

Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik

von

Martin Trautz



Bericht Nr. 28 (1998)

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. E.Ramm

Stuttgart 1998

z

14.6.99

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 70550 Stuttgart bezogen werden.

Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik

von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart zur
Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Martin Trautz

geboren in Pforzheim

Hauptberichter : Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. R. Barthel

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 1998

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1998

Vorwort

*'Wenn wir etwas Neues werden wollen, müssen wir uns
um das Alte kümmern, das wir ererbt haben'*
(Yehudi Menuhin)

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent des Sonderforschungsbereiches 230 'Natürliche Konstruktionen' am Institut für leichte Flächentragwerke und am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. E.Ramm für die Anregung zu diesem Thema, für sein Interesse und seine Unterstützung sowie die Übernahme des Hauptberichtes.

Ebenso danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. R.Barthel von der TU München für das Interesse an dieser Arbeit, seine hilfreichen Hinweise und die Übernahme des Mitberichtes.

Entsprechend dem thematischen Umfang der Arbeit ist die Zahl der Personen, die mich mit ihrem Engagement und ihrem Interesse unterstützt haben, groß. Ich möchte dennoch die Gelegenheit nicht auslassen, mich an dieser Stelle bei allen diesen Menschen zu bedanken:

Mein Dank gilt den Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik, besonders Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, Fehmi Çirak und Helmut Schmidts für ihre Hilfs- und Diskussionsbereitschaft in Sachen Computeranwendung und Materialmodellierung.

Den Kolleginnen und Kollegen des Instituts für leichte Flächentragwerke möchte ich danken, besonders Prof.Dr.-Ing. Jos Tomlow für seinen streitbaren Gegenpart in technik-historischen Diskussionen, Frau Brigitte Trappe für die bibliothekarische Unterstützung und meinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern Irmgard Lochner, Jürgen Mutz, Friedmar Voormann und David Wendlandt. In diesem Zusammenhang sei auch meiner Vorgängerin Frau Nicole Dufey und Herrn Prof.Dr.phil. Rainer Graefe für die freundliche Überlassung von Studienmaterial aus dem Teilprojekt 'Geschichte des Konstruierens' gedankt. Herrn Prof. Franco Rosso/Turin möchte ich an dieser Stelle besonders für die hervorragende Führungen und Anregungen zum Thema A.Antonelli danken.

Herrn Prof.Dr.-Ing Klaus Bollinger danke ich für sein Interesse und die anregenden Gespräche, die mir bei der Abrundung der Ausarbeitung sehr geholfen haben.

Mein herzlichster Dank sei meiner Frau Erzsébet und meinem Sohn Kálmán für die geopfert Zeit, Geduld und Hilfe, wodurch es mir möglich wurde, diese Arbeit fertigzustellen.

M.Trautz

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden historische Wölbtragwerke hinsichtlich der Form und der konstruktiven Durchbildung und deren Einfluß auf das Tragverhalten untersucht. Hieraus lassen sich Erkenntnisse über das Wissen und die Konstruktions- und Baumeethoden früherer Meister erschließen und Zusammenhänge zwischen Bauweisen und statischem Verhalten herstellen. Zu den Themen bzw. Objekten gehören:

- die Untersuchung der Formgebung ägyptischer und vorderorientalischer Tonnengewölbe (4000 v.Chr. - 600),
- die Bedeutung der Verbundrippenbauweise spätantiker Kuppeln (1. Jhdt. v.Chr. bis 4. Jhdt.), das Tragverhalten und eine Rekonstruktion des Bauverfahrens,
- das Tragverhalten von Pendentivkuppeln, insbesondere der Vergleich der byzantinischen Pendentivkuppel mit der modifizierten osmanischen Bauart,
- das Tragverhalten und die Konstruktion monumentaler kreiszylindrischer Tonnengewölbe am Beispiel des Hauptgewölbes von St. Michael/München (1597),
- das Tragverhalten von ovaloiden Kuppelgewölben am Beispiel der Wallfahrtskirche Steinhausen (1733) und
- die Entwicklung von nach statischen Gesichtspunkten geformten Kuppeln am Beispiel der Vierungskuppeln von St. Paul's/London (1710), des Panthéons Paris (Ste. Geneviève) (1790) und San Gaudenzio/Novara (1878).

Als Untersuchungsmethode werden traditionelle Stützlinienverfahren und moderne materiell-nichtlineare Finite-Element-Methoden angewandt. Erstere dienen als Werkzeug für das Studium von Fragen der Formgebung von Gewölben nach statischen Gesichtspunkten, wobei unterschiedliche Stützlinien beschrieben werden und die Eigenschaften der Kettenlinie in diesem Zusammenhang aufgezeigt werden. Materiell-nichtlineare Finite-Element-Simulationen erlauben es, das spröde Materialverhalten und die Rißbildung von Mauerwerk, aus welchem die untersuchten Wölbtragwerke bestehen, darzustellen. Hierzu ist die Ableitung von Materialparametern für einen niederfesten, spröden Werkstoff notwendig, um das Mauerwerk in seinem Festigkeitsverhalten realitätsnah wiederzugeben. Für verschiedene Gewölbetypen wird das Tragverhalten, d.h. die veränderte Lastabtragung infolge Rißversagens, untersucht und die Tragreserve für die Belastung durch Eigengewicht ermittelt. Methoden zur Verifikation des hieraus resultierenden Rißverhaltens werden angegeben, Vergleichsberechnungen durchgeführt und einige kennzeichnende Eigenschaften der Rißbildung bezüglich des Tragverhaltens von Gewölben abgeleitet. Auf dieser Basis kann das statische Verhalten auch komplexer historischer Wölbtragstrukturen untersucht werden, wie es mit den bisherigen Werkzeugen nicht möglich war.

Abstract

In this study researches of the influence of geometry and structural details on the structural behaviour of historical domes and vaulted structures are presented. Statical calculations and simulations are carried out in order to investigate the principal statical behaviour of masonry vaults and also in order to get information about the state of prevalent empirical and theoretical knowledge, design methods and construction methods. Historical research subjects are:

- the oriental barrel-vaults,
- the construction process and the structural behaviour of Roman domes in composite design,
- a comparative study of the structural behaviour of Byzantine and Ottoman pendentif domes,
- structural behaviour and structural design of barrel vaults from Renaissance,
- structural behaviour of ovaloid domes in the late Baroque period,
- the early application of special forms with statical implication to domes.

Traditional thrustline-methods as well as nonlinear finite-element-methods are applied to the statical investigations. The load case of main interest is 'deadload'. Thrustline-methods help to investigate problems of formfinding and to evaluate different forms of vaults with special statical characteristics. The features of the catenary in general terms, i.e. for other load configurations than uniform distributed loads, are discussed.

The finite-element-method allows the simulation of cracking of brittle material and the investigation of the change of the stress distribution in masonry structures due to the materially nonlinear behaviour. The mechanical parameters of historical masonry and their application to nonlinear finite-element-analysis are discussed particularly. The simulation results are verified by means of basic mechanical models. Finally some of the typical features of the cracking behaviour of simple masonry structures are pointed out .

Inhalt:

Teil I: Grundlagen

1.0 Ziel- und Problemstellung, Methoden	9
1.1 Zielstellung	9
1.2 Stand der Forschung und Methodik in der Technikgeschichte	10
1.2.1 Bisherige technikhistorische Forschungsansätze und eigener Ansatz	10
1.2.2 Technikgeschichtliche Methodik	11
1.3 Stand der Technik und Methoden der Gewölbestatik	12
1.3.1 Arten materiell-nichtlinearer Simulationen von Mauerwerk mit der Finite-Element-Methode	12
1.3.2 Einige Beispiele aus der Entwicklung der Simulationen von Mauerwerk mit der Finite-Element-Methode	13
2.0 Definitionen, Klassifikation von Form und Struktur der Gewölbe und Eigenschaften von Mauerwerk	15
2.1. Definitionen und Begriffe	15
2.1.1 Form	15
2.1.2 Struktur	16
2.1.3 Einflußfaktoren auf Form und Struktur	16
2.1.4 Die ideale und die reale Gewölbeform	17
2.1.5 Begriffe des Gewölbebaus und der Gewölbestatik	18
2.2. Klassifikation von Gewölbeform und Gewölbestruktur	21
2.2.1 Klassifikation von Gewölbeformen nach statischen Gesichtspunkten	21
2.2.2 Klassifikation strukturbeeinflussender Konstruktionselemente	21
2.3 Mechanische Eigenschaften von Mauerwerk	26
2.3.1 Mechanische Eigenschaften von Mörtel, Steinen und Mauerwerk	26
2.3.2 Spezielle Eigenschaften von historischem Mauerwerk	31

3.0 Historische und traditionelle Nachweis-, Berechnungs- und Formgebungsmethoden für Gewölbe	35
3.1 Geschichtlicher Abriß	35
3.1.1 Synthetische Methoden zur Formfindung und Ermittlung von Schnittkräften	35
3.1.2 Diskretisierende statische Methoden zur Errechnung von Schnittkräften und Auflagerwirkungen	39
3.2 Eigenschaften traditioneller Nachweis- und Berechnungsmethoden	41
3.2.1 Hängemodelle	41
3.2.2 Stützlinienmethoden	45
3.2.3 Tragfähigkeitskriterien und Traglastsätze auf Basis der Stützlinientheorie	48
4.0 Simulation von Gewölben aus Mauerwerk mit der FE-Methode	53
4.1 Vorgehensweise bei der FE-Simulation	53
4.1.1 Verwendeter Programmcode und Elementeigenschaften	53
4.1.2 Materiell-nichtlineare Simulationen von Tragstrukturen aus Mauerwerk	56
4.1.3 Test- und Vergleichsrechnungen	64
4.2 Tragverhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial mit der FE-Methode	66
4.2.1 Relevante Lastfälle	66
4.2.2 Rißverhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial unter gleichmäßig verteilten Lasten in der FE-Rechnung	68
4.2.3 Tragverhalten von Rechteckquerschnitten aus nicht-zugfestem Material	76
4.2.4 Simulation eines Bogens unter Eigengewicht	81
4.2.5 Schematisches Interaktionsdiagramm der aufnehmbaren Normalkraft und des aufnehmbaren Moments für den gerissenen und ungerissenen Querschnitt aus nicht-zugfestem Material	84
4.2.6 Auswertung und Zusammenfassung	86

Teil II: Studien	89
5.0 Zur frühen Wölbkunst Ägyptens und des Fruchtbaren Halbmondes	89
5.1 Ägypten	89
5.1.1 Nubische Gewölbe	89
5.1.2 Ägyptisch-orientalische Kuppelgewölbe	92
5.2 Assyrien	94
5.2.1 Das große Tonnengewölbe des Sassanidenpalastes von Ktesiphon	95
5.2.2 Zusammenfassung	98
6.0 Römische Wölbkunst	99
6.1 Römische Arten des Massivbaus	99
6.1.1 Mauerwerk aus Werksteinen	99
6.1.2 Beton und Gußmauerwerk	99
6.2 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen	102
6.2.1 Römische Gewölbe - eine Formensprache auf Basis des Kreises	102
6.2.2 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen in Werksteintechnik	104
6.2.3 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen in Gußmauerwerktechnik	105
6.3 Kuppelkonstruktionen in Gußmauerwerktechnik	107
6.3.1 Gußmauerwerkkupeeln in Verbundbauweise	109
6.3.2 Zusammenfassung	120
7.0 Byzantinische und osmanische Pendentifkuppeln	121
7.1 Kuppeln über viereckigem Grundriß	121
7.1.1 Die geometrischen Grundtypen der Kuppelkonstruktionen und ihre Lastabtragungsprinzipien	121
7.1.2 Zur Entwicklung der Kuppeln auf eckigem Grundriß	123
7.2 Tragverhalten von Pendentifkuppeln	136
7.2.1 Geometrische und statische Eigenschaften der Pendentifs	136
7.2.2 Vorgehensweise, Modellierung und Lagerung bei der Simulation	137
7.2.3 Grundsätzliche Merkmale des Tragverhaltens von Hängekuppeln und Pendentifkuppeln unter Eigengewichtsbelastung	137

7.2.4 Die freistehende Pendentkuppel	138
7.2.5 Verformungsverhalten und konstruktive Stützmaßnahmen	143
7.2.6 Zusammenfassung	147
8.0 Kreiszyllindrische Tonnengewölbe am Beispiel von St. Michael in München (1597)	149
8.1 Zur Entwicklung tonnenüberwölbter Kirchenbauten	149
8.1.1 Nordspanien und Frankreich	149
8.1.2 Italien	151
8.2 Baugeschichte und Konstruktion von St. Michael	154
8.2.1 Zur Baugeschichte	154
8.2.2 Konstruktion der Gewölbe	156
8.3 Tragverhalten des Tonnengewölbes von St. Michael	160
8.3.1 Untersuchung der Tonne unter verschiedenen Öffnungswinkeln	160
8.3.2 Zusammenfassung	166
9.0 Gewölbe des Barocks und Rokokos am Beispiel der Wallfahrtskirche von Steinhausen (1733)	167
9.1 Stationen barocker Baukunst und Wölbkunst	167
9.1.1 Ursprünge der Barockarchitektur	167
9.1.2 Barocke und spätbarocke Baukunst nördlich der Alpen	168
9.1.3 Dominikus Zimmermann und die Wallfahrtskirche zu Steinhausen	170
9.2 Die Zentralkuppel der Wallfahrtskirche zu Steinhausen	172
9.2.1 Zur Wölbtechnik der Barockbaukunst und der Bedeutung der Zentralkuppel der Wallfahrtskirche	172
9.2.2 Die Konstruktion der Zentralkuppel der Wallfahrtskirche	174
9.2.3 Tragverhalten der Kuppel	177
9.2.4 Zusammenfassung	183
10.0 Versuche der Anwendung statisch begründeter Wölbformen	185
10.1 Drei Kathedralen mit stützlinienförmigen Kuppeln	185
10.1.1 St. Paul's - Kettenform versus Kreisform	185
10.1.2 Ste. Geneviève - die Kettenlinie als statische Absolutform	187
10.1.3 San Gaudenzio/Novara - von der Kettenlinie zur Kuppelkettenlinie	192
10.1.4 Zusammenfassung	197

11.0 Zusammenfassung	199
11.1 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	199
11.1.1 Technikgeschichtliche Schlußfolgerungen	199
11.1.2 Ergebnisse aus der Anwendung numerischer und statischer Methoden bei der Untersuchung von Gewölben	201
11.2 Ausblick	204
Literaturverzeichnis	205
Bezeichnungen	220
Anhang	223
(Die Numerierung ist an der Hauptklassifikation orientiert und zur Unterscheidung mit dem Prefix 'A' versehen. Kapitel ohne Anhang wurden ausgelassen.)	
Anhang A.3	223
A.3.2.2.1	223
Anhang A.4	227
A.4.1.1.3	227
A.4.1.3	228
A.4.2.2.2	242
A.4.2.2.3	243
A.4.2.3.3	244
Anhang A.6	247
A.6.3.1.2	247
Anhang A.10	249
A.10.1.1	249
A.10.1.2	250
A.10.1.3	250

Teil I: Grundlagen

1.0 Ziel- und Problemstellung, Methoden

1.1 Zielstellung

Historische Gewölbe sind unter dem Aspekt der Architekturgeschichte ausgiebig untersucht worden. Eine gezielte und zusammenhängende Betrachtung der Entwicklung der Wölbbaukunst unter Gesichtspunkten des mechanischen Verhaltens und der Statik zur Erforschung dieses Einflusses auf die Formgebung, Konstruktion und die angewandten Bauverfahren ist bislang nicht vorgenommen worden. Bisherige Tragverhaltensuntersuchungen wurden ausschließlich an einzelnen, meist namhaften Wölbbauwerken durchgeführt, ohne zu versuchen, einen übergeordneten Zusammenhang hinsichtlich der Formgebung und Konstruktion der betrachteten Gewölbegattung insgesamt herzustellen. Diese Wechselbeziehung und ihr Einfluß auf die Architektur wird häufig unterschätzt oder vernachlässigt, obwohl gerade bei Gewölben, mehr als bei anderen Tragwerksarten, Form und Konstruktion eng mit dem statischen Verhalten verknüpft sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Interdependenzen im Rahmen von sechs Studien, anhand markanter Beispiele verschiedener Epochen und Entwicklungsräume untersucht und aufgezeigt. Als Untersuchungsobjekte wurden Tonnen- und Kuppelgewölbe gewählt. Kreuzgewölbe bleiben wegen des bereits bestehenden Fundus an Arbeiten über das statische Verhalten (z.B. Mark [127], Barthel [70]) außer Betracht.

Das Tragverhalten der Gewölbe wird unter der dominanten und omnipräsenten Belastung des Eigengewichts betrachtet. Mit Hilfe von Stützlinienmethoden werden Fragen der Formgebung von Gewölben nach statischen Gesichtspunkten studiert. Materiell-nicht-lineare Finite-Element-Methoden erlauben es, das spröde Materialverhalten und die Rißbildung von Mauerwerk unter Last abzubilden und auf diese Weise auch komplexe Wölbtragwerke zu untersuchen. Hierzu müssen Werkstoffparameter ermittelt werden, und die Ergebnisse der Finite-Element-Simulationen verifiziert und mit jenen aus konventionellen Verfahren verglichen werden. Da in der Literatur zu dieser Problematik praktisch keine Referenzen zu finden sind, ergibt sich hieraus ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit, der sich mit der Auswertung und der Interpretation der Ergebnisse von materiell-nichtlinearen Simulationen von Gewölbeträgwerken sowie mit dem Tragverhalten von Gewölben unter Eigengewichtsbelastung befaßt.

1.2 Stand der Forschung und Methodik in der Technikgeschichte

1.2.1 Bisherige technikhistorische Forschungsansätze und eigener Ansatz

Die Betrachtung der Entwicklung des technischen Schaffens in der Baugeschichte hat sich in den vergangenen Jahren als eigenständige wissenschaftliche Forschungsdisziplin der Technikgeschichte etabliert¹. Sie erfordert neben historischem und technischem Wissen auch technisches Verständnis. Aus diesem Grund waren es bisher vorwiegend Ingenieure und Architekten, die Bücher zu den technischen und konstruktiven Aspekten der Baugeschichte verfaßt haben. Die Vielschichtigkeit der Thematik zeigt sich in den einschlägigen Standardwerken (z.B. Straub [54,55], Mainstone [37], Graefe [19]), die nicht nur die bautechnischen und baukonstruktiven Entwicklungen darstellen, sondern diese auch in Beziehung zu den ökonomischen, wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Gegebenheiten der jeweiligen Zeit setzen. Diese Komplexität bringt Probleme der wissenschaftsgerechten Verarbeitbarkeit mit sich. So bleibt in den angesprochenen Werken die Darstellung gerade der Wechselbeziehung von Form, Konstruktion und Statik und der damit verbundenen historischen Entwicklung wegen der Anwendung vereinfachter mechanischer Untersuchungsmittel im Hintergrund.

Demgegenüber werden Simulationen des Tragverhaltens von Gewölben mit Hilfe leistungsfähiger Berechnungsmethoden im Zusammenhang mit bautechnikgeschichtlichen Analysen schon seit einiger Zeit eingesetzt. Ein Pionier auf diesem Gebiet ist R. Mark ([127], [128]), der bereits mit spannungsoptischen Methoden das Tragverhalten der Kreuzgewölbe des Kölner Doms untersuchte [127]. Seine statischen Analysen, wie auch die Analysen seiner Nachfolger, beschränken sich jedoch in der Darstellung und Interpretation isoliert auf die für das spezielle Bauwerk gewonnenen Ergebnisse, ohne sie in einen übergeordneten Zusammenhang zu bringen.

Im Konzept dieser Arbeit wird versucht, diese beiden Ansätze zu verbinden, indem innerhalb von epochalen und kulturellen Räumen die Entwicklung von spezifischen Gewölbetypen oder Gewölbekonstruktionen untersucht wird. Als Analyseobjekte wurden bewußt die technisch spektakulären oder singulären Bauwerke nur insoweit miteinbezogen, als sie bedeutend für die betrachtete Gesamtentwicklung sind, und stattdessen eher gewöhnliche Konstruktionen einer Epoche oder Stilrichtung, die den allgemeinen Stand der Technik der jeweiligen Zeit repräsentieren, untersucht.

¹ Als Beispiele seien genannt die Gründung von Lehrstühlen zur Technikgeschichte in neuerer Zeit z.B. an der Universität Cottbus.

1.2.2 Technikgeschichtliche Methodik

Ein zentrales Problem der Erforschung der Bautechnikgeschichte ist, nicht nur im Fall von Gewölben, der Mangel an originalen naturwissenschaftlichen und technischen Unterlagen und Planmaterial. Dies ist zunächst ganz einfach mit den weit zurückreichenden Untersuchungszeiträumen (z.B. Ägypten: 3000 v.Chr.) zu begründen, in denen sich die kulturellen Spuren weitestgehend verwischt haben. Andere Gründe mögen aber auch darin liegen, daß das Bauen in den meisten Kulturen bezüglich seiner schöpferischen und entwerferischen Eigenschaft eine geschätzte Kunst war, in bezug auf die Umsetzung der gestalterischen Ideen und auf die Ausführung jedoch eine untergeordnete Tätigkeit, die von Sklaven und Abhängigen durchgeführt wurde. Von wenigen Ausnahmen abgesehen (z.B. Vitruv) wurde das Bauen und Konstruieren erst mit Ausgang des Mittelalters und der Beendigung des Dombauhüttenwesens schriftlich kommentiert und mit Hilfe von Skizzen und Plänen auch offiziell dokumentiert². Bei der Beschaffung von Studienmaterial zu älteren Objekten ist man deshalb im allgemeinen auf die Forschungsergebnisse von Historikern, Archäologen und Altertumsforschern angewiesen. Darüberhinaus muß man aus der Art, wie ein Gebäude oder seine Ruinen den Entstehungsprozeß im Aufbau nach außen tragen, versuchen, eine Vorstellung von seiner Konstruktion zu gewinnen, und durch den Vergleich von mehreren Objekten mit individueller architektonischer, struktureller und bautechnischer Physiognomie Bezüge herstellen und Gemeinsamkeiten herausfiltern³. Die Aufstellung von Arbeitshypothesen unterstützt die Konkretisierung der Untersuchungsthematik und Fragestellung⁴. Um die technischen Details und Eigenschaften eines Untersuchungsobjektes und die damit im Zusammenhang stehenden bautechnischen Gegebenheiten beurteilen und interpretieren zu können, wird zudem die Fähigkeit des Ingenieurs als Erfinder gebraucht, indem die Konstruktionen und Prozesse gewissermaßen 'nacherfunden' werden⁵. Es muß bedacht werden, daß bei der Beurteilung der technischen Eigenschaften historischer Bauwerke grundsätzlich andere Maßstäbe als die heute gültigen anzulegen sind. Damals wurde als ökonomisch eher das materialintensive und zeitextensive Bauen angesehen, das mehrfache Ausnutzen und Einsparen von Material auf Kosten eines höheren Arbeitsaufwandes. Mangels entsprechender Methoden mußte mehr Wert auf eine durch sorgfältige Detailausbildung ermöglichte 'konstruktive Standsicherheit' gelegt werden, denn

2 *Das Bauhüttenbuch von Villard de Honnecourt ist eines der ältesten Dokumente dieser Art (13.Jhd), siehe Kimpel [216].*

3 *Diese Vorgehensweise wurde um die Jahrhundertwende bereits intensiv betrieben, wovon die Werke von Choisy [187] und Durm [203] einen Eindruck geben.*

4 *Mehr hierzu im Einleitungstext (S.8/9) zum Buch 'Geschichte des Konstruierens' [21] von R.Graefe.*

5 *Ebenda [21]. S.9.*

auf eine rechnerische Standsicherheit, mit deren Nachweis heutzutage zu häufig auch die weniger günstigen statisch-konstruktiven Eigenschaften eines Bauwerkes abgedeckt werden.

Mit Kenntnis des statischen Verhaltens der gemauerten Wölbkonstruktionen, wie es mit den modernen numerischen Methoden nunmehr detailliert erfaßt werden kann, lassen sich die Entwicklungen und Wandlungen in der Konstruktion und der Bautechnik besser erklären. Die Untersuchung insbesondere komplizierter Gewölbeträgerwerke mit Hilfe des Computers macht es möglich, gewissermaßen im Zeitraffer, Bauverfahren nachzuvollziehen, welche die alten Meister und Bauhütten mühsam über Jahrzehnte und Jahrhunderte durch 'trial and error' gewonnen hatten.

1.3 Stand der Technik und Methoden der Gewölbestatik

Zu gewölbestatistischen Analysen kann eine Vielzahl verschiedener Berechnungsmethoden mit unterschiedlichem Aufwand herangezogen werden. Die klassischen Stützlinienmethoden (siehe auch Kap.3.2.2) erlauben ungefähre quantitative und qualitative Aussagen zu den statischen Eigenschaften einfacher Gewölbeformen und homogener Gewölbestruckturen bei vergleichsweise geringem Aufwand und sind bis heute im Gebrauch.

Die in den letzten Jahrzehnten sich stürmisch entwickelnde Methode der Finiten Elemente erlaubt mit Hilfe des Computers die statische Analyse beliebig komplexer Formen mit geometrischen Unstetigkeiten, heterogener Struktur oder freien bzw. unregelmäßigen Geometrien unter den verschiedensten Belastungszuständen. Im Zusammenhang mit der Fortentwicklung der iterativen, nichtlinearen Finite-Element-Methoden (FEM) kann in neuerer Zeit auch das Versagensverhalten von Sprödmaterialien wie Mauerwerk simuliert werden.

1.3.1 Arten materiell-nichtlinearer Simulationen von Mauerwerk mit der Finite-Element-Methode

Charakteristisch für sprödes Material ist die geringe Zugfestigkeit und plötzliches, unangekündigtes Versagen. Diese Eigenschaften beeinflussen das Verhalten im mikroskopischen und makroskopischen Bereich, also in der Materialstruktur und in der Tragstruktur.

Die Modellierung von Mauerwerk mit der FEM kann ähnlich auf zweierlei Arten geschehen, die als Mikro- und Makromodellierung bezeichnet werden. Erstere ist die stückweise Ausbildung von Stein und Fuge im FE-Modell durch entsprechende Elemente, nämlich Brick-

und Kontakt- bzw. Gap-Elemente. Hierbei beinhalten Kontaktelemente u.a. das Problem der Festlegung des Parameters der Kontaktsteifigkeit, einer nicht unmittelbar realisierbaren Materialgröße, und eines stark erhöhten numerischen Aufwandes wegen der Anzahl an Elementen. Bei der zweiten Modellierungsart wird das Trag- und Versagensverhalten des Zweikomponentenwerkstoffes 'Mauerwerk' innerhalb eines Elementes simuliert. Hierbei können schematisierte Werkstoffgesetze und Versagensmodelle zugrundegelegt werden, wobei Werkstoffkennwerte aus Versuchen an ganzen Mauerwerkskörpern einzusetzen sind. Es ergeben sich relativ geringe Rechenzeiten und eine naturgetreue Wiedergabe des Materialverhaltens unter Belastung, so daß sich die integrierte Makromodellierung gegenüber der Mikromodellierung zusehends etabliert.

Wegen der Ressourcenintensität der Simulationen von Mauerwerk haben sich hinsichtlich der Komplexität der eingesetzten Werkstoffmodelle und Elemente zwei Strategien herauskristallisiert, abhängig vom Schwerpunkt der FE-gestützten Untersuchungen. Diese kann in der möglichst detaillierten Nachbildung des Materialverhaltens liegen, oder in der Betrachtung der Auswirkungen des spröden Materialverhaltens auf das Tragverhalten von Mauerwerkkonstruktionen insgesamt. Die genaue Nachbildung des Verhaltens von Mauerwerk und Sprödmaterialien mit der FEM wird in der Materialforschung, im Massivbau und in der Finite-Element-Entwicklung angestrebt. Hierbei muß eine Vielzahl von Modellierungsparametern berücksichtigt werden, was den Einsatz spezieller Implementierungen in zu meist eigens entwickelten Programm-Codes voraussetzt, mit denen jedoch häufig nur zweidimensionale Simulationsmodelle von begrenzter Größe untersucht werden können. Demgegenüber kommen in der Praxis bei der Berechnung und Simulation von Stahlbetontragwerken vereinfachte Werkstoffgesetze und Versagensmodelle zum Einsatz, die auch in kommerziellen FE-Codes enthalten sind. Sie sind auf dreidimensionale Probleme (durch Schalen- bzw. Brickelemente) ausgelegt, so daß es möglich ist, beliebige räumliche Tragstrukturen zu untersuchen, und die Veränderungen der Lastabtragung im Tragwerk aufgrund des nicht-zugfesten Materials zu simulieren.

1.3.2 Einige Beispiele aus der Entwicklung der Simulationen von Mauerwerk mit der Finite-Element-Methode

1.3.2.1 Materialmodellierung und Simulationen ebener Probleme

Page [133] modellierte 1978 Mauerwerk entsprechend seiner Struktur aus Brickelementen für den Stein und sogenannten 'Joint-Elementen' für die Fuge (Micromodelling). Er simulierte 1985 das Versagensverhalten von Mauerwerkscheiben zusammen mit

Dhanasekar [85], dessen Versagensmodell als Grundlage dabei diente. Auf Basis eines kommerziellen Programms rechnete Dialer [86] mit 'Distinkten Elementen' das Versagensverhalten von Mauerwerkscheiben nach. Seim [157] berücksichtigte bei seinen Untersuchungen an Mauerwerkscheiben die Anisotropie von Mauerwerk und benutzte die Versagenskriterien des Fünfparameterelements nach Ganz [99]. Lourenço [120] entwickelte ein anisotropes Kontinuumsmodell für Mauerwerk mit Definition des räumlichen Druckversagensbereiches (Cap-Model).

1.3.2.2 Simulationen von Gewölben aus Mauerwerk

Die ersten Simulationen von historischen Gewölben durch R. Mark et al. 1973 [128] waren materiell-linear. Chiarugi et al. [79] versuchten 1983 durch Trennen des FE-Netzes und 'künstliche' Bildung zusätzlicher Freiheitsgrade die Rißbildung bei einer Analyse der Florentiner Domkuppel darzustellen. Abgesehen vom Aufwand ist diese Methode ungeeignet für die Automatisierung wegen der unmittelbaren Abhängigkeit der Rechenergebnisse von der Diskretisierungsdichte. Das Tragverhalten von ebenen Bögen wurde mit Hilfe von 'Gap-Elementen' von Crisfield [82] simuliert, und später mit Hilfe von speziellen Scheiben- und Schalenelementen mit implementiertem Versagensverhalten (Failure-Elements) durch Choo [80] untersucht. Kuppeln, also räumliche Tragwerke mit Gap-Elementen, berechnete Blasi [76] 1989, wobei er nur in vertikaler Richtung die Kontaktelemente einbaute. Das Entstehen von Rissen längs der Ringrichtung durch die Wirkung von Biegemomenten konnte also a priori nicht untersucht werden.

C.C. Swan und A. Çakmak [159] führten 1992 eine nichtlineare statische und dynamische Analyse der Hagia Sophia in Makromodellierung und mit Hilfe einer Homogenisierungstechnik durch. Der Superrechner CRAY 94 war für diese Untersuchung eine unabdingbare Voraussetzung.

Mit einem dreidimensionalen Failure-Element des Programmcodes ADINA untersuchte Barthel [70] 1991 verschiedene Formen von Kreuzgewölben. Neuere Untersuchungen (1995) von Mauerwerkstrukturen im Zusammenhang mit dem Wiederaufbau der Frauenkirche in Dresden wurden mit dem kommerziellen Programm ANSYS von Bergander/Jäger [75] durchgeführt.

2.0 Definitionen, Klassifikation von Form und Struktur der Gewölbe und Eigenschaften von Mauerwerk

Gewölbe sind neben den Stab- und Balkenkonstruktionen die ältesten und am weitesten verbreiteten Tragkonstruktionen. Höhlen mögen als 'natürliche Konstruktionen' dem Menschen die Inspiration zum Wölbgedanken gegeben haben. In ihrem völlig immobilien Charakter und der Verarbeitung des lokal verschiedenen Boden- und Steinmaterials manifestiert sich das Sesshaftwerden des Menschen und die Entwicklung ortsbezogener Handwerks- und Kulturtraditionen. So ist die Formgebung und Konstruktion von Bögen, Tonnen oder Kuppeln einerseits der individuelle Ausdruck der Formensprache eines Kulturraumes, andererseits, je nach Gattung und architektonischer und konstruktiver Einbindung, das Ergebnis einer über Jahrhunderte gewachsenen Bauerfahrung.

2.1 Definitionen und Begriffe

2.1.1 Form

Neben dem architektonischen Gestaltungswillen (Kap.7, Kap.8)¹ wird die Wölbform entscheidend von physikalischen Bedingungen bestimmt. Dieser Einfluß steigert sich mit der Spannweite und der Schlankheit der Gewölbeschalen. Durch eine gezielte Formgebung kann daher umgekehrt auch die Lastabtragung in einem Gewölbe beeinflusst werden und ein besonderes statisches Verhalten eingepreßt werden. Im Fall von Kuppeln läßt sich durch die Form, in Abhängigkeit von einer bestimmten Belastung, eine eindimensionale Lastabtragung herbeiführen (siehe Begriff 'Stützfläche') statt der sonst für räumlich gekrümmte Wölbtragwerke typischen zweidimensionalen Tragwirkung ('tragverhaltensorientierte Form') (Studien: Kap.5, Kap.10).

Weiterhin beeinflussen pragmatische, die Bautechnik betreffende Faktoren die Form von Gewölben. Statt des Endzustandes eines Gewölbes kann der Bauzustand als maßgeblich für das statische Verhalten und die Form sein, etwa wenn wenige oder keine Schalgerüste eingesetzt werden sollen ('bautechnisch bedingte Form') (Kap.6, Kap.8, Kap.9). Nicht zuletzt spielt die geometrische Reproduzierbarkeit der angestrebten Form, nicht nur im Zeichenmaßstab sondern auch im Ausführungsmaßstab, mit möglichst einfachen und mit sicher zu handhabenden Meßwerkzeugen und Hilfsmitteln eine wichtige Rolle (Kap.6, Kap.9).

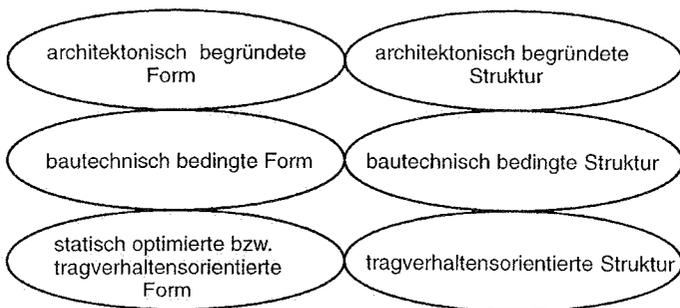
1 Die Kapitelverweise beziehen sich auf die Studien, deren Untersuchungsobjekte den genannten Einflußfaktoren zugeordnet werden können.

