \text{ kN}$ und $P = 995 \text{ kN}$ dargestellt. Die Radialspannungen verlaufen am Stützenrand nichtlinear und sind im Bereich der Spannungsspitze erheblich grösser als die Tangentialspannungen am gleichen Ort.

Im Abstand der Plattendicke vom Stützenrand deutet der Verlauf der Radialspannungen nicht auf einen reinen Biegespannungszustand, sondern auf eine Überlagerung von Biegespannungen und radial gerichteten Druckspannungen hin.

Die Randspannungsbeträge der Tangentialspannungen sind dort deutlich grösser als die Randspannungsbeträge der Radialspannungen.

Schub- und Normalspannungen sind am Stützenrand etwa dreiecksförmig über die Plattendicke verteilt und betragsmässig etwa gleich gross.

In den Bildern 5-36 bis 5-38 sind die Richtungen der Hauptdruckspannungen sowie die Risse und die Dehnungen in der Bewehrung bei unterschiedlichen Laststufen dargestellt ($P = 166 \text{ kN}$, $P = 66 \text{ kN}$ und $P = 995 \text{ kN}$). Gegenüber den Richtungen der Hauptdruckspannungen im oberen Bereich der Platte im Zustand I (Bild 5-36) sind die Hauptdruckspannungen nach der Rissbildung flacher geneigt (Bild 5-37 und 5-38).

Tangentiale Risse verlaufen vom oberen Rand her bis tief in die Platte hinein und bilden sich auch noch unterhalb der Eindringtiefe radialer Risse in immer flacher werdender Neigung (20°) in der Nähe des Stützenrandes, also im Hauptbereich der Lasteinleitung aus. In den Bildern 5-37 und 5-38 sind über den Ring-Bewehrungsstäben die Dehnungen dieser Stäbe in % aufgetragen. Sie haben in den Stäben etwa im Abstand der halben Plattendicke vom Stützenrand ein Maximum und fallen zur Stütze hin sehr schnell und zum freien Plattenrand hin langsam ab.

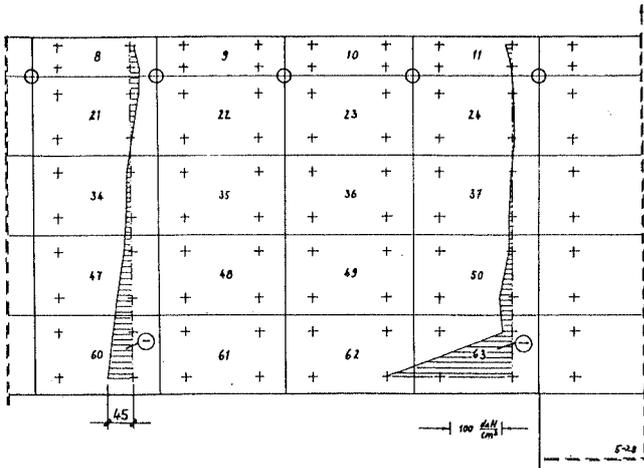


Bild 5-28 Radialspannungen σ_y bei $P = 66.2 \text{ kN}$

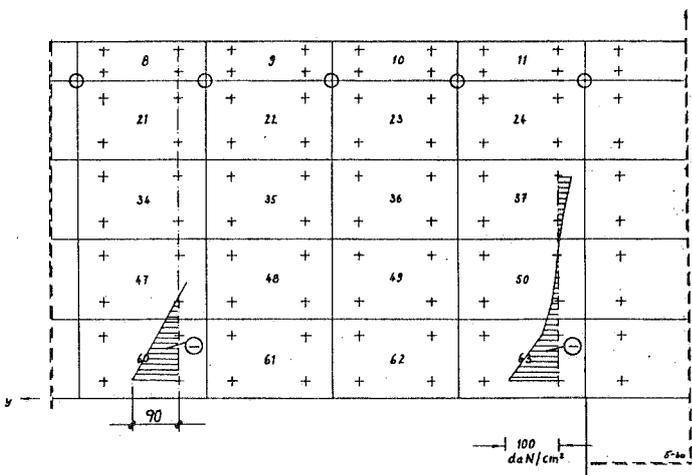


Bild 5-30 Tangentialspannungen σ_x bei $P = 66.2 \text{ kN}$

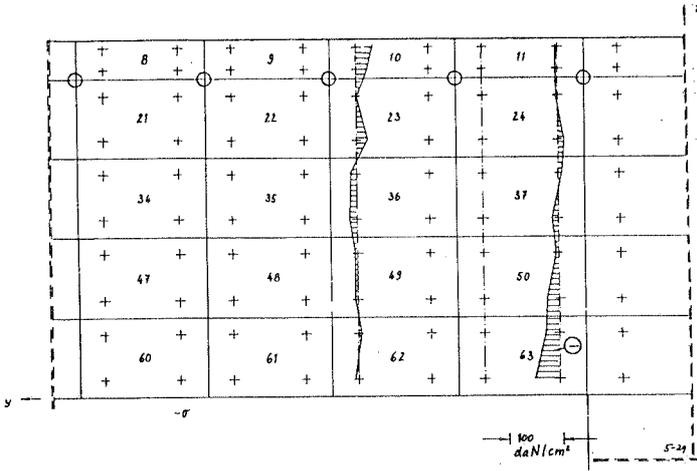


Bild 5-29 Normalspannungen σ_z bei $P = 662 \text{ kN}$

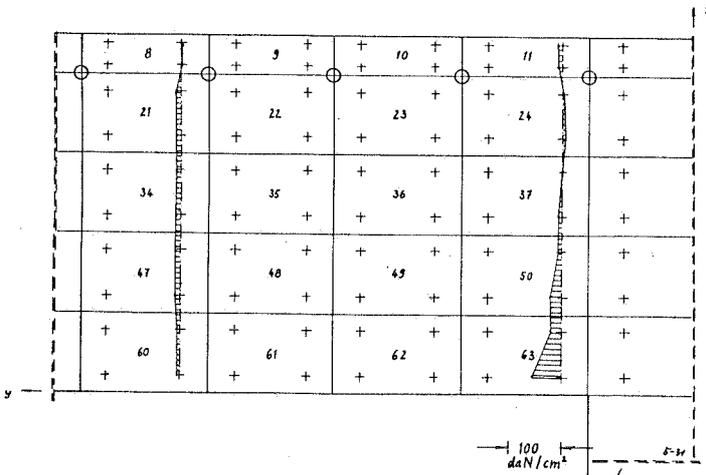


Bild 5-31 Schubspannungen τ_{yz} bei $P = 662 \text{ kN}$

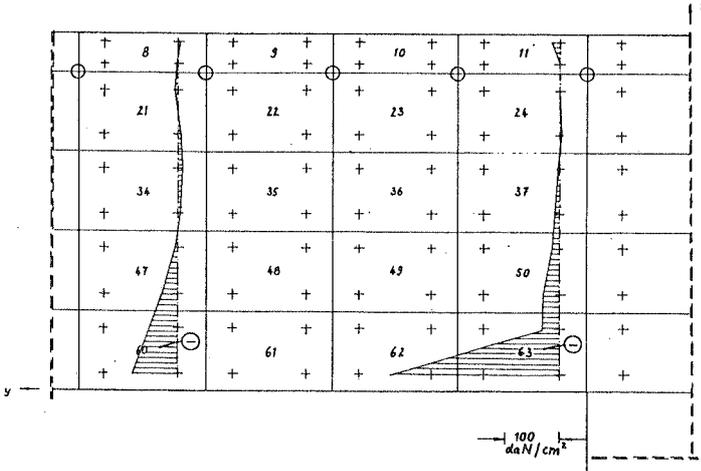


Bild 5-32 Radialspannungen σ_y bei $P = 995$ kN

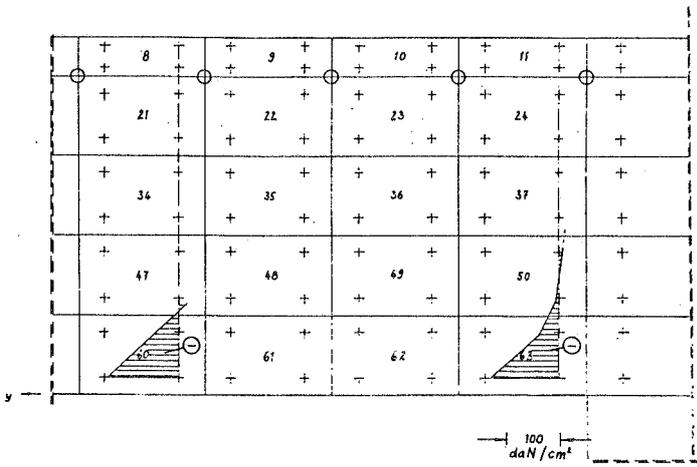


Bild 5-34 Tangentialspannungen σ_x bei $P = 995$ kN

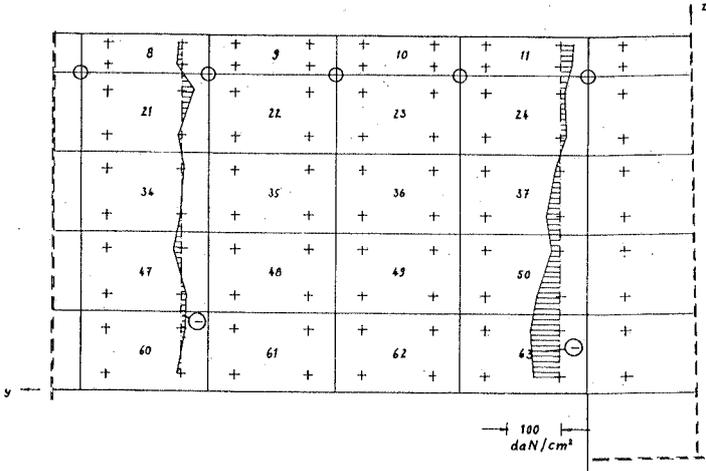


Bild 5-33 Normalspannungen σ_z bei $P = 995$ kN

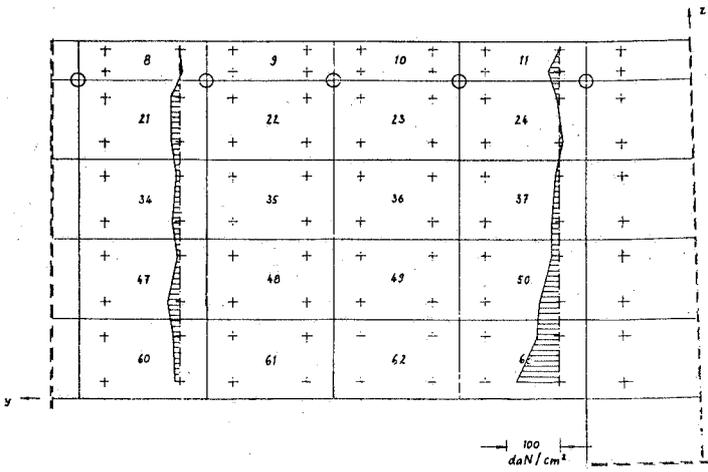


Bild 5-35 Schubspannungen τ_{yz} bei $P = 995$ kN

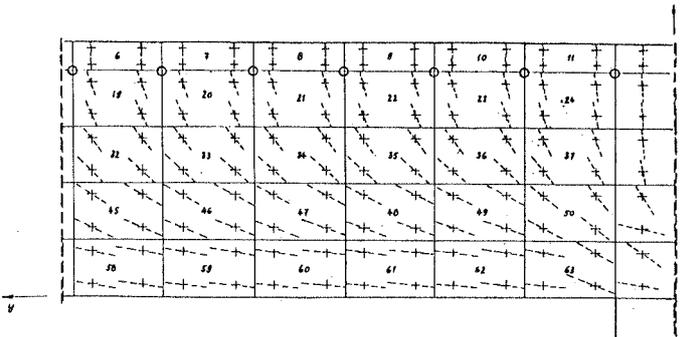


Bild 5-36 Richtung der Hauptdruckspannungen im Zustand I ($P = 166 \text{ kN}$)

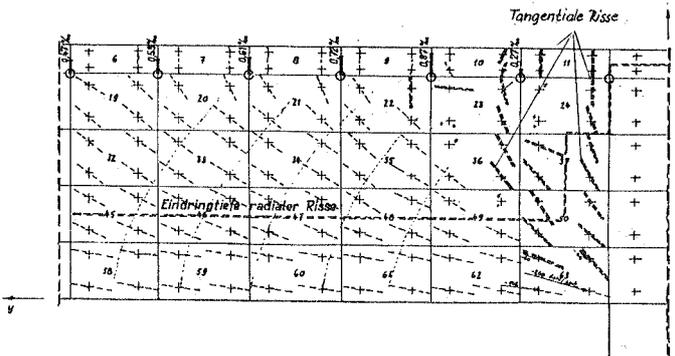


Bild 5-37 Hauptdruckspannungsrichtungen und Risse bei $P 660 \text{ kN}$
Dehnungen der Bewehrungsstäbe

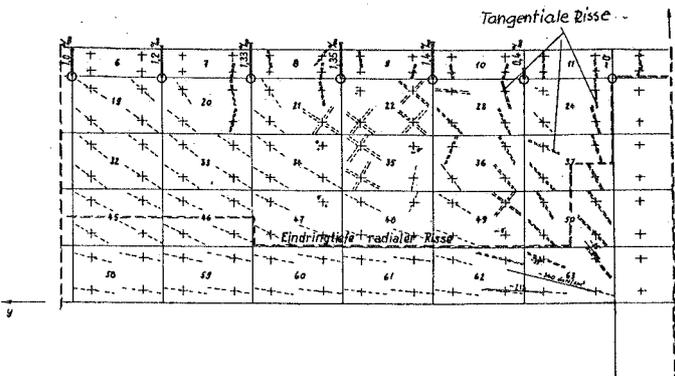


Bild 5-38 Hauptdruckspannungsrichtungen und Risse bei $P = 995 \text{ kN}$
Dehnungen der Bewehrungsstäbe

In Bild 5-39 sind die Last-Verformungskurven nach Versuchsbericht [5-1] und Rechnung dargestellt.

Die Last-Verformungskurve nach dem Versuchsbericht ist stetig gekrümmt, die Last-Verformungskurve der FE-Rechnung zeigt die bekannte Gegenkrümmung, wie sie bei Last-Verformungskurven von Stahlbetonbauteilen nach der Rissbildung beobachtet wird, wenn sich die Stahldehnungen von der Ursprungsgeraden im Zustand I der Ursprungsgeraden im nackten Zustand II annähern. Daher spricht dieser Unterschied nicht gegen die FE-Berechnung. Er kann vielmehr mit den unvermeidbaren Ungenauigkeiten bei der Datenerfassung belastungsgesteuerter Versuche zusammenhängen.

Im Rahmen dieser nicht auszuschliessenden Mess- Ungenauigkeiten beim Versuch und der Unsicherheiten bei der Vorgabe für Materialkennwerte für die Berechnung stimmen die Beträge der Verformungen bis zu einer Last von etwa 1 000 kN sehr gut überein.

Bei grösseren Lasten ergeben sich im Versuch grössere Verformungen als nach der Rechnung. Dies erscheint - wie schon bei den Kinnunen-Nylander-Versuchen erwähnt - plausibel, weil in der Rechnung die Zeitabhängigkeit der Verformungen, die sich unter grossen Beanspruchungen auch im Kurzzeitversuch auswirkt, nicht erfasst wird. In der berechneten Kurve ist die Laststufe $P = 1325$ kN angegeben, bei der zum ersten Mal die rechnerische Druckfestigkeit σ_c' erreicht wird und zwar im unteren Integrationspunkt des untersten Plattenelements 63 am Stützenrand. Die Richtung der Hauptdruckspannung ist dort um 15° gegenüber der Plattenmittelfläche geneigt. Das Programm ermittelte dort eine räumliche Druckfestigkeit, die etwa dem 1,25-fachen der einachsigen Druckfestigkeit entspricht.