2.1.2 Struktur

Mit dem Begriff 'Struktur' ist in diesem Zusammenhang die konstruktive Beschaffenheit eines Gewölbes umschrieben, die Art des Gefüges des Mauerwerkes (Art des Mörtels und der Steine - Bruchstein, Ziegel, Werkstein) oder der Einsatz von Konstruktionselementen wie Rippen, Graten, Verstärkungen oder Zuggliedern, sowohl physikalischer (unterschiedliche Materialien) als auch geometrischer Art (ausgebildete Rippenformen). Sofern nicht das Bauverfahren die Struktur des Gewölbes von vornherein prägt (z.B. das unechte Gewölbe, das aus der Schichtung und Krabung von Steinen entsteht ('bautechnisch bedingte Struktur'), (Kap.5)), steht die Strukturierung eines Gewölbes häufig im Zusammenhang mit der Manipulation und Verbesserung des Tragverhaltens der Wölbform allgemein oder im Zusammenhang mit bestimmten Last- oder Bauzuständen, bzw. mit bauverfahrenstechnischen Bedingungen (Kap.6, Kap.7, Kap.8, Kap.9). Hierbei kann Ursache die Einsparung oder Vermeidung von Schalgerüsten sein, bzw. die Vorgabe der Reihenfolge des Erstellens der Tragwerksglieder innerhalb eines bestimmten Bauverfahrens.

Je nach Art der strukturbeeinflussenden Konstruktionselemente verändern sie das Tragverhalten mehr oder weniger stark im Vergleich zur unstrukturierten, homogenen Gewölbeform. So führen die in Gewölbeschalen eingefügten Rippen, die Beanspruchungen entlang ihres Verlaufes anziehen und zusätzliche Biegetragwirkung der Schale mit sich bringen (Kapitel 9), bei Kuppeln zur Abminderung der räumlichen Tragwirkung und Reduktion der Ringkräfte².

2.1.3 Einflußfaktoren auf Form und Struktur



² Der italienische Architekt Antonelli (Kap.10.1.3) baute Rippen in seine Gewölbe ein. Im Falle seiner Kuppeln brachte dies eine vorteilhafte Verringerung der Ringzugkräfte. Siehe Trautz [271], S.123 .

Das Schaubild stellt Form und Struktur von Gewölben in Abhängigkeit der beeinflussenden Größen dar. Sie sind das Ergebnis der Wechselwirkung des Formwillens des Baumeisters, den Bedingungen der Standsicherheit und den Erfordernissen der Machbarkeit. Entsprechend der Thematik dieser Arbeit werden architektonische Aspekte lediglich insoweit einbezogen, wie sie die statisch-konstruktiven Aspekte beeinflussen oder in Wechselwirkung mit ihnen treten.

2.1.4 Die ideale und die reale Gewölbeform

Die bisher vorwiegend unter architektonischen Aspekten durchgeführten Betrachtungen zur Form und Struktur von Gewölben begnügen sich häufig mit der Beschreibung der bloßen Textur der Wölbformen, ihre genaue Beschaffenheit ist - wenn überhaupt - nur von sekundärem Interesse. Zur Beschreibung der Form bedient man sich bei Gewölben zumeist nur der elementargeometrischen Grundformen wie Kreiszyllindertonne, Hemisphäre, Ellipsoid oder figurativer Formbegriffe (z.B. 'Spiegelgewölbe'). Diese sind im Zusammenhang mit dem statischen Verhalten oft nicht ausreichend genau oder beinhalten überhaupt keine Aussage diesbezüglich³. Wegen der Wechselbeziehung von Form und Statik bei Gewölben muß die genaue Charakteristik der Wölbform bekannt sein oder ermittelt werden, gerade wenn sie unorthodox oder unregelmäßig ist. Auch müssen alle Konstruktionselemente bei der Simulation modelliert werden, wenn die Aussagen zur Statik zutreffend sein sollen. Konstruktiv verlagerte, die Wölböffnung verkürzende Gewölbeansätze, massiv ausgebildete Gewölbeteile oder Störungen und Öffnungen im Gewölbe (z.B. Ste. Geneviève, Kap.10.1.2) können dazu führen, daß die Bezeichnung der Form eines Gewölbes falsche Rückschlüsse auf das statische Verhalten nach sich zieht.

³ Es gibt eine Vielzahl von Bogenformen, die formal ähnlich sind, statisch gesehen aber bedeutende Unterschiede aufweisen, wie beispielsweise der sogenannte 'Tudor-Bogen' und der 'Eselsrücken'. Beide werden zur Gattung der Kielbögen gezählt. Der Tudorbogen ist ein Kielbogen ohne Gegenkrümmung (Tabelle 2.1: $R_2 = \infty$), der vorwiegend normalkraftbeansprucht ist, der Eselsrücken ist ein Kielbogen mit ungefähr der gleichen Gegenkrümmung im Scheitel wie am Kämpfer ($R_2 \approx R_1$). Er ist stark biegebeansprucht und daher eine an sich ungünstige Form für eine Tragstruktur aus Mauerwerk.

2.1.5 Begriffe des Gewölbebaus und der Gewölbestatik

- Gewölbe:** Ein Gewölbe ist ein in der Ebene oder im Räumlichen gekrümmtes Linien- oder Flächentragwerk, dessen Lastabtragung vornehmlich über Druckbeanspruchung erfolgt⁴.
- Gewölbekappe:** Gewölbeabschnitt oder Gewölbeschalensegment aus einer einfach oder doppelt gekrümmten Wölform, dessen Lastabtragung über Druckbeanspruchung erfolgt.
- Kämpfer:** Kämpfer sind die Auflagerpunkte von Gewölben, die Vertikal- und Horizontalkräfte aufnehmen.
- Scheitel/Stich:** Der relativ zum den Auflagern höchste Punkt eines Gewölbes wird Scheitel oder Stich genannt. Die Höhe des Scheitels bezeichnet statisch gesehen den maximalen Hebelarm, den das Tragwerk mit der Erdscheibe bildet. Hieraus bestimmt sich die Intensität der Normalkraftbeanspruchung des Gewölbes unter Last.
- Extrados/Intrados:** Die Außen- bzw. Innenfläche eines Bogens oder eines Gewölbes werden Extrados bzw. Intrados genannt.
- Meridian-/Ringrichtung:** Meridiane sind analog zur geodätischen Definition diejenigen Linien auf rotationssymmetrischen Gebilden, welche mit der Rotationsachse eine Ebene bilden. Sie beschreiben die gleichnamige Richtung.
Die in der Normalenebene zur Rotationsachse liegenden Kreislinien geben die Ringrichtung an.
- Gewölbeschub:** Mit Gewölbeschub wird, im Gegensatz zum Schubbegriff der technischen Mechanik einer Beanspruchung in der Querschnittsfläche, die Horizontalkraft am Auflager/Kämpfer bezeichnet.

⁴ Siehe hierzu auch Barthel [70], S.6/7.

Stützlinie/Stützfläche: Die Stützlinie ist die zu einer gegebenen Lastkonfiguration, polygonal oder kontinuierlich gekrümmte Linie, auf der die Spannungsergebnisse der Querschnitte eines Tragwerks liegen. Die Stützlinie ist eine analoge Geometrie zur Kettenlinie der entsprechenden Lastkonfiguration.

Die Stützfläche ist eine zu einer gegebenen Lastkonfiguration räumlich gekrümmte Form, die rein normalkraftbeansprucht ist. Abhängig von einer vorgegebenen Bedingung bezüglich der Kräfte der beiden Dimensionen (rotationssymmetrische Formen: n_v, n_g) können sich verschiedene Stützflächengeometrien zur gleichen Lastkonfiguration ergeben. Die Bedingung lautet z.B. für eine isostatische Rotationsstützfläche: $\sqrt{n_v^2 + n_g^2} = \text{const.}$

Kettenlinie: Unter einer Kettenlinie versteht man diejenige Form, die eine Kette von gleichmäßiger Beschaffenheit, d.h. gleichmäßiger Gewichtsverteilung über ihre Längendimension annimmt, wenn sie frei zwischen zwei Punkten hängt. Mathematisch kann die Kettenlinie durch Integration einer Gleichlast entlang der zweidimensionalen Wegkoordinate 's' gewonnen werden (Kap.3.2.2). Die Integration einer beliebigen Lastkonfiguration entlang der Wegkoordinate s, etwa aus der Gewichtsverteilung eines Gewölbes mit bestimmter Form, führt zur Kettenlinie im allgemeinen Sinn.

Seillinie: Zur Unterscheidung von der Kettenlinie hat sich der Begriff der 'Seillinie' in der Ingenieursprache verbreitet. Er ist abgeleitet vom Tragsystem eines Seilbinders und seiner Tragwirkung. Dieser wird als gewichtsloses Seil idealisiert, an dem in gleichem Grundrißabstand Kräfte in Vertikalrichtung wirken. Für gleich große Kräfte bzw. für eine Streckenlast konstanter Größe ist die zugehörige Geometrie eine quadratische Parabel. Die Seillinie ergibt sich durch Integration der Lastkonfiguration $q(x)$ über die Abszisse (Kap.3.2.2). Sie stellt eine Annäherung an die Ketten- bzw. Stützlinie dar, die rechnerisch einfacher zu gewinnen ist.

Kuppelkettenlinie/
Kettenlinienkuppel : Die Kuppelkettenlinie ist die zu einer rotationssymmetrischen, d.h. proportional zum Radius veränderlichen Last zugehörige Kettenlinie. Sie entspricht dem Meridian der Rotationsstützfläche aus der Bedingung: $n_y = 0$. Eine Kuppel mit der Meridianform einer Kuppelkettenlinie wird als 'Kettenlinienkuppel' bezeichnet.

Kernfläche: Die Kernfläche eines Querschnitts ist der Bereich, in dem die Spannungsergebende gerade keine Randzugspannungen erzeugt. Normal- und Biegezugspannungen sind dort gleich groß und heben sich auf. Die Kernfläche eines Rechteckquerschnitts liegt innerhalb des mittleren Drittels ($\pm h/6$) der Querschnittshöhe.

2.2. Klassifikation von Gewölbeform und Gewölbestruktur

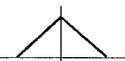
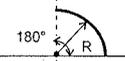
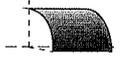
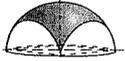
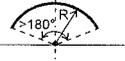
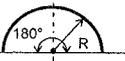
2.2.1 Klassifikation von Gewölbeformen nach statischen Gesichtspunkten

Bei der Klassifikation der Gewölbe nach der Form (Tabelle 2.1) wurde prinzipiell unterschieden in Gewölbeformen, die:

- nur im Scheitel diskret gekrümmt sind (Knick) (Trigonale Formen),
- kontinuierlich über die Gewölbeachse gekrümmt sind (Kreisformen),
- im Scheitel relativ zum Kämpfer stärker gekrümmt sind (hohe Ovalformen),
- im Scheitel relativ zum Kämpfer geringer gekrümmt sind (flache Ovalformen),
- im Scheitel geknickt und entlang der Gewölbehalbachsen kontinuierlich gekrümmt sind (spitzbogige Formen) und
- im Scheitel geknickt und entlang der Gewölbehalbachsen veränderlich gekrümmt sind, wobei im Bereich der Kämpfer die Krümmung im Vergleich zum Scheitel relativ größer oder gegensinnig ist (Kielbogenformen (s.a. Kap.2.1, Anmerkung 3).

2.2.2 Klassifikation strukturbeeinflussender Konstruktionselemente

Die strukturbeeinflussenden Konstruktionselemente sind entsprechend ihres statischen Effektes geordnet (Tabelle 2.2).

Bogen	Tonne	Kuppel		Zusammengesetzte Formen	
achsensymmetrisch	achsensymmetrisch, translatorisch	rotationssymmetrisch	achsensymmetrisch		achsensymmetrisch
			Kontinuierliche Grundrissform	Polygonale Grundrißform	
Trigonaler Bogen, Strebentriangel  (Sturzbogen am Nordeingang der Cheopspyramide, 2600v.Chr.)	Trigonale Tonne  (Kasematten, Tiryns, 1300 v.Chr)	Kegelskuppel oder Konusgewölbe  (Innenkuppel d. Baptisteriums von Pisa, 13.Jhdt.)	—	Pyramidenkuppel  (Steinzeithäuser bei Gordes/Südfrankreich, 4000 v. Chr.)	o.N.  ('Tumulus Royal' Insel Krim, 5. Jhdt.)
Kreisbogen Einhöftiger Bogen, $\alpha=90^\circ$ 	Halbtonne  (Notre-Dame-du-Port/ Clermont-Ferrand, 12.Jhdt., Überwölbung der Emporen)	Hemisphäre  (Pantheon/Rom, 1.Jhdt., alle Epochen der europäischen Architektur)	Rotationsellipsoid  (Vicoforte di Mondovi, 18.Jhdt.)	Hängeskuppel  (Hagia Irene/ Konstantinopel 5. bzw. 7.Jhdt.)	Klostergewölbe  (Mole Antonelliana/Turin, 19.Jhdt, Vierungskuppel Santa Maria del Fiore/Florenz (15.Jhdt.))
Flachbogen $\alpha < 90^\circ$  (Entlastungsbögen römischer Massivbauten)	Flache Tonne  (Fleischbrücke Nürnberg, Ende 16.Jhdt.)	Kugelkalotte  (Grabmahl des Theoderich, Ravenna, 6.Jhdt.)	—	Böhmisches Kappe  (Jochgewölbe, Klosterkirche Einsiedeln, Anf. 18.Jhdt.)	Kreuzgewölbe  (Maxentius-Basilika/Rom, 4. Jhdt.; Romanik, Gotik)
Halbkreisbogen $\alpha=180^\circ$  (Rom, Romanik, Renaissance)	Kreiszyliindertonne  (Il Gesù/Rom, St.Michael/ München, 16.Jhdt.)	Torusgewölbe  (San Giovanni/ Carignano, Mitte 18.Jhdt.)	—	—	Byzantinische Pendentivkuppel  (Hagia Sophia/ Konstantinopel, Anf. 6.Jhdt.) Trompenkuppel:  Palast von Sarvistan, 5.Jhdt.)

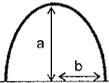
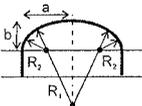
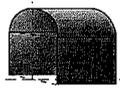
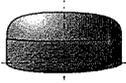
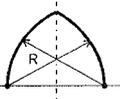
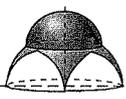
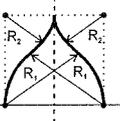
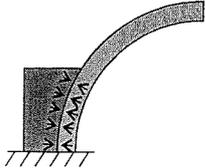
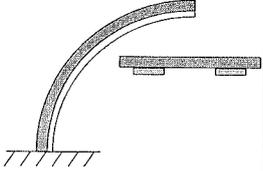
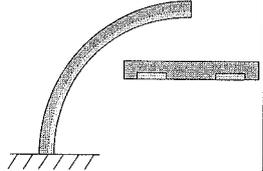
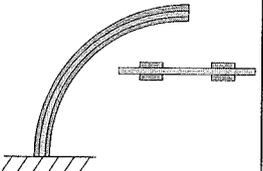
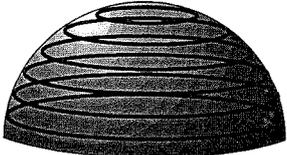
Bogen	Tonne	Kuppel		Zusammengesetzte Formen
<p>Hoher elliptischer/ ovaler Bogen/</p>  <p>(Bogazköy, Anf. 13. Jhdt.)</p>	<p>Hohe elliptische Tonne/Ovaltonne</p>  <p>(Gewölbe der Speicherhäuser in Theben, 12. Jhdt. v. Chr., Halle des Palastes von Ktesiphon 6. Jhdt.)</p>	<p>Hohe elliptische Kuppel/ Ovalkuppel</p>  <p>(Außenkuppel der Frauenkirche Dresden, Anf. 18. Jhdt.)</p>	—	—
<p>Flache Bogen/ Korbbogen</p>  <p>(Bursa Yesil Cami, Anf. 15. Jhdt.)</p>	<p>Flache Ovaloidtonne</p>  <p>(Stadtresidenz Landshut, Italienischer Saal, Anf. 16. Jhdt.)</p>	<p>Flachkuppel</p>  <p>(Lodi-Mausoleum, Dehli, 15. Jhdt.)</p>	<p>Flaches Ovaloidgewölbe, Ovale Spiegelgewölbe</p>  <p>(Zentralgewölbe Wallfahrtskirche Steinhausen, 1. H. 18. Jhdt.)</p>	<p>Spiegelgewölbe</p>  <p>(Gewölbe über Treppenhaus der Residenz Würzburg, 18. Jhdt.)</p>
<p>Spitzbogen</p>  <p>(Spätromanik, Gotik)</p>	<p>Spitztonne</p>  <p>(Kathedrale von Orange 12. Jhdt.)</p>	<p>Spitzkuppel</p>  <p>(Kuppel der Großen Moschee v. Isfahan (15. Jhdt.)</p>	—	<p>Muldengewölbe</p>  <p>(Osmanische Pendentifkuppel</p>  <p>(Süleymaniye Moschee/Istanbul, 16. Jhdt.)</p>
<p>Kielbogen (biegezugbeansprucht für $R_2 \neq \infty$)</p>  <p>(Persische und Seldschukische Architektur, europäische Renaissancearchitektur)</p>	<p>Kielbogentonne (statisch möglich nur für $R_2 = \infty$)</p>  <p>(Täbris, Ali Sah Moschee, Anf. 14. Jhdt.)</p>	<p>Zwiebelkuppel</p>  <p>(Kuppel der Madrasa Tiya Kari/ Samarkand (Mitte 17. Jhdt.)</p>	—	—

Tabelle 2.1: Historische Wölbformen als statische Systemformen (Primärstrukturen).

Strukturierende Konstruktionselemente	Eigenschaften	Beispiele
Hinterfüllungen, Auffüllungen, Auflast	<p>Bei Bögen und Tonnen:</p> <p>Aufmauerung, Auffüllung des Zwischenraums (Zwickel) zwischen Gewölbeansatz und anschließender Wand. Stabilisierung durch Behinderung von Verformungen und Verschiebungen im Auflagerbereich.</p> 	<p>Aufmauerung: Tonnengewölbe und Kuppeln der römischen Architektur.</p> <p>Hinterfüllung: Tonnengewölbe seit der Renaissance.</p>
Rippen, Gurte	<p>Rippen in Meridianrichtung (bei Tonnen und Kuppeln):</p> <p>Rippen und Rippen-systeme bilden ein Traggerüst, das als Unterstützung für die aufzumauernden Gewölbekappen dient, welche die eigentliche Wölbfläche darstellen. Statisch ergibt sich lediglich ein Reibungsverbund mit den Kappen.</p>  <p>Rippen im Verbund mit Mörtelgemisch bzw. Beton bilden zunächst ein Traggerüst zur Vorgabe der Geometrie und als Hilfsstruktur. Nach dem Mörtelverguß entsteht eine zusammenhängende Schale mit einem durch das steifere Rippenetz modifizierten Tragverhalten.</p>  <p>In Mauerwerk ausgeformte Rippen ergeben ein lokal erhöhtes Widerstandsmoment und damit eine höhere Tragfähigkeit, die bei statisch unvorteilhaften Gewölbeformen notwendig sein kann.</p>  <p>Wegen der größeren Kernfläche verringern die Rippen das Kippen der Mauersteine, das Aufmauern der Kuppel ohne Schalung wird so vereinfacht.</p> <p>Rippen in Ringrichtung (bei Kuppeln):</p>  <p>Rippen (geometrisch oder materiell) in Ringrichtung verringern die Absenkung der Ringschichten im Bauzustand. Bei Ausbildung eines Opaiens ist ein Scheitelring vorteilhaft wegen der sich am oberen Rand konzentrierenden Ringdruckkräfte.</p>	<p>Gotisches Kreuzrippengewölbe.</p> <p>Spätantike Kuppeln in Verbundbauweise. (Tempio della Tosse/Tivoli, 4.Jhdt.).</p> <p>Barockgewölbe: Balthasar Neumann: Wallfahrtskirche Vierzehnhelligen, Würzburg Hofkapelle, Treppenhaus (18.Jhdt.).</p> <p>Alessandro Antonelli: Außenkuppel und Zwischenkuppel des Vierungsturms von San Gaudenzio/Novara (19.Jhdt.).</p> <p>Spätantike Kuppeln in Verbundbauweise und in Tonröhrentechnik. (San Vitale/Ravenna, 6. Jhdt.).</p>

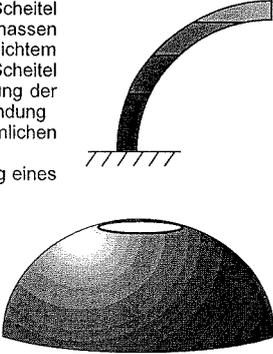
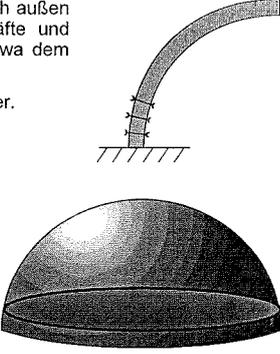
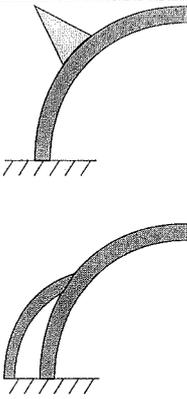
Strukturierende Konstruktionselemente	Eigenschaften	Beispiele
Gewichtsabstufung	<p>Reduktion der im Scheitel wirkenden Gewichtsmassen durch Wahl von leichtem Steinmaterial für den Scheitel und dadurch Verringerung der Kämpferkräfte. Anwendung bei Kuppeln und räumlichen Gewölben.</p> <p>Bei Kuppeln: Ausbildung eines Opaians.</p> 	<p>Pantheon/Rom 1. Jhdt., Großes Gewölbe über dem Treppenhaus der Residenz Würzburg von Balthasar Neumann (18.Jhdt.).</p>
Zugglieder, Ringanker	<p>Zur Aufnahme der nach außen wirkenden Kämpferkräfte und Stabilisierung. Seit etwa dem 13.Jhdt. im Gebrauch.</p> <p>Bei Kuppeln: Ringanker.</p> 	<p>Hölzerner Ringanker der Kuppel des Domes von Florenz (15.Jhdt.); sog. 'Spieramenanker', Zuganker in den durch Kuppelschub beanspruchten Wandscheiben der Frauenkirche Dresden (18.Jhdt.).</p>
Verstrebrungen, Abstrebrungen	<p>Zur Stabilisierung eines Gewölbes durch Behinderung der Verformungen an bestimmten Stellen. Anwendung bei Bögen und Tonnengewölben, bei Kuppeln nur in Verbindung mit Meridianrippen, wobei die statische Wirksamkeit nicht immer gewährleistet ist.</p> 	<p>St.Michael/ München, 16.Jhdt., Rüstem Pasa Camii/ Istanbul (Sinan), 16.Jhdt..</p>

Tabelle 2.2: Struktur- und tragverhaltensbeeinflussende Konstruktionselemente im historischen Gewölbebau.

2.3 Mechanische Eigenschaften von Mauerwerk

2.3.1 Mechanische Eigenschaften von Mörtel, Steinen und Mauerwerk

Mauerwerk als Verbundwerkstoff aus Stein und Mörtel wird in seinen Festigkeitseigenschaften wesentlich durch die mechanischen Eigenschaften dieser Komponenten geprägt. Diese wiederum variieren in Abhängigkeit von den verwendeten Grundstoffen und von der Verarbeitungsweise.

Spannungs-Dehnungs-Verhalten

Die Charakteristik der Spannungs-Dehnungs-Linien von Stein (Kunst- oder Naturstein) ist bei der Mehrzahl der Arten abschnittsweise linear. Je nach Sprödigkeit tritt bei Zweidrittel bis Dreiviertel der Druckfestigkeit ein nichtlinearer Verlauf ein, der durch plötzliches Bruchversagen beendet wird (Abb.2.3.1).

Hiervon unterscheiden sich Mörtel durch ein stark nichtlineares Verhalten und ausgeprägtes Plastizieren. Reiner Kalkmörtel, wie er gerade in historischen Bauwerken häufig verarbeitet worden ist, weist ein beinahe ideales elastisch-plastisches Spannungs-Dehnungs-Verhalten mit einem typischen 'Fließplateau' auf (Abb.2.3.2). Dieses unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Komponenten kommt in Abhängigkeit von der Festigkeitsdifferenz zwischen Stein und Mörtel bei höheren Beanspruchungen zum

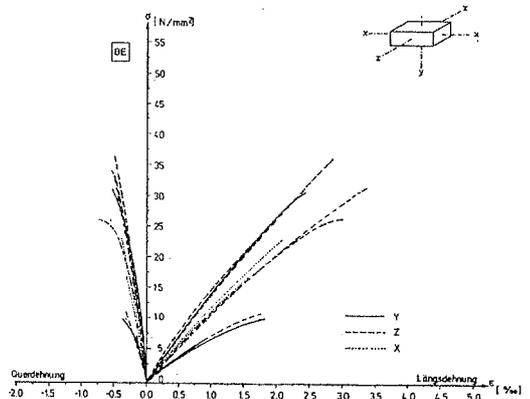


Abb.2.3.1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines Ziegels im Druckversuch nach Egermann/Mayer [90].

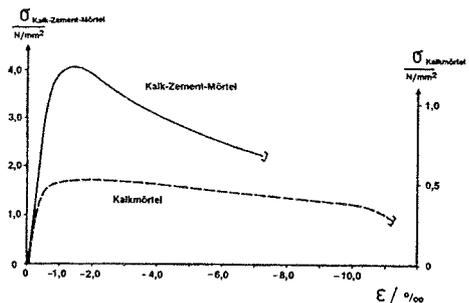


Abb.2.3.2: Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines Kalkzementmörtels und eines Kalkmörtels nach Schäfer/Hilsdorf [152].

Tragen. Im unteren Beanspruchungsbereich ist im allgemeinen das Verhalten des Steins bestimmend für die mechanischen Eigenschaften des Mauerwerks (Abb.2.3.3). Seine Festigkeit kann, außer durch Versuche, nur näherungsweise mit Hilfe von empirischen Formeln bestimmt werden (siehe Anhang A.4.1.3).

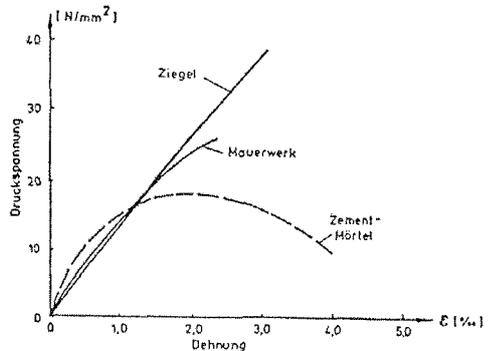


Abb.2.3.3 Spannungs-Dehnungs-Linien für Mörtel, Steine und Mauerwerk im Vergleich nach Hilsdorf, aus [110].

Festigkeitseigenschaften und Versagensverhalten

Poröse und spröde Materialien wie Stein weisen grundsätzlich andere Versagensmechanismen auf als duktile Materialien. Merkmale sind nicht nur das schlagartige Versagen bei geringer Zugdehnung, sondern auch die unter zunehmender Druckbeanspruchung sichtbare Zerstörung des Gefüges durch Rißbildung. Hieraus wiederum

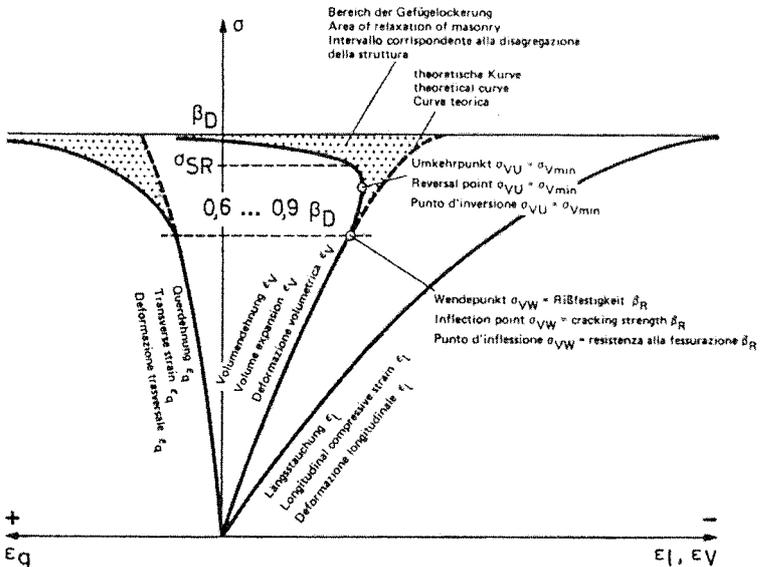


Abb.2.3.4: Querdehnung, Volumendehnung und Längsstauchung bei Mauerwerk im Druckversuch, schematisiert, nach Manns/Schneider [126].

leitet sich die Frage nach einem zulässigen Grad der Schädigung des Materials ab und dessen Relation zur Bruchfestigkeit. Manns und Schneider [126] führten zu diesem Zweck Druckversuche an verschiedenen Mauersteinen und -ziegeln und Probepfeilern durch. Es wurde besonders die Interaktion von Längsdehnung aus Stauchung und Querdehnung und Längsrissbildung betrachtet, wobei die Volumendehnung des Versuchskörpers als Indikator für die innere Schädigung diente. Beim Belastungsvorgang tritt zunächst eine Volumenabnahme (Abb.2.3.4) aufgrund der Verformung auf, die ab einem Wendepunkt, der sich je nach Prüfmaterial bei ca.

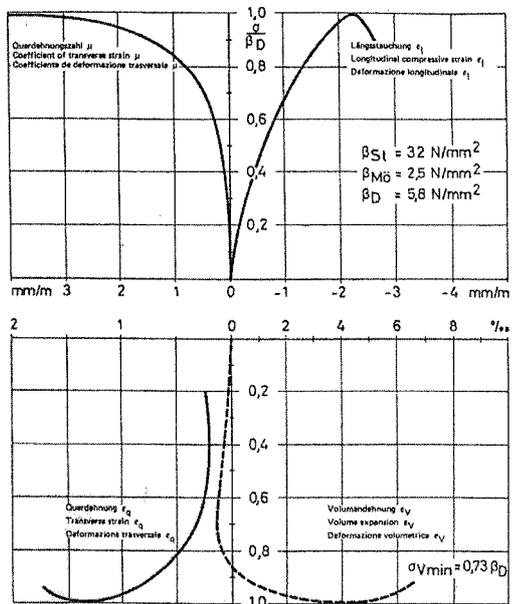


Abb.2.3.5: Querdehnzahl, Längsstauchung und Querdehnung und Volumendehnung bei Mauerwerk aus Hochlochziegel HLZ 20 II nach Manns/Schneider [126].

$0.6 \cdot \beta_{\text{crit}}$ bis $0.9 \cdot \beta_{\text{crit}}$ (β_{crit} : Druckversagensfestigkeit) einstellt, stagniert und nach weiterer Laststeigerung in eine Volumenzunahme umschlägt. Die Druckspannung an diesem Wendepunkt der Volumendehnung wird als Rißfestigkeit β_R bezeichnet¹. Weil über diesem Wert keine Stabilisierung des Rißverhaltens mehr gegeben ist, und die Schädigung des Werkstoffs fortschreitet (Abb.2.3.4: 'Bereich der Gefügelockerung'), schlagen Manns und Schneider vor, diesen Wert als 'Dauerstandfestigkeit' bzw. Grenzfestigkeit für ruhende Lasten anzunehmen.

Wie aus der Kennlinie eines Probekörpers aus Mauerwerk aus HLZ 20 II beispielhaft erkennbar ist, geht die überproportionale Zunahme der Querdehnung einher mit der Volumenvergrößerung (Abb.2.3.5). Das ausgeprägte nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten tritt mit berschreiten der Rißfestigkeit auf und steht offenbar mit der Veränderung des Querschnitts und der Zerstörung der Mikrostruktur des Mauerwerks im Zusammenhang.

¹ Sie wird im Zusammenhang mit dieser Arbeit weiterhin als Rißfestigkeit (β_R) bezeichnet.

Zugfestigkeit

Die Prüfung der Zugfestigkeit von Mauerwerk (β_t) ist aufwendig und es sind demzufolge nur wenig Versuchswerte verfügbar, gerade bezüglich der Festigkeit senkrecht zu den Lagerfugen².

Die Zugfestigkeit der Steine wird in Anlehnung an die Auswertungen von Schubert [154] (Abb.2.3.6) mit $0.035 \beta_{cu}$ angenommen .

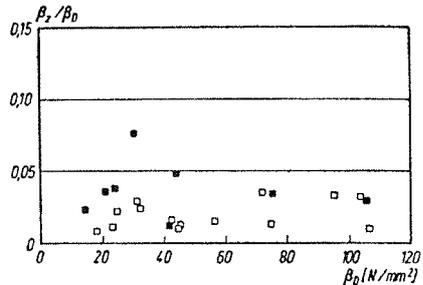


Abb.2.3.6: Verhältnisse β_t / β_{cu} aus Prüfungen an Mauerziegeln nach Schubert [154].

Querdehnverhalten

Die Versuchsergebnisse von Manns/Schneider helfen auch Rückschlüsse zum Querdehnverhalten von Ziegeln zu treffen, denn die in der Literatur angegebenen Querdehnzahlen für Mauerziegel und Mauerwerk unterscheiden sich eklatant. In älteren Büchern zur Festigkeitslehre (z.B. Flügge [96]) finden sich für Steine und Beton niedrige Werte zur Querdehnung von $\nu = 0$ bis 0.17. Pieper [137] hingegen empfiehlt mit Hinweis auf entsprechende Versuche an Mauerwerksscheiben vergleichsweise hohe Werte im Bereich von $\nu = 0.15$ bis 0.35. Aus den volumenbezogenen Untersuchungen von Manns/Schneider ist zu entnehmen, daß im linearen Spannungs-Dehnungsbereich die Querdehnzahl von Mauerwerkziegeln bei $\nu = 0.08$ bis 0.2 liegt. Da sich die Gefügezerstörung im gerissenen Zustand auf das Prüfkörpervolumen und damit auf eine konventionell (mit aufgesetzten Meßstreifen) gemessene Querdehnung auswirkt, muß davon ausgegangen werden, daß in Piepers Werten die zerstörungsbedingten Rißöffnungen eingeschlossen sind.

Eine im Hinblick auf die Untersuchung historischer Mauerwerksbauten interessante Feststellung aus den Untersuchungen von Manns/Schneider ist der Einfluß der Vorschädigung auf den Wendepunkt der Volumendehnung. Dieser liegt nämlich gerade bei Vollziegeln, die verarbeitungsbedingt und infolge Schwindens einen hohen Anteil an Rissen aufweisen, noch niedriger als bei anderen Steinsorten, nämlich nur bei etwa $0.55 \beta_{cu}$. Neuere Versuche an historischen Mauerziegeln verschiedener Epochen und selbst hergestellten Ziegeln von

² Siehe Schubert [154], S.126.

Egermann [90] am SFB 315 der Universität Karlsruhe bestätigen dies qualitativ. Die Kennlinie der Querdehnung in Abhängigkeit von der Längsdehnung eines Ziegels aus der Barockzeit (1759) zeigt ungefähr bei der Hälfte der Bruchfestigkeit einen zunehmend nichtlinearen Zusammenhang (Abb.2.3.10). Die relativ niedrige Druckfestigkeit historischer Ziegel, wie sie Egermann bei seinen Versuchen vorgefunden hatte, wird ebenfalls bestätigt.

Das Zusammenwirken von Steinen und Mörtel unter Druckbelastung

Das prinzipielle Zusammenwirken von Steinen und Mörtel bei Druckbelastung senkrecht zur Lagerfuge beruht im wesentlichen auf dem unterschiedlichen Festigkeitsverhalten. Dies führt im Mauerwerkverband durch Querdehnbehinderung zu einem räumlichen Druckspannungszustand im Mörtel, der hierdurch eine erhebliche Festigkeitserhöhung erfährt (Hilsdorf [110]). Demgegenüber stellt sich ein Zugspannungsfeld im Stein ein, das zur Aufspaltung bzw. Rißbildung führt, was als Ursache für die geringere Bruchfestigkeit des Mauerwerks gegenüber dem Mauerstein anzusehen ist (siehe Abb. 2.3.3).

Füllt der Mörtel die Fugen über die Breite der Steine nicht aus, steigert sich die Beanspruchung aufgrund eines Teilflächenbelastungseffektes auf die relativ geringere Mörtelfläche (Sabha [150]), (Abb.2.3.7), die wiederum Querzugversagen im Stein bewirkt. Dieser Mechanismus betrifft Mauerwerk mit relativ hoher Fugendicke ($t/d > 0.15$) und ausgewaschenen Fugen.

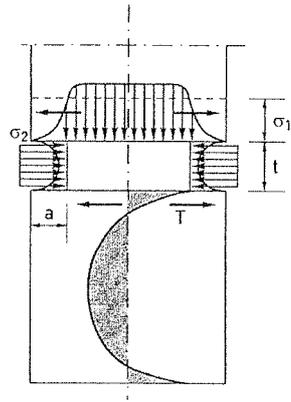


Abb.2.3.7 Spannungsverteilung in der Mauerwerksfuge und im Stein aufgrund von Teilflächenbelastung nach Sabha [150].

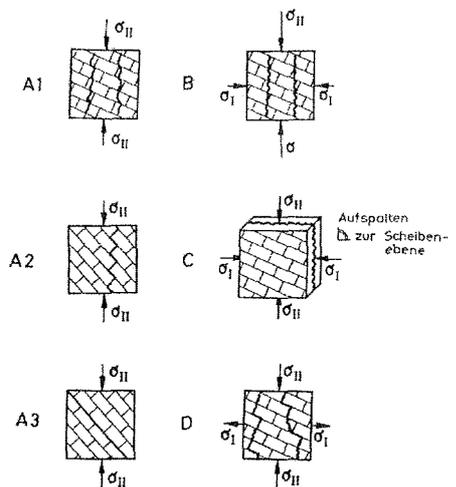


Abb.2.3.8: Bruchformen für zweiachsig beanspruchtes Mauerwerk nach Dialer [86].

Das Zusammenwirken von Steinen und Mörtel unter Schubbelastung

Beim Zusammenwirken von Steinen und Mörtel unter Schubbelastung tritt die Anisotropie des Materials am deutlichsten zutage. Je nach Angriffswinkel der Normalkräfte und Schubkräfte zum Lot der Lagerfuge ergeben sich unterschiedliche Bruchversagensarten (Abb.2.3.8). Die Beanspruchung von Mauerwerk als Scheibe ist von besonders großem Interesse (z.B. Ganz, Ganz-Thürlimann [99], [100]), weil es in dieser Konstruktion um eine häufig angewandte Art der Aussteifung handelt. Die Ergebnisse aus Materialprüfungen werden in Interaktionsdiagrammen dargestellt. Im einfachsten Zweiparametermodell für τ und σ (Abb.2.3.9) geben die polygonalen Einhüllenden die unterschiedlichen Versagensformen unter Beanspruchung wieder.

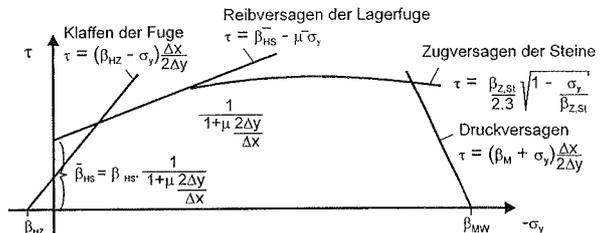


Abb. 2.3.9: Interaktionsdiagramm bzw. Bruchenehüllende mit Versagensarten nach Mann/Müller [123].

Eigenschaften aus der Herstellung und Verarbeitung

Die mechanischen Eigenschaften von Stein und Mörtel werden weiterhin durch Faktoren aus dem Herstellungsprozeß beeinflusst. So weist ein im Strangpreßverfahren hergestellter, moderner Ziegelstein deutlich anisotrope Eigenschaften in bezug auf die Absolutgröße und Richtungscharakteristik der Festigkeit auf und unterscheidet sich so deutlich von handgestrichenen, 'historischen' Ziegelsteinen (bis ca.1880). Diese können nach Egermann/Mayer [90] durchaus als isotrop angesehen werden. Eine Verringerung der Festigkeit von Ziegeln kann entweder durch Schwachbrand hervorgerufen werden, oder durch zu hohe Brenntemperaturen und damit stärkere Schädigung durch Schwindrisse.

2.3.2 Spezielle Eigenschaften von historischem Mauerwerk

Der Begriff 'historisches Mauerwerk' ist im SFB 315³ geprägt worden und charakterisiert die grundsätzlich verschiedenen strukturellen und mechanischen Eigenschaften von altem Mauerwerk, das unter anderen Gesteigungsbedingungen entstanden ist oder sich durch den

³ SFB 315: Sonderforschungsbereich 315, 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', eingerichtet an der Universität Karlsruhe in den Fachbereichen: Architektur, Bauingenieurwesen und Baugeschichte.

Einfluß der Zeit und der Elemente verändert hat, im Gegensatz zu modernem Ingenieurmauerwerk. Im Zusammenhang mit den Untersuchungen dieser Arbeit ist mit historischem Mauerwerk ein Ziegelmauerwerk gemeint von relativ niedriger Festigkeit, bedingt u.a. durch hohen Fugenanteil. Dicke Fugen ($h_{St}/h_F = 5$) sind sowohl für Mauerwerk der Römerzeit oder für byzantinisches Mauerwerk als auch für Ziegelmauerwerk des Mittelalters und der Neuzeit typisch, sofern keine maschinellen Fertigungsverfahren bei der Herstellung der Ziegelsteine angewandt wurden⁴.

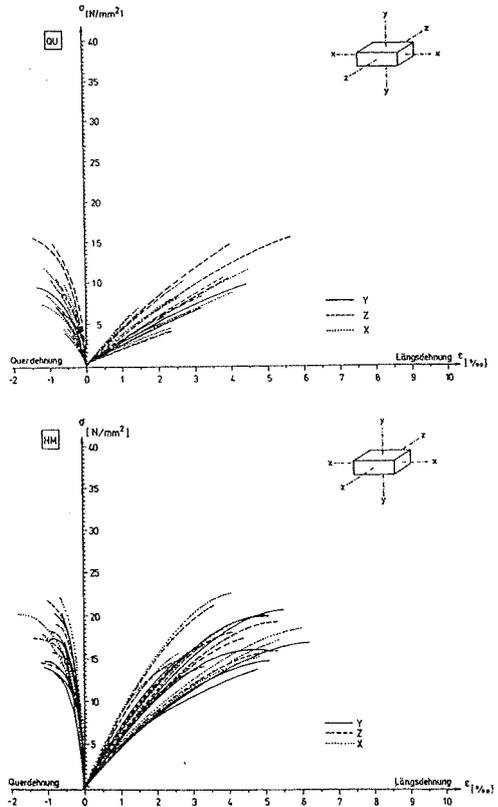


Abb.2.3.10: Spannungs-Dehnungs-Linie eines Barockziegels (oben) und eines selbstgefertigten, handgestrichenen Ziegels (unten) nach Egermann/Mayer [90].

Mechanische Eigenschaften von historischem Mauerwerk

Die Festlegung der charakteristischen Materialeigenschaften von 'historischem Mauerwerk' stützt sich im wesentlichen auf die Untersuchungen von Berger [74], Egermann/Mayer [90], Egermann [91] und Schäfer/Hilsdorf [152,153].

⁴ Der Tunnelofen und die Strangpresse waren Voraussetzung für gleichmäßigere Herstellungsbedingungen und damit geringere Maßtoleranzen infolge von Schwinden. Weil bei der Verarbeitung Toleranzen der Formsteine über die Fugen ausgeglichen wurden, konnte die Fugendicke damit ebenfalls geringer sein.

Ziegel

Egermann und Mayer [90] haben historische Mauerwerksmaterialien verschiedener Gesteigungsformen, d.h. handgestrichen und stranggepreßt, intensiv erforscht und Ziegel aus historischen Bauwerken sowie selbst hergestellte untersucht. Die Proben historischen Materials stammten aus einem Wohngebäude der Barockzeit (1796, Pastorat Quern) und einem Fabrikbau des 19.Jahrhunderts (Brauerei, Pforzheim). Zum Vergleich wurden die selbsthergestellten Ziegel herangezogen, die teils mit einer Strangpresse und teils von Hand hergestellt wurden. Es ergaben sich deutliche Unterschiede, die insbesondere auf den unterschiedlichen Herstellprozessen beruhen.

Für handgestrichene Ziegel sind grundsätzlich niedrigere Festigkeitswerte typisch im Vergleich zu stranggepressten Steinen oder solchen aus moderner Produktion (siehe Tabelle 2.3.1). Die Spannungs-Dehnungs-Linie historischer Ziegel ist je nach Druckfestigkeit des Materials flacher (Abb.2.3.1) oder stärker nichtlinear (Abb.2.3.10).

	Elastizitätsmodul [MN/m ²] (Variations- koeffizient)	Druckfestigkeit [MN/m ²] (Variations- koeffizient)	Poissonzahl ν (Variations- koeffizient)	Rohdichte [MN/m ³]
Barockzeit (1796), handgestrichen, Abb.2.3.10. (QU)	2726* (11,7)	8,1* (32,1)	0,14 (19,5)	1,64
19.Jahrhundert (1884), stranggepresst, Abb.2.3.1.	7367 (31,5)	15,1 (27,7)	0,24 (21,5)	1,63
Selbsthergestellter Ziegel, handgestri- chen, Abb.2.3.10 (HM)	5716* (21,2)	15,6 (22,2)	0,10 (33,5)	1,90
Selbsthergestellter Ziegel, stranggepresst	11867 (18,7)	31,3 (16,3)	0,13 (12,5)	1,82
Mauerziegel moderner Produktion (MZ)	22669 (5,5)	43,0 (18,1)	0,19 (6,4)	1,83

* Zur Bestimmung der Materialwerte von historischem Mauerwerk verwendet.

Tabelle 2.3.1: Materialkennwerte von Mauerziegeln verschiedenen Ursprungs nach Egermann/Mayer [90].

Mörtel

Bei historischen Bauwerken kann davon ausgegangen werden, daß meistens Kalkmörtel verarbeitet worden ist und, wenn überhaupt, nur geringe Anteile an hydraulischen Stoffen

zugesetzt wurden. Die Festlegung der Materialkennwerte von historischem Mörtel orientiert sich an den Ergebnissen von Schäfer/ Hilsdorf aus ihren Untersuchungen an historischen Mörteln [153]. Dort wurden neben verschiedenen Arten von Kalkmörtel auch ein typischer historischer Mörtel (aus der Stadtmauer von Freiburg/Breisgau, ca. 1200) geprüft (Abb.2.3.11). Für diesen Mörtel wird eine Festigkeit von 1,7 bis 1,9 N/mm² angegeben. Der E-Modul wurde als Sekantenmodul zu 1750 N/mm² (bei $\varepsilon = 1\text{‰}$) ermittelt.

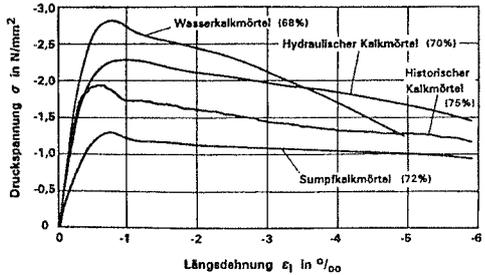


Abb.2.3.11: Spannungs-Dehnungs-Linien verschiedener historischer Kalkmörtel nach Schäfer/ Hilsdorf [153].

Mauerwerk

Der Elastizitätsmodul von Mauerwerk wurde nach der von Hilsdorf angegebenen Beziehung zu 3440 MN/m² ermittelt (siehe Anhang A.4.1.3: Formel A.4.1.1). Als Elastizitätsmodul des Ziegels wurde ein Mittelwert aus den Werten des Barockziegels und des handgestrichenen Ziegels nach Egermann/Mayer zugrundegelegt (in Tabelle 2.3.1 mit * markiert), für den Mörtel wurde der Sekantenmodul nach Schäfer/Hilsdorf eingesetzt (Abb.2.3.11). Um der relativ niedrigen Steifigkeit des von Egermann untersuchten Ziegelmaterials mehr Gewicht zu verleihen, wurde der Nennwert von E auf 3000 MN/m² ermäßigt. Diese Größe steht im Einklang mit Werten aus vergleichbaren Untersuchungen von Tragwerken aus Ziegelmauerwerk (Barthel [70] und Nascé in Rosso [253]).

Die Druckfestigkeit von historischem Mauerwerk wurde nach einer von Schubert angegebenen Beziehung [154] errechnet. Die Zugfestigkeit wurde mit 35 % der Zugfestigkeit des Ziegelsteins ($\beta_t = 0.35 \beta_{t, \text{st}}$) veranschlagt, woraus sich 0.1 N/mm² als typischer Wert für β_t ergibt. Als Nennwert für die FE-Simulationen wurde der halbe Wert angesetzt.

[MN/m ²]	Elastizitätsmodul	Bruchfestigkeiten	Zugfestigkeit	Rohdichte
Ziegel	4220	8,1	0,28	-
Mörtel	1750	1,8	-	-
Mauerwerk	3440 (nach Hilsdorf [110])	3,69 (nach Schubert [154])	0,10	-
Nennwert	3000	3,7	0,05	0,02 MN/m ³

Tabelle 2.3.2: Materialkennwerte von historischem Mauerwerk.

3.0 Historische und traditionelle Nachweis-, Berechnungs- und Formgebungsmethoden für Gewölbe

3.1 Geschichtlicher Abriß

Die meisten Methoden zur geometrischen Beschreibung und statsch-quantitativen Erfassung von Gewölben gehen auf Mathematiker und Physiker zurück. Sie entstanden häufig als Nebenprodukte aus übergeordneten analytischen Betrachtungen, Lösungen von Problemen der Differentialrechnung und von Optimierungsaufgaben oder als Ergebnisse aus der Suche nach Kurven mit bestimmten geometrischen oder physikalischen Eigenschaften. Wegen der Betrachtung des Gewölbes als Ganzes sind sie als 'synthetische Methoden' zu bezeichnen.

Demgegenüber versuchten neben Physikern auch die Ingenieure selbst, Methoden zur Lösung ihrer speziellen, die Statik betreffenden Probleme wie Auflagerversagen oder Ausbildung von Bruchfugen, zu finden, wobei es sich zumeist um diskretisierende bzw. analysierende Vorgehensweisen handelt. Die Entwicklung der statischen Methoden im Gewölbbau teilt sich in diesem Sinn in ihren Anfängen, im späten 17. Jahrhundert und frühen 18. Jahrhundert, bevor sie im 19. Jahrhundert wieder zusammengeführt wird.

3.1.1 Synthetische Methoden zur Formfindung und Ermittlung von Schnittkräften

Lange bevor sich die Baumeister für die Lastabtragung und die statisch günstigste Form in bezug auf die Anwendung in ihren Entwürfen interessierten, hatten sich Mathematiker und Physiker schon weitreichend mit dieser Fragestellung auseinandergesetzt. Die Experimente des niederländischen Physikers Simon Stevin (1548-1620) mit einem mit Gewichten beschwerten Seil sind die ältesten bekannten Versuche (1585) zur Erforschung des Gleichgewichts der Kräfte und ihrer Zerlegung (Abb.3.3.1)¹. Die Form des in dieser Weise gleichmäßig über die Länge belasteten Seils war im 16. Jahrhundert ebenfalls bekannt und

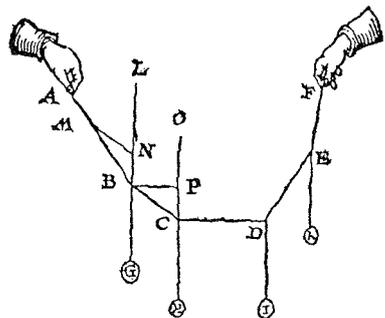


Abb.3.1.1: Hängemodell nach Simon Stevin, 1585, aus Graefe [209].

¹ Graefe [209], S.52.

wurde als Kettenlinie bezeichnet. Mathematiker wie Galileo Galilei (1565-1642) hatten deren Ähnlichkeit mit der Parabel unter bestimmten Bedingungen erkannt². Die mathematische Beschreibung der Kettenlinie leiteten 1691 die berühmten Mathematiker Huygens, Leibnitz und Johann Bernoulli in einem Gelehrtenwettstreit her³. Die physikalische Eigenschaft der Kettenlinie als Stützlinie eines gleichmäßig dicken Bogens entdeckte Robert Hooke (1635-1703)⁴. Er beschrieb diese 1675 in einem Anagramm in lateinischer Sprache⁵, das erst 1705 aufgelöst wurde und übersetzt lautet: 'Wie das biegsame Band (= Seil) hängt, so wird dessen starre Umkehrung (= Bogen) stehen.' Sein Landsmann David Gregory (1661-1708) kam 1697 zur selben Schlußfolgerung. Jakob Bernoulli (1654-1705) ermittelte die Kettenliniengeometrie 1704 mit Hilfe einer Formulierung der virtuellen Arbeit⁶ als Lösung einer Aufgabe, die Form eines gemauerten Bogens zu ermitteln, der ohne Mörtel standsicher ist (Abb.3.1.2).

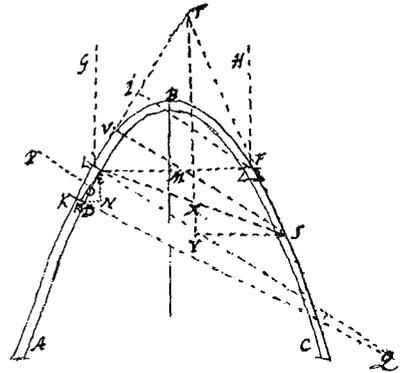


Abb.3.1.2: Jakob Bernoullis Skizze zur Bestimmung eines Bogens, der - laut Aufgabenstellung - ohne Mörtel standsicher ist (Kettenlinie), 1704, aus Benvenuto [3].

Nach der Theorie der Stützlinie des Bogens und der Herleitung der Kettenlinie formulierte 1734 der französische Mathematiker Pierre Bouguer (1698-1758) die erste Theorie zur Bestimmung der inneren Kräfte einer Kuppel bzw. zur Ermittlung einer idealen Stützfläche für Kuppeln. Bouguers Formulierung für das an sich räumliche Problem basiert lediglich auf einer Variablen und beinhaltet stattdessen die über dem Grundriß von der Rotationsachse ausgehende, linear veränderliche Belastungsfunktion der Form :

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = k \cdot x \quad (3.1.1)$$

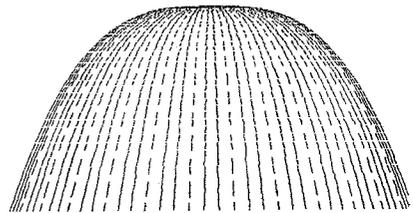


Abb.3.1.3: Kuppelform nach Bouguers Theorie mit Hauptspannungen aus Eigengewicht nach einer Finite-Element-Berechnung. Die Komponente in Ringrichtung ist null.

2 Loria [119], S.203.

3 ebenda [119], S.203.

4 Cowan [7], S.179.

5 'Ut pendet continuum flexile, sic stabit inversum rigidum', aus Robinson [250].

6 Benvenuto [3], S.329.

Löst man diese Differentialgleichung unter Voraussetzung einer konstanten Last, erhält man die Meridianform einer Kuppel, deren Lastabtragung ebenfalls nur eindimensional in Meridianrichtung erfolgt (Abb.3.1.3).

Giovanni Poleni (1685-1761), Mathematiker und Lehrer der Astronomie, Physik und Mathematik an der Universität von Padua soll Bouguers Überlegungen nicht gekannt haben⁷. Dennoch verband er deren gedankliche Essenz mit jener von Hookes und Gregorys Entdeckung. In seinem Gutachten von 1748 zur Ursache der Risse in der Peterskuppel von Rom [140] führte er mit Hilfe eines Hängemodells, das die Gewichtsverteilung eines Kuppelsektors abbildete, den Nachweis der Standsicherheit des Gewölbes (Abb.3.1.4).

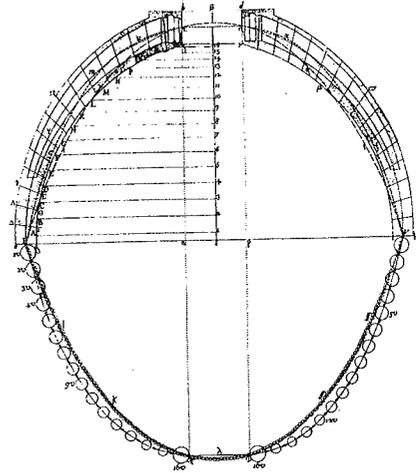


Abb.3.1.4: Polenis Experiment zum Nachweis der Standsicherheit der Kuppel des Petersdoms von 1748, aus Poleni [140].

Ohne baupraktische Umsetzung blieb die Entdeckung der Gleichung eines Bogens mit konstanten inneren Beanspruchungen, die sogenannte 'Kettenlinie gleichen Widerstandes'. Der französische Mönch Bossut errechnete 1778 hierzu in Erweiterung zu Bouguers Theorie die Kuppelform, bei der sich auch die Querschnitte in Abhängigkeit von der Lage ändern (Abb. 3.1.5).

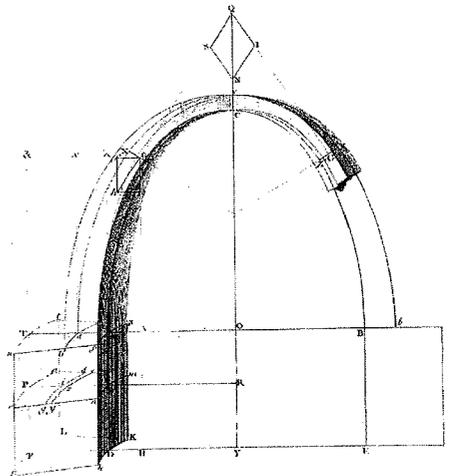


Abb.3.1.5: Bossut's errechnete Kuppelform einer meridional abtragenden Kuppel mit gleichen Spannungen in jedem Schnitt, aus Benvenuto [3].

⁷ ebenda [3], S.360.

linie und der Größe der wirkenden Druckkraft zur Bestimmung der inneren Spannungszustände. Hieraus erwuchs den Ingenieuren des 19. Jahrhunderts eine zentrale Aufgabe, nämlich „die Suche nach der wahren Stützlinie in Gewölben“⁸. Man versuchte mit Hilfe der verschiedensten Prinzipien, ihre tatsächliche Lage zu ermitteln, etwa durch das Prinzip des sogenannten 'kleinsten Widerstandes' (minimierte Spannungen im Querschnitt (Moseley)), oder über die 'kleinsten Beanspruchungen', die Culmann (1821-1881) in seiner graphischen Statik [83] folgendermaßen beschreibt: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie des Gewölbes, welche sich der Achse des Gewölbes am meisten nähert, so daß der Druck in den am stärksten komprimierten Fugenkanten ein Minimum ist“⁹.

Poncelet (1788-1867) erkannte 1852, daß die Lage der Stützlinie nur durch die Berücksichtigung der Elastizität des Gewölbematerials ermittelt werden kann¹⁰. Der deutsche Wasserbauer G.Hagen (1797-1884) postulierte 1862 allgemein, was mit der Lösung der Kettenlinie bereits impliziert war, nämlich, daß Bogenachse und Stützlinie zusammenfallen sollen. Er gab hierzu in seinem Buch 'Über Form und Stärke gewölbter Bögen und Kuppeln' ein iteratives Schema zur Errechnung an¹¹.

E. Winkler (1835-1888) setzte Poncelets Vorschlag als erster um, berücksichtigte die Elastizität des Materials in der statisch unbestimmten Rechnung, vernachlässigte die Längsverformungen und fand mit Hilfe dieser Theorie des elastischen Bogens 1879, daß der Abstand der Stützlinie von der Schwerachse im Mittel über die Bogenachse ein Minimum sein muß (Abb.3.1.6) [170].

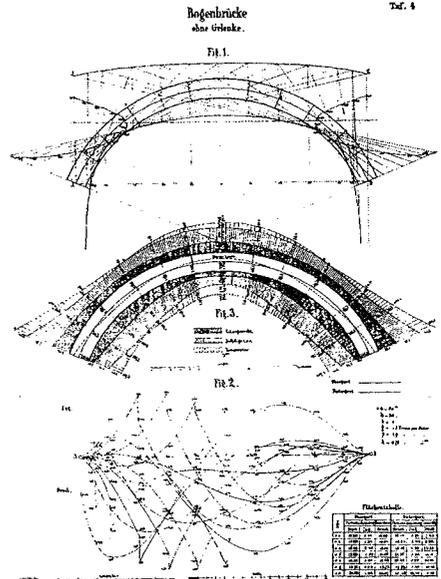


Abb.3.1.6: Winklers graphische Berechnungen zur Stützlinie an einem eingespannten Bogen, aus Winkler [170].

8 Siehe auch Aufsatz unter diesem Titel von K.-E. Kurrer [32].

9 Culmann, 'Die graphische Statik', 2. Auflage 1870, S.71 [83].

10 Hertwig [25], S. 84.

11 Hagen [103], S.42 ff.

3.1.2 Diskretisierende statische Methoden zur Errechnung von Schnittkräften und Auflagerwirkungen

Wichtiger noch als Fragen der Formgebung war für die Ingenieure diejenige nach der Belastung auf die Widerlager oder die Gewölbekonstruktion. Schon Leonardo hatte hierfür eine Meßeinrichtung erdacht und skizziert (Abb.3.1.7). Aus dem 17. Jahrhundert stammte die sogenannte Blondel'sche Regel¹², die weit verbreitet war und durch Einteilung eines Bogens in drei Teile und Sekantenbildung eine erforderliche Widerlagerbreite ergab (Abb.3.1.8). Auf dieser empirischen Grundlage entwickelte Philippe de la Hire (1640-1718) 1712 eine Methode, die den Anfang der sogenannten Bruchtheorien (Arten: Keiltheorien, Kantungstheorien¹³) markiert. Er nahm die Lage der Bruchfugen empirisch bei 45° an und errechnete mittels Kräfteparallelogrammen an diesen Stellen die Radialkräfte aus der Keilwirkung ohne Berücksichtigung der Reibung (Abb.3.1.9). De la Hires Gleittheorie wurde von mehreren Nachfolgern aufgenommen und beherrschte, obwohl ihre Richtigkeit verschiedentlich angezweifelt wurde, die Gewölbekonstruktion des 18. Jahrhunderts¹⁴. Eine Weiterentwicklung der Bruchtheorien erarbeitete C.A.Couplet in einem Memoire an die königliche Akademie der Wissenschaften im Jahr 1730. Nachdem er in einer Veröffentlichung aus dem Jahr zuvor noch von reibungslosen Fugen ausging, nahm er jetzt die Reibung wie die Festigkeit des Materials als unendlich groß an, und schuf somit die Grundlagen zu einer Theorie, in der sich die finiten Gewölbeteile über Kanten gegeneinander verdrehen (Kantungstheorie). Die Berührstellen markieren die Lage der Stützlinie, so daß Aussagen über die Standfestigkeit eines

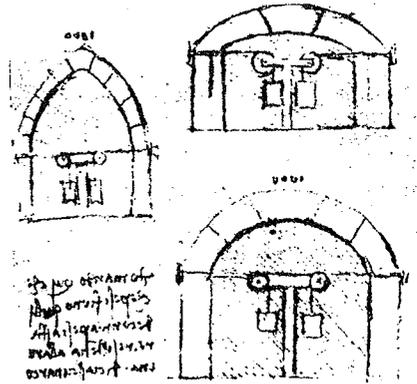


Abb.3.1.7: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Kämpferkräfte nach Leonardo, aus Heinrich [23].

gewölbes über Kanten gegeneinander verdrehen (Kantungstheorie). Die Berührstellen markieren die Lage der Stützlinie, so daß Aussagen über die Standfestigkeit eines

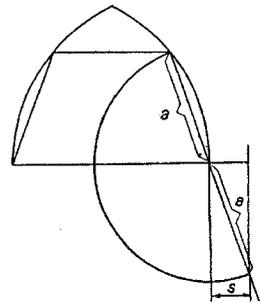


Abb.3.1.8: Skizze zur Blondel'schen Regel, aus Straub [54].

12 Nach dem französischen Architekten Blondel (1618-1686) [54].

13 Winklers Definitionen: erstere bedeuten die Vernachlässigung der Reibung, letztere schließen die Reibung ein, aus Kurrer [30].

14 B.F.Belidor der die 'Keiltheorie' von de la Hire modifiziert hatte, bekannte, "daß sich alle die Gewölbe-Steine (...) unmöglich für sich selbst erhalten könnten, wenn sie nicht durch Cement und Mörtel mit einander verbunden wären".Aus Kurrer [33], S.110.

Gewölbes gemacht werden können, bzw. die Querschnittsdimensionen festgelegt werden können (Abb.3.1.10).

C.A.Coulomb (1736-1806) formulierte schließlich nicht nur das nach ihm benannte Reibungsgesetz, er brachte es 1776 auch in die Gewölbestatik mit ein. Hierdurch war die zweite wichtige Voraussetzung für eine finite Gewölbetheorie gegeben. Darüberhinaus entwickelte er eine Bruchtheorie, in der die Lage der Fugen im Gegensatz zu den zahlreichen Vorgängertheorien mit Hilfe eines Approximationsverfahren zu ermitteln sind, und vier Grenzzustände zur Bestimmung der Grenzlagen der Stützlinie untersucht werden (Abb.3.1.11).

Johann Ritter von Gerstner (1756-1832), neben D.J. Eytelwein (1764-1848), einer der führenden deutschsprachigen Technikwissenschaftler, führte das von Varignon (1654-1722) aus der projektiven Geometrie abgeleitete, 'finite' Seilpolygon zur Ermittlung von Stützlinien durch Grenzübergang in die infinitesimale Form über¹⁵ und stellte so den Zusammenhang zwischen den finiten und infinitesimalen Methoden her. Das Seilpolygon wurde so fester Bestandteil der Gewölbestatik im deutschsprachigen Raum. C.Culmann (1821-1881) basierte wesentliche Teile seiner 'graphischen Statik' auf diesem Kalkül, dessen praktischen Wert er gerade für den Ingenieur als besonders hoch ansah¹⁶.

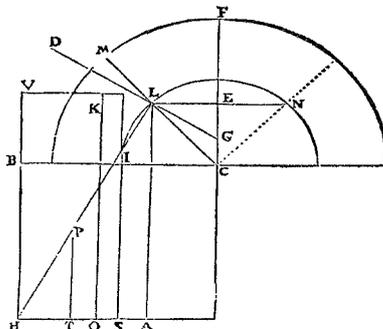


Abb.3.1.9: Bruchfigur und Schnittkräfte in einem Bogen nach de la Hire (1712), aus Straub [54].

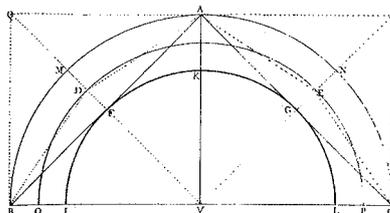


Abb.3.1.10: Regel zur Determinierung der Sicherheit eines Bogens nach Couplet (1730), aus Benvenuto [3].

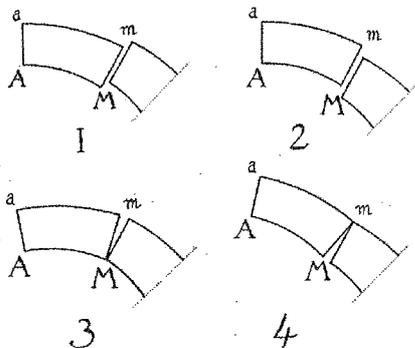


Abb.3.1.11: Theoretische Grenzzustände in einem Bogen nach Coulomb, aus Benvenuto [3].

¹⁵Kurrer [32] S.29.

¹⁶ Culmann soll das Seilpolygon als 'Integriermaschine' bezeichnet haben, mit der schematisch für Ingenieurbelange ausreichend genaue Ergebnisse erzielt werden können; nach: L. Tegtmaier 'Culmann's bleibende Leistungen', Zürich 1882.

3.2 Eigenschaften traditioneller Nachweis- und Berechnungsmethoden

3.2.1 Hängemodelle

Mit der Entdeckung der statischen Bedeutung einer hängenden Kette durch R.Hooke und D.Gregory war die Idee des Hängemodells (Kap.10.1) bereits vorgegeben. Die Anwendung der Kette als Hilfsmittel des statischen Nachweises von Gewölben wurde jedoch, abgesehen von Polenis berühmtem Gutachten zur Standsicherheit der Kuppel des Petersdoms [140] (1748) (Abb.3.1.4) und Beispielen von Ungewitter/Mohrmann (1890) [163], nie eingehender erforscht oder aufgearbeitet.

Der Architekt H.Hübsch (1795-1863) beschrieb 1838 eine Methode zum Nachweis der Standfestigkeit von Gewölben bzw. zu deren Gestaltung, bei der eine in den Gewölbequerschnitt einzubeschreibende Kettenlinie die Sicherheit des Gewölbes bezeugt (Abb.3.2.1). Er vernachlässigte hierbei bewußt den Kern des Hängemodellgedankens, nämlich die Abbildung der Hänge-/Stützzlinie zur Lastkonfiguration des untersuchten

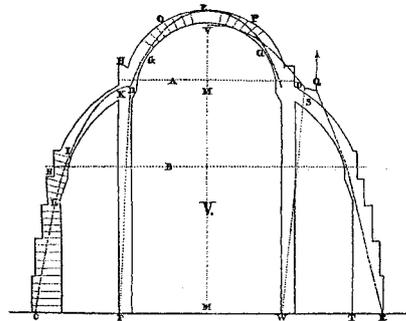


Abb.3.2.1: Nachweis bzw. Formfindung mit Hilfe einer Kettenlinie als Hängemodell nach Hübsch, aus Warth [166].

Gewölbes, weil er die genaue Ermittlung der zur Gewölbegeometrie zugehörigen Stützzlinie, etwa mit Hilfe der Mathematik, für zu aufwendig erachtete¹⁷. Dennoch läßt sich mit Hübschs Verfahren die Standfestigkeit zumindest von mäßig schlanken Gewölben zeigen.

Hängemodelle dienten oft als eine Art Geheimmethode der Formfindung, über deren Anwendung nur Andeutungen gemacht wurden. So erfährt man von ihrem Einsatz in Verbindung mit der Errichtung einer Kuppel über dem Gießhaus der Henschel-Werke in Kassel (1837) nur durch eine Bemerkung von Hagen (1797-1884) in seinem Werk 'Über Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln' (1874) [103]. Über das genaue Vorgehen wird jedoch nichts berichtet¹⁸. Hierhingegen wurde von Theoretikern wie Schwedler (1823-1894) das mit Gewichten beschwerte, hängende Seil auch als Experimentierwerkzeug zur Überprüfung statischer Sachverhalte und zu deren Veranschaulichung verwendet¹⁹.

¹⁷Graefe [18], S.8.

¹⁸Ein Rekonstruktionsversuch wurde von Tomlow durchgeführt: 'Die Kuppel des Gießhauses der Firma Henschel in Kassel' (1837)[61].