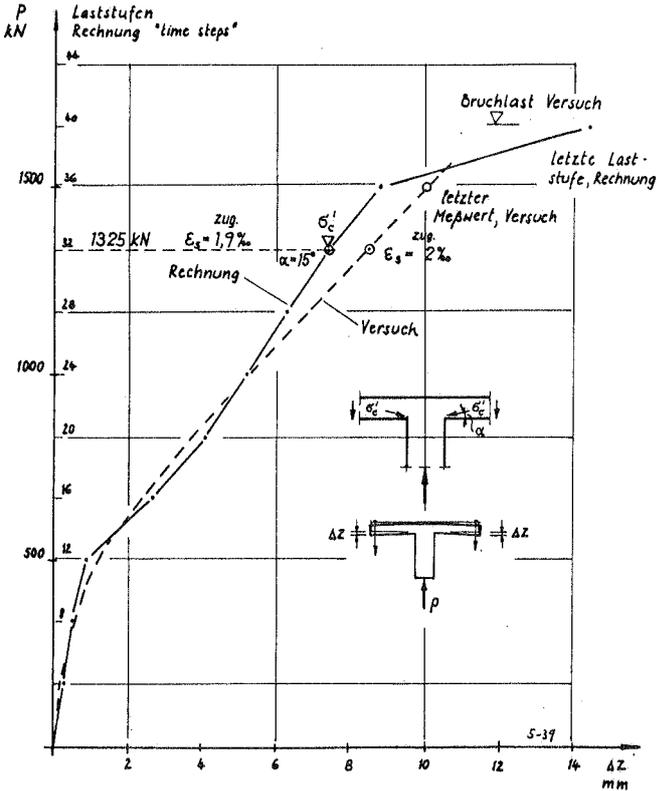


Bild 5-39 Last-Verformungskurve
EMPA-Versuch und FE-Rechnung

$\tilde{\sigma}_C = 300 \text{ daN/cm}^2$ (einachsige Festigkeit,
Eingabe)

$\sigma'_C = 374 \text{ daN/cm}^2$ (räumliche Festigkeit,
von Adina ermittelt)

Die Festigkeitssteigerung ist also geringer als bei den Kinnunen-Nylander-Versuchen. Es wird angenommen, dass dies auf das vergleichsweise unterschiedliche Verhältnis von Stützendurchmesser zu Plattendicke zurückgeführt werden kann. Beim EMPA-Versuch ist die Stütze relativ dick. Bei zunehmendem Stützendurchmesser nähern sich die Beanspruchungen am Stützenrand denjenigen der geradlinig unterstützten Platte an. Damit wirkt sich im Grenzfall bei unbehinderter Querdehnung nur noch der Einfluss der Normalspannungen auf die Steigerung der Festigkeit aus.

Die grösste Dehnung der Bewehrung betrug bei $P = 1\ 325\ \text{kN}$ rechnerisch 1,9 %, im Versuch wurde in unmittelbarer Stütznähe eine Dehnung in der tangential zum Stützenrand verlaufenden Bewehrung von 2 % gemessen.

In der den tangentialen Biegeriss am Stützenrand kreuzenden Bewehrung wurde eine Dehnung von 4,5 % gemessen. Sieht man die Last $P = 1\ 325\ \text{kN}$, die etwa 80 % der beobachteten Bruchlast beträgt, als rechnerische Bruchlast an, so ergibt sich ein grösserer Unterschied zwischen rechnerischer und beobachteter Bruchlast als dies beim Vergleich von Rechnung und Versuch der Kinnunen und Nylander-Versuche der Fall war.

Dieser Unterschied in der Höhe der Bruchlast kann sich u.a. aus der unterschiedlichen Mitwirkung des Stahles bei Ringbewehrung bzw. bei orthogonaler Netzbewehrung ergeben.

Kinnunen und Nylander erklären den günstigen Einfluss von orthogonaler Netzbewehrung durch die 'Verdübelung' von Platte und Stütze durch die über die Stütze hinweg verlaufenden Bewehrungsstäbe. Allerdings stützen sich diese 'Dübel' auf der Plattenoberseite nur gegen die dünne obere Betondeckung ab und sind damit vermutlich wenig wirksam.

Nach Ansicht des Verfassers wird durch die Bewehrungsstäbe, die den tangentialen Riss am Stützenrand kreuzen, insbesondere das weite Klaffen dieses Risses und damit die Einschnürung der zur Krafteinleitung erforderlichen Betondruckzone verringert, was eine Erhöhung der Bruchlast bewirkt. Hierzu kommt, dass sich auch die bei der orthogonalen Anordnung um rd. 80 % höhere Gesamt-Bewehrungsmenge günstig auswirkt.

Grundsätzlich kann das Rechenergebnis im Vergleich zum Versuchsergebnis als befriedigend angesehen werden, weil sich Unterschiede zwischen Rechnung und Versuch plausibel erklären lassen und keine generell unterschiedliche Tragwirkung im Lasteinleitungsbereich zu erkennen ist.

5.4 Zusammenfassung

Der Vergleich der Rechenergebnisse der elektronischen Berechnungen mit Versuchsergebnissen zeigt eine gute Übereinstimmung. Unterschiede können plausibel erklärt werden. Daher werden auch die Rechenergebnisse, die nicht durch Versuchsergebnisse belegt werden können, insbesondere die ermittelten Spannungen und die Rissbildung im Innern der Platte für ein zutreffendes Bild der Wirklichkeit gehalten.

Das Versagen hängt demnach ursächlich mit den grossen, flach geneigten radialen Druckbeanspruchungen im unteren Plattenbereich nahe am Stützenrand zusammen. Die Grösse dieser Druckbeanspruchungen hängt insbesondere von der örtlichen druckstrebenartigen Krafteinleitung und nur in zweiter Linie von den radialer Biegedruckbeanspruchungen ab, da die radialen Biegedruckbeanspruchungen

in die tangentielle Richtung 'ausweichen' können (Übergang zum Tragverhalten der lochrandgestützten Platte). Dieses 'Ausweichvermögen' soll im folgenden Kapitel an Hand von zwei Mikrobeton-Modellversuchen demonstriert werden, die sich darin unterscheiden, dass in einer der beiden Versuchsplatten die Betondruckzone in radialer Richtung von Haus aus aufgeschlitzt ist und daher in tangentialer Richtung nicht mehr voll mittragen kann.

Diese Untersuchung hätte auch mit Hilfe der FE-Berechnung durchgeführt werden können, sie wäre jedoch wegen des notwendigen Verzichts auf Rotationssymmetrie bei der geschlitzten Platte aufwendiger geworden als der Modellversuch.

6. Modellversuche mit Microbeton

6.1 Allgemeines

Zum Studium der Umlagerungsmöglichkeit von Radialmomenten in Tangentialmomente wurden am Institut für Modellstatik der Universität Stuttgart (IMS) auf Veranlassung des Verfassers 2 Microbeton-Modellversuche durchgeführt [6-1]. Über die Modelltechnik und die Aussagekraft der Ergebnisse wird vom IMS an anderem Ort berichtet. Hier sollen nur die im Versuch gemessenen Dehnungen an der Plattenunterseite in radialer und tangentialer Richtung miteinander verglichen werden. Der erste der beiden Versuche diente gleichzeitig als Eichversuch, durch den sichergestellt wurde, dass Verformungen, Rissbildung und Bruchlasten der Microbeton-Modelle ein zutreffendes Bild der Verhältnisse beim Grossversuch ergeben.

6.2 Beschreibung der Modellversuche

Im Versuch Nr. 1 wurde der EMPA-Versuch [5-1] im Längensmaßstab $\ell_v = 1 : 6,45$ nachgebildet. Im Versuch Nr. 2 wurden im ansonsten unveränderten Modell in der Biegedruckzone radiale Schlitze angeordnet, um die Mitwirkung des Betones in tangentialer Richtung einzuschränken.

Bild 6-1 zeigt die Abmessungen des Versuchskörpers, die Bewehrung in der Plexiglasschalung ist in Bild 6.3 a dargestellt.

Es wurden Microbeton und Rippenstahl ϕ 2,3 mm mit folgenden Festigkeitskennwerten verwendet:

	Versuch 1 (ungeschlitzt)	Versuch 2 (geschlitzt)
Würfeldruckfestigkeit	29,9	30,5
Biegezugfestigkeit	3,8	4,0
E-Modul Beton	18 500	20 000
Streckgrenze Stahl	565	537

Werte in N/mm²

Der Versuchsaufbau ist in Bild 6-3 b zu erkennen. Die Versuche wurden belastungsgesteuert durchgeführt. Gemessen wurden die Durchbiegungen längs eines Plattendurchmessers (siehe Bild 6-2) sowie die Betondehnungen an der (im Modellversuch) gedrückten Plattenoberfläche am Stützenrand und im Abstand der Plattendicke vom Stützenrand.

Beide Versuche versagten schlagartig durch einen kegelförmigen Trennriss zwischen Stützenstumpf und Platte, und zwar beim Versuch Nr. 1 bei einer Last von 37 kN und beim Versuch Nr. 2 bei einer Last von 31,5 kN.

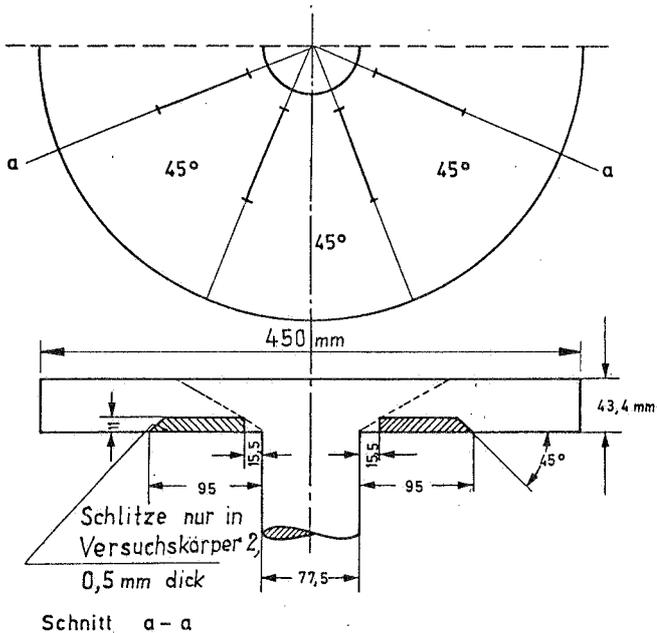


Bild 6-1 Abmessungen des Versuchskörpers und Anordnung der Schlitz

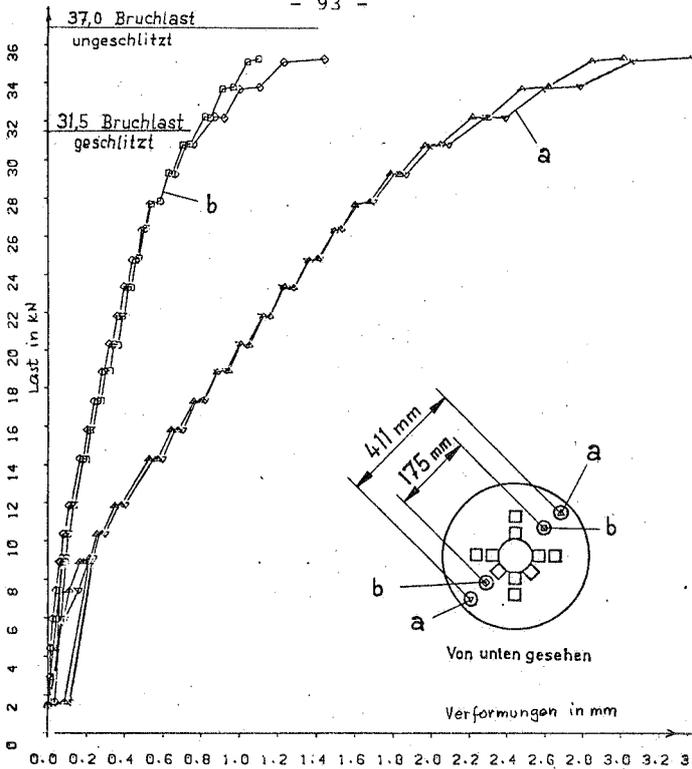


Bild 6-2 Last-Verformungskurven der Versuchskörper 1 (ungeschlitz) und 2 (geschlitz). Versuch ergab bei 1 und 2 praktisch identische Kurven

Beim Belastungsversuch wurden die Durchbiegungen jeweils zu Beginn und am Ende der einzelnen Laststufen gemessen, siehe Bild 6-4.

Ebenfalls in Bild 6-4 dargestellt ist die Verformungskurve die sich ergibt, wenn jeweils nur die Verformungswerte addiert werden, die zu Beginn der einzelnen Laststufen abgelesen wurden (Versuch 'elastisch').

Vergleicht man diese Verformungskurve mit der um den Längenmaßstab $\ell_V = 1 : 6,45$ und den Kräftemaßstab $\ell_k = 45 : 1$ verzerrten Verformungskurve der elektronischen Berechnung, so ergibt sich eine gute Übereinstimmung sowohl in den Absolutwerten der Verformungen als auch im charakteristischen Verlauf der Lastverformungskurve insbesondere im Übergang vom Stadium I zum Stadium II.