¹⁹F.W.Swedler versuchte mit Hilfe der Analogie des hängenden Seils, seine Überlegungen zur Balkentheorie zu veranschaulichen (Theorie der Brückenbalken, Zeitschrift für Bauwesen, Jhg.1851).

3.2.1.1 Ebene Modelle

Soll die Stützlinie eines Gewölbes mit Hilfe eines Hängemodells ermittelt werden, ist die Lastkonfigurationen des betreffenden Gewölbes entlang des Seils zu ermitteln, und die entsprechenden Gewichtsböcke im Schwerpunkt mit der Schnur zu verbinden. Je nachdem, ob ein Modell für einen ganzen Bogen hergestellt wird oder die Symmetrie ausnutzend nur die Hälfte des Gewölbes, wird ein Ankerpunkt der Kette entweder am Kämpferpunkt oder im Gewölbescheitel in der Schwerlinie des Gewölbes angeordnet. Der andere Punkt muß so gewählt werden, daß die Stützlinie möglichst überall dem zu untersuchenden Gewölbequerschnitt einbeschrieben ist. Bei Ausnutzung der Symmetrie ist als weitere Bedingung eine horizontale Scheiteltangente einzupendeln (Abb.3.2.3). Wie bei den Stützlinienmethoden ist auch bei Hängemodellen die genaue Lage der Stützlinie an den Auflagern bzw. am Scheitel nicht bekannt. Aus diesem Grund kann die Analyse der Trageigenschaften nur ungefähr und qualitativ erfolgen. Ist die Kette dem Extrados eines Bogens entgegengeneigt, ist dies ein Indikator für Zugspannungen bzw. für Rißbildung im Intrados und umgekehrt (Abb.3.1.4, Abb.3.2.1).

Wird das Modell zur Formfindung benutzt, geht man einfachsten vom Hängemodell mit seiner Lastverteilung und der eingestellten Geometrie aus, welche die gesuchte Gleichgewichtsform repräsentiert. Die vorgegebene Gewichtsverteilung läßt sich danach über die Gewölbedecke konstruieren. Wenn eine bestimmte Lastkonfiguration gegeben ist, kann die zugehörige Gleichgewichtsform wegen der Wechselwirkung von Last und Form im Modell nur näherungsweise, durch iteratives Vorgehen und Justieren der Gewichtsverteilung ermittelt werden.

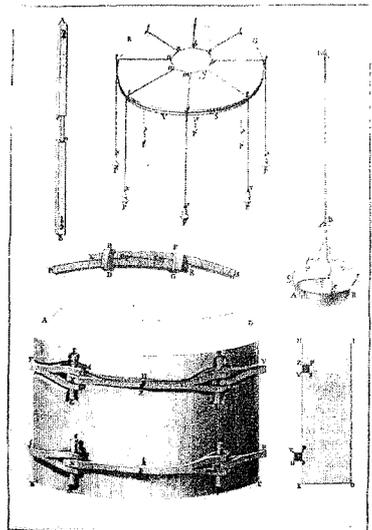


Abb.3.2.2: *Polenis Versuchsaufbau zur Darstellung der Wirkung von Ringkräften, sowie Ankerdetails, aus Poleni [140].*

3.2.1.2 Räumliche Modelle

Den Vorschlag, räumliche Hängemodelle zu bauen, machte Ungewitter [163] 1890, um die Schwierigkeiten der graphischen oder analytischen Ermittlung von Stützflächen zu

umgehen²⁰. Der Katalane A.Gaudi (1852-1926) soll schließlich als erster räumliche Hängemodelle gebaut haben²¹. Die Ideen zum Bau räumlicher Hängemodelle gehen jedoch in jedem Fall weiter zurück und wurden prinzipiell schon von Poleni entwickelt. Er bildete in seinem Modell nicht nur die Lastkonfiguration richtig ab, er wußte auch die Hängelinie qualitativ richtig zu interpretieren. In seinem Fall lag die Kette in allen Schnitten innerhalb des Gewölbequerschnittes, nur im Sockelbereich neigte sie sich stärker gegen den Intrados des Gewölbes. Poleni leitete hieraus die Notwendigkeit ab, in diesem Bereich Ringzuganker einzubauen (Abb.3.2.2). Während die relative Lage der Hängelinie zur Schwerachse beim Bogen die Momentenbeanspruchung nach Vorzeichen und Intensität (durch die Exzentrizität) wiedergibt, beschreibt ein eindimensionales Hängemodell wie das von Poleni (Abb.3.1.4), das die Stützlínie einer Kuppel ohne Lastabtragung in Ringrichtung repräsentiert, in Relation zur Kuppelachse nach Art und Intensität die in Ringrichtung wirkenden Kräfte.

Zur Abbildung im Hängemodell gibt es hierzu zwei Möglichkeiten: Man bringt quer zu einem ebenen Modell (Abb.3.2.3) an den Knoten weitere Ketten an, welche die Kraftwirkung orthogonal dazu, also in Ringrichtung wiedergeben. Diese müssen die betreffenden Knoten in die Schwerlinie des Gewölbes ziehen und eine horizontale Tangente am Knotenpunkt haben. Hieraus kann dann mit dem bekannten Gewicht und dem Neigungswinkel am Aufhängepunkt die wirkende Horizontalkomponente errechnet werden und entsprechend dem jeweiligen Radius in Ringkräfte umgerechnet werden. Je nach Seite, an der die Ringketten angehängt sind, geben sie Druck- oder Zugkräfte an. Die Meridiankräfte ergeben sich über das Aufaddieren der Gewichte.

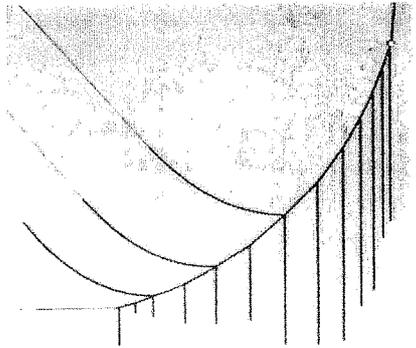


Abb.3.2.3: Ebenes Hängemodell mit zusätzlichen Ketten zur Ermittlung von Ringkräften nach Tomlow [61].

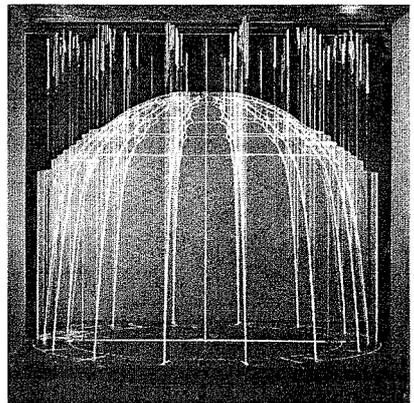


Abb.3.2.4: Räumliches Hängemodell des Pantheon/Rom zur Ermittlung der Schnittkräfte unter Eigengewicht nach Mack [122].

²⁰Siehe Ungewitter/Mohrmann [163] S.45/46.

²¹Siehe Tomlow [59], S.20.

Baut man ein räumliches Hängemodell zur Analyse der inneren Kräfte (Abb.3.2.4), muß derselben Forderung, nämlich, daß die meridional verlaufenden Fäden mit der Kuppelschwerlinie zusammenfallen, genügt werden. Da die Lastabtragung in einer Kuppel zweidimensional ist, also Meridian- und Ringkräfte sich wechselwirkend beeinflussen, gibt das Hängemodell nur dann die richtigen Kraftverhältnisse an, wenn die beschriebene Fläche von der Schwerfläche der untersuchten Kuppel möglichst wenig abweicht (siehe Begriff 'Stützfläche', Kap 2.1.5). Solange die Fäden in Ringrichtung unter Spannung stehen, geben sie Druckbeanspruchungen wieder. Zugkräfte können mit dieser Methode praktisch nicht ermittelt werden. Die Geometrie einer Kuppel nach Bouguer's Theorie ist deshalb die darstellbare Grenzgeometrie (Abb.3.1.3, Abb.3.2.8).

Weil Symmetrieeigenschaften bei räumlichen Hängemodellen kaum ausgenutzt werden können, ist der Aufwand an Material und Justierarbeit sehr groß, so daß sie als Analysewerkzeuge eher unzweckmäßig sind. Lediglich für freie Formen, wie sie Gaudi mit Hilfe netzartiger Hängemodelle (Abb.3.2.5) entwickelte, mögen sie geeignet sein. Er gestaltete das jeweilige Modell, indem er entsprechende Gewichte anbrachte, und leitete hieraus die Geometrie her. Die Querschnitte paßte er allerdings nicht an die Massenvorgaben der Gewichte an²², so daß Modell und Bauwerk in bezug auf die Massenverteilung nicht wirklich konsistent waren. Die Formfindung mit Hängeformen hat sich in diesem Jahrhundert noch bei Gaudis Nachfolgern²³erhalten.

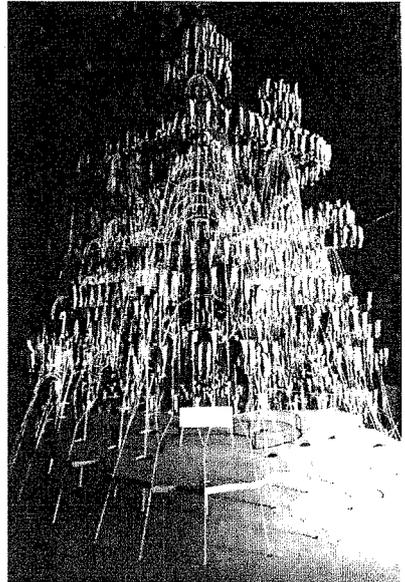


Abb. 3.2.5: Rekonstruktion von Gaudis Hängemodell zur Kirche der Colonia Güell, nach Tomlow [59].

²²Tomlow *op.cit.* [59], S.22.

²³Z.B. Jujol, siehe Tomlow [60].

3.2.2 Stützlinienmethoden

3.2.2.1 Analytische Verfahren zur Ermittlung der Stützlinie

Die Differentialgleichung der Seillinie und Kettenlinie

Zur analytischen Herleitung von Stützlinien können die bekannten Differentialgleichungen des hängenden Seils und der Kette mit umgekehrtem Vorzeichen verwendet werden. Es wird vorausgesetzt, daß der Horizontalzug konstant ist ($H = \text{const.}$).

Die Gleichung der Seillinie, deren Last $q(x)$ auf die Abszissenachse projiziert ist, lautet:

$$y'' = -q(x) / H \quad (3.2.1)$$

Die Gleichung der Kettenlinie, deren Last $q^*(x)$ bzw. $q(s)$ auf die Wegkoordinate der ebenen Kurve (s) bezogen ist, lautet:

$$y'' = -q^*(x) / H \cdot \sqrt{1 + y'^2} \quad (3.2.2)$$

Sind die Lastfunktionen $q(x)$ bzw. $q^*(x)$ konstant, dann erhält man durch Integration die bekannten Funktionen der Seillinie:

$$y = -\frac{q}{H} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.2.3)$$

und der Kettenlinie:

$$y = \frac{H}{q^*} \cdot \cosh\left[\frac{q^*}{H}(x - C_1)\right] + C_2 \quad (3.2.4)$$

Eigenschaften von Seillinie und Kettenlinie

Bezieht man $q^*(x) = q(s) = q_0 = \text{const.}$ auf die Abszisse, so erhält man die in x definierte Lastfunktion der Kettenlinie $\bar{q}(x) = q_0 \cdot \cosh(q_0 \cdot x/H)$ (Abb.3.2.6), bei der sich die Größe der Last zu den Auflagern hin erhöht. Umgekehrt, wenn man

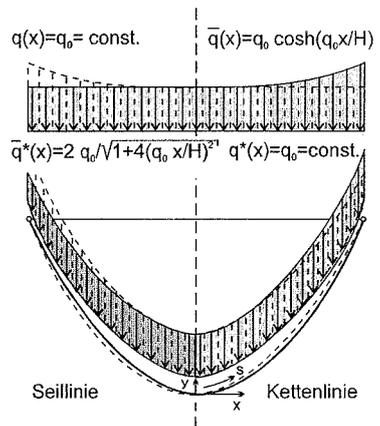


Abb.3.2.6: Lastkonfigurationen zur Errechnung der Kettenlinie und der Seillinie über x und über s .

die Gleichstreckenlast $q(x) = q_0 = \text{const.}$ auf die Wegkoordinate s bezieht, ergibt sich eine zur Bogenmitte hin konzentrierte Lastverteilung: $q(x) = 2 \cdot q_0 / \sqrt{1 + 4 \cdot (q_0 \cdot x / H)^2}$. Hierbei wird anschaulich, daß die Seillinie eine Geometrie ist, die aus einer nicht auf die Wegkoordinate bezogenen Lastkonfiguration entstammt, und nicht Stützlinie sein kann. Äußerlich ist sie gegenüber der Kettenlinie im Scheitelbereich stärker gekrümmt. Dieser Unterschied gilt qualitativ auch für andere Lastverteilungen, etwa der des Kreisbogens (3.2.7.A), der Kuppelkettenlinie bzw. -seillinie nach Bouguer (Kap.3.1.1) (Abb.3.2.7.B) und der zur Halbkugelhauptkuppel zugehörigen Seil- und Kettenlinie (Abb.3.2.7.C)²⁴.

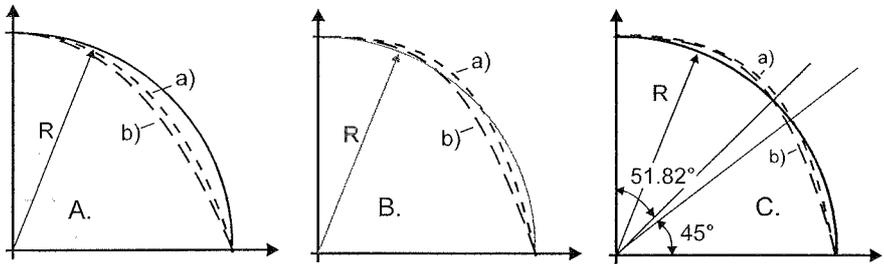


Abb.3.2.7: Kettenlinie und Seillinie zu verschiedenen Lastkonfigurationen: A. Halbkreisbogen: a) Kettenlinie b) Seillinie, B. Kuppel gleichmäßiger Dicke nach Bouguer: a) Kettenlinienkuppel, b) Seillinienkuppel, C. Hemisphärenkuppel a) Kettenlinie und b) Seillinie.

Die Kuppelkettenlinien bzw. -seilnien beschreiben (3.2.7.B) die Stützlinie eines Kuppelsegmentes und bilden durch Rotation um die Vertikalachse die Stützfläche einer Kuppel, deren Geometrie ein Tragverhalten unter Gleichlast induziert, das der Zusatzbedingung $n_9 = 0$ genügt. Es treten also keine Ringkräfte auf. Typisch ist die im Scheitel abgeflachte Form (Abb.3.2.8).

Für die Hemisphärenkuppel bzw. für das Segment einer Hemisphärenkuppel sind die Positionen der Kreuzungspunkte der zugehörigen Seillinie mit der Schwerlinie bei 45° und der zugehörigen Kettenlinie mit der Schwerlinie bei $51,8^\circ$ charakteristisch (Abb.3.2.7.C). Sie entsprechen den Orten des Vorzeichenwechsels der Ringkräfte derselben Struktur aus einer Schalenrechnung nach Membrantheorie mit projizierter Last (Schneelast) bzw. mit der Last des Eigengewichtes. Die Übereinstimmung der Orte der Kreuzungspunkte ist nur im Fall der Halbkugelhauptkuppel mit 90° Öffnungswinkel ge-

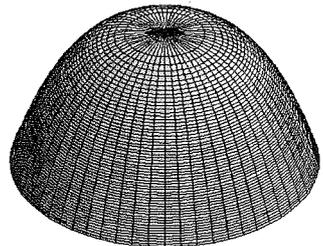


Abb. 3.2.8: Form einer Kettenlinienkuppel.

²⁴Die Herleitung ist im Anhang A.3.2.2.1 beschrieben.

geben, weil die beiden aufintegrierten Teilflächen (Momentenflächen) zwischen Mittelachse und Stützlinie in diesem Fall gleich groß sind²⁵. Andere Meridianöffnungswinkel ergeben andere Stützlinien.

3.2.2.2 Graphostatische Verfahren zur Ermittlung der Stützlinie

Die klassische Methode zur Ermittlung von Stützlinien ist noch heute das graphische Seilpolygonverfahren²⁶. Diese Methode hat sich sicherlich so lange behaupten können wegen der Aufwendigkeit alternativer Rechenmethoden (analytische Stützlinien-/Seiltheorie, Scheibentheorie) und den oft komplizierten Tragwerksgeometrien der zu untersuchenden Objekte. Das Hauptproblem bei der Lösung von Differentialgleichungen, die Integration, die häufig nur numerisch bzw. durch Reihenzerlegung zu bewältigen ist und im Computerzeitalter freilich kein großes Problem mehr darstellt, bedeutete für die damaligen Anwender einige Tage Arbeit, wenn ein einigermaßen genaues Ergebnis erzielt werden sollte²⁷. Gerade in diesem Zusammenhang war und ist das Seilpolygonverfahren ein einfach und schematisch zu handhabendes Werkzeug, mit dem mit ausreichender Genauigkeit Schnittkräfte und Stützlinien bestimmt werden können.

Wesen und Eigenschaften des Seilpolygonverfahrens

Die diskretisierten Lasten des betrachteten Tragwerks werden im sogenannten Kräfteplan gereiht (Abb.3.2.9) und mit einem zunächst beliebig gewählten Pol durch die sogenannten Polstrahlen verbunden. Diese werden entsprechend ihrer Verbindungspunkte im Seileck entlang zur Ordinate parallelen Linien

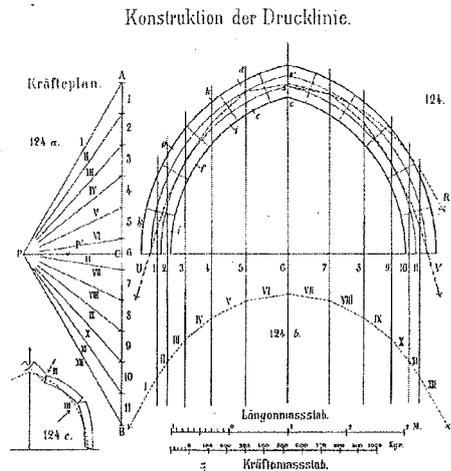


Abb.3.2.9 Stützlinienkonstruktion und -verlauf in der Kernzone eines Spitzbogens nach Ungewitter/Mohrmann [163].

²⁵Bei der Schale kann dieser Ausgleich über die zweite und entkoppelte, d.h. statisch unabhängige Dimension in Ringrichtung erfolgen, deshalb bleibt die Stelle des Vorzeichenwechsels negativer und positiver Ringkräfte erhalten, wenn nur die Randbedingungen membrangerecht sind.

²⁶ Z.B. Grassnick [101], Segger [156].

²⁷ Bouguer errechnete die Form einer Kuppel nach seiner Theorie mittels Reihenzerlegung, Benvenuto [3], S.346.

durch die Lastangriffspunkte abgetragen. Um eine Stützlinie durch den Gewölbescheitel zu konstruieren, muß der Abstand entsprechend dem Produkt aus gesetztem Polabstand und errechneter Scheitelhöhe korrigiert werden. Die Integration erfolgt also über die Abszisse, so daß die auf diese Weise ermittelte Linie einer Seillinie entspricht. Da der Verlauf der Seillinien gegenüber den Kettenlinien bei konstanter Lastverteilung im Scheitelbereich stärker gekrümmt ist (Abb.3.2.7), ergibt sich für die Seillinie beispielsweise eines Bogens oder einer Halbkugelkuppel ein relativ größerer, maximaler Abstand von der Schwerachse. Bei der Untersuchung der Sicherheit bogenartiger Gewölbeformen bringt das gewöhnliche Seilpolygonverfahren also eine 'Reserve' mit sich, weil eine ungünstigere Form gegenüber der wahren Stützlinienform ermittelt wird (siehe auch Kap.3.3.1).

Die graphische Ermittlung einer Kettenlinie setzt statt der Zerlegung der diskretisierten Lasten entlang der Ordinate eine Zerlegung entlang der Lote zur Gewölbeachse voraus. Dies kann nur näherungsweise bzw. iterativ erfolgen, weil die Lage der zu ermittelnden Linie a priori unbekannt ist. Bei der Halbkugelkuppel ist die Annäherung an die Stützlinie wegen der Punktsymmetrie bzw. dem einfachen Mittelpunkt, durch den die Zerlegungsstrahlen zu führen sind, sowie der geringen geometrischen Abweichung der Stützlinie von der Mittellinie so gut, daß die entsprechenden Kreuzungspunkte (Abb.3.2.7.C) sehr genau konstruiert werden können (Abb.3.2.10).

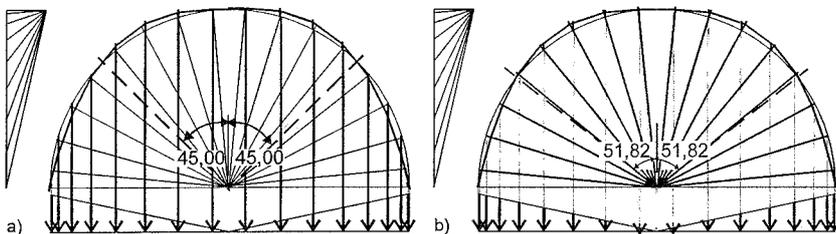


Abb.3.2.10: Graphostatisch ermittelte a) Seillinie und b) Kettenlinie (Bouguer) eines Kuppelsektors und Schnittpunkte mit der Schwerlinie.

3.2.3 Tragfähigkeitskriterien und Traglastsätze auf Basis der Stützlinientheorie

Nach der Entwicklung der Bruchtheorie, mit der die Position von Gelenken im Gewölbe-tragwerk bestimmt werden konnte, und der Erweiterung der Stützlinientheorie bis hin zum elastischen Bogen, mit deren Hilfe die Lage der Stützlinie im ungeschädigten Bogen-querschnitt ermittelt werden konnte, blieben die Gesetzmäßigkeiten, wonach sich die Lage der Stützlinie im Querschnitt in bereichsweise oder ganz rißgeschädigten Wölbtragwerken bestimmt, unerforscht.

3.2.3.1 Geometrische Kriterien

Um dennoch Berechnungen an Gewölben mit Hilfe von Stützlinsen durchführen zu können und Aussagen treffen zu können, legten die Ingenieure geometrische Randbedingungen und Kriterien fest. Neben der einfachen Annahme der Lage der Stützlinsen am Auflager und im Scheitel im Querschnittsschwerpunkt (z.B. Grassnick [101]) ist die bereits von Navier (1785-1836) und Rankine (1820-1872) benannte 'Regel des mittleren Drittels'²⁸, auch 'Kernflächenregel' genannt (siehe Abb.3.2.9), noch heute im Gebrauch. Wird sie als Kriterium für die Standsicherheit verwendet oder zur Festlegung von Gewölbestärken, ist sie zu konservativ, da die Rißbildung a priori ausgeschlossen wird. Bedingt durch die Einsicht, daß Risse ohnehin auch durch andere Lasteinwirkungen (thermische Belastungen, Setzungen, Auflagerverschiebungen) herbeigeführt werden, so daß die bewußte Berücksichtigung bei der Abtragung von Kraftlasten sinnvoll ist, faßte man geometrische Regeln, welche die Rißbildung innerhalb eines bestimmten Rahmens (z.B. zweite Kernweite²⁹) zuließen.

3.2.3.2 Statische Kriterien

Der französische Mathematiker Villarceau entwickelte 1854 eine Theorie auf Basis eines Ersatzbogens mit bikonvex geformten Gliedern (Abb.3.2.11) und postulierte, wenn ein Gleichgewichtszustand zu einer zu untersuchenden Lastkonfiguration mit dem Ersatzbogen zu finden sei, dann gelte diese auch für den unmodifizierten Bogen (b).

Der Briten Pippard [138] behauptete aufgrund von Versuchen, die er in den 40-er Jahren an Bögen durchführte, daß im Gewölbe grundsätzlich Gelenke präsent wären, unabhängig davon, ob sie durch den entsprechenden Lastfall aktiviert sind oder nicht (Abb.3.2.12). Er postulierte, daß der hieraus resultierende statisch bestimmte Zustand der für Gewölbe 'natürliche' Zustand sei, und erklärte die damit verbundene Rißbildung als harmlos. Pippard entwickelte die Idee, Stützlinsen- und Bruchtheorie (siehe Kap.3.2.2) zu verbinden, indem er an Versagensstellen, die durch Auflagerverschiebung entstanden, Gelenke einführte. Hierdurch wird das ursprünglich

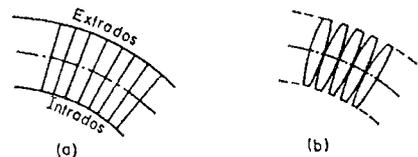


Abb.3.2.11: Bogen und Ersatzbogen aus bikonvex gerundeten Gliedern nach Villarceau 1854, aus Heyman [105].



Abb.3.2.12: Gelenkbildung an einem Bogen durch Auflagerverschiebung nach Pippard et al., aus Heyman [105].

²⁸ Hertwig [25], S.83.

²⁹ Die Lage der Spannungsergebenden im Querschnitt muß innerhalb $h/4$ liegen.

statisch unbestimmte System in ein statisch bestimmtes System übergeführt und die Lokalität der Gelenke in der Tragstruktur festgelegt.

3.2.3.3 Traglastüberlegungen nach Heyman ³⁰

J.Heyman verarbeitete Pippard's Überlegungen zusammen mit der Quintessenz der Arbeiten von Couplet, Coulomb, Villarceau und Mohrmann zur Gewölberechnung in seiner Traglasttheorie [105, 107].

Er zeigt, daß die Ermittlung der Traglast beim Gewölbe in erster Linie ein geometrisches Problem ist. Dabei leitet er analog zur Plastizitätstheorie des Stahlbaus Kriterien für die Ermittlung eines unteren Grenzwertes und eines oberen Grenzwertes her und setzt dabei die Übertragbarkeit des plastischen Werkstoffverhaltens von Stahl auf Mauerwerk unter Druckbeanspruchung voraus. Das Gleiten der Gewölbesteine bzw. Scherversagen wird ausgeschlossen.

Heyman definiert in Anlehnung an Villarceau die Standsicherheit eines Gewölbes als dann gegeben, wenn eine Stützlinie gefunden werden kann, für die sich die inneren und äußeren Kräfte in jedem Querschnitt im Gleichgewicht befinden. Da Zugspannungen bei Mauerwerk auszuschließen sind, muß diese Linie innerhalb des Tragwerksraums verlaufen.

Er argumentiert weiter, daß zur Ermittlung des unteren Grenzwertes der Traglast das prinzipiell zugrundeliegende elastisch-plastische Materialgesetz vereinfachend in ein starrplastisches Gesetz übergeführt werden kann (Abb.3.2.13), weil die Zwischenzustände keine Grenzzustände darstellen und deshalb nicht von Interesse für das Traglastproblem sind. Um einen unteren Grenzwert der Traglast zu bestimmen, ist nur die Einhaltung der Druckversagensspannung wichtig. Es ergeben sich so die folgenden Kriterien:

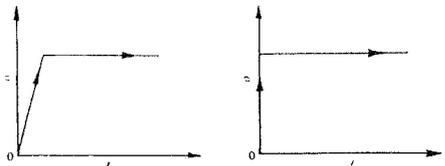


Abb.3.2.13: Elastisch-plastische Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (links) und starrplastische Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (rechts) nach Heyman [108].

- Mauerwerk hat keine Zugfestigkeit.
- Mauerwerk verhält sich im Druckbereich starr-plastisch.

Heyman definiert den Faktor des oberen Grenzwertes der Traglast bzw. die Sicherheit

³⁰Siehe: 'The Stone Skeleton' (1966) [105], 'The Masonry Arch' (1982) [107], 'Poleni's Problem' (1988) [108].

eines Gewölbes ('Geometrical Factor of Safety') als das Verhältnis der notwendigen Querschnittshöhe (Abb. 3.2.14, Mitte) zum Einbeschreiben einer betrachteten Stützlinie zur tatsächlich vorhandenen Querschnittshöhe (Abb.3.2.14, oben) :

$$\eta = d_{\text{vorn}} / d_{\text{min}} \quad (3.3.1)$$

Zur Bestimmung dieses Sicherheitsfaktors η gibt er Diagramme für d_{min}/R an, wie in Abb.3.2.15 für Bögen und für Halbkugelkuppeln in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel. Im Referenzsystem der geometrischen Sicherheit mit minimaler statischer Höhe berührt die Stützlinie aus der gegebenen Lastkonfiguration den Extrados und Intrados des Gewölbes. Diese Stellen interpretiert Heyman als Gelenke (Abb.3.2.14, unten). Hierbei reduziert sich die statische Unbestimmtheit und es entstehen einfach zu berechnende, statisch bestimmte Systeme.

Mit der Vorstellung von der Gelenkbildung stützt sich Heyman auf Pippards Hypothesen (Kap.3.2.3.2) und postuliert das Nachgeben der Widerlager als impliziten Lastfall im Grenzzustand. Die sich verringemde Querschnittsfläche bei der Gelenkbildung führt zu stark anwachsenden Spannungen (Abb.3.2.17, links), die nach Heymans Interpretation deshalb problemlos sind, weil die durchschnittliche Beanspruchung bei Gewölben im Verhältnis zur Materialdruckfestigkeit sehr niedrig ist. Bei behauenen Naturstein liegt sie im Bereich von 1/100 bis zu 1/1000 der Druckfestigkeit β_{cm} . Als Voraussetzung zur Berechnung der Obergrenze der Traglast fordert er deshalb (Abb.3.2.16):

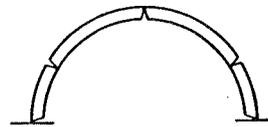
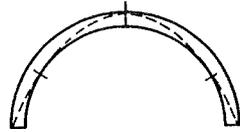
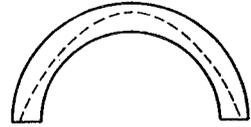


Abb.3.2.14: Stützlinien, Berührungspunkte mit Extrados bzw. Intrados und Gelenklage für einen Halbkreisbogen nach Heyman [107].

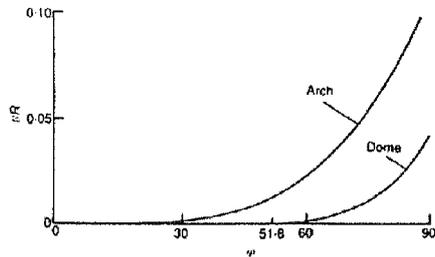


Abb.3.2.15: Diagramm zur Bestimmung der minimalen Dicke eines Kreisbogens und einer Kreiskuppel in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ und der bezogenen Gewölbstärke d/R ($d = d_{\text{min}}$) aus Heyman 'Poleni's Problem' [108].

- Mauerwerk hat eine unendliche Druckfestigkeit.

Diese Annahme mag durch die Vorstellung von dreidimensionalen Spannungszuständen in Gelenkbereichen mit erhöhten Festigkeiten (Hertz'sche Pressung) untermauert sein.

In der Interaktionskurve von Normalkraft und Moment (Versagenskurve) des plastischen Rechteckquerschnitts (Abb.3.2.17, rechts) liegt die Beanspruchung eines

Querschnitts bei Gelenkbildung sinngemäß (d.h. analog zur unendlichen Festigkeit) im Bereich des Ursprungs (O-C-E). Dort fallen die Kurven, welche für Querschnitte begrenzter Festigkeit (Abb.3.2.17, O-D gestrichelte Linien) gelten, mit den Grenzlinien (O-A, O-B) von

Querschnitten unendlicher Festigkeit zusammen. Letztere beschreiben gleichzeitig die maximale Lastexzentrizität der halben Querschnittshöhe ('h' in Abb 3.2.17). Mit sich vergrößernder Lastexzentrizität im Querschnitt, d.h. fortschreitender Gelenkbildung verringern sich also die übertragbare Normalkraft und

das Moment erheblich. Heymans Annahme der unendlichen Druckfestigkeit mag deshalb nur für die Berechnung von Wölbtragwerken aus festem Steinmaterial und Mauerwerk haltbar sein, für solche aus mittel- oder niederfestem Material (z.B. Ziegelmauerwerk) ist sie unzutreffend. Clemente et al. [81] haben 1991 dementsprechend die obere Grenzlast eines Mauerwerkgewölbes auf eine endliche Druckfestigkeit bezogen. Aber auch ihre Betrachtungen des Tragverhaltens von gemauerten Bögen beschränken sich auf einen plastischen Grenzzustand.

Heymans Traglasttheorie stellt ein einfaches und effektives Werkzeug zur Untersuchung der Grenztragfähigkeit von Gewölben dar, sie erlaubt jedoch keinerlei Aussagen zu Zwischenzuständen. Auch wird die Ausbildung von Gelenken und damit ein statisch bestimmter Grenzzustand unterstellt, der wiederum Zwangseinwirkungen durch Lagerbewegungen voraussetzt. Dies ist zwar ein im Gewölbebau häufig auftretender Lastfall, bedeutet aber dennoch, daß das Verfahren nicht allgemein ist. Es bleibt die Frage offen, nach welchen Regeln sich das Kräftespiel in einem Gewölbe bestimmt, wenn Lagerverschiebungen als vernachlässigbar vorausgesetzt werden können.

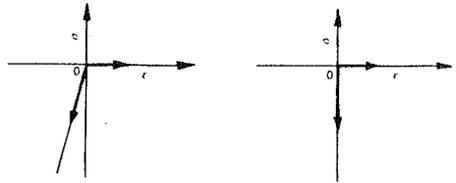


Abb.3.2.16: Materialgesetze für Mauerwerk: elastisch im Druckbereich, ohne Zugfestigkeit (links) und starr im Druckbereich ohne Zugfestigkeit (rechts) nach Heyman [108].

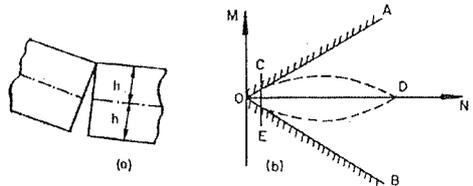


Abb.3.2.17: Gelenkbildung und Interaktionsdiagramm für N und M (O-D) eines Rechteckquerschnitts, sowie relevanter Bereich (O-C, O-E) aus nicht zugfestem Material nach Heymann [105].

4.0 Simulation von Gewölben aus Mauerwerk mit der FE-Methode

4.1 Vorgehensweise bei der FE-Simulation

4.1.1 Verwendeter Programmcode und Elementeigenschaften

Die Beschreibung der Eigenschaften des Programmcodes und der Elementeigenschaften basieren auf Grundlagen aus der einschlägigen Literatur zur Methode der Finiten-Elemente. Für Detailfragen zur Finite-Element-Methode wird deshalb auf Argyris [66], Zienkiewicz [172], Bathe [72], Ramm [142], zur Simulation von Beton- und Mauerwerk auf die Arbeiten von Seim [157] und Lourenço [121] sowie das Handbuch zum verwendeten Programmcode ANSYS [288] und die Veröffentlichung von Willam/Warneke [169] zum implementierten Versagensmodell verwiesen.

4.1.1.1 Hauptprogramm

Es wurden die Finite-Element-Programme 'CARAT', der FE-Code des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart, und das kommerzielle Programmpaket 'ANSYS' verwendet. Letzteres wurde bei der Mehrzahl der Berechnungen, insbesondere den materiell-nicht-linearen, in der Version 5.1 eingesetzt. Der zum Programm gehörige Pre- und Postprozessor diente als Tool zur Generierung der Modelle bzw. zur Auswertung der Ergebnisse. Das Programm bietet eine Vielzahl an Hilfsprogrammen, die es insbesondere für nichtlineare Probleme geeignet macht. Die folgenden programmbezogenen Ausführungen beziehen sich ausnahmslos auf diese nichtlinearen Anwendungen.

Iterations- und Konvergenzsteuerungsmethoden

In ANSYS stehen als Iterationsverfahren das Newton-Raphson-Verfahren zur Verfügung in ursprünglicher Form (echtes Newton-Raphson-Verfahren) und modifizierter Form sowie innerhalb einer Formulierung als Bogenlängenverfahren.

Zur Steuerung der Konvergenz stehen folgende Funktionen zur Verfügung: 'Bifurkation' (Wiederholung eines Lastschrittes unter Halbierung der Schrittweite bei unzureichendem Konvergenzfortschritt), 'Adaptive Descent' (Umschaltung von Tangenten- auf Sekantensteifigkeitsmatrix zur Beschleunigung der Konvergenz), 'Line Search' (Dämpfungsfaktor bei oszillierendem Verschiebungsinkrement) und 'Prädiktor' (Errechnung des Verschiebungs-

inkrementes durch Extrapolation aus der Größe des vorherigen Inkrementes).

Geometrische Nichtlinearität

Zur Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte kann die Wirkung von Längskräften zusammen mit Verformungen (Gleichgewicht am verformten System) berücksichtigt werden. Das Zuschalten dieser Funktion wurde jedoch im Zusammenwirken mit der Simulation von Werkstoffversagen vom Programmhersteller nicht getestet und deshalb nicht empfohlen. Die im Zusammenhang mit dieser Arbeit durchgeführten Testrechnungen (siehe A.4.1.3) lieferten jedoch qualitativ durchaus befriedigende Ergebnisse, wie die Vergleichsrechnungen zu den Versuchen von Barthel et al. [71] zeigen. Bei den Kleinfelervergleichsrechnungen war tendenziell eine Vermehrung der Rißbildung bei der Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte bei hohen Lastniveaus zu beobachten. Die geometrische Nichtlinearität wurde deshalb nur bei einzelnen Gewölb Simulationen (Balken- und Bogen Simulationen, Kap.4.2.2 und 4.2.4), bei denen der Effekt kontrollierbar ist, zugeschaltet.

4.1.1.2 Element und Elementformulierung

Zur Simulation materiell-nichtlinearer Effekte wurde das achtknotige Brick-Element SOLID 65 verwendet, mit dem das Zug- und Druckversagen eines isotropen Materials wiedergegeben werden kann. Es handelt sich um eine sehr einfache Formulierung nach Taylor et al. [160] mit linearer Formfunktion und isoparametrischem Ansatz und dementsprechend begrenzter Rechengenauigkeit bei grob diskretisierten Modellen (siehe Anhang A.4.1.3).

4.1.1.3 Werkstoffgesetz und Versagensmodell

In SOLID 65 kann das Zug- und Druckversagen ('cracking and crushing') mit materiell-nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen verknüpft werden, wie linear-elastisch-plastischen oder multilinear-elastisch-plastischen Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken. Bei der Berechnung läuft die Plastizitätskontrolle der Kontrolle der Bruchkriterien voraus. Materialversagen kann in drei orthogonale Richtungen stattfinden und wird durch eine große, endliche Verringerung der Steifigkeiten an den Gaußpunkten umgesetzt ('weakness'). Über den gerissenen Querschnitt können Druckkräfte unvermindert und Scherkräfte nach Maßgabe eines 'shear-retention-factors' für geschlossene und offene Risse übertragen werden.

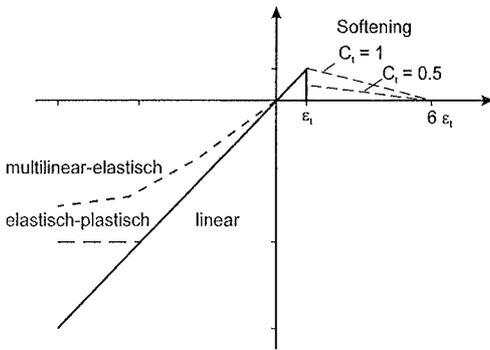


Abb.4.1.1: Aktivierbare Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Element SOLID 65.

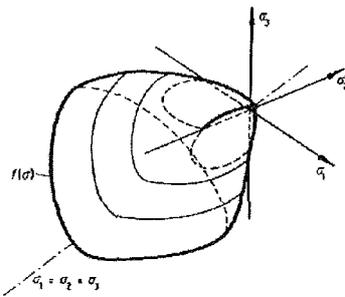


Abb.4.1.2: Darstellung der räumlichen Versagensfläche des dreidimensionalen Versagensmodells und der eingebundenen zweidimensionalen Versagenskurve, die durch Verschneiden mit einer Hauptspannungsebene entsteht; nach Willam/Warke [169].

Eigentlich zur Wiedergabe des Tension-Stiffening-Effektes bei Stahlbeton (Mitwirkung von Beton zwischen Rissen) gedacht, bietet das Element auch die Möglichkeit, eine Entfestigung ('softening') abzubilden, durch eine abfallende und in ihrer Neigung skalierbare Spannungs-Dehnungs-Beziehung innerhalb vorgegebener Dehnungsinkremente ($\epsilon_1 - 6\epsilon_1$) (Abb. 4.1.1).

Das Versagensmodell, nach welchem die Zug- und Druckversagenszustände in SOLID65 ermittelt werden, orientiert sich im wesentlichen an der von Willam/Warke [169] (siehe Anhang A.4.1.1.3) vorgeschlagenen Formulierung für Beton. Sie beruht prinzipiell auf der erweiterten Schubspannungshypothese nach Mohr-Coulomb, wonach die Kombination von Schub- und Normalspannungen das Versagen bestimmt, bzw. im Raum: das Verhältnis von hydrostatischem und deviatorischem Spannungsanteil.

Die Teilmodelle für den ein-, zwei- und dreidimensionalen Spannungszustand sind im Druckversagensbereich konsistent aufeinander abgestimmt (Abb.4.1.2) und nach Ergebnissen aus Versuchen an ebenen Prüfkörpern von Kupfer et al. [116] und an Würfelproben von Launay et al. [118] auf das wirkliche Materialverhalten von Beton hin skaliert (siehe Anhang A.4.1.1). Je nach aktuell vorliegendem Spannungszustand am Gaußpunkt ('domains') wird das zugehörige Kriterium herangezogen, der Grenzwert mit der einaxialen Vergleichsspannung verglichen und die Steifigkeit entsprechend beeinflusst. Verformungs- und Bruchenergie bleiben unberücksichtigt, ebenso dreiaxiales Druckversagen ('cap-model').

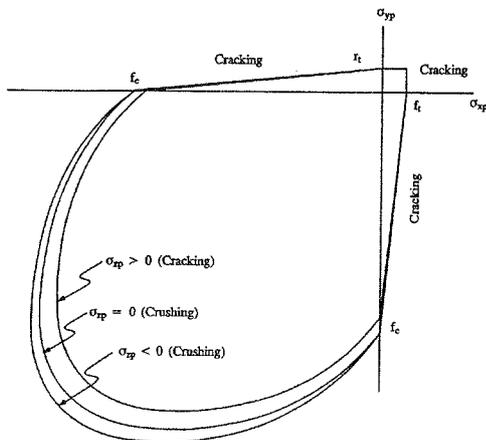


Abb.4.1.3: Implementiertes Versagenskriterium für vorwiegend zweiachsiale Druckbelastung beim Element SOLID 65 (nach [288]).

Im Unterschied zur Formulierung von Willam/Warnerke [169] wurde bei der Implementierung in ANSYS das Versagen im zweiachsialen Zugbereich sowie im Zug-Druckbereich vereinfachend wie beim Mohr-Coulomb-Kriterium durch Geraden wiedergegeben. Ebenfalls im zweiachsialen Zugbereich wurde auf die Abhängigkeit der Versagenskurve vom Vorzeichen der senkrecht stehenden Hauptspannung verzichtet.

Da die hier untersuchten Gewölbe- strukturen zumeist Schalencharakter haben (Spannweite/Dicke: $l/d > 30$), werden programmintern vorwiegend die Versagenskurven aktiviert, welche das Werkstoffverhalten unter einem vorwiegend zweiachsialen Spannungszustand beschreiben (Abb.4.1.3). Hierbei wird unterschieden, ob die Spannung senkrecht zu den beiden Druckspannungen (σ_{zp}) positiv, negativ oder null ist, und die zweidimensionale Versagenskurve im Druckbereich entsprechend angepaßt (sogenannter 'schwach dreidimensionaler' Zustand).

4.1.2 Materiell-nichtlineare Simulation von Tragstrukturen aus Mauerwerk

4.1.2.1 Ablauf und Steuerung des Rechenprozesses

Erzielen von Konvergenz

Während der ersten Lastschritte einer nichtlinearen Rechnung sind die Beanspruchungsmaxima- und -minima der innerlich statisch unbestimmten Tragstruktur klar lokalisierbar und von begrenzter Zahl. Mit zunehmender Belastung und gleichzeitiger Zunahme der Anzahl von Versagenslokalitäten (vermehrte Rißbildung) findet eine Nivellierung der Beanspruchung im System statt. Am Anfang wirkt sich deshalb das lokale Versagen in der Tragstruktur kaum auf die Konvergenzeigenschaften des Simulationsproblems aus und zeigt einen nur geringen Niederschlag in der Verformungs-Lastkurve. Wird die Belastung größer und finden globale Systemwechsel statt (Änderung der

Systemgliederung), wie beispielsweise bei einem äußerlich statisch unbestimmt gelagerten Balken, der in Feldmitte auf Biegung versagt, sind plötzliche und deutliche Änderungen in der Verformungs-Lastkurve zu erkennen (Abb.4.1.4). Gerade diese globalen Systemwechsel sind problematisch in bezug auf das Konvergenzverhalten und können nur mit Hilfe sehr kleiner Dehnungs-/Lastinkremente (10^{-6} % des gesamten Lastschrittes) nachgerechnet werden. Wird allein die automatische Konvergenzsteuerung des Programms verwendet, die unter dem Stichwort 'Bifurkation' den Rechenvorgang steuert, kann sich die Simulation erheblich in die Länge ziehen. Es muß deshalb immer wieder durch direkte Vorgabe größerer und kleinerer Lastinkremente in den Programmablauf eingegriffen werden.

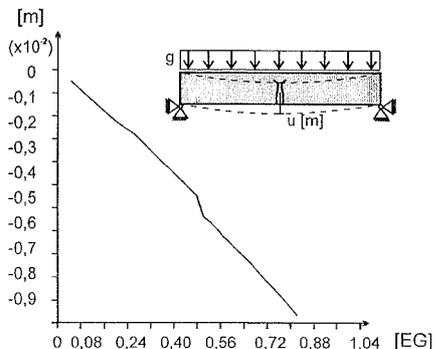


Abb.4.1.4: Verformungs-Lastkurve für die Ablenkung (Ordinate) in Feldmitte bei einem äußerlich statisch unbestimmt gelagerten Balken aus nicht-zugfestem Material. Bei Lastfaktor 0,49 versagt der Balken in Feldmitte auf Biegung, was zu einer plötzlichen Zunahme der Verformungen führt. Der Balken trägt seine Last jetzt über Bogenwirkung ab.

Ende des Programmlaufs

Vorausgesetzt, daß im Verlauf des inkrementell iterativen Rechenprozesses kein triviales Versagen des Systems eintritt (z.B. Wegfall von Lagerbedingungen wegen Rißbildung oder Druckversagen) und, daß der eingesetzte Vergleichswert zur Bestimmung der Genauigkeitsschranke, mit der die Gleichgewichtsiteration berechnet wird, in einem realistischen Verhältnis zu den tatsächlich im System auftretenden Kräften (Spannungen) steht, bricht das Programm ab, weil die Residualkräfte R noch innerhalb des kleinsten, vorgegebenen Inkrementes zu groß sind und keine Konvergenz mehr erzielt werden kann. Dies bedeutet, daß aufgrund der kumulierenden Anzahl von Versagensereignissen und wegen der Nivellierung der Spannungsverteilung, die sich negativ auf die Konditionierung der Steifigkeitsmatrix auswirken, kein eindeutiges neues System ermittelt werden kann. Das direkte lokale Versagen, abgebildet durch Steifigkeitsreduktion am Gaußpunkt, führt noch nicht zum unmittelbaren Abbruch der Rechnung, sondern erst die Summe der Versagenslokalitäten.

4.1.2.3 Modellierung der Tragstruktur und Diskretisierung

Prinzipien bei der Modellierung der Tragstrukturen

Um das lokale Rißverhalten möglichst genau wiedergeben zu können, wurde bei der Modellierung der Tragwerke darauf geachtet, daß sämmtliche Tragwerksglieder und Teilstrukturen (Bögen, Randträger, Rippen) nachgebildet wurden und auf Vereinfachungen und Substrukturen¹ verzichtet wurde. Nur so ist auch bei komplizierten Tragwerksformen (z.B. Pendentfokuppeln) eine realitätsnahe Abbildung des Tragverhaltens möglich.

Erfordernisse bezüglich der Diskretisierung

Die Qualität von materiell-nichtlinearen FE-Berechnungen ist im besonderen netzabhängig. Um befriedigende Ergebnisse zu bekommen, gerade mit dem verwendeten Element (siehe Kap.4.1.2.4), ist eine möglichst hohe Netzdichte anzustreben. Automatische adaptive Netzverfeinerungsmethoden für nichtlineare Probleme dieser Art waren nicht verfügbar. In Anlehnung an Versuchsrechnungen wurden Anhaltswerte für die minimalen Diskretisierungsdichten ermittelt. In Dickenrichtung wurden wenigstens 3 Elemente pro Lngema verwendet, für die größten Abmessungen sollte die Seitenlänge der Elemente nicht kleiner als 1/10 der gesamten Längenausdehnung sein. Entsprechend einer Empfehlung des Programmherstellers kamen nur achtknotige Brick-Elemente zum Einsatz.

Die Diskretisierung in Dickenrichtung wurde separat getestet (siehe Anhang A 4.1.3, Abb.A.4.1.5 bis A.4.1.7). Obwohl der lineare Elementansatz des verwendeten Elements (SOLID65) die Wiedergabe einer geradlinigen Biegespannungsverteilung erlaubt, ergab sich, daß für die Wiedergabe von Rissen senkrecht zur Gewlbeebene mindestens drei Elementschichten, besser fünf Schichten notwendig sind. Weil die Abfrage des Spannungszustandes bzw. der Bruchkriterien an den Gaußpunkten erfolgt und nicht an den Knoten, tritt Versagen mit zunehmender Elementgröße verfrh oder verzögert ein. Um eine realistische Verfolgung der Beanspruchungsgeschichte zu ermöglichen, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, für die genaue Darstellung des Anrisverhaltens der Randschichten eine r-adaptive Diskretisierung ('relocation adaptation') ber die Querschnitte anzuwenden (Abb.4.1.5).

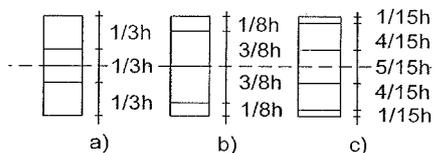


Abb. 4.1.5 Angewandte r-Adaption über den Querschnitt.

¹ Bei nichtlinearen Simulationen ohnehin nicht anwendbar.

4.1.2.4 Materialmodellierung von Mauerwerk im verwendeten Rechenprogramm

Programmbedingte Voraussetzungen und Vereinfachungen

Aufgrund der Verwendung eines kommerziellen Programms mit einem vorgegebenen Material-/Versagensmodell für Beton unterliegen die Simulationen von Mauerwerk im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit ferner folgenden Vereinfachungen:

- Ähnlichkeit des Verformungsverhaltens und des Versagensverhaltens von Mauerwerk und Beton und damit die Übertragbarkeit eines Versagensmodells für Beton auf Mauerwerk²
- Vernachlässigung der Anisotropie von Mauerwerk

Materialmodellierung mit Hilfe der Parameter des verwendeten Rechenprogramms

Die Materialmodellierung umfaßt nicht nur die Eingabe der typischen Werkstoffparameter wie Elastizitätsmodul und Bruchfestigkeit, sondern auch die Abstimmung der nicht direkt übertragbaren Programmparameter (z.B. 'shear-retention-factor') im Hinblick auf eine möglichst realitätsnahe Abbildung des Reiß- bzw. Versagensverhaltens. Darüberhinaus sollten auch bestimmte strukturelle Gegebenheiten wie z.B. die Vorschädigung der Ziegel, die durch eine reduzierte Festigkeit der Außenschichten zum Ausdruck kommt³, berücksichtigt werden. Die durch Auswertung von Materialuntersuchungsergebnissen gewonnenen Werkstoffkennwerte (siehe Kap.2.3.1, Tabelle 2.3.2) dienen als Vorwerte für Testrechnungen an verschiedenen, einfachen Tragstrukturen. Diese wiederum wurden mit Hilfe von Vergleichsrechnungen zu Versuchen verifiziert und justiert. Hierzu dienten in erster Linie die Materialversuche an Kleinfeldern (Abb.4.1.6) aus Ziegeln und Mörtel nach Berger [74] und Egermann [90,91,92] und die Versuche an Bögen aus Gasbetonsteinen nach Barthel et al. [71] (Ergebnisse im Anhang A.4.1.3). Beide erschienen wegen der Vergleichbarkeit zu historischem Mauerwerk, der Belastungsart und Versuchsanordnung, bei der die Anisotropie von geringem Einfluß ist, als besonders geeignet.

² Seim [157] S.25 stellt fest, daß das Verformungsverhalten von Beton und Mauerwerk weitgehend ähnlich ist und Abweichungen im zweiaxialen Spannungs-Dehnungs-Verhalten vor allem bedingt durch die Anisotropie des Materials auftreten.

³ Wegen ihres unmittelbaren Bezuges zur Wirklichkeit werden die beschriebenen Parameter und Maßnahmen als 'realitätsbezogene' Materialmodellierungsparameter und -maßnahmen bezeichnet, im Gegensatz zu den Materialmodellierungsmaßnahmen zur Unterbindung ungünstiger numerischer Eigenschaften, die lediglich der Verbesserung des Konvergenzverhaltens dienen.

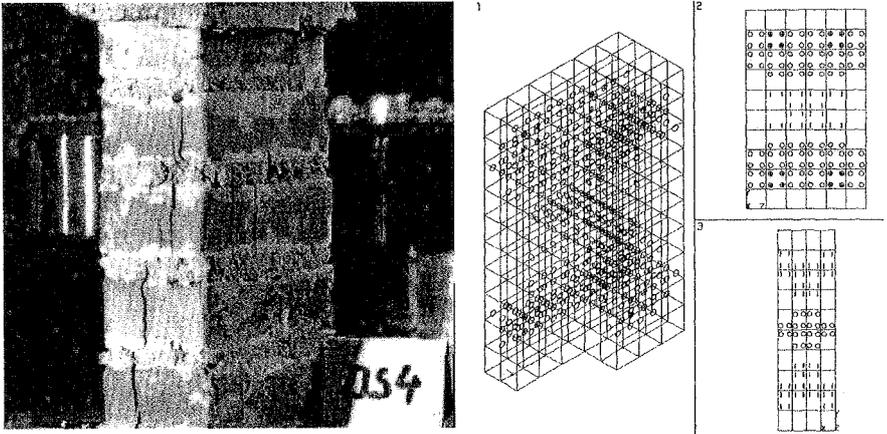


Abb.4.1.6: Kleinfeylerversuch nach Egermann [92]: a) Rißbildung bei Versagen des Prüfkörpers, b) Rißbild der FE-Vergleichsrechnung des Kleinfeylers bei 82% der numerischen Versagenslast (Isometrie, Vorderansicht, Seitenansicht). Die Kreise im FE-Rißbild markieren die Rißebenen. Die Längsrisse an der Breitseite im Mittenbereich und die Längsrisse auf der kurzen Seite stimmen qualitativ mit denen aus der FE-Simulation überein. (Festhaltung des Kleinfeylers: mit Querdehnbehinderung).

Realitätsbezogene Materialmodellierungsparameter und -maßnahmen

Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und Elastizitätsmodul

Wie in Kap.2.3.1 diskutiert weist der Spannungs-Dehnungs-Verlauf von Ziegeln und von Ziegelmauerwerk im Druckbereich typischerweise ab ca. 2/3 der Versagenslast einen zunehmend nichtlinearen Verlauf auf. Dieser steht u.a. im Zusammenhang mit mikroskopischen Veränderungen der Materialstruktur durch zunehmende Rißbildung sowie Zerstörung und Lastumlagerung im Gefüge (s.a. Manns/Schneider [126]). Diese Art von materiell-nichtlinearem Verhalten wird durch eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung abgebildet. Es wurde vereinfachend eine bilineare Charakteristik für historisches Mauerwerk wie in Abb.4.1.7

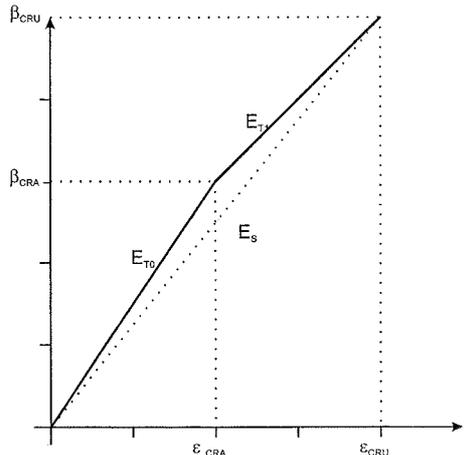


Abb.4.1.7: Zugrundegelegte bilineare Spannungs-Dehnungs-Linie für historisches Mauerwerk.

unter gegebenem $\beta_{\text{cr}}u$ und E_s festgelegt, für deren Parameter gilt:

$$E_{T,0} = E_T = 4/3 E_s \quad (4.1.2)$$

$$E_{T,1} = 2/3 E_s \quad (4.1.3)$$

Wenn, wie zumeist üblich, ein E-Modul für Mauerwerk angegeben wird, der bei 1/3 der Bruchfestigkeit ermittelt wurde, so kann dieser als Tangentenmodul $E_{T,0}$ eingesetzt werden. Der tatsächliche nichtlineare Verlauf normaler Mauerwerkskennlinien wird dann durch die bilineare Spannungs-Dehnungs-Kurve angenähert.

In FE-Simulationen mit Berücksichtigung des Reißverhaltens kommt der Widerspruch von hohen Querdehnzahlen und niedriger Materialzugfestigkeit (siehe Kap.2.3.1) besonders deutlich zum Vorschein. In Verbindung mit einem Werkstoffgesetz mit einer einfachen Poisson'schen, d.h. proportionalen Beziehung von Längs- und Querdehnung läßt sich keine zutreffende Simulation und kein sinnvolles Ergebnis erzielen. Schon bei geringer Belastung versagt das Modell vollständig durch die Wirkung des Querdzuges. Gleiches gilt für den Fall, wo die maximale Zugfestigkeit quasi zu null gesetzt wird ($\beta_1 < 10^{-4} \text{N/mm}^2$).

Unter Berücksichtigung der Querdehnwerte aus der Literatur, insbesondere den Ergebnissen von Manns/Schneider [126], wurde ein Wert für die Querkontraktionszahl von $\nu = 0.1$ zugrundegelegt. Er kann als Anfangswert für den unzerstörten Zustand angesehen werden und wurde durch die Vergleichsberechnungen zu den Druckversuchen am Kleinfefiler bestätigt (Abb.4.1.6).

Einaxiale, zweiaxiale und dreiaxiale Druckfestigkeiten

Die Errechnung der zwei- und dreiaxialen Druckfestigkeiten erfolgt auf Basis des Versagensmodells nach Willam/Warke [169] aus den Werten der einaxialen Festigkeiten. Für die einaxiale Druck- und Zugfestigkeit von historischem Mauerwerk gelten die in Kap.2.3.1, Tabelle 2.3.2 genannten Werte.

Schubübertragungsfaktoren

Genauso wie beim Beton ist auch bei Mauerwerk von einer Übertragung von Schubspannungen über Reibung in Rissen auszugehen. Für die Anwendung im Element SOLID 65 sind zwei Faktoren zu ermitteln, je einer für die Schubübertragung in geschlossenen Rissen

C_c und in offenen Rissen C_o . Der Faktor C_c wurde mit Hilfe der Zugfestigkeit β_t und der Haftscherfestigkeit β_{HS} (Kohäsion) festgelegt, die über

$$\beta_{HS} / \beta_t = \mu \quad (4.1.4)$$

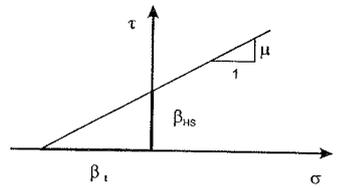


Abb.4.1.8: Reibgerade zur Ermittlung des Schubübertragungsfaktors C_c .

einen Reibungsfaktor μ ergeben (Abb.4.1.8).

Aus Kapitel 2.3.2 lässt sich die Zugfestigkeit von Mauerwerk zu $\beta_t = 0.1 \text{ N/mm}^2$ abschätzen. Die Haftscherfestigkeit weniger festen Mauerwerks wird aus entsprechenden Werten von Schubert ⁴ zu $\beta_{HS} = 0.4 \text{ N/mm}^2$ abgeleitet, so daß sich $\mu = C_c = 0.4$ ergibt.

Der Festlegung des Kennwertes für die Schubübertragung entlang eines offenen Risses C_o liegt die Überlegung der Wirkung einer Restreibung aufgrund von bestehender Verzahnung und der Wirkung von Bruchsand in Fugenebene zugrunde. Es wird ein Wert von $\mu = C_o = 0.15$ angenommen.

Tension-Stiffening-Factor

Der Tension-Stiffening-Factor in der Materialformulierung von SOLID 65 dient im Zusammenhang mit der Simulation von Stahlbeton zur Darstellung der Übertragung von Kräften zwischen den Rissen (siehe Kap.4.1.1.3). Statt eines schlagartigen Zusammenbruchs der Steifigkeit im Element wird ein weiches 'Abklingen' wiedergegeben, um die allmähliche Entfestigung des Betons nach erstmaliger Zugbelastung zu beschreiben (siehe Abb.4.1.9). Ausgehend von der qualitativen Ähnlichkeit des Materialverhaltens von Mauerwerk und Beton wird der Tension-Stiffening-Factor mit $C_t = 0.3$ belegt, die Spannung am Knoten wird also nach Zugversagen auf 30% des Versagenswertes gesetzt und fällt dann innerhalb eines Dehnungsintervalls von $6 \cdot \epsilon_t$ linear auf Null ab (siehe Abb.4.1.1). In der Rechnung führt die Einbeziehung des Tension-Stiffening-Factors zu einer

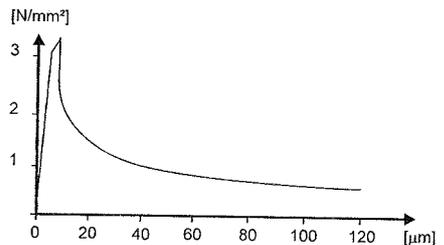


Abb.4.1.9: Spannungs-Verformungs-Verhalten von Beton unter erstmaliger Zugbelastung nach Reinhardt [147].

⁴ Siehe Schubert [154], S.125.

Verbesserung des Konvergenzverhaltens durch numerische 'Dämpfung' des Abbaus von Freiheitsgraden.

Vorschädigung des Ziegel- und Mörtelmaterials und Anrißverhalten

Insbesondere gealtertes Ziegel- oder Fugenmaterial weist aufgrund von Vorschädigung infolge Verwitterung und Herstellung in den Außenschichten eine geringere Zugfestigkeit als im Kern auf (siehe Kap.2.3.1). Diese werden durch elementweise Abstufung der Zugfestigkeit des Querschnitts von außen nach innen berücksichtigt, wobei diejenige der Außenschicht mit 60% der mittleren Festigkeit angenommen wird. Diese Maßnahme bedeutet nicht nur eine realistischere Modellierung der Materialverteilung, sie verbessert auch das numerische Verhalten bei der Simulation.

4.1.2.5 Zugrundegelegte, typische Materialdaten

Den Tragverhaltenberechnungen wurden, soweit im einzelnen nicht anders vermerkt, folgende Annahmen und Daten zugrundegelegt:

Grundtypus des Mauerwerkmaterials: Ziegelmauerwerk im Läuferverband

Rohdichte: $\rho = 0.02 \text{ MN/m}^3$

E-Modul (Sekanten-Modul) : $E_s = 3000 \text{ N/mm}^2$

Poisson-Zahl : $\nu = 0.10$

einachsige Zugfestigkeit : $\beta_1 = 0.05 \text{ N/mm}^2 \text{ bis } 0.1 \text{ N/mm}^2$

max. Druckfestigkeit : $\beta_{\text{cu}} = 5.0 \text{ N/mm}^2$

Rißfestigkeit (nach Manns/Schneider): $\beta_R = \beta_{\text{cra}} 3.0 \text{ N/mm}^2$

Schubübertragungsfaktoren:

- bei offenem Riß: $C_o = 0.15$

- bei geschlossenem Riß:

$$C_c = 0.40$$

Entfestigung: (simuliert durch Tension-Stiffening)

$$C_1 = 0.30$$

4.1.3 Test- und Vergleichsrechnungen

Zur Überprüfung der Qualität der Rechenergebnisse und negativer numerischer Einflüsse wurden Testrechnungen an verschiedenen Tragstrukturen durchgeführt (Anhang A.4.1.3).

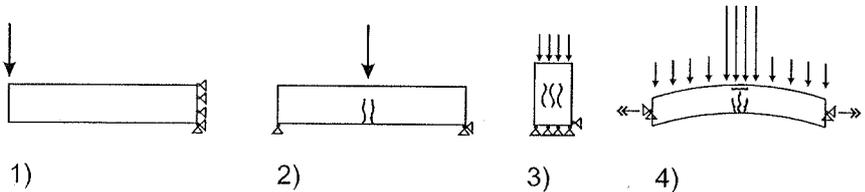


Abb.4.1.10: Versuchsanordnungen und statische Systeme und Lasten der gegenechneten Versuche 1) bis 4), (horizontale Doppelpfeile: aufgebrachte Auflager-verschiebung; Risse: materiell-nichtlinear).

4.1.3.1 Testrechnungen

- 1) Kragarmtest, materiell-linear: Zur Ermittlung der Ergebnisqualität des Brick-Elementes SOLID 65 in Abhängigkeit von der Diskretisierungsdichte.
- 2) Statisch bestimmter Balken, materiell-nichtlinear: Zur Überprüfung der Qualität der Wiedergabe des Versagensverhaltens bei reiner Biegebeanspruchung in Abhängigkeit von der Diskretisierungsdichte und -art (relocation-adaptation).
- 3) Kleinpfeiler nach Berger [74], materiell-nichtlinear, teilweise verschiebungsgesteuert: Zur Überprüfung der Qualität der Wiedergabe des Versagensverhaltens bei Normalkraftbeanspruchung in Abhängigkeit von der Diskretisierungsdichte. Die Vergleichsrechnungen dienen ferner der Kalibrierung der Schubübertragungsfaktoren durch Vergleich von Versagenslasten und Rißbildern (Abb.4.1.6).
- 4) Bogenversuche nach Barthel et al. [71], materiell-nichtlinear, teilweise verschiebungsgesteuert: Zum Vergleich des Rißverhaltens bei Verschiebungslastfällen und Überprüfung der Dehnungen, sowie zur Überprüfung der Wiedergabe geometrisch nichtlinearer Effekte.

4.1.3.2 Ergebnisse

Die Beschreibung der Testrechnungen sowie die detaillierten Ergebnisse befinden sich im Anhang (A.4.1.3); hier seien die wesentlichen Resultate zusammengefaßt:

- Das Element SOLID65 liefert bei geringer Diskretisierungsdichte eine nur mäßige Ergebnisqualität. Bei einem Diskretisierungsaufwand, wie er im Rahmen der hier untersuchten Objekte zu rechtfertigen ist (max. 5 Elemente über die Dicke), stellt sich ein Fehler von mindestens 5 % bei den Spannungen heraus. Zudem ist das Element SOLID 65 zu steif, d.h. die Verformungen werden unterschätzt.
- Testrechnung 2 bestätigt die Notwendigkeit einer feineren Diskretisierung und der r-adaptiven Anordnung in Dickenrichtung, um das Versagensverhalten bei Biegewirkung wegen der geometrisch verschiedenen Lage von Gaußpunkten, an denen die Versagensspannungen geprüft werden, und Elementknoten, für die die Ergebnisse errechnet werden, noch mit einem Fehler von weniger als 10% erfassen zu können.
- Die Simulationen des Versagens aus der Testserie 3 ergaben Abweichungen der numerischen Grenzlast bei Vorgabe der Druckfestigkeit⁵ von 5 %. In der überwiegenden Zahl der Vergleichsrechnungen trat ein vorzeitiger Abbruch der Rechnung ein, die rechnerische Grenzlast wird also tendenziell gegenüber der experimentellen Traglast unterschätzt.
- Die Rißbildung aus Versuchen 3 und 4 wird qualitativ gut wiedergegeben.

Die Testrechnungen brachten die qualitativen Eigenschaften des eingesetzten Programms und Werkstoffmodells klar heraus. Um eine zufriedenstellende Ergebnisqualität zu erreichen, darf die Diskretisierung nicht zu grob sein; bei stark biegebeanspruchten Tragstrukturen (Bögen, Tonnen) empfiehlt sich eine r-adaptive Querschnittsdiskretisierung. Die Rißwiedergabe ist bei sorgfältiger Abstimmung der Materialkennwerte gut, demzufolge wird auch die Veränderung der Systemgliederung infolge Rißbildung zutreffend dargestellt. Grenzlasten stimmen bei einfachsten Modellen (Kleinpfeiler) zufriedenstellend mit den Versuchswerten überein, sie werden bei jeder komplizierteren Struktur jedoch unterschätzt. Die Qualität der Ergebnisse ist dennoch für die Untersuchungen von Wölbtragwerken als Ganzes - wie in diesem Rahmen - durchaus als befriedigend zu bezeichnen.

⁵ Die Druckfestigkeit wird über den Tangenten-E-Modul errechnet. Verwendet man ein bilineares Materialgesetz mit Verfestigung, muß die Spannung entsprechend angepaßt, d.h. erhöht werden.

4.2 Tragverhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial mit der FE-Methode

Die Möglichkeit der Simulation des Rißverhaltens von spröden Werkstoffen eröffnet neue Dimensionen, gerade für die Gewölbestatik. Trotz verschiedener durchgeführter materiell-nichtlinearer Berechnungen an Tragstrukturen aus nicht-zugfestem Material in der Literatur fehlt es an Betrachtungen, welche auf die Interpretation der Ergebnisse ausgerichtet sind. Die Outputs von Finite-Element-Analysen wurden zumeist nur auf ihre Plausibilität hin überprüft oder ohne Hinterfragung übernommen.

In diesem Abschnitt werden charakteristische Eigenschaften des Rißverhaltens von Tragwerken aus Sprödmaterial wie Gewölben unter Eigengewicht mit Hilfe einfacher mechanischer Betrachtungen herausgearbeitet. Um einen Vergleich mit herkömmlichen Methoden der Gewölbestatik zu ermöglichen, werden aus der Schematisierung des Rißverhaltens Annahmen abgeleitet, mittels denen Gewölbe bzw. Bögen vereinfachend als Linientragwerke beschrieben werden können.