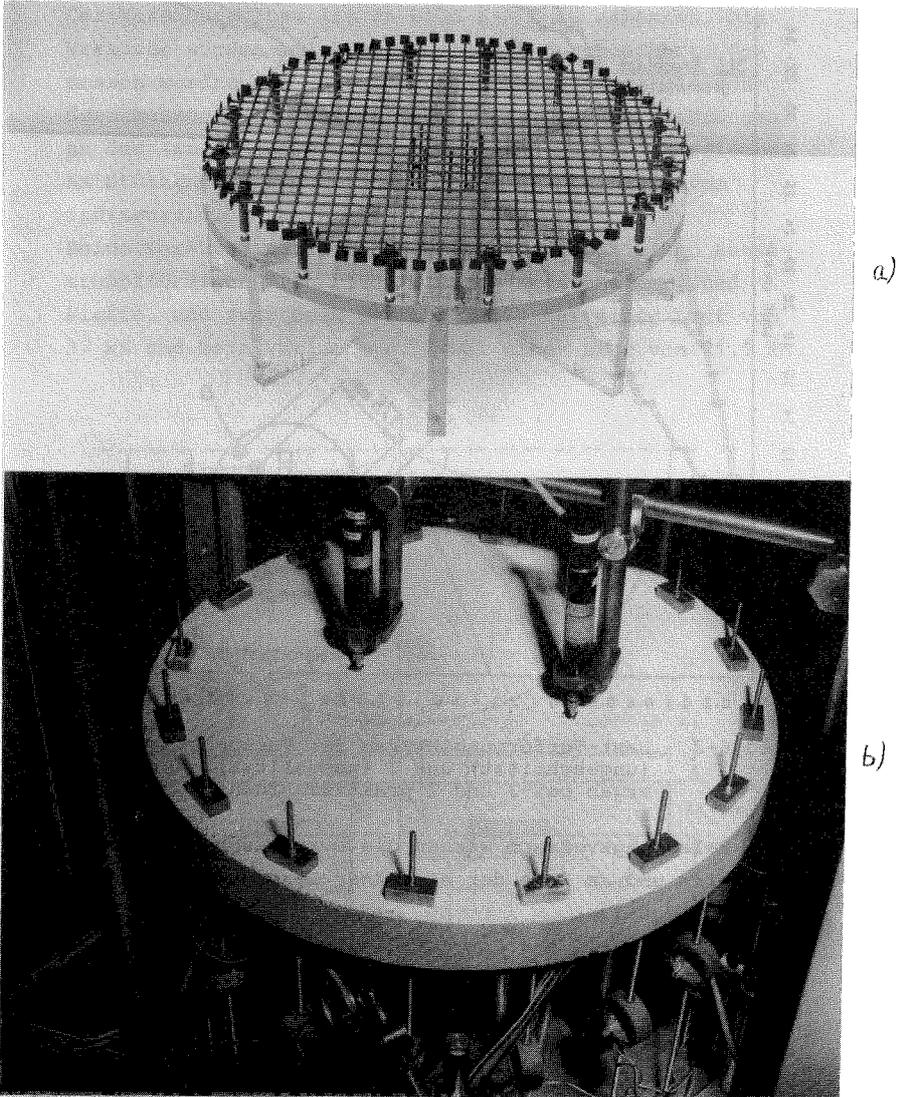


Bild 6-3 Modellversuch
a) Bewehrung in der Plexigalsschalung
b) Versuchsäufbau

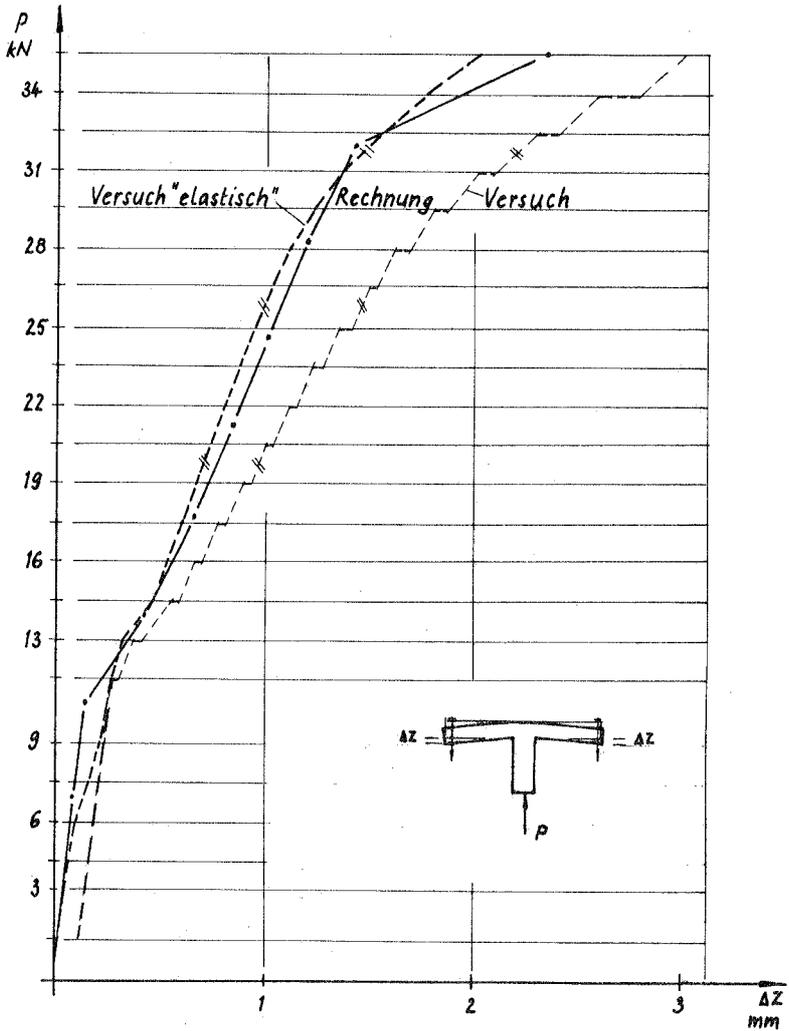


Bild 6-4 Last-Verformungskurve, Vergleich der Verformungswerte nach Versuch und Rechnung (1/6,45-fache Werte der Hauptausführung)

Im Bild 6-5 sind die Mittelwerte der radialen Dehnungen am Stützenrand (6-5 a) und im Abstand der Plattendicke d vom Stützenrand (6-5 b) in Abhängigkeit von der Last dargestellt.

Am Stützenrand sind die radialen Dehnungen der geschlitzten Platte grösser als bei der nicht geschlitzten Platte, obwohl die Schlitze gar nicht bis zum Stützenrand durchgeführt wurden und die Mitwirkung in tangentialer Richtung durch den verhältnismässig grossen Schlitzabstand nur bedingt ausgeschaltet werden konnte (siehe Bild 6-1). Im Abstand der Plattendicke d vom Stützenrand unterscheiden sich die radialen Dehnungen bei beiden Platten kaum.

Interessante Aufschlüsse über die Änderung der Beanspruchungen in tangentialer und radialer Richtung in Abhängigkeit von der Last geben die Bilder 6-6 und 6-7. In Bild 6-6 sind die tangentialen und radialen Dehnungen des Betons am Stützenrand und in Bild 6-7 die entsprechenden Dehnungen im Abstand der Plattendicke d vom Stützenrand dargestellt. Die Dehnungen sind auch hier jeweils Mittelwerte aus mehreren Messungen an sich entsprechenden Messpunkten des Versuchskörpers 1 (ohne Schlitz).

Man erkennt, dass bis zu einer Last von etwa 10 kN die tangentialen und radialen Dehnungen etwa linear zunehmen. Mit steigender Last wachsen jedoch die tangentialen Dehnungen rascher an als die radialen Dehnungen. Unterhalb der Bruchlast, die hier bei etwa 37 kN gelegen hat, nehmen nur noch die tangentialen Dehnungen, und zwar immer rascher zu, während die radialen Dehnungen dagegen stark zurückbleiben und im Abstand d von der Stütze sogar etwas abnehmen.

Während das Verhältnis der Dehnung in tangentialer Richtung zur Dehnung in radialer Richtung bei niedrigen Laststufen (Stadium I) am Stützenrand etwa 1:1 war, betrug das Verhältnis in der Nähe der Bruchlast nur 3:1. Im Abstand d vom Stützenrand wuchs dieses Verhältnis sogar auf 5:1 an.

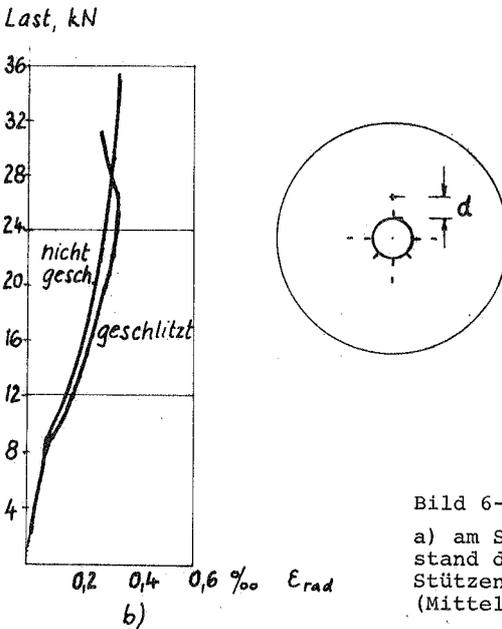
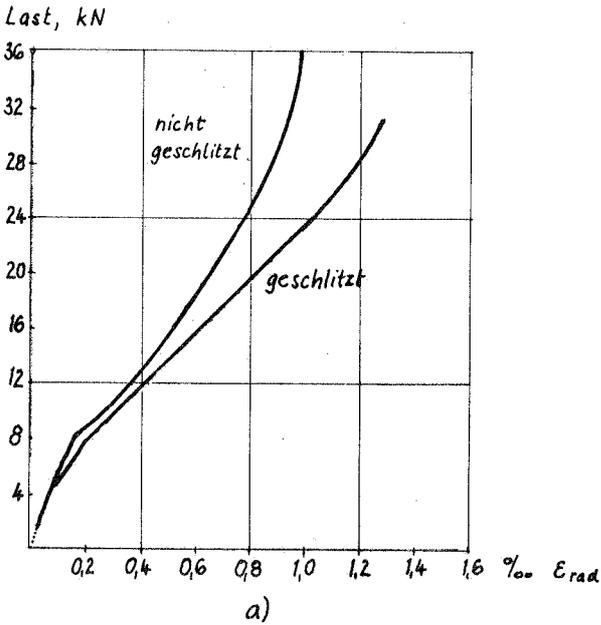


Bild 6-5 Radialdehnungen
a) am Stützenrand, b) im Abstand der Plattendicke d vom Stützenrand
(Mittelwerte)

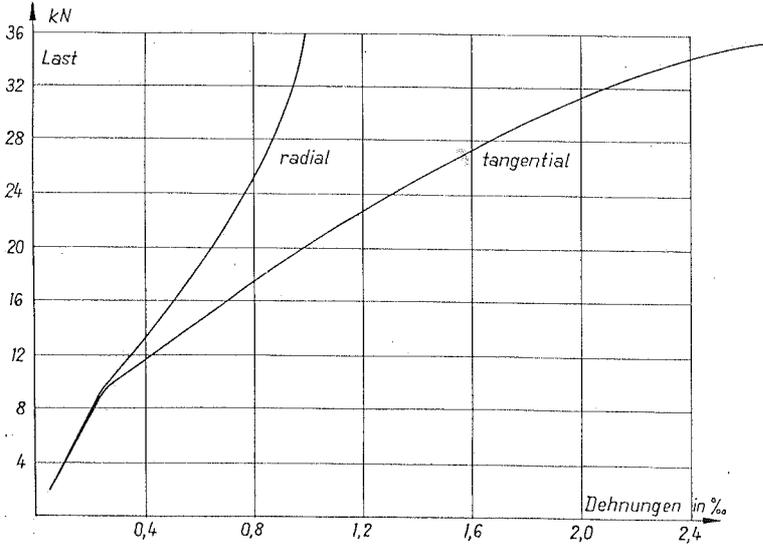


Bild 6-6 Tangentiale und radiale Dehnungen des Betons am Stützenrand
(Versuchskörper 1, ohne Schlitz)

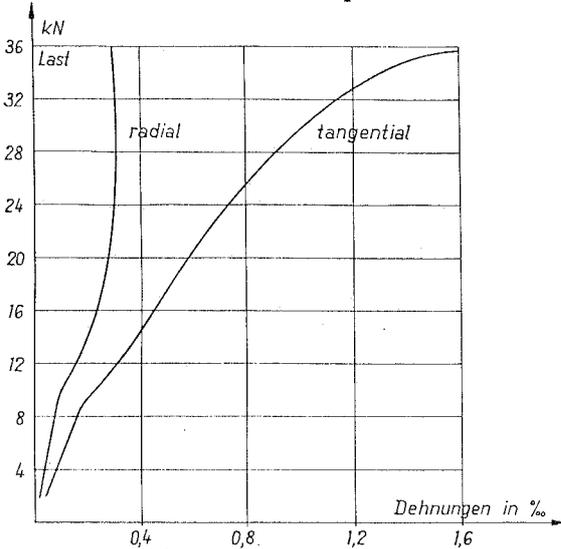


Bild 6-7 Tangentiale und radiale Dehnungen des Betons im Abstand der Plattendicke d von der Stütze
(Versuchskörper 1, ohne Schlitz)

6.3 Bewertung der Versuchsergebnisse

Die Zunahme des Verhältnisses von tangentialer zu radialer Betondruckdehnung unter zunehmender Belastung (Bild 6-5 bis 6-7) kann als Anzeichen der Umlagerungsmöglichkeit der Biegebeanspruchungen von der radialen Richtung zur tangentialen Richtung angesehen werden. Diese Umlagerung führt zu einer Entlastung der radial gerichteten Druckzone am Stützenrand, in der sich die Druckbeanspruchungen infolge Kräfteinleitung und infolge radialer Biegebeanspruchung überlagern.

Bei Versuchskörper 2 (geschlitzte Platte) ist diese Umlagerung und damit die Entlastung der radial gerichteten Druckzone nicht in gleichem Masse möglich wie bei Versuchskörper 1 (ungeschlitzte Platte). Die radialen Druckspannungen am Stützenrand waren daher höher und die Bruchlast lag bei Versuchskörper 2 deutlich unter derjenigen des Versuchskörpers 1.

Aus Kostengründen konnten keine weiteren Versuche durchgeführt werden. Durch weitere Modell-Versuche an Kreisplatten mit einer verbesserten Form und Ausdehnung der Schlitze zur Unterdrückung der Mitwirkung des Betons in tangentialer Richtung könnte jedoch nach Ansicht des Verfassers Einfluss und Ausmass der Umlagerung noch besser deutlich gemacht werden.

7. Vereinfachtes Modell für den Tragmechanismus im Auflagerbereich von Flachdecken und Herleitung eines Rechenverfahrens

7.1 Grundlagen

Die wesentlichen Ergebnisse der elektronischen Berechnung und der Modellversuche werden zur Herleitung eines vereinfachten Tragmodells verwendet. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen, wobei zunächst eine ringförmige Bewehrung des Auflagerbereiches vorausgesetzt ist.

Im Zustand I lassen sich Schnittkräfte und Verformungen bis auf eine Störzone im Auflagerbereich zutreffend nach der Plattentheorie bzw. der technischen Biegelehre für die längs einer Kreislinie gelenkig gelagerte Kreisplatte (siehe Kapitel 3, Lagerungsfall 2) bestimmen.

1. Unter zunehmender Belastung und Übergang in Stadium II bilden sich an der Oberseite folgende charakteristischen Biegerisse aus (vgl. Kap. 5):
 - a) ein entlang des Stützenrandes ringförmig verlaufender tiefer Tangentialriss, der sich bei fortschreitender Belastung schon frühzeitig sehr weit öffnet (Bild 5-17)
 - b) von diesem Tangentialriss ausstrahlende, radial verlaufende Risse, die in der Umgebung der Stütze etwa dieselbe Tiefe haben wie der Tangentialriss (Bild 5-17)
 - c) weitere Tangentialrisse bis etwa zum Abstand h vom Stützenrand, die im oberen Bereich normal zur Plattenoberfläche verlaufen und mit zunehmender Eindringtiefe schräg zum Stützenrand an der unteren Plattenfläche hin verlaufen (Bild 5-18)

2. Im Bereich der Tangentialrisse bis zum Abstand h vom Stützenrand nimmt die Beanspruchung in der Bewehrung unter fortschreitender Belastung ab (Bild 5-38).
3. Nach der Bildung der ringförmigen Tangentialrisse umfahren die Drucktrajektorien die gerissene Zone und sind vergleichsweise gerade gestreckt (Bild 5-16, 5-17, 5-18, 5-36 und 5-38). Die Aktivierung der Bewehrung nach der Rissbildung bewirkt ein Abknicken der Trajektorien in Höhe der Ringbewehrung.
4. Im Zustand II ist der Verlauf der Biegelinie in radialer Richtung *f a s t l i n e a r* (Bild 5-20 und 5-25). Dies entspricht der Biegelinie, die sich nach der Elastizitätstheorie bei der lochrandgestützten Platte ergibt (siehe Kapitel 3), wo in Stützennähe hauptsächlich Tangentialmomente und nur vergleichsweise kleine Radialmomente auftreten. Mit wachsender Belastung überwiegt auch ausserhalb des Krafteinleitungsbereichs in der Betondruckzone immer mehr die tangentielle Biegedruckbeanspruchung gegenüber der radialen (z.B. Bild 5-12, 5-14, 6-6 und 6-7).
5. Nahe am Stützenrand, also im Krafteinleitungsbereich, treten grosse, radial gerichtete und gegenüber der Plattenmittelfläche *f l a c h g e n e i g t e* Druckbeanspruchungen in einer durch Ringrisse gegenüber dem Zustand I eingeschnürten Druckzone auf (Bild 5-32 und 5-34, sowie 5-38).
Diese radialen Druckbeanspruchungen resultieren bei zunehmender Last mehr und mehr aus einer Krafteinleitung über schräge Druckstreben und nicht aus einer radialen *B i e g e* beanspruchung, weil sich die radialen Biegebeanspruchungen in zunehmendem Mass in die tangentielle Richtung umgelagert haben.