4.2.1 Relevante Lastfälle

4.2.1.1 Lastfall Eigengewicht versus Lastfall Auflagerverschiebung

Wegen der Empfindlichkeit von Gewölben gegen Verschiebungslastfälle und ihrer häufigen architektonischen Einbindung auf Stützen, Wänden oder in anderer, aufgeständerter Form, wodurch gerade solche schädlichen Zwangsbelastungen erst induziert werden, nicht zuletzt aber auch angeregt durch Heyman's Theorie (Kap.3.2.3.3) wird bei der Mehrzahl der statischen Untersuchungen an Gewölben die Wirkung von Auflagerverschiebungen unterstellt. Auch das Tragverhalten von Gewölben unter verteilten Kraftlastfällen wie dem Eigengewicht, die mit der Stützlinienmethode nur ungefähr möglich ist, wurde deshalb häufig in Kombination mit Auflagerverschiebungen untersucht, auch bei Finite-Element-Simulationen. Vom Standpunkt der Mechanik aus betrachtet, handelt es sich bei Bruchstellen aus Auflagerverschiebung um diskrete Versagenslokalitäten, hervorgerufen durch Starrkörperverdrehungen um den exzentrischen Punkt mit dem größten Hebelarm zur Verschiebung. Beim Halbkreisbogen beispielsweise ist dies der Scheitel. Dort bildet sich eine Art von Gelenk aus, wodurch die Bernoullische Hypothese nicht mehr gültig ist und das ursprüngliche Tragsystem als verändert anzusehen ist.

In der Praxis ist die Wahrscheinlichkeit der dominanten Wirkung einer Auflagerverschiebung abhängig von der Gewölbegeometrie, d.h. dem Stich-Spannweitenverhältnis, der Fundierung des Gewölbes, aber auch vom Grad der Konsolidierung des Bauegefüges, also

dem Alter des Bauwerks. Bekanntermaßen sind flachere Gewölbe empfindlicher gegen Auflagerverschiebungen als steilere und üben einen relativ höheren Horizontalschub auf die Fundamente aus als Gewölbe mit großer Scheitelhöhe. Zudem wirkt sich die Verschiebung des Auflagers bei allen zweidimensionalen Gewölben wie Bogen- und Tonnengewölben ungleich stärker und ungünstiger aus, als bei dreidimensionalen Gewölben wie Kuppeln. Dort muß nicht unbedingt von vornherein von einer fortschreitend nachlassenden Wirkung der Ringfundamentierung oder des Ankers ausgegangen werden, wie es Heyman in seiner erweiterten Theorie tut ('Poleni's Problem' [108], (Abb. 4.2.1). Bei Bauwerken mit massigen Grundmauern (z.B. dem Pantheon/Rom), wenn die Bauteile auch nur einigermaßen intakt sind, wird die mittelbare Wirkung des Kuppelschubs auf den Baugrund ohnehin abgefangen oder stark reduziert.

Änderungen des Materialchemismus (z.B. Karbonatisierung), viskoelastische Effekte (z.B. Kriechen) oder Mikrorißbildung bedingt durch Materialersetzung und die Einwirkungen von Feuchtigkeit und Temperatur führen zu ausgleichenden Effekten, die eine Konsolidierung des Bauwerkgefüges mit sich bringen. Gerade Einflüsse temporären Charakters wie Aufla-

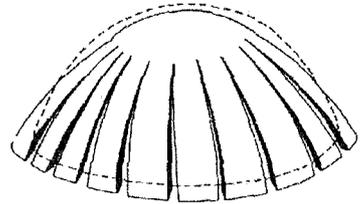


Abb.4.2.1: Skizze zur Veranschaulichung der Aufweitung einer Kuppelbasis aufgrund von Auflagerverschiebungen nach Heyman [108].

gerverschiebungen unmittelbar nach dem Bauzustand oder der Ausfall von stützenden Baukomponenten verlieren, wenn sie im baupraktisch üblichen Rahmen bleiben, mit der Dauer der Bauwerks- und damit der Belastungsgeschichte an Bedeutung. Bei historischen Kuppeln, deren Ringzugkräfte durch Anker aufgenommen werden, kann in den meisten Fällen von einem konsolidierten Gefüge ausgegangen werden, so daß als Lastfall vorallem das Eigengewicht relevant ist. Die typischen Risse, bei Kreiskuppeln die Meridianrisse, müssen sich dabei nicht wegen einer zu geringen Wirkung der Ringanker geöffnet haben¹, sondern können auch durch die altersbedingte Verringerung des Verbundes und nachlassende Kohäsion des Gewölbebaustoffes infolge Mikrorißbildung aus Temperatur- und Witterungseinflüssen oder ggf. Erderschütterungen oder Schwinden bei gleichzeitiger und dauernder Einwirkung des Eigengewichtes entstanden sein.

¹ Die typischen Risse treten selten direkt in der Gegend des Ankers auf, sondern im zugbeanspruchten Bereich darüber.

4.2.1.2 Untersuchungen der Wirkung des Eigengewichtes mit Hilfe von FE-Simulationen

Das Eigengewicht gibt als Vorbelastung eine innere Kräfteverteilung vor, welche die sich öffnenden Rißzonen und -richtungen in ihrer Ausbildung auch unter anderen Lasteinwirkungen beeinflusst. Wegen der Abhängigkeit der Rißbildung von der Belastungsgeschichte ist das Eigengewicht grundsätzlich als 'erste' Belastung anzusetzen. Im Gegensatz zu den Stützlinienmethoden kann bei einer materiell-nichtlinearen Finite-Element-Untersuchung der Einfluß von Lagerverschiebungen durch Ansatz von Auflagersteifigkeiten oder Auflagerreibung (mit Kontaktelementen) in Wechselwirkung mit dem Eigengewicht untersucht werden. FE-Simulationen ermöglichen die Beurteilung der Rißbildung sowie die Abschätzung der Tragreserven unter beliebigen Kombinationen und Sequenzen des Eigengewichtes mit anderen Einwirkungen².

Die λ -fache Erhöhung der Eigengewichtslast oder anderer Kraftlasten bei vorgegebenen Materialkennwerten (, die in praxi aus Proben eines zu untersuchenden Objektes ermittelt wurden,) entspricht einer Traglastuntersuchung des betrachteten Gewölbes. Beim Lastfall Eigengewicht wird durch die Vergrößerung der Last und durch das künstliche Überschreiten der Rißfestigkeit des Materials an verschiedensten Stellen in der Tragstruktur in umgekehrter Weise der Effekt einer sich verringernden Kohäsion des Materials nachgestellt. Der so ermittelte Lastfaktor gibt Auskunft über die Reserven bezüglich einer globalen Verringerung der Materialfestigkeit infolge Rißbildung und Kohäsionsverlust. Die nichtlinearen Finite-Element-Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit sind ausschließlich der Wirkung des Eigengewichtes bei verschiedenen Gewölbegeometrien gewidmet.

4.2.2 Rißverhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial unter gleichmäßig verteilten Lasten in der FE-Rechnung

Anhand der Ergebnisse der Simulation eines äußerlich statisch unbestimmten Balkens mit geringer Schlankheit ($d/l=1/6,2$) lassen sich die wesentlichen Merkmale des Rißverhaltens und der Veränderung der Beanspruchung im Tragwerk unter Laststeigerung aufzeigen. Die FE-Simulationen wurden mit den in Kap.4.1.2.5 aufgelisteten Materialkennwerten durchgeführt.

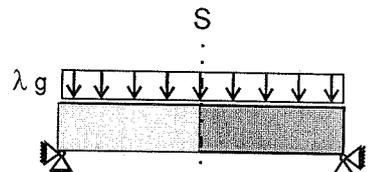


Abb.4.2.2: Statisches System des Balkens der FE-Simulation.

² Untersuchungen der Standsicherheit unter kombinierten Lasteinwirkungen müssen entsprechend einem geteilten Sicherheitskonzept unter Vorgabe von Lastfaktoren gemacht werden und unter Berücksichtigung der Belastungsgeschichte.

Die Abbildungen (Abb.4.2.2 a-d, S.70/71) zeigen Reißbilder aus vier Laststufen (links) und die zugehörigen Hauptspannungsverteilungen (rechts) aus einer materiell-nichtlinearen FE-Simulation.

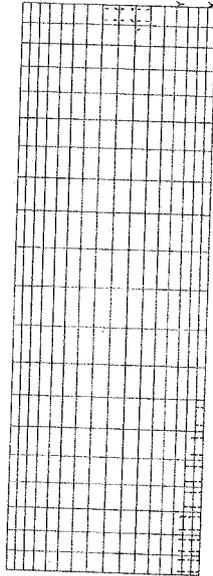
Nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit bilden sich Einrisse an der Unterseite des Balkens im mittleren Bereich (a) (linke Bildhälfte). Dort verengt sich der statisch wirksame Querschnitt und die Stützlinie (zur Definition siehe S.19) verlagert sich nach oben. Die Laststeigerung führt zur Verlängerung der Querrisse, wobei die Druckzone weiter nach oben wandert (b). Bei derselben Laststufe bilden sich zwischen Auflager und Scheitel Risse längs der Richtung der Druckhauptspannungen. Diese rühren von der Lastausbreitung bzw. den hieraus resultierenden Umlenkkraften her, die Zugkräfte in Querrichtung hervorrufen. Mit weiterer Lasterhöhung verlängern sich die Einrisse an der Balkenunterseite kaum noch (c); es vermehren sich jedoch die Längsrisse entlang der Hauptspannungsrichtungen. In Feldmitte entsteht eine weitere Zone mit Längsrissen. Sie erklärt sich mit der örtlichen Erhöhung der Normalspannungen im Scheitelbereich infolge der Einrisse und der Überschreitung der Zugfestigkeit in Querrichtung durch die Querdehnung (Abb.4.2.3.b). Nach weiterer Laststeigerung ist das ganze Tragwerk insbesondere mit Längsrissen (längs zur Druckhauptspannungsrichtung) durchsetzt (d). Der Zerfall der Gesamtquerschnitte in lamellenartig geschichtete Teilquerschnitte niedrigerer Steifigkeit mit reduziertem Verbund bewirkt, daß sich der Bereich der Spannungsübertragung wieder auf die anfangs eingerissenen Querschnittsbereiche ausdehnt. Die Spannungsresultierende und damit die Stützlinie wandert so der Systemachse entgegen.

4.2.2.1 Auswertung und Schematisierung des Reißverhaltens

Den Ergebnissen der FE-Analyse zufolge können zwei Reißphasen unterschieden werden : Die Einrißphase, in welcher sich der Querschnitt durch Querrißbildung verringert, und die Phase der Längsrißbildung, die zur Umverteilung und Nivellierung der Beanspruchungen im Tragwerk führt (Abb.4.2.4). Weil die Längsrisse den Hauptspannungslinien folgen, kommen zwei Reißursachen in Betracht: Sie entstehen infolge einer Lastausbreitung über eine größere Querschnittshöhe aus den Umlenkkraften (Abb.4.2.2.b, im Bereich zwischen Auflager und Balkenmitte), oder sie werden durch die Querdehnung infolge hoher Druckspannung hervorgerufen (Abb.4.2.3, bzw. Abb.4.2.2.d, Scheitelbereich). Erstere Ursache ist abhängig von der Tragwerksgeometrie und tritt bei schlankeren Gewölben weniger ausgeprägt auf. Letztere Reißursache ist zuerst an den eingerissenen Stellen mit höheren Längsspannungen infolge der Querschnittsreduktion zu beobachten. Mit zunehmender Belastung des Tragwerks werden schließlich alle Querschnitte durchsetzt.

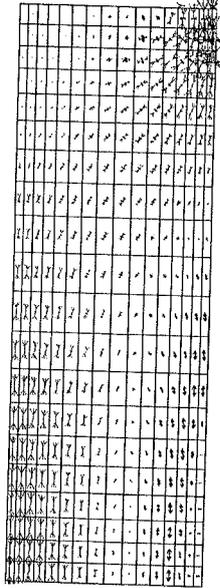
ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 19:46:19
 CRACKS AND CRUSHING
 STEP=1
 SUB =2
 TIME=0.02

a)



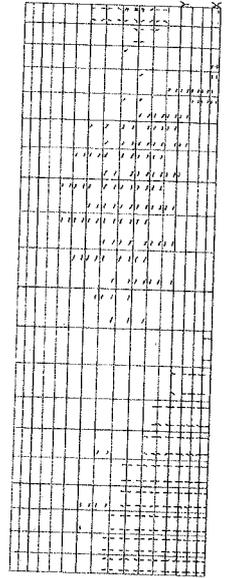
ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 21:10:07
 VECTOR
 STEP=1
 SUB =2
 TIME=0.02
 S

PRIN1
 PRIN2
 PRIN3



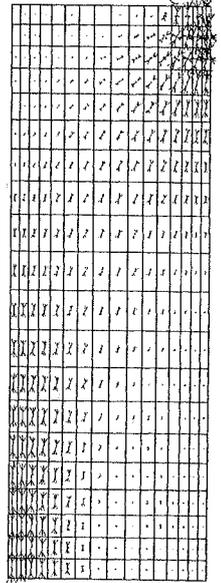
ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 19:48:30
 CRACKS AND CRUSHING
 STEP=1
 SUB =5
 TIME=0.14

b)

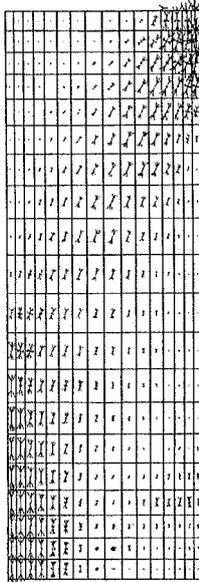


ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 21:12:22
 VECTOR
 STEP=1
 SUB =5
 TIME=0.14
 S

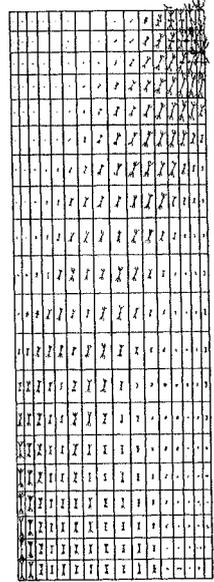
PRIN1
 PRIN2
 PRIN3



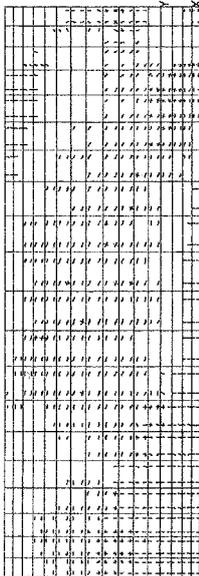
ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 21:14:45
 VECTOR
 STEP=1
 SUB =8
 TIME=0.32
 S
 PRINT
 PRINT2
 PRINT3



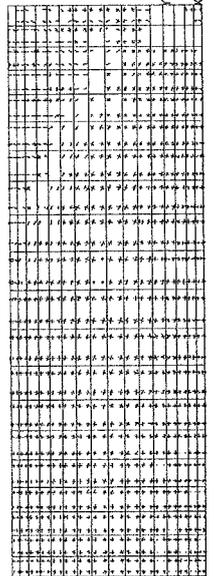
ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 21:22:23
 VECTOR
 STEP=1
 SUB =20
 TIME=1
 S
 PRINT
 PRINT2
 PRINT3



ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 19:53:12
 CRACKS AND CRUSHING
 STEP=1
 SUB =8
 TIME=0.32



ANSYS 5.1
 NOV 29 1996
 19:53:12
 CRACKS AND CRUSHING
 STEP=1
 SUB =20
 TIME=1



c)

d)

Abb.4.2.2: Rißzustände und Hauptspannungsverteilung eines hohen Balkens (rechte Systemhälfte) infolge sukzessiver Steigerung des Eigengewichts: a) erster Einriß, b) maximaler Einriß, c) Längsrißbildung, d) zunehmende Längsrißbildung und Nivellierung der Spannungsverteilung im Querschnitt.

Hierdurch lösen sich die Querschnitte auf und es entstehen lamellenartig übereinanderliegende Teilquerschnitte mit geringerer Biegesteifigkeit (Delamination) (Abb.4.2.2.d). Dies zieht eine Nivellierung der Beanspruchungen in Längsrichtung nach sich. Die Verteilung der Spannungen im längsgerissenen Querschnitt nähert sich so einer rechteckigen Spannungsverteilung eines Querschnitts mit einem 'notension' - starr-plastischen Materialverhalten mit unbegrenzter Druckfestigkeit an.

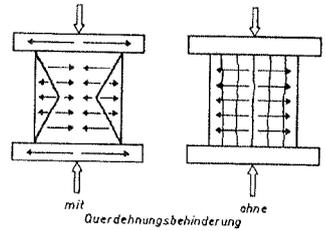


Abb.4.2.3: Schematische Darstellung der Reißbildung beim einem Betonwürfel im Druckversuch mit (links) und ohne (rechts) Querdehnungsbehinderung, nach Wesche [168].

Zur Beschreibung des prinzipiellen Materialverhaltens im ungerissenen und quergeissenen Zustand (Abb.4.2.4. a) und b)) kann als Grundlage ein linear-elastisches Werkstoffgesetz mit Zugversagen angenommen werden, wobei als Grenzspannung für Zugbeanspruchun-

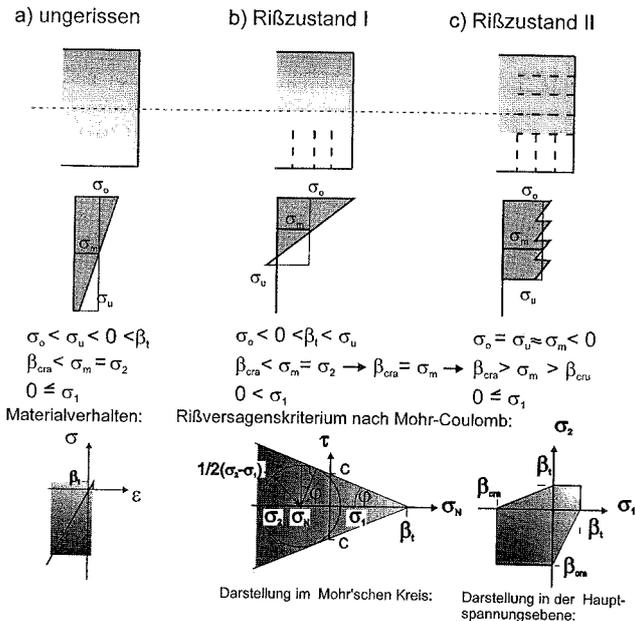


Abb.4.2.4: Schematisierte Reißbildung im Rechteckquerschnitt mit zugehöriger Längsspannungsverteilung in Hauptspannungsrichtung, sowie vereinfachte Darstellung des Materialverhaltens mit linearer Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und Reißversagenskriteriums nach Mohr-Coulomb: a) keine Reißbildung b) Querrißbildung c) Quer- und Längsrißbildung.

gen die Zugfestigkeit β_1 einzusetzen ist. Das elastische Werkstoffverhalten ist begrenzt, da mit zunehmender Längsrißbildung unter Druckbeanspruchung ein inelastisches Querschnittstragverhalten einsetzt (Abb.4.2.4.c). Die entsprechende Linearitätsgrenze wird schematisch mit der 'rißbedingten Fließspannung' β_{cr} markiert, wobei dieser Begriff die Ursache des inelastischen Verhaltens beschreibt. Das endgültige Versagen tritt mit der höheren Druckversagensspannung β_{cu} ein.

Die Größe von β_{cr} hängt nicht mehr nur von einer Hauptspannungskomponente ab, sondern von der Kombination mehrerer Hauptspannungskomponenten und kann prinzipiell mit Hilfe des Mohr-Coulomb-Versagenskriteriums bestimmt werden. Im einfachsten Fall wird ein Werkstoffversagen in Abhängigkeit von der Kombination von 1. und 2. Hauptspannung (ebener Fall) bzw. Schubspannung und Normalspannung beschrieben. Für den Grenzfall gilt (Abb.4.2.4, Darstellung im Mohr'schen Kreis):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \cdot c \cdot \cos \varphi - (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \sin \varphi \quad (4.2.1)$$

Als weitere Materialkenngrößen gehen die innere Reibung des Materials ($\tan \varphi$) und die Kohäsion (c) ein.

4.2.2.2 Querschnittsverhalten unter Delamination

Inwieweit Heyman an ähnliche Beobachtungen des Rißverhaltens in Versuchen anknüpfte oder eine ähnliche Modellvorstellung über die Veränderung des Tragverhaltens im Querschnitt entwickelt hatte, als er ein plastisches Materialverhalten dem Grenzzustand eines Gewölbes zugrundelegte, ist den Veröffentlichungen [105],[107],[108] nicht zu entnehmen. Die FE-Simulationen bestätigen aber, daß die Veränderung des Tragverhaltens des Querschnitts aus Sprödmaterial ähnliche Auswirkungen auf den Spannungszustand im Querschnitt hat. Das Plastizieren von Metallen beruht auf der Duktilität (Zähigkeit), die durch die Veränderbarkeit der Kristallgitterstruktur gegeben ist. Es findet also im Material statt und setzt eine Fließfähigkeit unter Zug- und Druckbeanspruchungen voraus. Bei sprödem, nicht-zugfestem Material ist dies a priori nicht gegeben. Die Kombination von nicht-zugfestem

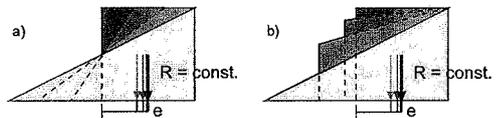


Abb.4.2.5: Veränderung der Spannungsverteilung unter konstanter Normalkraft und wachsendem Moment beim Fließen a) eines Querschnitts aus duktilem Material, b) eines Querschnitts aus Sprödmaterial (Delamination des Querschnitts).

Materialverhalten und Duktilität ist deshalb in bezug auf ein Tragwerkskontinuum widersprüchlich.

Das Fließen eines Querschnitts aus Sprödmaterial bei Momenten- und Normalkraftbeanspruchung muß also auf anderen Prinzipien beruhen als bei duktilen Materialien. Dort geht man von der schematischen Vorstellung einer plastizierten Zone mit angrenzender Biegespannungszone aus, deren Gradient mit zunehmendem Plastifizierungsgrad ansteigt (Abb.4.2.5.a). Dieses Verhalten ist auf Querschnitte aus Sprödmaterial nicht anwendbar, weil umgekehrt durch die Delamination die Biegesteifigkeit des Querschnitts abnimmt, und eine Verringerung des Biegespannungsgradienten mit zunehmendem Fließen (Abb.4.2.5.b)

bewirkt wird.

Anhand der Veränderung der statischen Höhe \bar{h} in Abhängigkeit von der Exzentrizität e der konstanten Spannungsergebnenden eines Querschnittes aus nicht-zugfestem, duktilem Material und eines Querschnittes aus sprödem Material läßt sich zeigen, daß beide Arten des Fließens statisch möglich sind (d.h. die Kurven erfüllen die Randbedingungen: ($\bar{h}(e=0.167h) = h$ und $\bar{h}(e=0.25h) = 0.5h$). Die Verläufe von \bar{h} beim Fließen des duktilen und spröden

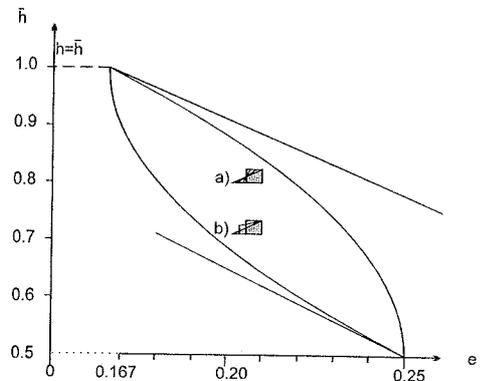


Abb.4.2.6: Veränderung der statischen Höhe eines eingerissenen Rechteckquerschnitts \bar{h} in Abhängigkeit von der Exzentrizität ($N=const$) beim Fließen: a) Querschnitt aus nicht-zugfestem duktilem Material und b) delaminierender Querschnitt aus Sprödmaterial.

Querschnitts sind gegengleich und punktsymmetrisch³ (Abb.4.2.6). Während beim Querschnitt aus duktilem Material sich die statische Höhe stetig, zunächst fast linear verringert und dann mit zunehmender Exzentrizität überproportional abfällt, bzw. in eine vertikale Tangente übergeht, sind die Verhältnisse beim spröden, delaminierenden Querschnitt umgekehrt. Wird die Exzentrizität nur leicht überschritten, reduziert sich \bar{h} schlagartig, weil die Verringerung der Momententragfähigkeit innerhalb des statisch wirksamen Querschnitts (Teilfläche) nur durch exzentrische Teilflächenbeanspruchung ausgeglichen werden kann.

3 Zur Herleitung siehe Anhang A.4.2.2.2

4.2.2.3 Formänderungsenergetische Eigenschaften von teilflächenbelasteten Querschnitten

Die nichtlinearen FE-Berechnungen zeigen, daß solange kein inelastisches Verhalten durch Längsrißbildung im Querschnitt eintritt, sich immer näherungsweise dreieckige Spannungsverteilungen in den eingerissenen Querschnitten einstellen, bzw. daß die Spannungsergebnisse des statisch wirksamen Teilquerschnitts bei $\bar{h}/6$ liegt. Diese Eigenschaft kann beispielhaft durch den Vergleich der Verformungsenergie des nur biegegerissenen (Rißzustand I) und biege- und längsgerissenen (Rißzustand II) Querschnitts bei konstanter Spannungsergebnisse ($R = \text{const.}$) in Abhängigkeit von der Exzentrizität (e) gezeigt werden. Es wird von folgenden Formulierungen ausgegangen⁴:

$$\Pi = \int_{(V)} \Pi^* dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_{(l)} dx \cdot \int_{(A)} \Pi^* dA \quad (4.2.2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_{(l)} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} \right] dx = \Pi_N + \Pi_M \quad (4.2.3)$$

Die querschnittsbezogene Formänderungsenergie mit $N=R$ und $M=R \cdot e$ lautet:

$$\pi = \frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{R^2}{EA(e)} + \frac{(Re)^2}{EI(e)} \right] \quad (4.2.4)$$

Die Verläufe des elastischen Querschnitts ($\pi_{el,cr}$) und des plastizierten Querschnitts ($\pi_{pl,cr}$) (Abb.4.2.7) beginnen an demselben Punkt mit zunächst flacher Steigung, die ab $e = 0.25 h$ stärker anwächst und ab $e = 0.4 h$ über alle Grenzen wächst. Die Formänderungsenergie des plastizierten Querschnitts steigt mit zunehmender Exzentrizität stärker an als die des elastischen Querschnitts. Dieser ist also geringer beansprucht bei gleicher Normalkraft- und Momentenüber-

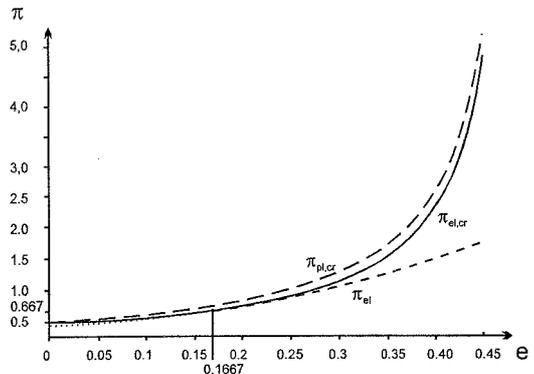


Abb.4.2.7: Formänderungsenergie π für den ungerissenen Querschnitt π_{el} und den gerissenen Querschnitt $\pi_{el,cr}$ mit elastischem Materialgesetz und dem gerissenen, plastizierten Querschnitt $\pi_{pl,cr}$ für Einheitsgrößen ($R=E=h=b=1$).

⁴ Die Herleitung findet sich im Anhang.A 4.2.2.3.

tragung im Querschnitt und deshalb verformungsenergetisch günstiger. Ab der Exzentrizität $e = h/6$ reißt der elastische Querschnitt ein, damit geht τ_{el} in $\tau_{el,cr}$ über. Bedingt durch die sich verringernde statisch wirksame Querschnittsfläche wächst mit weiter zunehmender Exzentrizität die Verformungsenergie im unplastizierten Querschnitt ebenso überproportional an.

4.2.2.4 Ebenbleiben der Querschnitte auch bei Rißbildung

Die Rißbilder der materiell-nichtlinearen Finite-Element-Untersuchungen zeigen, daß unter Einwirkung von linienförmigen Lasten - wie in diesen Fällen des Eigengewichtes - keine diskreten Gelenkausbildungen stattfinden, sondern Zonen mit mehreren, verteilten Rissen entstehen (Abb.4.2.2.a). Die aus dieser Belastungsart resultierenden Verformungen und Verdrehungen verteilen sich entlang des Tragwerks und bleiben klein. Bei Beanspruchungen durch linien- oder flächenartige Lasteinwirkungen und unter Ausschluß endlicher Verschiebungen oder Starrkörperverdrehungen kann deshalb näherungsweise vom Ebenbleiben der Querschnitte bzw. von der Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese ausgegangen werden.

4.2.3 Tragverhalten von Rechteckquerschnitten aus nicht-zugfestem Material

Aus den Ergebnissen der nichtlinearen FE-Simulationen zum Rißverhalten und den bestehenden Berechnungsmethoden werden Annahmen zur Schematisierung des Materialverhaltens zusammengestellt, welche die Grundlage für mechanische Betrachtungen an Querschnitten aus nicht-zugfestem⁵ Material bilden. Diese dienen der Verifikation charakteristischer Eigenschaften des Rißverhaltens und dem Vergleich der Ergebnisse von FE-Simulationen mit denen herkömmlicher Methoden.

4.2.3.1 Grenzzustände

Die in Kapitel 4.2.2.1 schematisierten Rißzustände (Abb.4.2.4) des Rechteckquerschnitts beschreiben gleichzeitig die kennzeichnenden Grenzzustände, den Querschnitt unter Teilflächenbelastung (Rißzustand I) und den Beginn des Querschnittsfließens (Rißzustand II). Diese werden vor dem eigentlichen Versagen durchlaufen. Um das rißbedingte Fließen, das

⁵ Hierbei wird vereinfachend die Zugfestigkeit als vernachlässigbar definiert, weshalb in diesem Zusammenhang anstatt von 'sprödem Material' von einem 'nicht-zugfesten Material' gesprochen wird.

aus einem mehrdimensionalen Werkstoffverhalten resultiert, vereinfachend im Materialgesetz abzubilden, wird eine trilineare Spannungs-Dehnungs-Linie zugrundegelegt (elasto-plastisches Materialverhalten mit Verfestigung). In Wirklichkeit hat die Rißbildung jedoch keinen Einfluß auf das Materialgesetz (Abb.4.2.8, Materialgesetz, gestrichelte Linie).

Das Materialverhalten des ungerissenen und eingerissenen Querschnitts ist demnach also linear-elastisch im Druckbereich bis zum Erreichen der rißbedingten Fließspannung β_{cra} . Dieser Fließgrenze

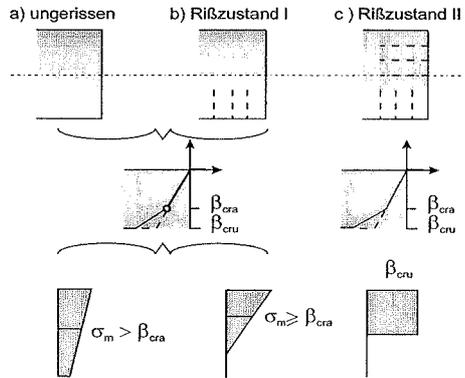


Abb.4.2.8: Schematisierte Riß- bzw. Grenzzustände im Rechteckquerschnitt mit vereinfachtem Materialgesetz: a) keine Rißbildung, b) Querrißbildung, elastisch im Druckbereich und ohne Zugfestigkeit; c) Querrißbildung und Längsrißbildung: plastisch im Druckbereich ohne Zugfestigkeit.

kann als Wert die Rißfestigkeit β_{R} nach Manns/Schneider (Kap.2.3.1, S.27/28) zugeordnet werden, bei der die Auflösung der Querschnittsstruktur durch vermehrte Riß- und Mikrorißbildung und das ausgeprägte nichtlineare Materialverhalten einsetzt.

Mit Erreichen der Druckfestigkeit β_{cru} ist der Querschnitt infolge der Delamination durch Längsrißbildung durchplastiziert.

4.2.3.2 Annahmen zum Tragverhalten von Rechteckquerschnitten aus nicht-zugfestem Material

Aus den dargelegten Eigenschaften des Rißverhaltens lassen sich folgende Annahmen ableiten bzw. zusammenfassen:

- 1) Die Zugfestigkeit ist vernachlässigbar ($\sigma_t = 0$).
- 2) Gleiten von Tragwerksabschnitten, die durch Risse abgetrennt sind, wird ausgeschlossen.
- 3) Bis zum Fließbeginn des Querschnitts (β_{cra}) unter Druckbelastung wird ein linear elastisches Materialverhalten unterstellt (Abb.4.2.8.a,b).

- 4) Die Fließspannung β_{ora} kann mit der Reißspannung nach Manns/Schneider gleichgesetzt werden (Fließen durch Längsrißbildung infolge Querkzugversagen).
- 5) Die Grenzexzentrizität der Spannungsergebnisse liegt bei $\sqrt{6}$. (Die Spannungsverteilung bei elastischem Materialverhalten (ungerissener und eingerissener Querschnitt), unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung ist dreieckig.)
- 6) Im Versagenszustand (β_{cu}) unter Druckbelastung ist der Querschnitt durchplastiziert (die Spannungsverteilung im Grenzzustand ist rechteckig).
- 7) Die Versagensspannung β_{cu} entspricht der Druckfestigkeit aus einem Druckversuch.
- 8) Die Bernoullische Hypothese kann auch für den gerissenen Querschnitt - unter Voraussetzung gleichförmig verteilter Lastwirkungen - als näherungsweise gültig angenommen werden.

4.2.3.3 Interaktionsbeziehungen von aufnehmbarer Normalkraft und aufnehmbarem Moment für den elastisch-teilflächenbelasteten und den plastisch-teilflächenbelasteten Rechteckquerschnitt

Auf Basis der obigen Annahmen werden die Interaktionsbeziehungen von aufnehmbarer Normalkraft (N) und aufnehmbarem Moment ($M = N \cdot e$) eines Rechteckquerschnitts für den Grenzfließzustand (Reißzustand I und II, Abb.4.2.8) und den Versagenszustand aufgestellt. Die Grenz- bzw. Versagenskurven lauten ⁶:

- für den ungerissenen, elastisch - druckbeanspruchten Querschnitt:

$$\Phi_{el} = \pm \frac{1}{6}(1 - N) - M = 0 \quad (4.2.5)$$

- für den eingerissenen, elastisch - druckbeanspruchten Querschnitt:

$$\Phi_{el,cr} = \pm \frac{1}{2}N \left(1 - \frac{4}{3}N\right) - M = 0 \quad (4.2.6)$$

⁶ Zu den Interaktionsbeziehungen eines Querschnitts aus Sprödmaterial sei auch auf die Arbeit von Furler [98] hingewiesen.

- für den längsgerissenen, plastisch - druckbeanspruchten Querschnitt:

$$\Phi_{pl,cr} = \pm \frac{1}{2} N (1 - N) - M = 0 \quad (4.2.7)$$

Hierbei gilt $N = b \cdot h \cdot \sigma_0$ und $M = b \cdot h^2 \cdot \sigma_0$. Die Interaktionsbeziehungen aus Gleichungen 4.2.5 bis 4.2.7 sind in Abb.4.2.9 eingetragen.

Das Diagramm besteht im wesentlichen aus zwei Interaktionskurven, die an der Normalkraftachse gespiegelt sind. Die innere zweiteilige Kurve bestehend aus einem Parabelast und einer Geraden grenzt die elastisch-teilflächenbelasteten ($\Phi_{el,cr}$) und die elastisch-vollflächenbelasteten (Φ_{el}) Querschnittszustände ein (dunkelgraue Fläche). Die äußere Interaktionskurve ($\Phi_{pl,cr}$) grenzt die plastisch-teilflächenbelasteten Querschnittszustände ab. Radial durch den Nullpunkt verlaufende Geraden repräsentieren verschiedene Exzentrizitäten der Spannungsresultierenden im Querschnitt.

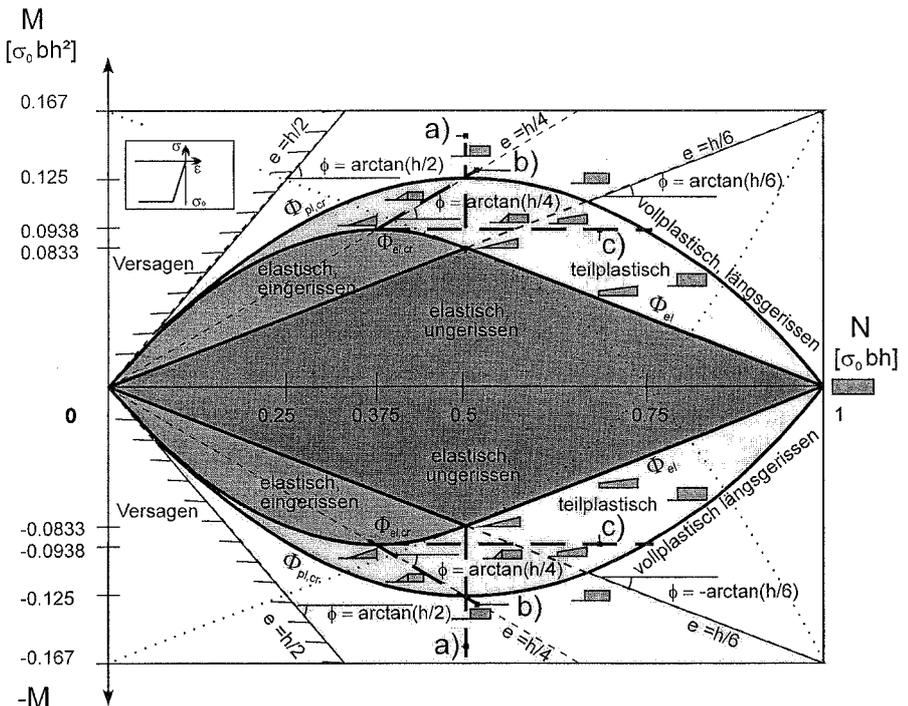


Abb.4.2.9: Allgemeines Interaktionsdiagramm für das aufnehmbare Moment (M) und die aufnehmbare Normalkraft (N) eines Rechteckquerschnittes aus nicht-zugfestem, elastisch-plastischem Material.

Im Bereich der zusammengesetzten, inneren Interaktionskurve (Φ_{el} und $\Phi_{el,cr}$) ist der Querschnitt nur durch Querrisse verändert. Die Teilkurven gehen am Schnittpunkt mit der Ursprungsgeraden, welche die Grenzexzentrizität zum eingerissenen Querschnitt $e = h/6$ ($\sigma \geq 0$) darstellt, ineinander über. Die äußere parabolische Kurve ($\Phi_{pl,cr}$) schließt die Querschnittszustände mit Quer- und Längsrissen ein. Sie entspricht der Versagenskurve nach Heyman (Abb. 3.2.17) bzw. Clemente [81] für einen im Druckbereich plastizierten Querschnitt.

Beide Interaktionskurven, die des elastischen und des plastischen Querschnitts ($\Phi_{el,cr}$) ($\Phi_{pl,cr}$), erreichen bei einer Exzentrizität von $e = h/4$ das relativ höchste Moment⁷. Bei Exzentrizitäten größer als $e = h/4$ verringert sich die Abtragung von Moment und Normalkraft überproportional, wie es auch aus dem Diagramm zur Formänderungsenergie (Abb.4.2.7) zu entnehmen ist. Die Interaktionskurven streben der Grenztangente der Exzentrizität $h/2$ im Ursprung entgegen.

Im Interaktionsdiagramm Abb.4.2.9 sind zusätzlich drei charakteristische Fließvorgänge für die Nebenbedingungen a) R bzw. $N = \text{const.}$, b) $e = \text{const.}$ und c) $M = \text{const.}$ als gestrichelte Linien eingetragen (Tabelle 4.2.1):

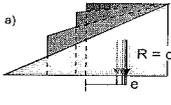
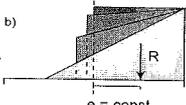
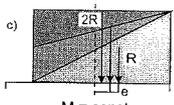
Spannungsverteilung			
Spannungsergebnisse	$R_1 = R_2 = R_3$	$R_1 < R_2 < R_3$	$R_1 < R_2 < R_3$
Exzentrizität	$e_1 < e_2 < e_3$	$e_1 = e_2 = e_3$	$e_1 > e_2 > e_3$
Übertragenes Moment	$M_1 < M_2 < M_3$	$M_1 < M_2 < M_3$	$M_1 = M_2 = M_3$

Tabelle 4.2.1: Schematisierte Spannungsverteilungen und zugehörige Einflußgrößen zu drei charakteristischen Fließvorgängen im Interaktionsdiagramm Abb.4.2.9.

Der erste a) gibt schematisch das Fließen im Querschnitt bei Gelenkbildung ($R_1 = \text{const.}$, $e_1 < e_2$, $M_1 < M_2$) wieder. Der zweite Vorgang b) zeigt das Fließen im eingerissenen Querschnitt unter Laststeigerung ($R_1 < R_2$, $e = \text{const.}$, $M_1 < M_2$), wie er in den hier durchgeführten Tragverhaltensuntersuchungen unter zunehmender Last lokal auftritt (z.B. im Scheitel, Abb.4.2.2.b) und c)). Der dritte Fließvorgang c) stellt den Querschnitt unter Laststeigerung aber konstantem, aufnehmbarem Moment ($R_1 < R_2$, $e_1 > e_2$, $M_1 = \text{const.}$), bzw. relativ zur aufnehmbaren Normalkraft abnehmendem Moment dar. Dieser Fließvorgang beschreibt die

⁷ Dies ist auch den Ergebnissen der materiell-nichtlinearen FE-Untersuchungen zu entnehmen (Abb.4.2.2), wo die Spannungsergebnisse, etwa in Feldmitte, diese Grenzexzentrizität $e = h/4$ nicht überschreitet.

reduzierte Momententragfähigkeit wie sie durch die Längsrißbildung gegeben ist. Er tritt dann ein, wenn größere Bereiche des Tragwerks mit Rissen durchsetzt sind, so daß eine Verlagerung der Stützlinie insgesamt stattfinden kann (Abb.4.2.2.d).

Die Fließgerade c) demonstriert im Interaktionsdiagramm, daß die Exzentrizität der Spannungsresultierenden bei einer Abnahme der Momentenübertragung im Querschnitt zurückgeht, wie es bei Delamination der Querschnitte eines Tragwerks gegeben ist.

4.2.4 Simulation des Rißverhaltens eines Bogens unter Eigengewicht

Zur Übertragung der zuvor gesammelten Eigenschaften zum Rißverhalten von Rechteckquerschnitten auf Gewölbe wird das Rißverhalten eines statisch unbestimmten Halbkreisbogens simuliert und untersucht.

Wie beim Balken liegt beim Bogen in Feldmitte ein näherungsweise reiner Längsspannungszustand (Normalkraft und Biegung) vor, so daß dort die Rißbildung weitgehend unbeeinflusst von der Wirkung der Querkraft ist und für Vergleiche mit den theoretisch hergeleiteten Eigenschaften geeignet ist. Die vier charakteristischen Phasen der Rißbildung und Systemänderung stellen sich folgendermaßen dar (Abb.4.2.10):

a) Bedingt durch die Anfangsexzentrizität der Spannungsresultierenden im Querschnitt mit elastischem Verhalten von $e > h/6$ und der Erhöhung der Lasten bilden sich Einrisse (Scheitel), welche den statisch wirksamen Querschnitt verringern.

b) Die Querrisse im Scheitel dehnen sich bis etwa $1/4$ der Querschnittshöhe aus, und die Exzentrizität der Spannungsresultierenden liegt dann bei $h/4$. In dieser Position ist die relative Momententragfähigkeit im Querschnitt maximal (Abb.4.2.9).

Im Auflagerbereich und über den Auflagern bilden sich ebenfalls Längsrisse .

c) In der Längsrissszone des Scheitelbereichs verändert sich die Spannungsverteilung hin zu einer trapezförmigen Charakteristik (Delamination des Querschnitts).

d) Mit Ausdehnung der Längsrissszonen stellt sich eine ausgeprägt rechteckige Spannungsverteilung im Scheitelquerschnitt ein. Die Stützlinie verlagert sich nun insgesamt nach innen. Die Positionen der Spannungsresultierenden fallen mit der Kettenlinie des Kreisbogens unter Eigengewicht zusammen, die möglichst geringe Exzentrizitäten zur Schwerachse des Tragwerks aufweist. Da sich die statisch wirksamen Querschnittsflächen nunmehr wieder vergrößert haben und die Spannungen zurückgehen, ist der Bogen in bezug auf die inneren Beanspruchungen als konsolidiert zu bezeichnen.

Die kennzeichnenden Stufen des Rißverhaltens beim Bogen entsprechen qualitativ denen des Balkens. Wegen der größeren Schlankheit des Bogens ist die Ursache der Längsrisse hauptsächlich im Querzugversagen infolge hoher Normalspannungen zu suchen. Die Rißzonen sind ausgeprägter lokalisiert als beim Balken.

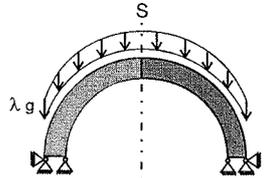
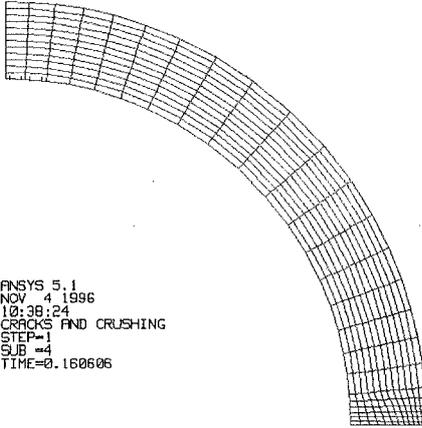
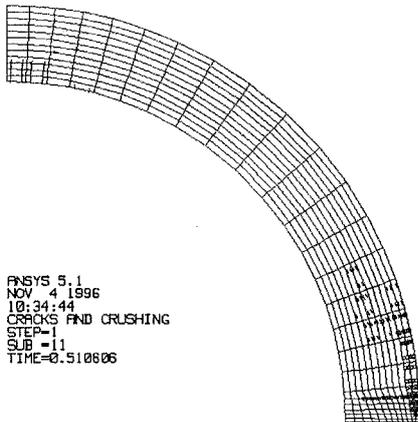
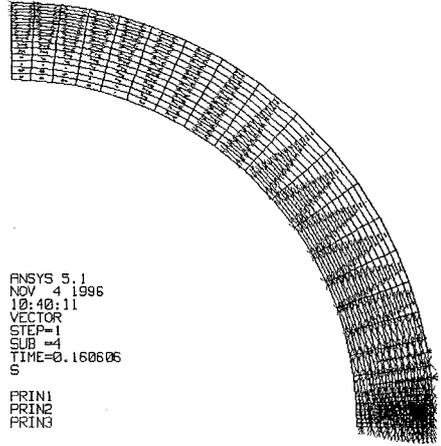


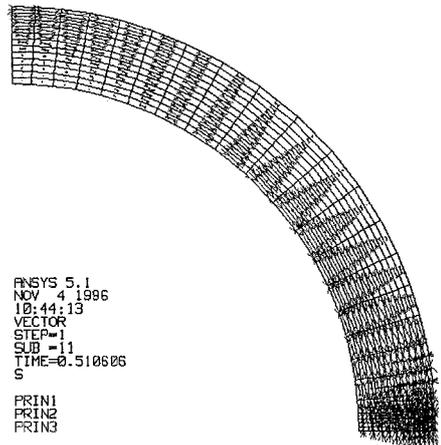
Abb. 4.2.10: Statisches System des Bogens der FE-Rechnung.

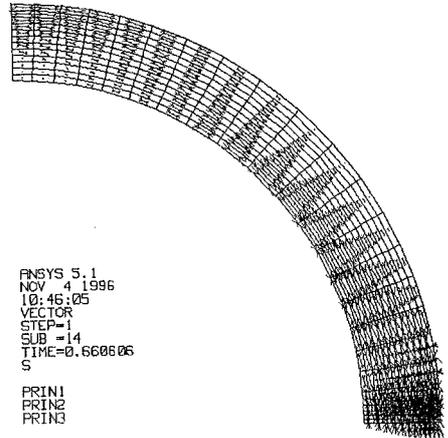
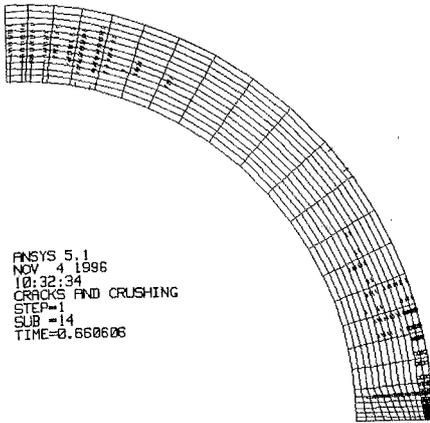


a)

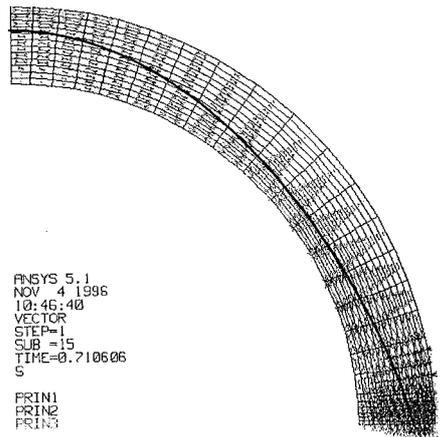
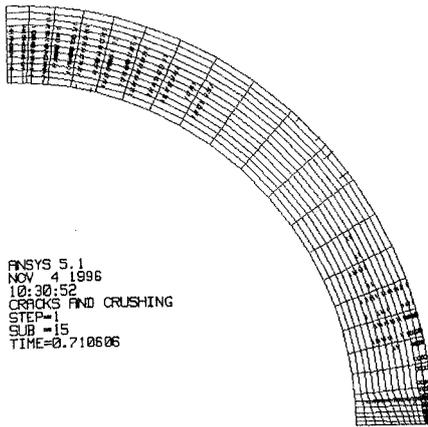


b)





c)



d)

Abb.4.2.10: Rißzustände und Hauptspannungsverteilung infolge sukzessiver Erhöhung des Eigengewichtes: a) erster Einriß, b) maximaler Einriß, c) Längsrißbildung, d) Längsrißbildung und Nivellierung der Spannungsverteilung in den Querschnitten, sowie eingetragene Kettenlinie des Kreisbogens.

Bis zur numerischen Versagenslast treten keine wesentlichen Systemänderungen ein. Das Versagen des Bogens ergibt sich bei dieser Rechnung bei 1.52-facher Eigengewichtslast, wobei die vorgegebene maximale Druckfestigkeit von $\beta_{cu} = 3 \text{ N/mm}^2$ an der maximal beanspruchten Stelle nur zu 58% ausgenutzt ist. Der Vergleich mit einer Überslagsrechnung mit Hilfe der Stützzlinie ergibt eine Unterschätzung der Tragfähigkeit um rund 46%.

Eine gleichmäßige Nivellierung der Spannungen kann wegen der lokal unterschiedlichen Ausdehnung der Reißzonen und ihrer Abhängigkeit von der FE-Diskretisierung und wegen der Wirkung von Restreibung zwischen den Rissen, die bei der Simulation berücksichtigt wird, nicht erreicht werden.

4.2.5 Schematisches Interaktionsdiagramm der aufnehmbaren Normalkraft und des aufnehmbaren Moments für den gerissenen und ungerissenen Querschnitt aus nicht-zugfestem Material

Die kennzeichnenden Eigenschaften des Reißverhaltens von Querschnitten aus Sprödmaterial und besonders die Grenzzustände lassen sich mit Hilfe modifizierter Interaktionsbeziehungen des aufnehmbaren Momentes und der aufnehmbaren Normalkraft schematisch darstellen (Abb.4.2.11). Hierzu werden dem rißbedingten Fließbeginn und dem Versagenszustand entsprechende Kurven zugeordnet:

Die Interaktionskurven Φ_y und $\Phi_{y,cr}$ geben den Fließbeginn an. Er wird mit der Reißfestigkeit nach Manns/Schneider [126] definiert. In Anlehnung an die Ergebnisse für besonders spröde Werkstoffe (siehe S.28, 29) wird hier der Wert für β_R mit 60% der einaxialen Druckfestigkeit angenommen:

$$N_{y,cr} = \sigma_{cra} \cdot b \cdot h = 0.6 \cdot \sigma_{cru} \cdot b \cdot h \quad (4.2.8)$$

Es ergeben sich für den Fließbeginn des ungerissenen Querschnitts und den eingerissenen Querschnitts:

$$\Phi_y = \pm \frac{1}{10} \left(1 - \frac{5}{3} N\right) - M = 0 \quad (4.2.9)$$

$$\Phi_{y,cr} = \pm \left(\frac{1}{2} N - \frac{10}{9} N^2\right) - M = 0 \quad (4.2.10)$$

Die Grenze, bei der das Querschnittsfließen unter Längsrißbildung stattgefunden hat, wird durch eine Interaktionskurve des plastizierten Querschnitts mit eingesetzter Fließgrenze wiedergegeben:

$$\Phi_{y,cr,max} = \pm \left(\frac{1}{2} N - \frac{5}{6} N^2\right) - M = 0 \quad (4.2.11)$$

Für die Grenztragfähigkeitskurve bzw. Versagenskurve gilt:

$$N_u = \sigma_{\text{crü}} \cdot b \cdot h \quad (4.2.12)$$

und:

$$\Phi_{\text{crü}} = \pm \left(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} N^2 \right) - M = 0 \quad (4.2.13)$$

Sie ist identisch mit der Versagenskurve Gl.4.2.7.

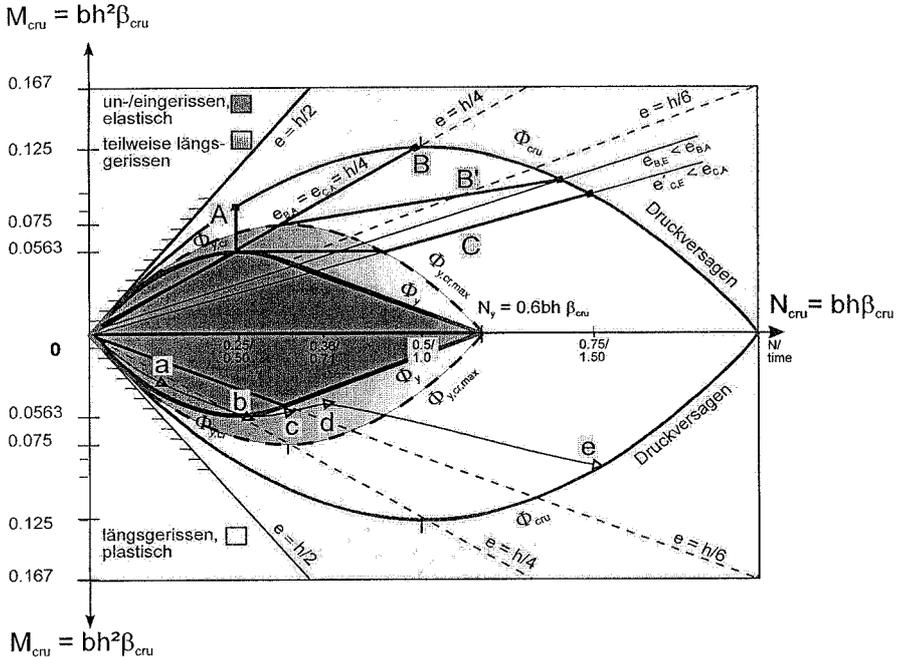


Abb.4.2.11: Schematisches Interaktions- bzw. Zustandsdiagramm für das aufnehmbare Moment und die aufnehmbare Normalkraft eines Rechteckquerschnittes aus nicht-zugfestem Material mit drei schematisierten Fließvorgängen (Tab.4.2.1) (obere Hälfte) und Fließvorgang im Scheitel des Bogens aus Abb.4.2.10 nach den Ergebnissen der FE-Simulation des Bogens (Abb.4.2.10) (untere Hälfte).

Im Interaktionsdiagramm Abb.4.2.11 sind in der oberen Hälfte die drei prinzipiellen Fließvorgänge aus den entsprechend schematisierten Belastungsabläufen nach Tabelle 4.2.1 eingetragen :

Linie (A) stellt das Fließen in einem Gelenkpunkt (z.B. Scheitreljenk eines Bogens) dar (lokales Fließen), wenn sich (nach einer Vorbelastung bis zur Fließgrenze) durch äußeren Zwang die Exzentrizität der Spannungsresultierenden erhöht, wie es beispielsweise bei einem Bogen im Scheitelquerschnitt durch horizontale Auflagerverschiebung auftritt. Das

Interaktionsdiagramm zeigt, daß die maximale Ausmitte der Spannungsergebenden bzw. die Bruchfestigkeit σ_{crit} verhältnismäßig früh erreicht wird.

Die Linie (B) gibt das Fließen eines Querschnitts wieder, wenn sich die Anfangsexzentrizität während des Vorgangs nicht ändert, weil es sich um lokales Fließen handelt. Wenn zusätzlich die Nachbarquerschnitte (globales Fließen, Linie (B')) mit Längsrissen durchsetzt sind, führt die reduzierte Momenten Tragfähigkeit dieser Bereiche zu einer Verlagerung der Spannungsergebenden zur Querschnittsmitte.

Die Linie (C) stellt den Verlauf dar, wenn die relative Momentenübertragbarkeit im Querschnitt während des Fließens abnimmt, wie es durch Delamination des Querschnitts gegeben ist. Hierbei plastizieren mehrere Querschnitte eines zusammenhängenden Bereiches (globales Fließen), die mit Längsrissen durchsetzt sind. Nach Abschluß des Fließvorgangs hat sich die Exzentrizität der Resultierenden reduziert. Dies bedingt eine Vergrößerung der statisch wirksamen Fläche, was sich im Interaktionsdiagramm in einer größeren aufnehmbaren Normalkraft widerspiegelt. Sinngemäß verringern sich hierdurch die Beanspruchungen der Querschnitte, wodurch zusätzliche Tragreserven geschaffen werden.

In der unteren Hälfte des Diagramms ist die Veränderung der Lage und Größe der Spannungsergebenden im Scheitel des Bogens aus der FE-Simulation (Abb.4.2.10) eingetragen. Es zeigt sich hier, wie die Anfangsexzentrizität der Spannungsergebenden von $h/3$ (a) im elastischen Bereich sich fortwährend hin zum Grenzwert $h/4$ verlagert (b). Der Fließvorgang setzt mit der Längsrissbildung ein (c), wobei sich die Exzentrizität stark verringert und gleichzeitig die Momentenabtragung (d). Die weitere Laststeigerung bis zum numerischen Versagen verläuft näherungsweise auf einer Geraden (e).

4.2.6 Auswertung und Zusammenfassung

Materiell-nichtlineare Finite-Element-Methoden ermöglichen die Untersuchung beliebiger Lastfälle auf Gewölbe entsprechend ihrer Einwirkung in zeitlichem Ablauf bzw. unter sukzessiver Steigerung der Last, so auch der Eigengewichtsbelastung auf die Tragstruktur. Es können dabei die Veränderungen der ganzen Tragstruktur ('System veränderlicher Gliederung') unter der wirkenden Belastung nachvollzogen werden, wie auch die Systemänderungen in den Querschnitten.

Es zeigt sich, daß einige der vereinfachenden Annahmen, die im Zusammenhang mit den Stützlinienmethoden und den Traglastmethoden nach Heyman postuliert wurden, und die

häufig als wirklichkeitsnahe Eigenschaften verallgemeinert werden, nur im Zusammenhang mit der Anwendung dieser Methoden zu rechtfertigen sind:

- Eine grundsätzliche Untersuchung eines Verschiebungslastfalls, wie es die Theorie von Heyman beinhaltet, bedeutet eine Manipulation des untersuchten Tragsystems. Die Postulierung von Auflagerverschiebungen als Hauptlastfall ist daher nur sinnvoll, wenn diese im konkreten Fall tatsächlich relevant sind.

- Unter verteilten Lasteinwirkungen (z.B. Eigengewicht) bilden Tragwerke aus Sprödmaterial a priori *keine* diskreten Gelenke, sondern Rißzonen aus. Für diese Belastungsart kann deshalb die Bernoulli'sche Hypothese auch bei Rißbildung als näherungsweise gültig angenommen werden.

- Das Einreißen des Querschnitts (Biegezugversagen) ist bei Wölbtragwerken aus Sprödmaterial unter der Einwirkung von gleichmäßig verteilten Lasten begrenzt. Die Spannungsergebnisse des elastischen und des plastizierten Rechteckquerschnitts überschreiten den theoretischen Wert $e = h/4^8$ nicht, weil bei diesem Wert der relative Widerstand des teilflächenbelasteten Querschnitts maximal ist und bei größeren Exzentrizitäten überproportional abfällt.

- Das Materialverhalten nur ein- bzw. quergerissenen und sonst ungeschädigten Querschnitt eines Tragwerkes aus Sprödmaterial ist näherungsweise elastisch.

- Das Fließen eines Querschnitts unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung aus Sprödmaterial steht nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit einer Grenzspannung. Vielmehr ist die Bildung von Längsrissen und der Zerfall des Querschnitts in lamellenartig geschichtete Einzelquerschnitte (Delamination) mit Verringerung der Momententragwirkung die Ursache. Da die Risse entlang den Hauptspannungslinien verlaufen, ist die Rißbildung vorwiegend auf Querkzugversagen zurückzuführen. Die Fließspannung kann mit der sogenannten Rißspannung nach Manns/Schneider verglichen werden, bei der das Gefüge eines Druckprüfkörpers durch Rißbildung weitestgehend zerstört ist.

8 Siehe Interaktionsdiagramme Abb.4.2.9 und Abb.4.2.11. In Modellversuchen oder auch FE-Simulationen kann dieser Wert geringfügig abweichen.

- Beim Querschnittsfließen durch Delamination verringert sich die Biegetragfähigkeit zunächst des einzelnen Querschnitts. Tritt globales Fließen ein, d.h. es fließen mehrere Querschnitte gleichzeitig, verringert sich die Exzentrizität der Spannungsergebnisse. Hierdurch vergrößert sich die statisch wirksame Fläche und die inneren Beanspruchungen gehen zurück. Die Stützlinie verlagert sich dabei hin zur Systemachse.

Beim Druckversagen kann ein plastizierter Querschnitt angenommen werden. Als Versagensspannung β_{qu} ist die Druckfestigkeit aus einem Druckversuch einzusetzen.

Schematisiert stellen sich die Systemveränderungen im Querschnitt und die zugehörigen Spannungsverteilungen unter zunehmender Belastung folgendermaßen dar:

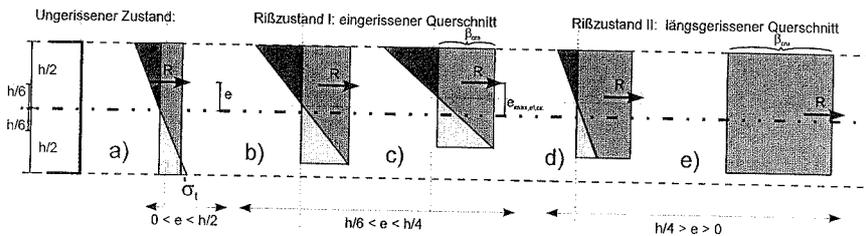


Abb.4.2.12 Schematische Darstellung der Spannungszustände in einem Rechteckquerschnitt aufgrund zunehmender gleichmäßig verteilter Belastung (z.B. Eigengewicht) mit Verlagerung der Resultierenden.

Nach Überschreiten der Zugfestigkeit am Rand (a) wandert die Resultierende dem Extrados entgegen (b). Im Gegensatz zu Querschnitten unter Zwangseinwirkungen mit Ausbildung von Gelenken ist diese Bewegung begrenzt und pendelt sich bei einer Exzentrizität von ungefähr $h/4$ (c) ein. Die zunehmende Längsrißbildung führt zur Delamination des Querschnitts und zur Ausbildung einer trapezförmigen Spannungsverteilung (d). Mit Ausdehnung der Zonen delaminierter Querschnitte im Tragwerk verlagern sich die Spannungsergebnisse zur Mittelachse der Querschnitte hin. Die einhergehende Verringerung der Exzentrizität der Spannungsergebnisse bedingt eine Vergrößerung der Kraftübertragungsfläche, wodurch wiederum die Beanspruchungen im Querschnitt verringert werden (e). Die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Spannungsergebnisse der einzelnen Querschnitte strebt damit der Form der Kettenlinie der betreffenden Lastkonfiguration entgegen, die minimale Exzentrizität zur Systemschwerachse aufweist (Abb.4.2.10.d). Hierdurch gewinnt das Tragsystem eine bedeutende zusätzliche Beanspruchungsreserve unterhalb der Druckfestigkeit.

Teil II Studien

5.0 Zur frühen Wölbkunst Ägyptens und des Fruchtbaren Halbmondes

Es gibt nur wenige Bauwerke und Ruinen der frühen Kulturen Ägyptens und des vorderen Orients, die sich bis in unsere Zeit erhalten haben. Dennoch liefern sie ein eindrucksvolles Bild von der Architektur der frühesten Kulturvölker, von den vielfältigen Bau- und Konstruktionstechniken und von der hochentwickelten Wölbkunst. Bekannt waren damals schon das 'echte Gewölbe', das zumeist aus luftgetrockneten Ziegeln oder bearbeiteten Natursteinen (Abb.5.1.1.a) (sogenannte: 'Keilsteintechnik') gebaut wurde, und das 'unechte Gewölbe' aus horizontal geschichteten und übereinander 'auskragenden' Steinen ('Kragtechnik') (Abb.5.1.1.b)¹. Darüberhinaus erfuhr die Entwicklung der Wölbtechnik gerade in Ägypten und im vorderen Orient vielfältige weitere Impulse.

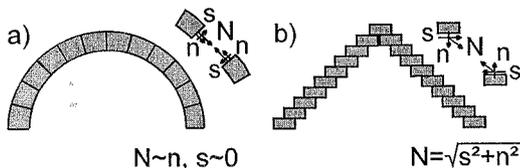


Abb. 5.1.1 a) 'Echtes' Gewölbe und b) 'unechtes', bzw. Kraggewölbe.

5.1 Ägypten

5.1.1 Nubische Gewölbe

Eine besondere Gewölbebauart ist das aus Oberägypten (= Nubien) stammende, sogenannte 'Nubische Gewölbe' (Abb.5.1.2), ein echtes Gewölbe, das sich durch seine spezifische Bauweise und Formgebung von den gewöhnlichen Gewölbearten unterscheidet.

5.1.1.1 Nubische Wölbtechnik

Die ältesten Gewölbe dieser Art stammen aus der 1.Dynastie (um 3000 v.Chr.) und finden

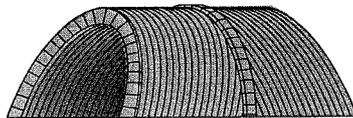


Abb.5.1.2:Nubisches Tonnengewölbe

¹ Ersteres trägt die aus der Belastung herrührenden Kräfte über Normkraftbeanspruchung ab, letzteres, bedingt durch die horizontale Fugenlage, über Normkraft-, Biege- und Schubbeanspruchungen.

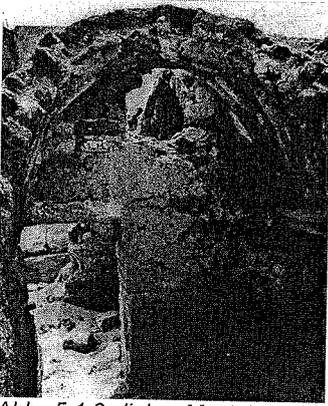


Abb. 5.1.3: links: Mastaba des Desi/Gizeh, 6. Dynastie (~2200v.Chr.), aus Vandersleyen [276]. rechts: Vorratsräume zum Totentempel von Ramses II. (1290-1224 v.Chr.), Theben, aus Mainstone [38].

sich in Helwan², in Gizeh in der Mastaba des Desi (6. Dynastie, ~2200v.Chr.) (Abb.5.1.3, links) und in Theben in Form der Vorratsräume zum Totentempel von Ramses II. (1290-1224 v.Chr., 19. Dynastie) (Abb.5.1.3.rechts). Die Nubische Wölbtechnik wird bis in die heutige Zeit in fast unveränderter Weise praktiziert³. Sie läßt auf eine tiefgreifende Bauerfahrung schließen, die auf das Ziel gerichtet war, die einzusetzenden Mittel zu minimieren und die Standfestigkeit und Haltbarkeit zu maximieren. Schichten von sonnengetrockneten Lehmziegeln werden in einer zur Vertikalen geneigten Ebene (ca. 20°)⁴ zu einem Tonnengewölbe vermauert. Wegen der Verwendung flacher, plattenartiger Lehmsteine mit aufgerauter Oberfläche⁵ und eines schnell abbindenden Mörtels (z.B. aus Gips), dessen Kohäsivität in feuchtem Zustand groß genug ist, die Steine in Position zu halten, und wegen des Aufbaus aus einzelnen Bögen in einer ovalen⁶ Form, bedarf diese Bauweise nur einfacher Lehrgerüste und überhaupt keiner Schalung. Die Nubische Wölbtechnik zählt zu den 'freihändigen Wölbtechniken', die für das Bauen in ariden Zonen mit geringem Holztertrag wie in Nordafrika eine bedeutende ökonomische Dimension besitzt.

² Siehe Van Beek [275] S. 120.

³ Siehe hierzu Minke [231], S. 238-250. Er hat die Nubische Architektur intensiv studiert und versucht diese Technik wegen ihres hohen ökonomischen Anspruchs auch in Mitteleuropa zu beleben.

⁴ Ebenda [231]. Im Zuge der Aufarbeitung dieser Wölbtechnik wurden die genauen Herstellregeln in Versuchen untersucht und verifiziert.

⁵ Siehe hierzu Van Beek [275] S.120.

⁶ 'Oval' wird hier als Attribut für eine Form, ähnlich einer Ellipse benutzt.