7.2 Folgerungen aus dem linearen Verlauf der Biegelinie in radialer Richtung

Eine kreislinienförmig unterstützte Kreisplatte mit in radialer Richtung linearer Biegelinie ist in Bild 7-1 dargestellt.

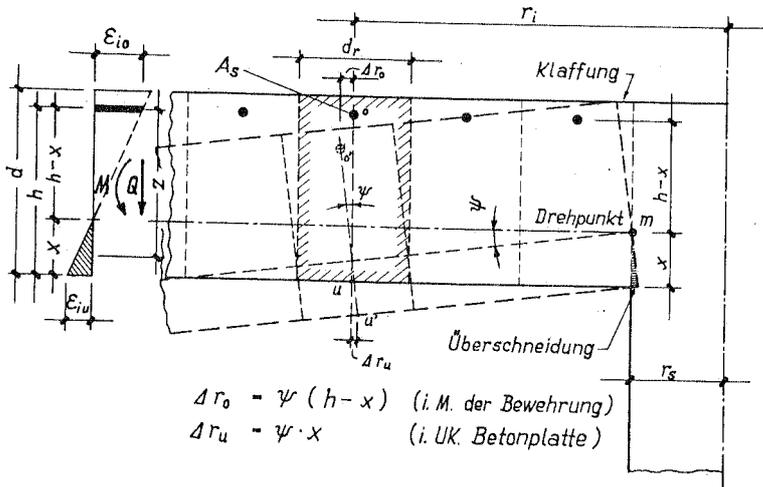


Bild 7-1 Verschiebung und Verdrehung eines Elementringes mit der Breite d_r im Abstand r_i .

Die Platte ist längs eines Gelenkrings m im Abstand x vom unteren Rand lotrecht unverschieblich gelagert und um den Winkel ψ verdreht.

Dabei tritt am Stützenumfang am oberen Plattenrand eine Klaffung und entsprechend am unteren Plattenrand eine Überschneidung von Platte und Stütze auf.

Es wird zunächst angenommen, dass diese Überschneidung möglich sei. Betrachtet man ein Element i der Kreisplatte,

also einen Kreisring mit dem Radius r_i , der Höhe h und der Breite d_r , so ergeben sich infolge Verdrehung des Elementes um m die radialen bzw. horizontalen Verschiebungen in Höhe der Kreisringbewehrung zu:

$$\Delta r_o = \varphi' (h-x)$$

bzw. am unteren Plattenrand zu:

$$\Delta r_u = \varphi' \cdot x$$

Diese radialen Verschiebungen sind für jeden Kreisring gleich gross.

Daraus folgen die tangentialen Dehnungen des Kreisringes i zu:

$$\epsilon_{io} = \Delta r_o / r_i = \varphi' (h-x) / r_i \quad (\text{in Höhe Ringbewehrung})$$

$$\epsilon_{iu} = \Delta r_u / r_i = \varphi' \cdot x / r_i \quad (\text{in UK Betonplatte})$$

Nimmt man an, dass diese Dehnungen noch im elastischen Verformungsbereich des Stahles bzw. des Betons liegen, dann ergeben sich daraus die tangentialen Zug- bzw. Druckspannungen:

$$\sigma_o = \epsilon_o \cdot E_s = \varphi' \frac{(h-x)}{r_i} \cdot E_s$$

$$\sigma_u = \epsilon_u \cdot E_b = \varphi' \cdot \frac{x}{r_i} \cdot E_b$$

In tangentialer Richtung steht für die Aufnahme von Zugkräften im Zustand II der Stahlquerschnitt

$$A_s = a_s \cdot dr \quad a_s = \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}} = \text{cm}$$

bzw. für die Aufnahme von Druckkräften der Betonquerschnitt

$$A_b = x \cdot dr$$

zur Verfügung.

Man erhält damit für den Kreisring mit dem Radius r_i die Ringzugkraft

$$Z_i = A_s \cdot \sigma_o = a_s \cdot dr \cdot \gamma \frac{(h-x)}{r_i} \cdot E_s$$

bzw. die Ringdruckkraft

$$D_i = A_b \cdot \sigma_u \cdot \frac{1}{2} = \frac{x \cdot dr}{2} \cdot \gamma \frac{x}{r_i} \cdot E_b$$

bzw. mit $a_s/h = \mu$ und $E_s/E_b = n$:

$$Z_i = \mu \cdot h \cdot dr \cdot E_s \cdot \gamma \frac{(h-x)}{r_i} \text{ und}$$

$$D_i = 0,5 \cdot dr \cdot \frac{E_s}{n} \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{r_i}$$

Das Verhältnis der Ringzugkraft zur Ringdruckkraft Z_i/D_i hängt ausser von n und μ nur noch von dem Wert x/h ab bzw. vom Abstand x des Drehpunktes m von UK Platte. Würde x so gewählt, dass $Z_i = D_i$ und damit $Z_i/D_i = 1$ wird, so wäre für das Gleichgewicht des Ringes nur ein Radial- bzw. Krepelmoment erforderlich. (Fall des 'freischwebenden Ringes'). Damit würden aber auch keine vertikalen Auflagerreaktionen an der Stütze auftreten. Da aber vorausgesetzt ist, dass ausserhalb des hier betrachteten Bereichs auch vertikale Lasten auf die Platte wirken, denen infolge $\sum V = 0$ auch Auflagerreaktionen an der Stütze entsprechen, muss x so gewählt werden, dass $Z_i > D_i$ oder $Z_i/D_i > 1$ wird. In diesem Falle verbleibt in Höhe der Ringbewehrung noch eine tangentielle Zugkraft

$$\Delta Z_i = Z_i - D_i$$

der die in radialer Richtung wirkenden Umlenkkräfte $U_{res} = \Delta Z_i / r_i$ entsprechen. Es wird angenommen, dass diese Umlenkkräfte über schräge Druckstreben zur Stütze

hin übertragen werden, worauf im folgenden noch näher eingegangen wird.

Aus der Bedingung $Z_i/D_i > 1$ lässt sich ein nur von μ und n abhängiger oberer Grenzwert für x bzw. für $k_x = \frac{x}{h}$ angeben:

$$k_x = \frac{x}{h} < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2/\mu n}} \quad (\text{Bild 7-1 a})$$

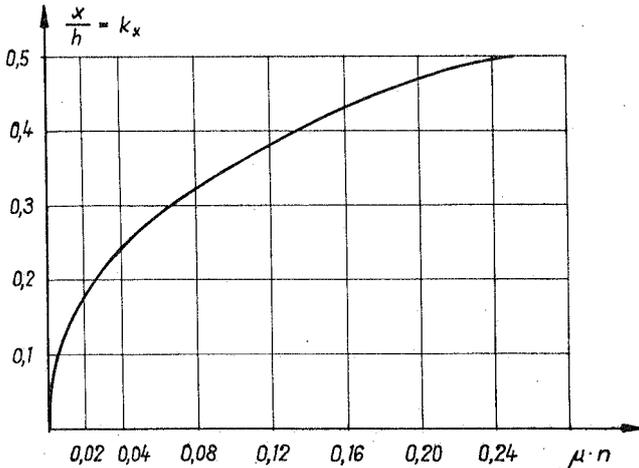


Bild 7-1 a Abhängigkeit des oberen Grenzwertes $k_x = \frac{x}{h}$ vom Bewehrungsgrad $\mu = a_s/h$ und vom Verhältnis $n = E_s/E_b$.

Je kleiner $k_x = x/h$ gewählt wird, um so grösser werden die Umlenkräfte u_{res} und damit die von den Druckstreben auf die Stütze abgegebenen schrägen Druckkräfte.

In der bisherigen Betrachtung war die Unverträglichkeit der horizontalen Verschiebungen im Überschneidungsbereich zwischen Platten und Stützenbeton in Bild 7-1 nicht berücksichtigt worden.

Tatsächlich müssen jedoch der Rand von Platte und Stütze auch im verformten Zustand wieder zusammenpassen. Hierzu müssen sich die schrägen Druckstreben entsprechend verkürzen.

Die Verkürzung tritt dabei im wesentlichen im Bereich der sehr hohen Druckspannung am Übergang in die Stütze auf, da hier der Druckstrebenquerschnitt stark eingeschnürt ist und plastische Verformungen auftreten. Vereinfacht kann man auch annehmen, dass sich die Betondruckzone in radialer Richtung über eine begrenzte Länge plastisch verformt (diese wird mit 'plastischer Gelenklänge' bezeichnet). Die Grösse dieser Verformung hängt dabei direkt von der Grösse des Rotationswinkels ψ ab. Siviero gibt in [7-1] Versuchsergebnisse zur Bestimmung der plastischen Rotationsfähigkeit balkenartiger Stahlbetontragwerke bekannt. Er stellt fest, dass die Rotationsfähigkeit insbesondere vom Verhältnis der Höhe x der Betondruckzone zur Nutzhöhe h des Bauteils abhängt.

$$\psi \cong f(x/h)$$

oder mit $x/h = k_x$

$$\psi \cong f(k_x)$$

In Bild 7-2 aus [7-1] ist als Ergebnis von 350 z.T. sehr unterschiedlichen Versuchen jeweils die Rotation ψ gegenüber k_x aufgetragen. In [7-1] wird darauf hingewiesen, dass in querkraftbeanspruchten Bauteilen eine grössere Rotationsfähigkeit erwartet werden kann als in nur biegebeanspruchten Bauteilen, weil die geneigten Schubrisse die plastische Gelenklänge vergrössern.

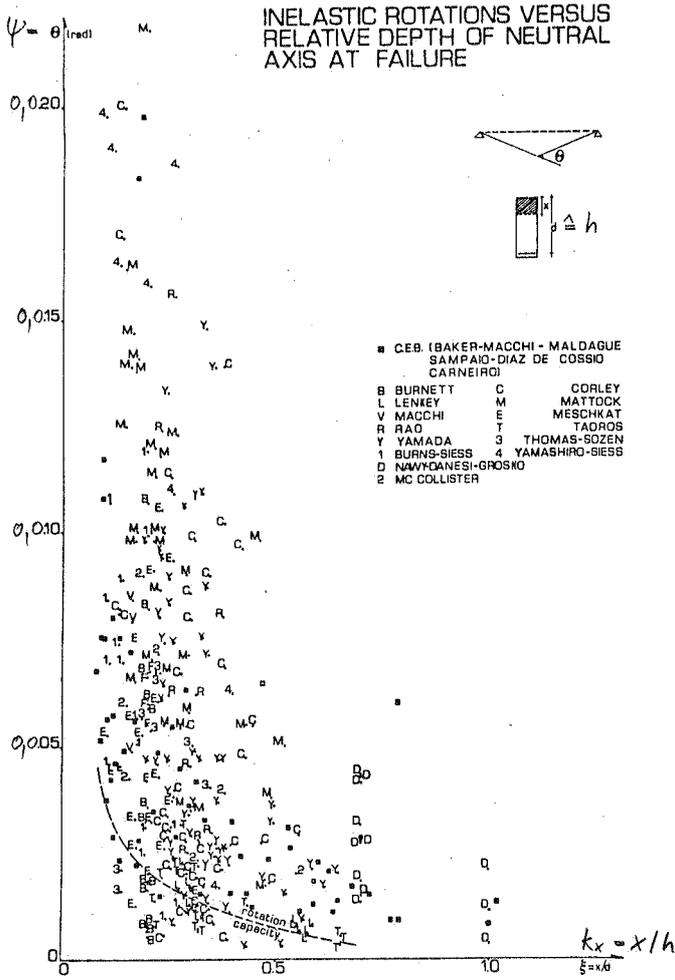


Bild 7-2 Abhängigkeit des Rotationswinkels ψ vom Verhältnis $k_x = x/h$ nach [7-1] für balkenartige Stahlbetontragwerke.

Aus der Auswertung dieser Versuche erstellte Macchi [7-2] das in Bild 7-3 dargestellte Diagramm der möglichen Rotation in Abhängigkeit von k_x (gestrichelte Linie). Als wesentlicher Unterschied zu Balkentragwerken ist bei der Rotation von Kreisplatten die Querdehnung der Druckzone behindert. Demnach wird sich das 'plastische Gelenk' etwas steifer verhalten als bei Balken. Zudem ist die Breite der Druckzone im Falle einer Kreisplatte veränderlich, was sich ebenfalls versteifend auswirkt.

In Bild 7-3 ist die Funktion dargestellt, die der Verfasser als einfachen formelmässigen Zusammenhang zwischen der Rotation ψ und k_x bei Flachdecken vorschlägt:

$$\psi = 0,0030 (1/k_x)$$

Die nach dieser Formel ermittelte Rotation ψ kann physikalisch als diejenige Rotation gedeutet werden, die sich ergibt, wenn bei einer Grenzdehnung von $\epsilon_u = 0,0030$ die Krümmung $\kappa = \epsilon_u/x$ über eine plastische Gelenklänge $\ell_P = h$ aufsummiert wird, siehe Bild 7-4.

Bei der bisherigen Betrachtung wurde von einer ringförmig angeordneten Bewehrung ausgegangen.

Bei der Ringbewehrung wird der Ringriss am Stützenrand nicht von Bewehrungsstäben gekreuzt. Damit ist eine günstige Verteilung des grossen Einzelrisses auf mehrere Risse in Stützennähe nicht möglich. Bei Anordnung einer Netzbewehrung ist dagegen eine bessere Rissverteilung gegeben. Deshalb wird bei Verwendung von Netzbewehrung die Grenzdehnung des Betons etwas grösser angesetzt als bei Ringbewehrung und für den Rotationswinkel in diesem Falle angenommen:

$$\psi = 0,0035 (1/k_x)$$

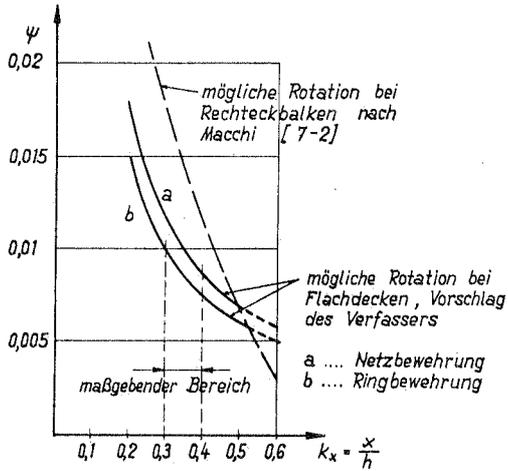


Bild 7-3 Möglicher Rotationswinkel ψ in Abhängigkeit von k_x

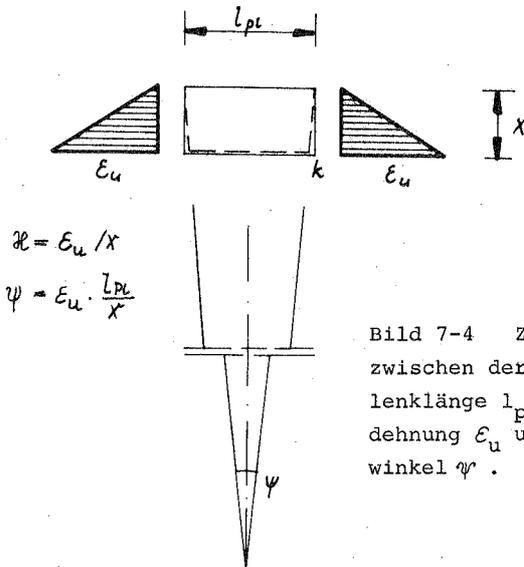


Bild 7-4 Zusammenhang zwischen der plastischen Gelenklänge l_{pl} , der Grenzdehnung ϵ_u und dem Rotationswinkel ψ .

7.3 Folgerungen aus dem Trajektorienverlauf in der Nähe der Unterstützung

In Bild 7-5 sind Radialschnitte durch eine Kreisplatte im Stützbereich dargestellt. Der monolithische Aufbau der Platte wird dabei durch ein Kegelschalenfachwerk mit einer Neigung der Zug- und Druckschalen von 45° idealisiert (Grundsystem). Im Unterschied zum Kragbalken verlaufen hier Ober- und Untergurt nicht nur in radialer, sondern auch tangentialer Richtung. Die Tragfähigkeit ist bei der hier vorausgesetzten rotations-symmetrischen Belastung auch dann gewährleistet, wenn keine radialen Gurte, sondern ausschliesslich tangentiale, also ringförmige Gurte angenommen werden.

Im Krafteinleitungsbereich an der Unterstützung wird dem Grundsystem ein Strebensystem aus Kegelschalen überlagert, dessen Streben vom Knoten U0 an der Unterseite der Platte ausstrahlen und zu den Knoten O1 bis O5 an der Oberseite verlaufen (Bild 7-5 a).

An den Obergurtnoten O1 bis O5 greifen damit jeweils 2 Druckkegelschalen an:

1. Die unter 45° geneigte Druckkegelschale des Grundsystems.
2. Die Kegelschalen mit veränderlicher Neigung des Strebensystems.

Der Verlauf der Zug- und Drucktrajektorien im Zustand I wird als die Überlagerung der Zug- und Druckglieder dieser beiden Systeme gedeutet (Bild 7-5 a).

Bei der Rissbildung am Stützenrand werden die Kegelschalen des Grundsystems am Stützenrand unterbrochen (Bild 7-5 b). So ist z.B. die Zugschale U2 - O0 nicht mehr möglich. Um das Gleichgewicht am Knoten U2 zu gewährleisten, kann sich nunmehr eine steilere Zugschale U2 - O1 ausbilden.

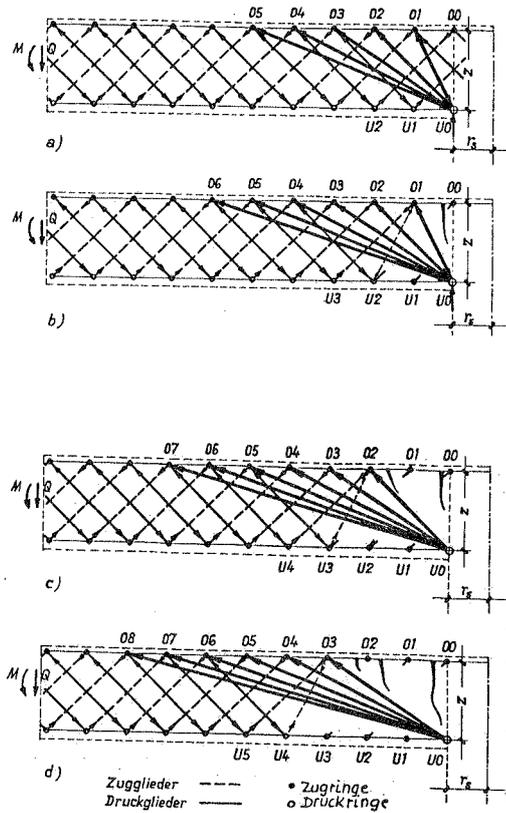


Bild 7-5 Radialschnitte durch die Kreisplatte im Stützenbereich. Massivplatte durch 2 Fachwerksysteme ersetzt (Grundsystem und Strebensystem) Tragsysteme:
a) im ungerissenen Zustand
b), c), d) bei fortschreitender Bildung von Tangential-Rissen am Stützenrand

Ein solches Ersatzsystem ist am unteren Knoten in Stützennähe, z.B. am Knoten U1 nicht möglich, so dass Knoten U1 in seiner Funktion als Fachwerkknoten nicht mehr wirksam ist, da die Vertikalkomponente einer angreifenden Druckschale nicht mehr aufgenommen werden kann. Wenn in Knoten O1 die Beanspruchungen in den angreifenden Zugschalen die Zugfestigkeit des Betons überschreiten, so tritt ein weiterer Riss auf und auch Knoten O1 fällt in seiner Funktion als Fachwerkknoten aus.

Der Ausfall der Knoten O1, O2 usw. kann durch Ausbildung weiterer, immer flacher geneigter Druckkegelschalen (z.B. an Knoten O6, O7 und O8) in bestimmten Grenzen kompensiert werden (siehe Bild 7-5 c und d).

Anhand dieses Tragmodells wird nunmehr die Traglast der Kreisringplatte im Krafteinleitungsbereich abgeleitet. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Übertragung der vertikalen Belastung der Kreisplatte auf die Stütze nur über die Druckschalenkräfte des Strebensystems erfolgt und dass die in den Obergurtnoten angreifenden Zugschalenkräfte des Grundsystems etwa rechtwinklig zu den Druckschalenkräften des Strebensystems verlaufen. In der mehr schematischen Darstellung der beiden Systeme nach Bild 7-5 trifft diese Rechtwinkligkeit zwar nur im Bereich der steileren Druckschalen des Strebensystems zu.

In Analogie zum Verlauf der Hauptzug- bzw. Hauptdruckspannungen (vgl. Bild 5-17 oder 5-37) wird jedoch der rechte Winkel der Kräfte an den Obergurtnoten auch im Bereich der flacheren Druckschalen des Strebensystems angenommen (Bild 7-7).

Betrachtet man das Gleichgewicht am Obergurtnknoten O_i , so greifen hier entsprechend Bild 7-6 die Druckschalenkraft k_i des Strebensystems und rechtwinklig dazu die Zugschalenkraft p_i des Grundsystems an, die mit der vom Zugring auf den Beton abgegebenen Umlenkkraft u_{res} im Gleichgewicht stehen.

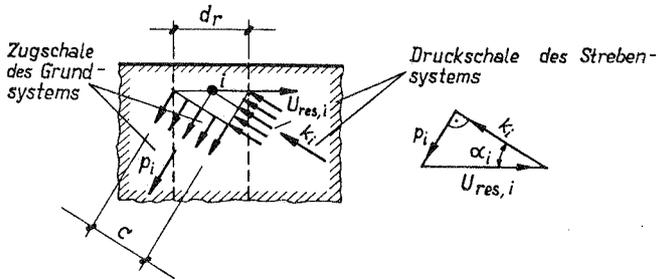


Bild 7-6 Gleichgewicht am Obergurtnknoten i der Fachwerksysteme im Kräfteinleitungsbereich

Bei gegebener Höhenlage x des Plattendrehpunktes m und gegebenem Rotationswinkel ψ ergibt sich die Umlenkkraft u_{res} entsprechend S. 104 aus

$$u_{res,i} = \frac{\Delta Z_i}{r_i} = \frac{Z_i - D_i}{r_i}$$

oder mit den Werten für Z_i und D_i zu:

$$u_{res,i} = \mu \cdot h \cdot dr \cdot E_s \cdot \psi \left(\frac{h-x}{r_i^2} \right) - \frac{dr \cdot E_s}{2 \cdot n} \cdot \psi \cdot \frac{x^2}{r_i^2}$$

bzw. zusammengefasst:

$$u_{res,i} = \frac{\psi dr}{r_i^2} \cdot E_s \left\{ \mu \cdot h \cdot (h-x) - \frac{x^2}{2 \cdot n} \right\}$$

Dabei bedeuten dr = Breite des Elementtringes i
 h = Höhe des Elementtringes i
 n = E_s/E_b
 μ = a_s/h ; $a_s = A_s/dr$
 A_s = Bewehrungsquerschnitt des Element-
tringes mit der Breite dr

Bei fliessender Bewehrung in Stütznähe wird angenommen, dass die gesamte Zugkraft ausschliesslich zur Kraftübertragung im Strebensystem mitwirkt, damit ist

$$u_{res, \beta_s} = dr \left[\frac{1}{r_i} \cdot \mu \cdot h \cdot \beta_s \right]$$

Mit dem Neigungswinkel α_i der Druckkegelschale des Strebensystems

$$p = u_{res} \cdot \sin \alpha_i.$$

Bezogen auf die Einheitsbreite dr beträgt die Dicke der Zugschale

$$c = dr \cdot \cos \alpha_i$$

Damit ergeben sich die Betonzugspannungen am oberen Ende der Zugschale zu

$$\sigma_{zi} = p/c$$

$$\sigma_{zi} = \frac{u_{res} \cdot \sin \alpha_i}{dr \cdot \cos \alpha_i} = \frac{u_{res}}{dr} \cdot \tan \alpha_i$$

Die geometrische Beziehung zwischen dem Radius r_i und dem Neigungswinkel α_i lautet:

$$\tan \alpha_i = z/(r_i - r_s)$$

Dabei ist r_s = Stützenradius

z = Hebelarm der inneren Kräfte.

Die Betonzugspannungen haben damit die Grösse

$$\sigma_{zi} = \frac{U_{res,i}}{dr} \cdot \frac{z}{(r_1 - r_s)}$$

=====

Überschreiten die Zugspannungen die Zugfestigkeit des Betons, so tritt ein Riss in der betreffenden Kegelschale auf und das Gleichgewicht am Knoten i ist gestört. Entsprechend müssen dann die Beanspruchungen in der zugehörigen Bewehrung und in der zugehörigen Druck Kegelschale zurückgehen.

Dieser Vorgang ist in Kapitel 5 bei den Versuchen von Kinnunen und Nylander sowie bei der FE-Berechnung beschrieben worden. (Vgl. Bild 5-19)

Der Radius r_1 , bis zu dem die Zugschalen des Grundsystems infolge Überschreitung der Betonzugfestigkeit β_z am Knoten nicht mehr mitwirken können, lässt sich aus obiger Gleichung wie folgt bestimmen:

$$\beta_z (r_1 - r_s) = z \cdot \frac{U_{res}}{dr}$$

$$r_1^2 \cdot r_s = \frac{z}{r_1^2} \left[\mu \cdot h \cdot \varphi (h-x) - \frac{x^2}{2} \cdot E_b \cdot \varphi \right]$$

$$r_1^3 - r_1^2 r_s = \frac{z}{\beta_z} \left[\mu \cdot h \cdot \varphi (h-x) - \frac{x^2}{2} \cdot E_b \cdot \varphi \right]$$

=====

Bei fließender Bewehrung ist:

$$\beta_z (r_1 - r_s) = \frac{z}{r_1} (\mu \cdot h \cdot \beta_s) \quad \text{bzw.}$$

$$r_1^2 - r_s \cdot r_1 - \frac{z}{\beta_z} (\mu \cdot h \cdot \beta_s) = 0 \quad \text{und hieraus}$$

$$r_1 = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} + \frac{z}{\beta_z} (\mu \cdot h \cdot \beta_s)}$$

=====

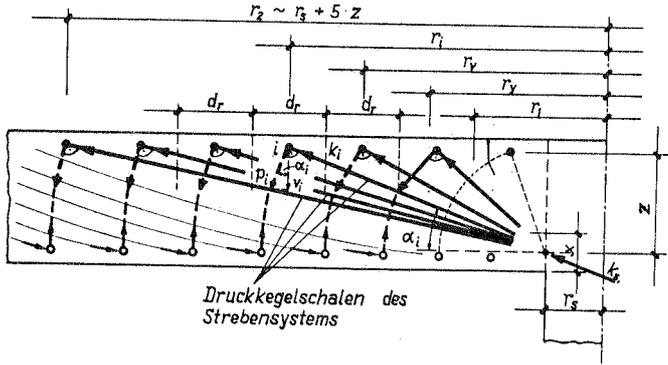


Bild 7-7 Vereinfachter Trajektorienverlauf im Bereich der Krafteinleitung nach der Biegerissbildung

Der Einflussbereich des Systems der Druckkegelschalen, also der Radius r_2 in Bild 7-7 kann anhand der Trajektorienbilder in Kapitel 5 bestimmt werden.

Danach bildet sich die flachste Drucktrajektorie am Stützenrand etwa in der Neigung

$$\tan \alpha \approx 0,2$$

aus.

Damit ist

$$r_2 \cong r_s + 5 \cdot z$$

=====

Wie aus der weiteren Ableitung hervorgeht, kommt es bei der Bestimmung des Radius r_2 nicht auf besondere Genauigkeit an, da der Lastanteil der flachen Druckstreben an der Gesamtlast sehr gering ist und etwa mit dem Quadrat der Entfernung von der Stütze abnimmt.

Der Summe der horizontalen und vertikalen Komponenten der Knotenkräfte an den Knoten i muss durch die Reaktionskraft k_s am Stützenrand (siehe Bild 7-7) das Gleichgewicht gehalten werden.

Die Vertikalkomponente v_i der Zugkraft p_i in Bild 7-7 beträgt

$$v_i = p_i \cdot \cos \alpha_i$$

Mit

$$p_i = u_{res} \cdot \sin \alpha_i$$

ist
$$v_i = u_{res} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i$$

Bezogen auf den Stützenumfang einer Stütze mit dem Radius r_s ist

$$v_{s,i} = \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$v_{s,i} = \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_i$$

Mit
$$\sin 2 \alpha_i = \frac{2 \tan \alpha_i}{1 + \tan^2 \alpha_i}$$

und
$$\tan \alpha_i = z / (r_i - r_s)$$

Ist
$$v_{s,i} = \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 z (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2}$$

Im elastischen Arbeitsbereich des Bewehrungsstahles ist

$$u_{res} = \frac{dr}{r_i^2} \left[\mu \cdot E_s \cdot \psi (h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \cdot \psi \right]$$

und damit

$$v_{s,i} = dr \left[\mu \cdot E_s \cdot \psi (h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \cdot \psi \right] \cdot \frac{1}{r_i \cdot r_s} \cdot \frac{z (r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2}$$

=====

Der letzte Term dieser Gleichung ist in Bild 7-8 in Abhängigkeit des Verhältnisses r_i/r_s für verschiedene Verhältnisse z/r_s aufgetragen. Die Funktion steigt bei $r_i/r_s \sim 1$ steil an, hat bei $z(r_i - r_s) : z^2 + (r_i - r_s)^2 = 0,5$ ein Maximum und fällt danach mit zunehmendem r_i/r_s wieder ab.

Zur Integration wurde eine Ersatzfunktion $\frac{1}{r_i} (0,4 r_s + 0,8 z)$ gewählt. Diese Funktion, die bei $r_i/r_s = 0$ grosse Werte annimmt schmiegt sich in den jeweils massgebenden Bereichen r_i/r_s (in Bild 7-8 durch r_2 gekennzeichnet) der Ausgangsfunktion gut an.

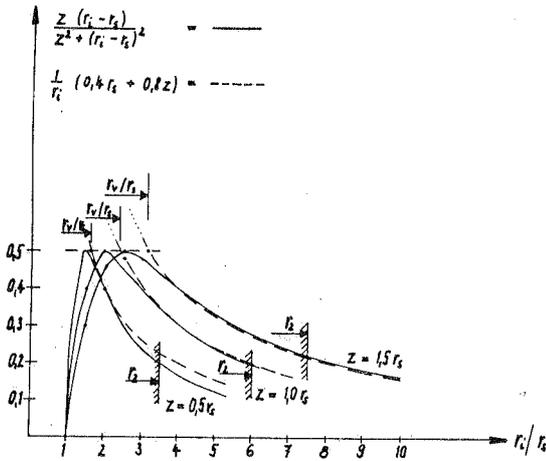


Bild 7-8 Funktionswert $\frac{z(r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2}$ ()
 und $\frac{1}{r_i} (0,4 r_s + 0,8 z)$ (-----)

Es gilt also näherungsweise

$$\frac{z(r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} \approx \frac{1}{r_i} \cdot (0,4 r_s + 0,8 z) \text{ im Bereich}$$

$$r_i / r_s \geq \frac{2(0,4 r_s + 0,8 z)}{r_s}$$

und

$$\frac{z(r_i - r_s)}{z^2 + (r_i - r_s)^2} \approx 0,5 \text{ für } r_i / r_s < \frac{2(0,4 r_s + 0,8 z)}{r_s}$$

Abweichungen für kleine r_i / r_s , also im stütznahen Bereich, sind nicht massgebend, da diese Zone infolge Überschreitung der Betonzugfestigkeit bei der Lastabtragung ohnehin nicht mitwirkt.

Bezeichnet man den Betrag $2(0,4 r_s + 0,8 z)$ als Vergleichsradius r_v , so gilt

$$v_{s,i} = dr \left[\mu \cdot h \cdot E_s \cdot \psi(h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \psi \right] \cdot \frac{r_v}{2r_s} \cdot \frac{1}{r_i^2}$$

Das Integral der Vertikalkomponenten $v_{s,i}$ über der mitwirkenden Zone ($r_2 - r_1$) ist

$$v_s = \int_{r_1}^{r_2} \left[\mu \cdot h \cdot E_s \cdot \psi(h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \psi \right] \frac{r_v}{2r_s} \cdot \frac{1}{r_i^2} \cdot dr_i$$

$$v_s = \left[\mu \cdot h \cdot E_s \cdot \psi(h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \psi \right] \frac{r_v}{2r_s} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

oder zusammengefasst und mit $E_s/E_b = n$:

$$v_s = \frac{\varphi \cdot E_s}{r_s} \left[\mu \cdot h (h-x) - \frac{x^2}{2n} \right] \frac{r_y}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

=====

Ist $r_1 < r_v$, so ergeben sich entsprechend Bild 7-8 infolge der Vereinfachung mit Hilfe des Vergleichsradius r_v Fehler in der Integration. Daher darf für r_1 kein kleinerer Wert als $r_1 = r_v$ eingesetzt werden.

Die zugehörige Querkraft Q beträgt

$$Q = 2 \cdot \hat{\sigma} \cdot r_s \cdot v_s$$

$$Q = \hat{\sigma} \cdot r_v \cdot E_s \cdot \varphi \left[\mu \cdot h (h-x) - \frac{x^2}{2n} \right] \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

=====

Wenn in der mitwirkenden Zone (r_2-r_1) die Beanspruchung in der Bewehrung die Streckgrenze überschreitet, so muss derjenige Zonenteil gesondert behandelt werden, innerhalb dessen die Bewehrung fließt.

Der Radius des Zonenteils r_y , innerhalb dessen die Bewehrung fließt, beträgt

$$r_y = \frac{\psi(h-x)}{\epsilon_y}$$

mit $\epsilon_y = \beta_s/E_s$

Im Bereich (r_y-r_1) gilt dann:

$$v_{s,i} = dr (\mu \cdot h \cdot \beta_s) \cdot \frac{1}{r_s} \cdot \frac{r_y}{2} \cdot \frac{1}{r_i}$$

Nach der Integration über den Bereich (r_y-r_1) ergibt sich

$$v_s = (\mu \cdot h \cdot \beta_s) \cdot \frac{r_y}{2r_s} \ln \frac{r_y}{r_1}$$

=====

Am Stützenrand beträgt die Horizontalkomponente der zum Ring i nach Bild 7-7 gehörenden Kegelschale im elastischen Arbeitsbereich:

$$h_{s,i} = \frac{r_i}{r_s} \cdot u_{res,i}$$

$$h_{s,i} = \frac{dr}{r_s} \left[\mu \cdot h \cdot E_s \cdot \varphi(h-x) - \frac{x^2}{2} \cdot E_b \cdot \varphi \right] \cdot \frac{1}{r_i}$$

Das Integral der Horizontalkomponenten $h_{s,i}$ über der mitwirkenden Zone (r_2-r_1) ist

$$h_s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r_s} (\mu \cdot h \cdot E_s \cdot \varphi(h-x) - \frac{x^2}{2} E_b \cdot \varphi) \cdot \frac{1}{r_i} dr_i$$

$$h_s = \frac{1}{r_s} \cdot E_s \cdot \varphi \left[\mu \cdot h \cdot (h-x) - \frac{x^2}{2n} \right] \ln \frac{r_2}{r_1}$$

=====

Bei fließender Bewehrung innerhalb der Zone (r_y-r_1) ist

$$h_{s,i} = \frac{1}{r_s} \cdot dr \cdot a_s \cdot \beta_s$$

$$h_s = \int_{r_1}^{r_y} \frac{1}{r_s} \mu \cdot h \cdot \beta_s dr$$

$$h_s = \frac{1}{r_s} \mu \cdot h \cdot \beta_s (r_y-r_1)$$

=====

Aus der Vertikalkomponente v_s und der Horizontalkomponente h_s der Summe der Kegelschalenkräfte am Auflager- rand folgt die Resultierende dieser Kräfte:

$$k_s = \sqrt{v_s^2 + h_s^2}$$

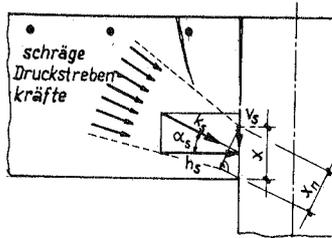


Bild 7-9 Einleitung der resultierenden schrägen Druckkraft k_s aus dem Strebensystem am Stützenrand

Der Neigungswinkel der Resultierenden ergibt sich aus

$$\alpha = \arctan \frac{v_s}{h_s}$$

Damit kann die mittlere Auflagerpressung der Kegelschalen mit $x_n = x \cdot \cos \alpha$ wie folgt bestimmt werden (Bild 7-9)

$$\sigma_{bs} = \frac{k_s}{x_n} = \frac{k_s}{x \cdot \cos \alpha}$$

Genähert kann angenommen werden, dass dieser Auflagerpressung wegen der Umlagerungsfähigkeit von der radialen zur tangentialen Richtung keine radial gerichteten Biegedruckspannungen überlagert werden müssen. Bei der Ermittlung der Druckfestigkeit ist zu berücksichtigen, dass im Bereich der Einmündungszone ein dreiachsiger Spannungszustand herrscht, da die Einmündungszone in tangentialer Richtung und, nahe am Stützenrand, auch in vertikaler Richtung gehalten ist.

Ein Modell für das Versagenskriterium von Beton unter diesen Beanspruchungen wird zur Zeit am Institut für Massivbau der Universität Stuttgart erarbeitet. Es kann zu gegebener Zeit in das vorliegende Rechenverfahren eingefügt werden.

Dieser Druckspannung σ_{bs} ist die Druckfestigkeit p_u des Betons am Stützenrand gegenüberzustellen.

Um jetzt schon ein vollständiges Rechenverfahren angeben zu können, schlägt der Verfasser folgendes einfache Versagenskriterium vor:

1. Von den beiden die einachsige, radiale Druckfestigkeit steigernden Einflüssen, nämlich den Druckspannungen in vertikaler und tangentialer Richtung, wird nur der Einfluss der letztern individuell berücksichtigt.

Es wird angenommen, dass der Einfluss der vertikalen Druckspannungen bei unterschiedlichen geometrischen und mechanischen Beziehungen im vorliegenden Fall jeweils etwa dieselbe Größenordnung hat. Er wird daher pauschal in der rechnerischen Festigkeit durch Annahme eines rechteckigen Druckspannungsdiagramms anstelle eines der Spannungs-Dehnungslinie für Beton besser angepassten Diagrammes ausreichend berücksichtigt.

2. Der Einfluss der tangentialen Druckspannung wird vereinfacht mit Hilfe des Verhältnisses von Stützendurchmesser zu Plattendicke berücksichtigt. In Analogie zum Einfluss des Verhältnisses von Verteilungsfläche A zu Übertragungsfläche A_1 auf die Teilflächenpressung nach DIN 1045 wird das Verhältnis der in Bild 7-10 definierten Umfänge verwendet. Damit ergibt sich

$$p_u = \beta_R \sqrt{\frac{r_s + h}{r_s}} \leq 1,4 \beta_R \text{ (Netzbewehrung)}$$

Bei Ringbewehrung wird wegen des ungünstigen Einflusses des klaffenden Einzelrisses

$$p_u = \beta_R \sqrt{\frac{r_s + 0,5 h}{r_s}} \leq 1,4 \beta_R \text{ (Ringbewehrung)}$$

angenommen.

Dass die Grössenordnung der so ermittelten Erhöhungsfaktoren richtig ist, kann durch die FE-Berechnung gezeigt werden.

Bei den Kinnunen-Nylander-Versuchen hatte sich ein Verhältnis von räumlicher zu einachsiger Druckfestigkeit von 1,45 : 1 ergeben. Beim Verhältnis von Stützenradius zu Plattennutzhöhe von $r_g/h = 7,5/12,8 = 0,6$ kann man diesen Versuchskörper als Grenzfall einer Platte mit einer sehr schlanken Stütze ansehen.

Die rechnerische Begrenzung des Erhöhungsfaktors mit dem Wert 1,4 erscheint daher gerechtfertigt.

Nach der Formel für Ringbewehrung ergibt sich

$$p_u = 1,36 \beta_R$$

Dies wird bei dieser einfachen Formel als gutes Ergebnis angesehen.

Beim EMPA-Versuch hatte die FE-Berechnung einen Erhöhungsfaktor von 1,25 ergeben. Allerdings hatte die Berechnung infolge des Austausches der Netz- gegen Ringbewehrung nur 80 % der tatsächlichen Bruchlast ergeben.

Nach der angegebenen Formel ergibt sich bei Ringbewehrung ein Erhöhungsfaktor von 1,22 und bei Netzbewehrung ein Erhöhungsfaktor von 1,4.

Das Verhältnis der Erhöhungsfaktoren $1,22/1,4 = 0,87$ spiegelt ungefähr das Verhältnis von rechnerischer zu tatsächlicher Bruchlast wider.

Bei der Nachrechnung von Versuchen wird als Rechenwert der Druckfestigkeit

$$\beta_R = 0,85 \beta_w \quad 20$$

angenommen.

Bei der Bemessung kann vom entsprechenden Rechenwert der DIN 1045 und dem Sicherheitsbeiwert $\gamma = 2,1$ bei der Teilflächenpressung ausgegangen werden.

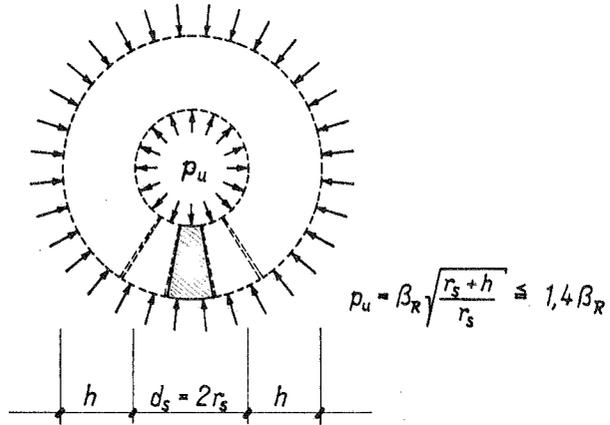


Bild 7-10 Geometrische Beziehung für die Ermittlung der zulässigen Pressung in der Aufstandsfläche der Kegelschalen

7.4 Zusammenfassung und Darstellung des Rechenschemas

Mit den in Abschnitt 7.1 bis 7.3 ermittelten Zusammenhängen kann nunmehr die Traglast im Auflagerbereich von Flachdecken wie folgt ermittelt werden:

1. Zunächst wird die Höhe x der Betondruckzone am Stützenrand unter Beachtung des oberen Grenzwertes geschätzt. Dabei muss $k_x < 2/1 + \sqrt{1+2/\mu \cdot n}$ sein. Die zulässige Rotation beträgt dann

$$\psi = \epsilon_u \cdot \frac{1}{k_x}$$

2. Mit der Rotation ψ und der Höhe x sind die Dehnungen in Bewehrungsstahl und Beton bestimmt und es können die Radien

$$r_1, r_2, r_y \text{ und } r_v$$

ermittelt werden.

3. Mit Hilfe dieser Radien werden die resultierenden Horizontalkomponenten h_s und die Vertikalkomponenten v_s der Druckkegelschalen am Stützenrand und damit k_s ermittelt.

4. Aus der Resultierenden k_s wird die Auflagerpresung σ_{bs} am Stützenrand ermittelt. Die Traglast ist erreicht, wenn

$$\sigma_b = p_u \approx \beta_R \sqrt{\frac{r_s+h}{r_s}} \leq 1,4 \beta_R \text{ (Netzbewehrung)}$$

bzw.

$$\sigma_{bs} = p_u \approx \beta_R \sqrt{\frac{r_s+0,5 h}{r_s}} \leq 1,4 \beta_R \text{ (Ringbewehrung)}$$

Ist $p_u \neq \beta_R \sqrt{\frac{r_s+h}{r_s}}$ bzw. $\neq \beta_R \sqrt{\frac{r_s+0,5 h}{r_s}}$, so ist mit einer veränderten Höhe x der Betondruckzone die Berechnung erneut durchzuführen, bis sich näherungsweise eine Übereinstimmung ergibt. Wenn $\sigma_{bs} < p_u$ ist, dann wurde x zu gross bzw. ψ zu klein angenommen. Bei $\sigma_{bs} > p_u$ ist umgekehrt x zu klein bzw. ψ zu gross angenommen.

5. Die Durchstanzlast ergibt sich dann zu

$$Q_u = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot v_s$$

Im folgenden Kapitel werden anhand von bekannten Versuchsergebnissen Vergleichsrechnungen nach folgendem Schema durchgeführt:

Rechenschema zur Bestimmung der Traglast:

Ausgangswerte:

$$\begin{aligned} A_s &= \text{cm}^2 &) \\ a &= \text{cm} &) \quad a_s = \text{cm}^2/\text{cm} &) \quad \mu = \\ h &= \text{cm} &) \\ r_s &= \\ \beta_s &= \\ \epsilon_y &= \\ \beta_w &= & (\text{daN/cm}^2) \\ \beta_z &= 0,6 \cdot \beta_w^{2/3} & (\text{daN/cm}^2) \end{aligned}$$

Rechengang:

1. Annahme für die Höhe der Betondruckzone

$$\begin{aligned} x &= \\ z &= h - \frac{x}{2} \\ \psi &= 0,0035 \cdot \frac{1}{x} \cdot h \quad (\text{Netz}) & = \\ \psi &= 0,0030 \cdot \frac{1}{x} \cdot h \quad (\text{Ring}) & = \end{aligned}$$

2. Ermittlung der Bereichsgrenzen:

$$\begin{aligned} r_v &= 0,8 r_s + 1,6 z \\ r_1 &= \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} + \frac{\beta_s}{\beta_z} \cdot \mu \cdot h \cdot z} & = & \geq r_v \\ r_y &= \psi \frac{h-x}{\epsilon_y} \\ r_2 &= r_s + 5z & = \end{aligned}$$

3. Ermittlung der resultierenden Auflagerkraft der Druckkegelschalen

$$v_{s1} = \frac{q \cdot E_s}{r_s} \left[\mu \cdot h (h-x) - \frac{x^2}{20} \right] \cdot \frac{r_y}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_y} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$v_{s1} = \quad \quad \quad =$$

$$v_{s2} = \frac{1}{r_s} \cdot \mu \cdot h \cdot \beta_s \cdot \frac{r_y}{2} \ln \frac{r_y}{r_1}$$

$$v_{s2} = \quad \quad \quad =$$

$$v_{s1} + v_{s2} = v_s \quad \quad \quad =$$

$$h_{s1} = \frac{q \cdot E_s}{r_s} \left[\mu \cdot h (h-x) - \frac{x^2}{20} \right] \ln \frac{r_2}{r_y}$$

$$h_{s1} = \quad \quad \quad =$$

$$h_{s2} = \frac{1}{r_s} \cdot \mu \cdot h \cdot \beta_s (r_y - r_1)$$

$$h_{s2} = \quad \quad \quad =$$

$$h_{s1} + h_{s2} = h_s \quad \quad \quad =$$

$$k_s = \sqrt{v_s^2 + h_s^2} \quad \quad \quad =$$

4. Ermittlung der Betonpressung in der Einmündungszone

$$\alpha = \arctan \frac{v_s}{h_s} =$$

$$x_n = x \cdot \cos \alpha =$$

$$\sigma_{bs} = \frac{k_s}{x_n} =$$

$$= \beta_R \cdot \sqrt{\frac{r_s + h}{r_s}} = 1,4 \beta_R$$

bzw. $\beta_R \cdot \sqrt{\frac{r_s + 0,5 h}{r_s}}$ bei R bewehrt
 $\leq 1,4 \beta_R$

5. Ermittlung der Traglast (Querkraft)

$$Q_u = 2 \cdot \pi \cdot r_s \cdot v_s =$$

=====

8. Überprüfung des Rechenverfahrens anhand von Versuchen

Zur Überprüfung der Aussagekraft des vereinfachten Modells werden 5 Versuche nachgerechnet, nämlich der EMPA-Versuch und die Kinnunen-Nylander-Versuche IB 15a, IB 15b, IB 30a, IB 30b.

Einige zur Beurteilung wichtige Kenngrössen nach Versuch und vereinfachter Rechnung sind in Tabelle 8-1 zusammengestellt:

Die zugehörigen Tragmechanismen sind in den Bildern 8-1 bis 8-3 dargestellt.

Der Vergleich der Bruchlasten und Verformungen zeigt eine grundsätzlich zutreffende Tendenz der Rechenergebnisse bei wechselnden Parametern.

Beim EMPA-Versuch (Bild 8-1) bildet sich die rechnerisch mitwirkende Zone ($r_v > r_1$) zwischen den Radien $r_2 = 127$ cm und $r_v = 52,6$ cm aus.

Die Bewehrung fliesst bis zu einem Radius $r_y = 73,9$ cm. Damit fliesst die Bewehrung von etwa 29 % des mitwirkenden Radienabschnitts.

Die resultierende Druckkraft k_s der Kegelschalen mündet unter einem Winkel von $19,3^\circ$ in die Druckzone mit einer Höhe von $x = 7,3$ cm ein. Bei der FE-Berechnung nach Kapitel 3 hat die grösste Hauptdruckspannung am Stützenrand eine Neigung von 15° gegenüber der Plattenmittelebene. Dies wird als eine grundsätzlich gute Übereinstimmung von FE-Berechnung und vereinfachter Berechnung gewertet. Die Bruchlast nach Versuch ist um 6 % grösser als nach der vereinfachten Rechnung. Bei den Versuchen IB 15 a und IB 15 b (Bild 8-2) bildet sich die mitwirkende Zone zwischen den Radien $r_2 \approx 60$ cm und $r_v \approx 23$ cm aus.

Versuch	r _s [cm]	h [cm]	μ	β _w [*] [daN/cm ²]	Versuchsergebnis		Rechengenergebnis			
					Bruchlast [kN]	Rotation ψ = w(r-r _s)	Bruchlast [kN]	Rotation ψ	x [cm]	Auflagerpressung P _u [daN/cm ²]**
EMPA	25	24	0,0131 (Netz)	360	1662	0,011	1565	0,0115	7,3	437 (428)
IB 15 a	7,5	12,8	0,0074 (Ring)	295	192-212	0,0106	193	0,010	3,8	342 (341)
IB 15 b	7,5	12,8	0,0147 (Ring)	295	229-232	0,0072	247	0,008	4,75	345 (341)
IB 30 a	15	12,8	0,0120	295	282-286	0,012	338	0,0098	3,9	290 (299)
IB 30 b	15	12,8	0,0239	295	362	0,009	367	0,0083	4,6	296 (299)

*) Betondruckfestigkeit bei Würfeln mit 20 cm Kantenlänge, β_{w20} 0,95 · β_{w15}

$$**) P_{u,zul} = 0,85 \cdot \beta_w \cdot \sqrt{\frac{I_s + 0,5 \cdot h}{I_s}}$$

bei Ringbewehrung

$$= 0,85 \cdot \beta_w \cdot \sqrt{\frac{I_s + h}{I_s}}$$

bei Netzbewehrung

Tabelle 8-1

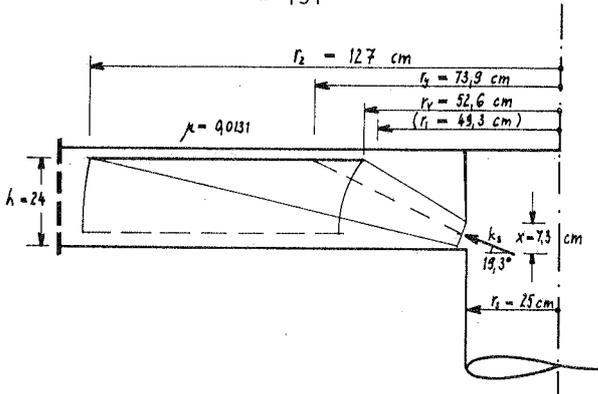


Bild 8-1 Tragmechanismus des EMPA-Versuchs

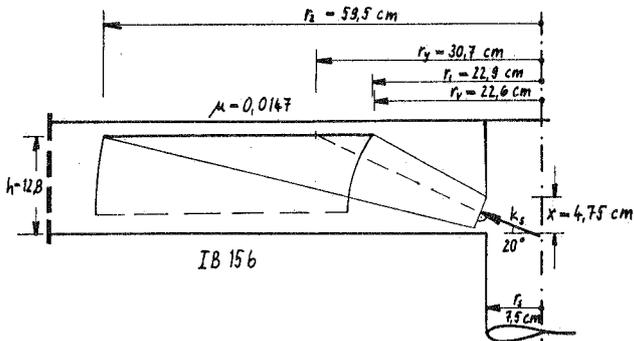
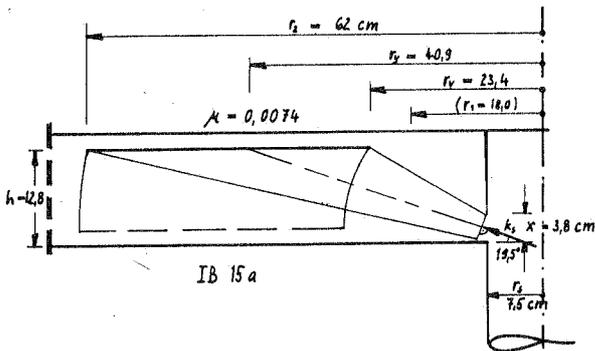


Bild 8-2 Tragmechanismus der K-N IB 15-Versuche

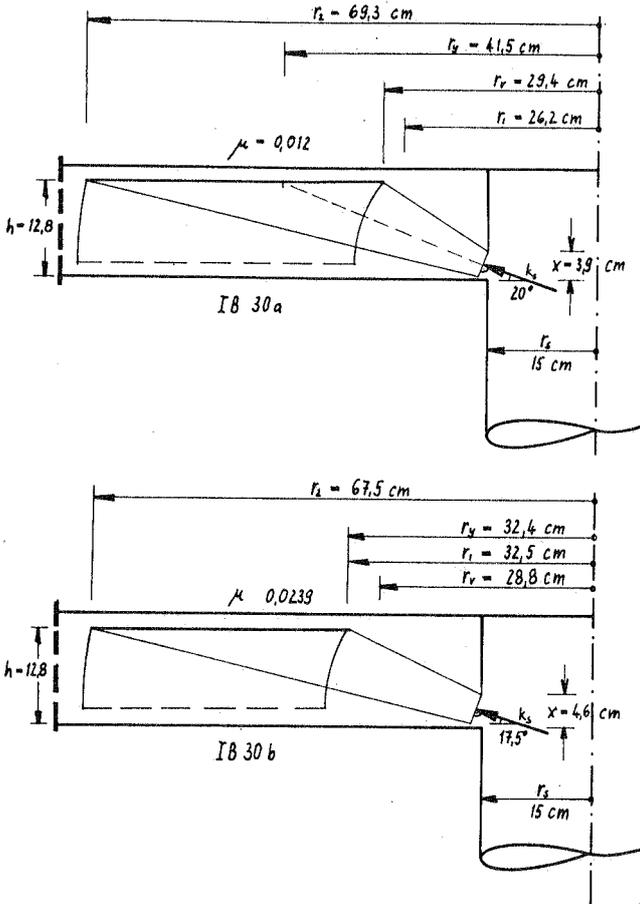


Bild 8-3 Tragmechanismus der K-N IB 30-Versuche

Beim Versuch IB 15 a mit einem niedrigen Bewehrungsprozentersatz von $\mu = 0,0074$ fliesst die Bewehrung bis $r_y = 40,9$ cm, also über 45 % des mitwirkenden Radienabschnitts.

In Bild 5-19, in dem die gemessenen und berechneten Dehnungen in der Biegebewehrung dargestellt sind, hat bei der Bruchlast der Bewehrungsring mit $r = 32$ cm die Streckgrenze überschritten während der Bewehrungsring mit $r = 44,3$ cm bzw. $r = 43,2$ cm gerade zu fließen beginnt. Dies wird als Bestätigung gewertet, dass die Grössenordnung des ermittelten Radius r_y richtig ist.

Beim Versuch IB 15b mit einem höheren Bewehrungsprozentersatz von $\mu = 0,0147$ fliesst die Bewehrung nur bis $r_y = 30,7$ cm, also nur über 21 % des mitwirkenden Radienabschnitts.

Die Neigung der resultierenden Druckkraft der Kegelschalen ist mit $19,5^\circ$ und 20° in beiden Fällen etwa gleich gross. Die Dicke der Druckzone x ist bei IB 15a mit $3,8$ cm deutlich kleiner als bei IB 15 b und $x = 4,74$ cm. Die rechnerische Bruchlast liegt bei IB 15 a innerhalb des Streubereichs von drei Versuchsergebnissen. Sie ist bei IB 15 b um 6 % grösser als der Grösstwert des Versuchsergebnisses.

Bei den Versuchen IB 30a und IB 30b (Bild 8-3) bildet sich die mitwirkende Zone zwischen den Radien $r_2 = 69$ cm und $r_1 = 30$ cm aus.

Bei IB 30a mit einem mittleren Bewehrungsprozentersatz von $\mu = 0,012$ fliesst die Bewehrung bis $r_y = 41,5$ cm, also über 30 % des mitwirkenden Radienabschnitts. Bei IB 30 b mit einem sehr hohen Bewehrungsprozentersatz von $\mu = 0,0239$ fliesst die Bewehrung innerhalb des mitwirkenden Radienabschnitts nicht.

Die Neigung der resultierenden Druckkraft der Kegelschalen beträgt 20° bei IB 30a und $17,5^\circ$ bei IB 30b. Die Dicke der Druckzone x beträgt $x = 3,9$ cm bei IB 30a und $x = 4,6$ cm bei IB 30b.

Die rechnerische Bruchlast ergibt sich bei IB 30a um 18 % grösser als beim Versuch.

Bei IB 30b ergibt sich die rechnerische Bruchlast um 1 % grösser als beim Versuch.

Im Vergleich zu den Versuchsergebnissen erhält man bei der Rechnung grössere Bruchlasten bei ausschliesslicher Vergrösserung des Parameters μ oder bei ausschliesslicher Vergrösserung des Parameters r_s/h . Die Vergrösserung des Parameters μ bewirkt eine Verkleinerung der Rotation im Bruchzustand und eine Vergrösserung der Dicke der Betondruckzone x .

Eine Vergrösserung des Parameters μ ist nur in bestimmten Grenzen sinnvoll, da bei zu grossen μ -Werten die Streckgrenze der Bewehrung nicht ausgenutzt werden kann bevor am Stützenrand die Auflagerpressung die örtliche Betonfestigkeit erreicht.

Das Rechenverfahren reagiert empfindlich auf die Variation der Begrenzungsradien für die mitwirkende Zone ($r_2 - r_v$) bzw. ($r_2 - r_1$) und insbesondere auf die Variation der Dicke x der Betondruckzone.

Dies kann einerseits den groben Vereinfachungen des Rechenverfahrens angelastet werden, insbesondere der Verschmierung der diskreten Bewehrung in eine kontinuierliche Bewehrungsmembran. Bei einer diskreten Bewehrung können sich die Bereichsgrenzen der als mitwirkend angenommenen Zone nicht so scharf ausbilden wie in der Rechnung angenommen wurde. Insbesondere sind die Begrenzungsradien der als mitwirkend gedachten Zone, z.B. der Bereich der fliessenden Bewehrung, vorsichtig abzuschätzen, wenn die Bereichsbreite nur dieselbe Grössenordnung hat wie der Abstand der Bewehrungsstäbe untereinander.

Auf der anderen Seite kann die Empfindlichkeit des Rechenverfahrens auf die Variation geometrischer Abmessungen als Indiz dafür gewertet werden, dass bei der Bauausführung eine plangerechte Ausbildung des Auflagerbereichs, insbesondere die Höhenlage der Bewehrung, von grösster Bedeutung ist.

Auf Bauschäden infolge ungenau verlegter Bewehrung wird z.B. in [8-1] hingewiesen.

Diese Empfindlichkeit gegenüber Ungenauigkeiten in der Bauausführung bedeutet auch, dass Berichte über Durchstanzversuche hinsichtlich der geometrischen Kenngrössen der Versuchskörper kritisch interpretiert werden müssen. Unter diesen Voraussetzungen erscheinen die Ergebnisse des Rechenmodells trotz teilweise grösserer Abweichungen zwischen berechneter und tatsächlicher Bruchlast (z.B. 18 % bei IB 30a) zufriedenstellend.

Weitere Verfeinerungen, z.B. in der Analyse der Beanspruchungen in den Knotenpunkten, sind nur dann sinnvoll, wenn sie ohne wesentliche Komplikation des Rechenverfahrens auskommen.

9. Bewertung und Ausblick

9.1 Allgemeines

Zur Beschreibung des Versagensmechanismus des Auflagerbereichs von Flachdecken wird ein physikalisches Modell abgeleitet.

Der Versagensmechanismus wird mit den bekannten Hilfsmitteln der Mechanik mathematisch beschrieben, um die Bruchlast zu ermitteln. Als Materialeigenschaften des Betons werden die Kenngrößen Zug- und Druckfestigkeit verwendet. Die vollständige Plastifizierbarkeit des Betons bei räumlicher Druckbeanspruchung wird vorausgesetzt (rechteckiges Druckspannungsdiagramm). Das statische System bis zum Eintritt des Versagensmechanismus wurde mit Hilfe der Analyse der Beanspruchungen nach einer nicht linearen FE-Berechnung gewonnen.

9.2 Zusammenfassende Beschreibung des Modells

Das Modell stellt die Einleitung der Auflagerkraft in eine längs des Stützenumfangs lochrandgelagerte Platte dar.

Die Platte wird dabei in der Ebene der oberen Bewehrung durch eine Schar von Kegelschalen abgestützt, die durch die unterhalb eines klaffenden ringförmigen Risses verbleibende Druckzone in die Stütze einmünden.

Die ausserhalb des Einleitungsbereiches an der Platte angreifenden vertikalen Lasten werden durch zugbeanspruchte Kegelschalen des Grundsystems übertragen, die am oberen Ende in den druckbeanspruchten Kegelschalen des Strebensystems aufgehängt sind.

Die Tragfähigkeit am oberen Ende der Kegelschalen der beiden Systeme wird begrenzt durch die aufnehmbare horizontale Ulenkkraft der Bewehrung und durch die aufnehm-

bare Zugkraft (Betonzugfestigkeit) in den zugbeanspruchten Kegelschalen. Die Tragfähigkeit am unteren Ende der druckbeanspruchten Kegelschalen des Strebensystems wird begrenzt durch die Druckfestigkeit in der Einmündungszone dieser Kegelschalen in die Stütze. Als massgebende Fläche wird dabei die Betondruckzone normal zur resultierenden Auflagerkraft der Kegelschalen betrachtet. Diese Tragfähigkeitskriterien werden mit den Verformungsbedingungen der lochrandgestützten Platte verknüpft, um die Bruchlast zu ermitteln. Die auf Druck mitwirkenden Kegelschalen werden begrenzt durch die flachste mögliche Kegelschale mit dem Radius r_2 und durch die steilste mögliche Kegelschale mit dem Radius r_1 . Die flachste mögliche Kegelschale wird durch Vergleich mit der flachsten Drucktrajektion in der FE-Berechnung festgelegt. Die Druckkegelschale des Strebensystems mit der steilsten Neigung ergibt sich aus der Gleichgewichtsbeachtung der Knoten in der Bewehrungsebene als diejenige Kegelschale, in deren zugehöriger Zugkegelschale die Zugfestigkeit des Betons gerade erreicht wird.

Das Überschreiten der Betondruckfestigkeit in der Aufstandsfläche der sich hier überlagernden Druckkegelschalen wird durch einen zum Rand der gedrückten Fläche hin verlaufenden Spaltriss ausgelöst. Gleichzeitig wird die Kegelschalenschar ungefähr in Richtung ihrer Mittelfläche (siehe Bild 9-1, Seite 141) aufgespalten. Damit tritt das sogenannte Durchstanz-Versagen ein.

9.3 Kritik am Modell

Bei der Herleitung des Modells wurde von einem Kreisplattenausschnitt aus einer Flachdecke unter rotationssymmetrischer Belastung ausgegangen.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Modellvorstellung sind also nicht erfüllt, wenn Biegemomente

zwischen Platte und Stütze übertragen werden müssen, wie dies einerseits im Bereich von Randstützen und andererseits im Bereich von Mittelstützen bei teilweiser, z.B. streifenförmiger Belastung des Deckenfeldes der Fall ist.

Die maximale Stützenlast wird bei Innenstützen bei gleichförmiger Deckenbelastung (Vollbelastung) übertragen, hier ist also das Modell bei quadratischem Stützenraster streng gültig.

Bei anderer, ungleichmäßiger Belastungsanordnung ist die Stützenlast zwar kleiner, der Einfluß der Biegemomente, die dann übertragen werden müssen, kann jedoch von Bedeutung sein.

Eine Untersuchung dieses Einflusses war im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht beabsichtigt.

Die Bedeutung des Traglastmodells ist nach Ansicht des Verfassers insbesondere darin zu sehen, daß nunmehr der Einfluß einiger geometrischer und mechanischer Parameter auf das Tragverhalten einer Flachdecke im Stützenbereich deutlicher veranschaulicht werden kann, als dies bei bekannten Rechenmodellen der Fall ist. So hängt z.B. beim vorliegenden Gedankenmodell die Tragfähigkeit eindeutig von der Betonzugfestigkeit ab. Rechnerisch wird sie bei der Ermittlung der Ausfallzone mit dem Radius r_1 berücksichtigt

$$r_1 = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} + \frac{\beta_s}{\beta_z} \mu h z}$$

Wenn β_z gegen Null strebt, so strebt r_1 gegen Unendlich, damit wird die Ausfallzone unendlich gross und Durchstanzlast gleich Null.

Bei den bekannten Rechenverfahren, in denen die Betonzugfestigkeit nicht explizit berücksichtigt wird, kann der Eindruck entstehen, dass die Tragfähigkeit der Auflagerzone einer Flachdecke nur von der Druckfestigkeit und nicht von der Zugfestigkeit abhänge, wenn man davon absieht, dass ja auch die Druckfestigkeit eines Betonkörpers in der Regel nicht ohne entsprechende Zugfestigkeit denkbar ist.

Beim vorliegenden Traglastmodell wird darüberhinaus die Art und Weise deutlich, wie sich der Bewehrungsprozentsatz μ auf die Tragfähigkeit auswirkt. Demnach gelingt es bei grossem Bewehrungsprozentsatz nicht, die Streckgrenze der Bewehrung zu mobilisieren bevor das Auflager der Druckkegelschalen versagt.

Bei kleinem Bewehrungsprozentsatz nimmt bei fließender Bewehrung die Rotation φ zu, dabei wird die Höhe x der Druckzone in zunehmendem Mass reduziert bis wiederum das Auflager der Druckkegelschalen versagt.

Für die baupraktische Anwendung ist das in Kapitel 7 abgeleitete Berechnungsverfahren noch etwas unhandlich. Hier würden weitere Vereinfachungen, die z.B. jeweils nur in abgegrenzten Bereichen zulässig sein können, in Zusammenhang mit einem verbesserten Materialfestigkeitskriterium zu prägnanteren Rechenverfahren führen. Die Lösung dieser Aufgabe war im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht beabsichtigt.

9.4 Anwendung des Traglastmodells bei Verwendung von Schubbewehrung

Das Traglastmodell veranschaulicht unter anderem auch, warum Schubbewehrung, die nach DIN 1045 im Abstand von $0,7 h$ bis $1,2 h$ vom Stützenrand anzuordnen ist, die Tragfähigkeit des Auflagerbereichs von Flachdecken nur

in beschränktem Umfang vergrößert. Mit dieser Schubbewehrung wird nur die durch Überschreitung der Betonzugfestigkeit ausfallende Zone (r_1) verkleinert, zur Steigerung der Druckfestigkeit des Kegelschalenaufslagers liefert sie jedoch direkt keinen Beitrag. Die Druckfestigkeit des Kegelschalenaufslagers könnte z.B. durch Umschnürung mit Bügeln in der Nähe des Stützenrandes gesteigert werden, oder mit Hilfe des in die Stütze einbindenden stählernen Druckgurtes der sogenannten Dübelleiste, die vom Verfasser in [9-1] beschrieben wird. Der Verfasser führt u.a. die guten Ergebnisse von Versuchen an Platten mit Dübelleisten-Bewehrung auf diese Steigerung der Druckfestigkeit zurück.

9.5 Anwendung des Traglastmodells bei Einzelfundamentplatten

Das Modell ist grundsätzlich auch bei Einzelfundamentplatten anwendbar. Der wesentliche Unterschied zwischen Flachdecken und Fundamentplatten wird darin gesehen, dass bei Flachdecken die Belastung im wesentlichen in Form einer Querkraft am Umfang bzw. am Rand der Ersatz-Kreisplatte angreift und über Zugschalen weitergeleitet wird, während bei Fundamentplatten die Belastung über die Aufstandsfläche bzw. die Ersatz-Kreisfläche verteilt angreift. Damit werden die zugbeanspruchten Schalen in geringerem Ausmass, bzw. bei entsprechenden Abmessungen gar nicht benötigt, und das Versagen ist nur noch von der Druckfestigkeit des Kegelschalenaufslagers abhängig.

Das Tragverhalten von Fundamentplatten ist demnach grundsätzlich günstiger als das von Flachdecken. Dieterle stellte in [9-2] bei der Auswertung von Versuchen in Übereinstimmung mit dem Modell des Verfassers fest, dass die radialen, geneigten Druckbe-

anspruchungen in der Platte am Stützenrand für das Versagen von Fundamentplatten massgebend sind. Seine Messergebnisse bestätigen ebenfalls die vorherrschende tangentielle Biegebeanspruchung, die beim Modell des Verfassers vorausgesetzt wird.

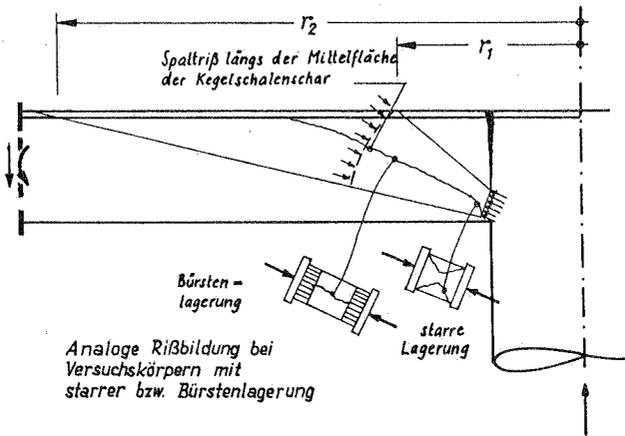


Bild 9-1 Bruchfigur beim Versagen (Durchstanzen)

10. Zusammenfassung

Die Beanspruchungen im Auflagerbereich von Flachdecken unter Belastung bis zum Bruch werden mit Hilfe des FE-Programms ADINA unter Berücksichtigung des nicht linearen Werkstoffverhaltens untersucht. Das Tragverhalten im frühen Stadium II wird den Ergebnissen der Plattentheorie bei verschiedenen Lagerungsarten gegenübergestellt.

Die Rechenergebnisse werden mit Versuchsergebnissen verglichen. Aus der Übereinstimmung vergleichbarer Versuchs- und Rechenergebnisse wird geschlossen, dass auch diejenigen Rechenergebnisse die Wirklichkeit zutreffend beschreiben, die im Versuch nicht analog ermittelt werden konnten, z.B. die Spannungen und die Rissbildung im Innern der Platte.

Die aufgrund der Berechnung vermutete Momentenumlagerungsfähigkeit von der radialen zur tangentialen Richtung wird anhand von zwei Microbeton-Modellversuchen gezeigt.

Die Rechenergebnisse werden zur Herleitung eines vereinfachten Tragmodells verwendet, das von Hand berechnet werden kann. Das Tragmodell besteht aus zwei Kegelschalensystemen, deren Tragfähigkeiten ohne Verwendung des Begriffs 'Schubfestigkeit' beschrieben werden. Massgebend werden die Druckfestigkeit und die Zugfestigkeit des Betons.

Vergleiche zwischen der Hand-Rechnung und Versuchsergebnissen werden mit zufriedenstellendem Ergebnis durchgeführt.

- [2-7] Kinnunen, S. und Nylander, H. Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement
Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Nr. 158, 1960
- [2-8] Herzog, M. Wichtige Sonderfälle des Durchstanzens von Stahlbeton- und Spannbetonplatten nach Versuchen
DER BAUINGENIEUR, 1974, H.9, Seiten 333-342
- [2-9] Moe, J. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Load
Portland Cement Association Bulletin D 47, 1961
- [2-10] Marti, P. und Thürlimann, B. Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonfestigkeit
BETON- UND STAHLBETONBAU, Heft 1, 1977, Seiten 7-12
- [2-11] Nielsen, M.P. Jensen, B.C. Bach, F. Concrete Plasticity, Beam Shear - Shear in Joints - Punching Shear.
Dansk Selskab for Bygningsstatik Special Publication, Oktober 1978
Technical University of Denmark
- [3-1] Markus, G. Theorie und Berechnung rotations-symmetrischer Bauwerke
2. Auflage 1976, Werner-Verlag, Düsseldorf

- [4-1] Glahn, H. Anwendung linearer Integralgleichungsmethoden bei nicht-linearem Stoffgesetz

DIE BAUTECHNIK, Heft 12, 1980
Seiten 413 - 417
- [4-2] Bathe, K.-J. ADINA, A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis

Report 82448-1, Acoustics and Vibration Laboratory, Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology - Cambridge, Massachusetts, revised edition 1978
- [4-3] Bathe, K.-J. Static and Dynamic Geometrie and Material Nonlinear Analysis Using ADINA
Report 82 448-2, Acoustics and Vibration Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Massachusetts revised edition 1977
- [4-4] Eibl, J. und Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton
Iványi, G.

Deutscher Ausschuss für Stahlbeton
Heft 220, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1976
- [4-5] Bonzel, J. Beton, Betonkalender 1981
Teil 1, Seite 37

Verlag Wilhelm Ernst und Sohn
- [4-6] Kupfer, H. Behaviour of concrete under
Hilsdorf, H.K. biaxial stresses

ACI Journal 66 (1969), No. 8,
p. 656 - 666

- [4-7] Link, J.
Schäfer, H.
Mehlhorn, G. Eine Formulierung des zwei-
achsigen Bruch- und Verformungs-
verhaltens von Beton
BETON- UND STAHLBETONBAU, H. 9
1974, Seiten 206 - 214
- [4-8] Dörr, K. und
Mehlhorn, G. Berechnung von Stahlbetonscheiben
im Zustand II bei Annahme eines
wirklichkeitsnahen Werkstoffver-
haltens
Forschungsbericht Nr. 39 aus dem
Institut für Massivbau der Tech-
nischen Hochschule Darmstadt, 1979
- [4-9] Khan, H.H.
Saugy, B. Evaluation of the influence of
Some Concrete Characteristics
of Nonlinear Behaviour of
Prestressed Concrete Reactor
Vessels.
ACI Publication SP-34,
Concrete for Nuclear Reactory, 1972
- [4-10] Schmidt-Gönner, G.
Gerstle, K. und
Mehlhorn, G. A Comparison Between ADINA
Concrete Model and Experimental
Concrete Behaviour
Bericht des Instituts für Massiv-
bau, TH Darmstadt,
unveröffentlicht
- [4-11] Heilmann, H.G.
Hilsdorf, H.
Finsterwalder, K. Festigkeit und Verformung von
Beton unter Zugspannungen
Schriftenreihe des Deutschen Aus-
schuss für Stahlbeton, Heft 203,
1969
Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn
- [4-12] Berger, J.
Grünberg, J.
Wulf, A. Anwendung von ADINA auf Stahl-
betontragwerke im Hinblick auf die
in rauen Rissen wirkenden
Reibungskräfte
Ausarbeitung der Ingenieurgemein-
schaft Meerestechnik + Seebau GmbH
und der Control Data GmbH, unver-
öffentlicht

- [4-13] De Groot, A.K.
Kusters, G.M.A.
Monnier, Th. Numerical Modelling of bond-slip
behaviour
Heron, Vol. 26, 1981, Nr. 1 b,
Delft, Niederlande
- [4-14] Leonhardt, F. Vorlesungen über Massivbau
Teil 4 - Nachweis der Gebrauchsfähigkeit
Springer-Verlag
- [5-1] Schaeidt, W.
Ladner, M.
Rösli, A. Berechnung von Flachdecken auf
Durchstanzen
Technische Forschungs- und Beratungsstelle der Schweizerischen
Zementindustrie, Wildeggen 1970
- [5-2] Schlee, W. Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben)
Beton-Kalender 1978, Teil B,
Seiten 477-611
- [6-1] Durchstanzversuche an einem
Mikrobetonmodell für Flachdecken
Bericht des Instituts für Modellstatik der Universität Stuttgart,
1981 - unveröffentlicht
- [7-1] Siviero, E. Rotation Capacity of Monodimensional
Members in Structural Concrete
CEB Bulletin d'Information Nr. 105
Paris 1976
- [7-2] Macchi, G. Ductility Condition for Simplified
Design without Check of Compatibility
CEB Bulletin No. 105, Paris 1976
- [8-1] Lee, Y.M.
Mitchell, D.
Harris, P.J. Lessons from structural performance slabs containing improperly
placed reinforcing
Concrete International, Juni 1979
V 1 No. 6, Seiten 45 - 53

- [9-1] Andrä, H.P. Zum Tragverhalten von Flachdecken
mit Dübelleisten-Bewehrung im
Auflagerbereich
Beton- und Stahlbetonbau
Heft 3/1981, Seiten 53 - 57,
Heft 4/1981, Seiten 100 - 104
Verlag Wilhelm Ernst und Sohn,
Berlin
- [9-2] Dieterle, H. Traglastversuche an einer grossen
Schäfer, K. Fundamentplatte ohne Schubbewehrung
Forschungsvorhaben V 194 des DafStb
Zwischenbericht des Instituts für
Massivbau an der Universität Stutt-
gart, Mai 1981
Veröffentlichung erscheint dem-
nächst

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74 - 1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74 - 2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74 - 3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74 - 4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75 - 1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75 - 2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75 - 3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76 - 1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76 - 2 E. Ramm:
Geometrischnichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77 - 1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78 - 1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79 - 1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79 - 2 H. -G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79 - 3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).
- 80 - 1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80 - 2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragerwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80 - 3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82 - 1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.

82 - 2

K. Schweizerhof:

Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.