5.1.1.2 Ovalform der Tonnengewölbe

Die charakteristische ovale Form der Tonnengewölbe tritt schon in frühester Zeit auf wie etwa in der Sarkkammer des Dachschr (4. Dynastie (~2480 v. Chr.))⁷ und in den Gewölben der Kapelle des Thutmosis I. im Totentempel der Königin Hatshepsut (18. Dynastie (1480 v. Chr.)) (Abb. 5.1.4). Sie ist ein Hinweis darauf, daß den nubischen Baumeistern der Zusammenhang zwischen der Form und einem günstigen Tragverhalten eines entsprechend gekrümmten Bogens bewußt war. Obwohl den Ägyptern bereits umfangreiche Kenntnisse in der Geometrie nachgewiesen worden sind⁸, ist nichts bekannt darüber, wie sie die statischen Eigenschaften bestimmter Bogenformen erkannt haben könnten. Dementgegen gibt es zum Ursprung der Ovalform und ihrer Herstellung verschiedene Theorien. Sie soll auf die Nachahmung des Umrisses reetgedeckter Hütten, wie sie in Ägypten zu allen Zeiten vorkamen zurückzuführen sein⁹, bzw. allgemein aus der Anwendung gebogener Stäbe als Lehrbögen resultieren. Archäologen und Architekturhistoriker verschiedener Epochen versuchten, die



Abb. 5.1.4: Kapelle des Thutmosis I. im Totentempel der Königin Hatshepsut (18. Dynastie (1480 v. Chr.)), nach Lloyd et al. [223].

Gewölbeform auf geometrischem Weg mit Hilfe zusammengesetzter Kreisbogenkonstruktionen herzuleiten. Choisy¹⁰ etwa gibt eine Korbbogenkonstruktion auf Basis des rechtwinkligen Dreiecks mit dem Seitenlängenverhältnis 3:4:5 an, die auch zur Landvermessung genutzt wurde¹¹. Wahrscheinlich war auch die Konstruktion einer Ellipse mit Hilfe einer an zwei Polen verankerten Schnur bekannt, so daß hiermit ovale Formen erzeugt werden konnten. Es ist aber ebenso möglich, daß die ägyptischen Baumeister die Analogie von einem hängenden Seil und einer hieraus abzuleitenden Bogenform empirisch gelernt und verstanden hatten. Sieht man von den mathematischen

⁷ Nach Vandersleyen [276].

⁸ Die großen griechischen Mathematiker Pythagoras und Thales wurden in Ägypten ausgebildet (nach Herodot). Hierzu Cantor [5], S. 52 ff.

⁹ Siehe Van Beek [275], S. 112.

¹⁰ Siehe Choisy, A. [187], S. 53.

¹¹ Siehe Cantor [182], S. 64.

Eigenschaften der 'Kettenlinie' ab und betrachtet sie ausschließlich als statische Form, die sich infolge der Wirkung ihres Gewichtes sichtbar einstellt, so handelt es sich um eine nicht besonders schwierige Abstrahierungsaufgabe¹², die unabhängig von einer mathematischen Ausdrucksweise umgesetzt werden konnte. Mit Hilfe einer 'Gipslehre',¹³ einem mit Gips benetzten Seil, das nach Aushärten eine vorgegebene Geometrie beibehält, war es möglich, eine Kettenlinie zu reproduzieren. Hieraus konnte dann zur Herstellung größerer Wölböffnungen eine feste Holzlehre gebaut werden.

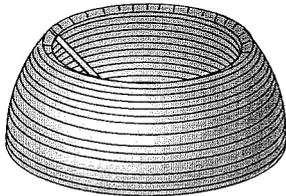


Abb. 5.1.5: Ägyptisch-orientalische Kuppelbauweise in Ringschichten.

Bei der Herstellung hemisphärischer Kuppeln mußte die fehlende Bogenstützwirkung in den höheren, zunehmend senkrecht stehenden Schichten mit einer Ringschalung oder anderen Hilfskonstruktionen (z.B. keilförmigen Steinen¹⁶,) aufgefangen werden. Wenn dies nicht gemacht wurde, führte das ägyptisch-orientalische Wölbprinzip zu Formen mit einem zur Vertikalen mäßig geneigten Meridian, also zu Spitz- oder Zwiebelkuppeln oder zur Ausbildung eines Opaions. Reliefs aus dem Palast des Assyrikerkönigs Sanherib (704-681) in Ninive aus dem 7. Jahrhundert v. Chr. zeigen assyrische

5.1.2 Ägyptisch-orientalische Kuppelgewölbe

Ebenfalls ausgehend von Ägypten und dem vorderen Orient¹⁴ entwickelte sich zum Bau von Kuppeln eine hinsichtlich der verwendeten flachen Lehmziegel und des Gipsmörtels eine mit dem Nubischen Verfahren verwandte Methode¹⁵. Hierbei wurde die Kuppel aus

liegenden Ringschichten entlang dem Meridian auf-

¹²Die mathematische Herleitungen der Kettenlinie wie sie D.Gregory und J.Bernoulli im 17.Jhdt. bzw. Anfang des 18.Jhdt. erarbeiteten, waren die Antwort auf mathematisch formulierte Problemstellungen. Im Falle von Bernoulli war diese zwar vordergründig als baupraktisches Problem dargestellt ('Die Form eines Bogens, der ohne Mörtel steht'; siehe Kap.3, S.36), jedoch ohne auf die allgemeine Lösung eines statischen Problems hin gerichtet zu sein. Es war das Verdienst von Robert Hooke gerade die für das Bauen entscheidende physikalische Eigenschaft der Kettenlinie einer Gleichgewichtsform entdeckt zu haben.

¹³Es handelt sich hierbei um ein Verfahren, das in Persien bis heute praktiziert wird (Čejka [185], bzw. Godard). Obwohl dort nichts näher beschrieben wird, legt die enge Verknüpfung der assyrischen und persischen Wölbtechnik mit der ägyptischen nahe, daß auch dieses Verfahren aus Ägypten stammt.

¹⁴Sie sind auf zahlreichen Papyrusrollen und Wandbildern dargestellt; hierzu auch Cantor [5], S.57.

¹⁵Minke [231] S.246 nennt diese Methode zwar 'Nubische Kuppelbaumethode'. Diese Technik wurde aber im ganzen vorderorientalischen Raum seit Jahrtausenden praktiziert, so daß ihre Herkunft nicht mehr zu rekonstruieren ist.

¹⁶Ebenda [231] S.247.

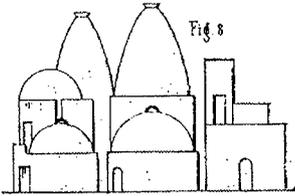


Abb.5.1.6: Darstellung von Kuppelhäusern auf einem Wandrelief aus dem Palast des Assyrenkönigs Sanherib, 6.Jhd.v. Chr. Nach Egle [9].

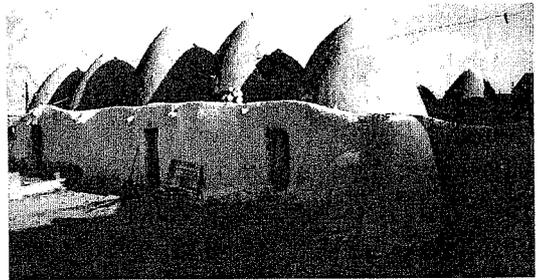


Abb.5.1.7: Syrische Lehmkuppelhäuser in Aleppo, aus Minke [231].

Kuppelhäuser, die in ihren Formen genau diesem Kanon entsprechen (siehe auch Abb.5.1.6). Als Bautechnik gewöhnlicher Behausungen hat sich die Kuppelbauweise in Ringschichten in gleicher Technik bis heute erhalten (Abb.5.1.7). Sie erfuhr in der Georgskirche von Ezra/Syrien (beendet 515) eine herausragende Anwendung. Dort wurde das Problem der starken Neigung der Ringschichten im oberen Kuppelbereich durch eine dem Meridianverlauf entgegengeneigte, fast horizontale Schichtung der Steine¹⁷ wie bei einem Kraggewölbe gelöst (Abb.5.1.8). Die Ziegelkuppel im Kloster von Mar Gabriel in Der el'Amr (um 512) ist ein Beispiel einer ringgeschichteten Kuppel mit einem Opaion und eines der frühesten Beispiele von Kuppeln aus Ziegelmauerwerk¹⁸(Abb.5.1.9).

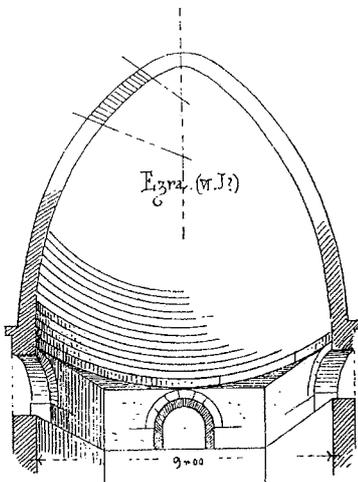


Abb.5.1.8: Georgskirche in Ezra (515) mit angedeuteter Schichtanordnung des Mauerwerks nach Durm [205].

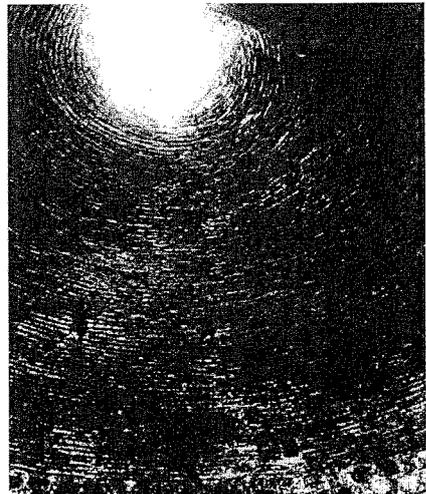


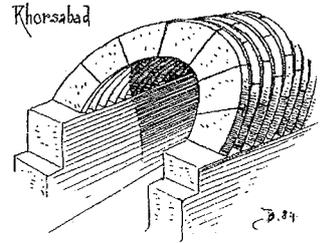
Abb.5.1.9: Ziegelkuppel im Kloster Mar Gabriel in Der el' Amr, 6.Jhdt., aus Deichmann [195].

¹⁷Auch 'pseudo-radiale Schichtung' genannt.

¹⁸Deichmann [193], S.744/745.

5.2 Assyrien

Sowohl die Kuppelgewölbe als auch die Tonnengewölbe auf dem Gebiet des früheren Assyriens zeigen eine klare prinzipielle Verwandtschaft mit Konstruktionen der Nubischen Wölbtechnik. Es handelt sich meist um Natursteingewölbe, die erhalten sind, weil nur diese der Zeit und der Witterung unbeschadet widerstehen konnten. Man kann davon ausgehen, daß auch im assyrischen Raum die originale Nubische Technik mit Lehmziegeln der Standard beim Bau gewöhnlicher Häuser war¹⁹. Die ältesten Gewölbe sollen auf das zweite Jahrtausend vor der Zeitrechnung zurückgehen, also auf die Zeit des mittelassyrischen Reiches (1375-1047 v.Chr.)²⁰. Die später entstandenen Kanalbauten im neuassyrischen Khorsabad (7. bis 8. Jhd. v.Chr.) (Abb. 5.2.1) sind in ähnlicher Art mit zur Vertikalen geneigten Schichten überwölbt. Die Querschnitte haben teils spitzbogige und teils runde Formen. Wegen der geringeren Spannweite bestehen sie aus bogensegmentförmigen Platten aus behauenen Naturstein.



Assyrische Construction.

Abb. 5.2.1: Assyrischer Leitungskanal nach Durm [203].

Während die Römerherrschaft im Orient seit ca. 70 v.Chr. bei Repräsentativbauten zu einer zeitweiligen Verdrängung und Vermischung der traditionellen Bautechnik, insbe-

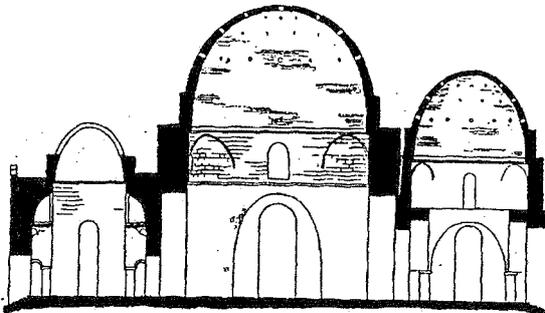


Abb. 5.2.2: Palast zu Sarvestan (4. Jhd.) nach Bormann [4].

sondere in den mittelmeernahen Gebieten wie der Levante, führt²¹, erlebt außerhalb des Einflußgebietes der Römer, im Neupersischen Reich, die Wölbtechnik nach dem Nubischen Prinzip eine Renaissance. Die Unterschiede zur originalen Bauweise liegen auch hier

¹⁹Auch Cejka [185] geht von einer Standardarchitektur aus Lehmziegeln im Fruchtbaren Halbmond aus, S.39.

²⁰Tell al Rimah, dort sollen sogar vielerlei Gewölbe mit schräggestellten Ziegellagen gefunden worden sein. Van Beek [275], S. 122.

²¹Hierzu Deichmann [195], S.71.

in der Verwendung von gebrannten Ziegeln statt Luftziegeln und im Größenmaßstab der Gebäude. Das Nubische Wölbprinzip und das ägyptisch-orientalische Kuppelbauprinzip wurden hier nämlich im Palastbau eingesetzt. Die Bogen-, Tonnengewölbe- und Kuppelkonstruktionen der Paläste der Sassaniden²² in Firuzabad, Sarvistan (beide 4.Jhd.) (Abb.5.2.2), Damghan²³ und in Ktesiphon (6.Jhd.) übertreffen die traditionellen Dimensionen (bis ~10m) um ein Mehrfaches (Ktesiphon 25,6m).

Die Nubische Wölbtechnik blieb in der omayyadischen Architektur der syrischen Wüstenschlösser von Msatta und Qasr at-Tuba (743/744) erhalten, die Bogenformen entwickelten sich dort jedoch hin zum Spitzbogen.

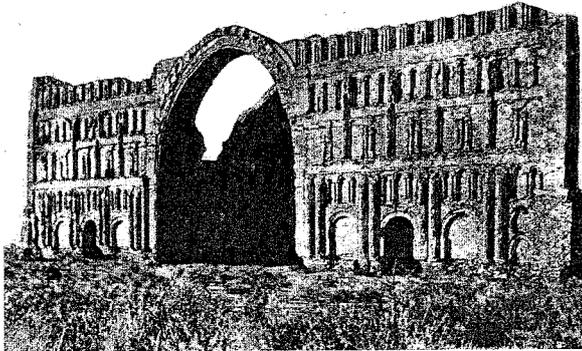


Abb. 5.2.3: Der Palast Taq i Kisra von Ktesiphon, Mitte 6.Jhd., nach Dieulafoy [196].

5.2.1 Das grosse Tonnengewölbe des Sassanidenpalastes von Ktesiphon

Neben dem Bauprinzip weisen die Form und der Schichtaufbau des Gewölbes des großen tonnenüberwölbten Iwans (Audienzsaal) im Palast von Ktesiphon (südlich von Bagdad) Ähnlichkeit mit den mindestens²⁴ eineinhalb Jahrtausende früher entstandenen Vorratsgebäuden im Tempel für Ramses II auf. Die Mittellinie folgt einer ovalen Kurve, in etwa 2/3 der Höhe wechselt das horizontal geschichtete, leicht auskragende Mauerwerk (in liegender Vermauerung) über zu radial geschichtetem Mauerwerk (in stehender Vermauerung). Durm [205] hatte diese konstruktive Ähnlichkeit erkannt und versuchte mit

²²Die Sassaniden sind das den Parthern folgende Herrschergeschlecht (seit 224 v.Chr.).

²³Siehe hierzu Yarshater [285], p. 1057-1071.

²⁴Über die Entstehungszeit des Sassanidenpalastes herrscht Unsicherheit. Er wird wegen stilistischer Merkmale (Sarre/Herzfeld [259]) der Dynastie Shapurs I (241-272) zugeordnet. Wahrscheinlicher jedoch ist der Palast unter Khushrau I. (531-579) gebaut worden. Hierauf weist u.a. die Namensgebung hin. Die volkstümlichen Benennung 'Taq i Kishra' spricht dafür, denn sie ist als 'Bogen des Khusrau' zu übersetzen; siehe Yarshater [285] und Reuther [247].

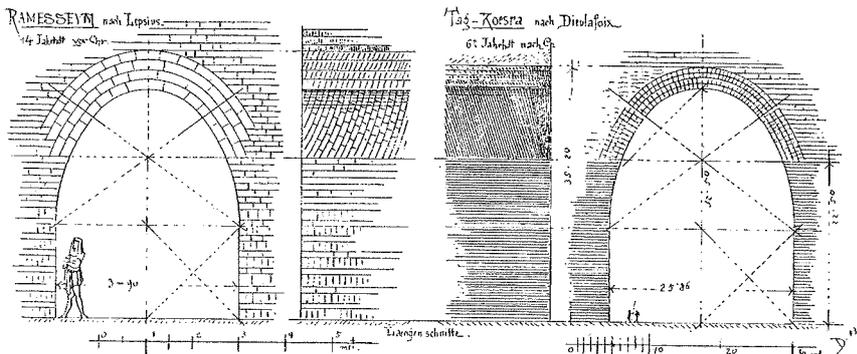


Abb.5.2.4: Vergleichsskizze Durm's [203] der Gewölbe der Vorratsbehälter in Ramesseum/Theben und des Tonnengewölbes des Iwans des Palastes von Ktesiphon.

einer Korbbogenkonstruktion ähnlich jener von Choisy (Kap.5.1.1.2) die Kongruenz der Gewölbe in Form und Gliederung nachzuweisen (Abb.5.2.4)²⁵. Es ist bemerkenswert, daß trotz der Vielzahl größerer und kleinerer Portale und Öffnungen am Palast von Ktesiphon, nur das große Tonnengewölbe des Iwans in ovaloider Form gebaut wurde, die übrigen Gewölbe sind kreisförmig. Man muß annehmen, daß die Baumeister entsprechend der monumentalen Bauaufgabe bewußt eine statisch vorteilhafte Form zur Anwendung kommen lassen wollten.

Die Archäologen Sarré und Herzfeld [258] unternahmen 1911 eine Expedition nach Ktesiphon und berichten erstmals ausführlich über die bautechnischen und baukonstruktiven Aspekte, die verwendeten Materialien und die Maßgrundlage²⁶ des Gebäudes. In ihrem Bericht wird die Gewölbeform des Iwans als 'parabelförmig' bezeichnet, wobei anzunehmen ist, daß mit dieser allgemeinen Beschreibung der Vergleich mit einer Stützlinsenform gemeint war. Der Frage nach der Formgebung des Tonnengewölbes wurde im Rahmen einer Studie mit Hilfe von CAD anhand von Bauaufnahmen von Gullini und Bruno [180]²⁷ nachgegangen und ein Vergleich mit elementargeometrischen Kurven und Stützlinsen gezogen (Abb.5.2.5).

Eine Parabel zeigt eine nur grobe Übereinstimmung im Scheitelbereich (5.2.5.a) und konnte wegen der geneigten Basistangenten auch nicht Konstruktionskurve für den

²⁵Siehe Durm [203], S. 301-303. Er führt dies nicht mit Hilfe eigener Aufnahmen sondern anhand von Zeichnungen von Lepsius [221] und Dieulafoy [196], deren Qualität zumindest für derartige Vergleiche als nicht ausreichend anzusehen ist.

²⁶Herzfeld versucht die persische Elle aus den Proportionen u.a. von Öffnungen zueinander zu rekonstruieren, [259].

²⁷Demgegenüber (siehe Anm.25) ist die Bauaufnahme von Bruno [180] photogrammetrisch aufgenommen worden, so daß eine verlässliche Genauigkeit erwartet werden kann.

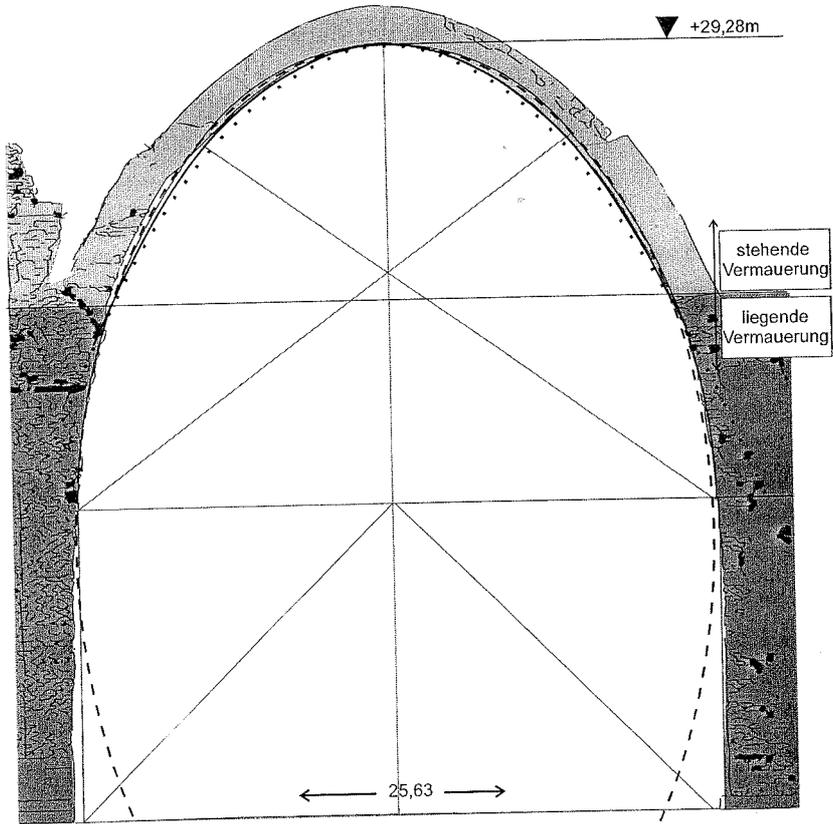


Abb. 5.2.5: Vergleich der Gewölbeform des Intrados' des Palastes von Ktesiphon mit
 a) Parabel •••, b) Ellipse --- c) Kettenlinie — und d) Korbbogenkonstruktion von
 Durm —.

ganzen Bogen gewesen sein. Ziemlich gut beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen der Hallenbreite und der Scheitelhöhe von der Oberkante der geraden Wände gemessen die gesamte Kurvenform des Intrados (5.2.5.b)²⁸. Klar erkennbar und überzeugend ist jedoch die exakte Übereinstimmung der Gewölbeinnenfläche im oberen, mit stehenden Ziegeln gemauerten Tonnenabschnitt mit einer im Scheitel angesetzten Kettenlinie²⁹(5.2.5.c). Es muß daher angenommen werden, daß die sassanidischen Baumeister nicht nur von den

²⁸Die Form der persischen Bogen und Tonnen wird in der Literatur (Reuther [247]) gelegentlich als 'elliptisch' beschrieben. Da die Ellipse eine geometrisch eindeutige Form hat ($R^2 = x^2/a^2 - y^2/b^2$), ist davon auszugehen, daß es sich um eine sprachliche Ungenauigkeit handelt und eigentlich die allgemeinere ovale Form gemeint ist (siehe Anmerkung 6).

²⁹ Zu den statischen Eigenschaften der Kettenlinie siehe Kap.3.1-3.2.

statisch günstigen Eigenschaften einer elliptischen Bogengeometrie wußten, sondern daß sie die Stützlinieneigenschaft der Kettenlinienform kannten. Der kontinuierliche Übergang zwischen Kettenlinie und Oval ist ein Hinweis darauf, daß sie es auch verstanden, mit der bereichsweisen Ähnlichkeit geometrischer Kurven, wie hier einer Kettenlinie und einer Ellipse, umzugehen.

5.2.2 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der geometrischen Untersuchung der Form des Tonnengewölbes des Audienzsaales des Palastes von Ktesiphon indizieren, daß die stützlinienartigen Eigenschaften von Ovalgeometrien und die Stützlinieneigenschaft der Kettenlinie im alten Orient schon rund 1100 Jahre früher bekannt waren gegenüber dem Okzident³⁰. Das Tonnengewölbe selbst wurde in der in Oberägypten entstandenen Nubischen Wölbtechnik errichtet. Es muß offen bleiben, inwiefern neben dem nubischen Wölbprinzip auch die Wölbgeometrie nach der Kettenlinie mit ägyptischem Wissen in Verbindung stand.

³⁰ Siehe auch Kapitel 10.0.

6.0 Römische Wölbkunst

6.1 Römische Arten des Massivbaus

6.1.1 Mauerwerk aus Werksteinen

Die Werksteinmauertechnik der Römer geht auf die Etrusker zurück. Das einfache Quadermauerwerk aus behauenen Steinblöcken, entweder im Mörtelbett gefügt oder fugenlos durch eingelassene Metallklammern verbunden (Abb.6.1.1), ist eine typisch etruskische Bauweise. Es ist eng verwandt mit griechischen Werkstein- und Keilsteintechniken¹ und bildet die Vorstufe zur römischen Bautechnik des Weltreiches.

Neben dem Quadermauerwerk, das als 'opus quadratum' bezeichnet wurde, verwendeten die Römer unregelmäßige, behauene Bruchsteine zu einer Mauerwerks-

art, die 'opus incertum' genannt wurde. Dieses entspricht dem griechischen Zyklopmauerwerk und erlaubte aufgrund der unterschiedlichen Größe der Steine eine bessere Ausnutzung der Steinbrüche (Abb.6.1.2.b).

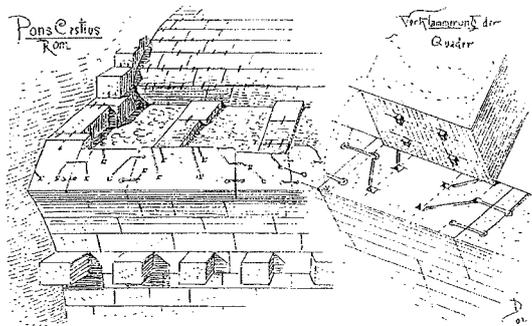


Abb.6.1.1: Etruskisches Werksteinmauerwerk mit Metallklammern nach Durm [203].

6.1.2 Beton und Gußmauerwerk

Es war das Verdienst der römischen Baumeister die Massivbautechnik, die bis dahin auf jenen herkömmlichen Verfahren beruhte, durch den Gußmauerwerkbau erweitert zu haben. Mit der Entdeckung der hydraulischen Eigenschaften der Puzzolanerde (1.Jhdt.v.Chr.), dem sogenannten 'pulvis puteolanus', wurde es möglich, einen unter Wasser erhärtenden Mörtel herzustellen. Neben dem Maritimbauwesen gewann dieser im Brücken- und Hochbau rasch an Bedeutung wegen seiner gegenüber reinem Kalkmörtel

¹ Siehe Durm [203], S.12-14.

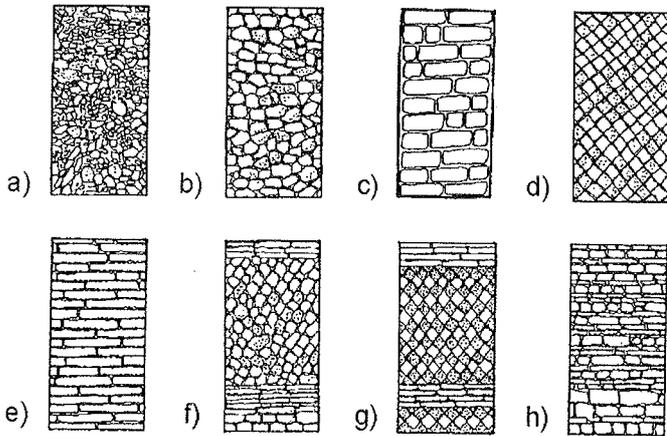


Abb.6.1.2: Römische Mauerwerkstrukturen: a) *opus caementitium*, b) *opus incertum* (*opus antiquum*), c) *opus quadratum*, d) *opus reticulatum*, e) *opus testaceum*, f) *opus mixtum incertum* g) *opus mixtum reticulatum* h) *opus mixtum vittatum*, nach Mislin [40].

höheren Festigkeit. Die Bautechnik mit 'opus caementitium', das auch Gußmauerwerk oder 'römischer Beton'² genannt wird und das zuvor unter Verwendung von Kalkmörtel mit zugegebenem Ziegelmehl hergestellt wurde³, nahm hierdurch einen bedeutenden Aufschwung.

Es entwickelte sich eine mehrschalige Bauweise⁴, die dem griechischen 'emplecton-Verfahren' ähnlich war, bei dem zwei Sichtmauerwände aus behauenen Steinen als verlorene Schalung und eine zwischenliegende Wand aus unbearbeiteten Steinen oder Steinresten und Mörtel zusammengesetzt wurden. Verwendete man einen festen Mörtel

2 Die römischen Mauerwerksbezeichnungen beziehen sich auf die durch Form und Art der Mauersteine bedingte unterschiedliche Struktur. 'Opus quadratum' und 'opus incertum' beschreiben das regelmäßige, quadratische bzw. das unregelmäßige Steingefüge. Bei den 'caementa' handelt es sich um Bruchsteine, die durch den Mörtel zusammengehalten werden. 'Opus caementitium' entspricht demnach - von römischer Vorstellung aus - dem, was mit der älteren Übersetzung 'Gußmauerwerk' gemeint ist, einem aus Bruchsteinen und Mörtel gebundenem Mauerwerkstoff, dessen Zuschläge in ihrer Positionierung oder Schichtung in der Matrix bearbeitet sein können. Von unserer heutigen, vom Betonbau geprägten Sicht wird opus caementitium eher als 'römischer Beton' umschrieben. Andere Übersetzungen in der Literatur sind zumeist ohne Sinn, wie etwa 'Gußbeton' oder 'Zementmauerwerk'.

Die Bezeichnung 'Gußmauerwerk' führt häufig zu Verwechslungen insofern, daß das mehrschalige, mit Mörtel und Steinen vergossene Mauerwerk gemeint ist, und folglich, unabhängig von der eigentlichen Struktur, alle römischen Mauerwerksarten dem Überbegriff 'opus caementitium' zugeordnet werden. Opus caementitium wurde jedoch auch 'pur' wie moderner Beton in einer Schalung verarbeitet, etwa bei der Gründung der Basilika des Constantin, (siehe Choisy 1873 [186]).

3 Nach Rasch [244], S.20.

4 Siehe Anmerkung 2.

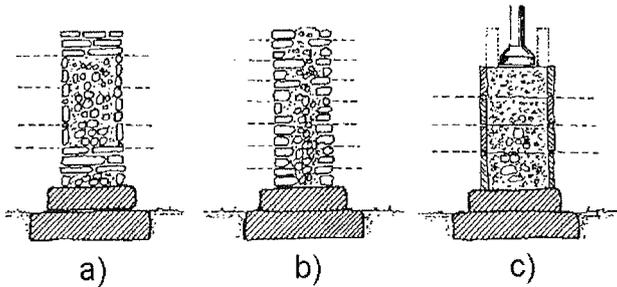


Abb.6.2.3: Mehrschaligkeit bei römischem Mauerwerk: Mittelschicht aus opus caementitium: a) Schalwände aus opus quadratum b) aus opus testaceum und c) Schalwände aus Holz -> Einsatz wie Beton, nach Mislin [40].

und wählte die Zuschläge der Mittelschicht nicht zu groß, dann konnte man die aufwendig herzustellenden Sichtmauerwerke der Außenschalen mehr und mehr ausdünnen. Beim römischen mehrschaligen Mauerwerk bestanden die Schalwände zunächst aus Quadermauerwerk (Abb.6.1.2.c) oder aus Bruchsteinmauerwerk (opus incertum) (Abb.6.1.2.b), bevor eine Vielzahl weiterer Strukturen der Außenschalen entstand. Einige davon waren nur in Verbindung mit einer mehrschaligen Bauweise funktionstüchtig und haltbar wie das 'opus reticulatum' (Abb.6.1.2.d).

Während die Griechen die Wandschalen grundsätzlich mit quer durchlaufenden Steinen oder Metallankern stabilisierten, beklagte Vitruv, daß seine Landsleute drei praktisch unverbundene und damit wenig stabile Wände nebeneinanderbauten⁵. Schließlich versuchte man, einen Verbund zwischen den Randschalen und der Kernschicht herzustellen, indem man längliche Steine als Verbinder nach innen ragen ließ (Abb.6.2.3). Seit ungefähr dem ersten Jahrhundert⁶ vor der Zeitrechnung wurden im Römischen Reich Mauern aus Kalkmörtel und gebrannten Ziegeln gebaut. Diese waren zumeist flach ($d:b = 1:10$) und nach Länge in der römischen Maßeinheit 'Fuß' und dem Verhältnis Seitenlängen klassifiziert (z.B. 'bipedales', 'sesquipedales')⁷. Ihre Festigkeit ist relativ hoch und entspricht derjenigen modernen Ziegelmaterials⁸. Während die gebrannten Ziegel im einschaligen Mauerwerkbau mehr und mehr den Werkstein und die Luftziegel ersetzen, wurden sie bei mehrschaligen Mauern als Schalungssteine verwendet, wobei durch diagonal halbierte, in die mittlere opus caementitium-Schicht hineinragende Dreiecks-

5 'Siehe Vitruv [64], S.80.

6 'Siehe Mislin [40], S.78.

7 'Bipedales' sind quadratische Ziegel, 'sesquipedales' sind rechteckig mit einem Seitenlängenverhältnis von 1:2.

8 Die von Thode [269], S.46-50 bzw.160-165 geprüften Ziegel wiesen Festigkeiten der Klasse Mz12 bzw. Mz20 nach DIN 105 auf. Siehe auch Anmerkung 31.

ziegel (den sog. 'bessales') der Verbund der Wände hergestellt wurde. Rechteckige Ziegel, in schichtweiser Anordnung, dienten als bewehrungsartige Bänder, dem sogenannten Ziegeldurchschuß⁹, zur Stabilisierung und Aussteifung von Werk- und Bruchsteinmauerschalen.

6.2 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen

6.2.1 Römische Gewölbe - eine Formensprache auf Basis des Kreises

Die Grundgeometrie der römischen Wölbkunst, der Kreis, setzte sich in allen Teilen des Römischen Weltreiches, weitgehend unabhängig von der Bautradition der unterworfenen Völker, durch. Wegen seiner vielfältigen symbolischen Deutbarkeit blieb der Kreis auch in beinahe allen Epochen und fast allen Räumen römischen Einflusses, von den Etruskern, über die Zeiten der Römischen Republik und des Kaiserreiches bis hin zum Oströmischen und Weströmischen Reich, die dominante Architekturform. Abgesehen von formalen Aspekten mußten es ökonomische Bedingungen und praktische Gründe gewesen sein, die den Kreis zur Absolutgeometrie eines weit über die Grenzen hinauswirkenden Kulturkreises machten.

Die Punktsymmetrie mit unendlich vielen Symmetrieachsen und die konstante Krümmung machen den Kreis zu der am einfachsten zu konstruierenden gekrümmten Linie (Zirkelschlag). Da bereits Ägypter und Griechen über umfangreiche Konstruktionsmethoden zur Kreisgeometrie verfügten¹⁰, waren die Römer umso mehr in der Lage, ihn in die Architektur einzubringen. Seine geometrischen Eigenschaften konnten nicht nur in bezug auf die Gestaltung eines Bauwerks mit Gewölben oder die architektonischen Gliederung

9 *Lamprecht [220] S.30 verneint diese bewehrungsähnliche Funktion und begründet den schichtweisen Einbau damit, daß man 'regelmäßige Betonierlagen' gewinnen wollte. Dem sind jedoch die (nach Christi Geburt gebauten) zunehmend verbreiteten Mauern mit mehrlagigem Ziegeldurchschuß entgegenzuhalten, bei denen die Ziegelschichten tatsächlich das Bauwerk zusammenhalten. (Dies kann an der Theodosianischen Stadtmauer in Istanbul an zahlreichen Stellen verifiziert werden.) Während Vitruv (s. Vitruv [64], Vorwort S.17) noch über Probleme mit der Qualität und der Witterungsbeständigkeit (ebenda [64], S.86) von Ziegeln spricht, hat sich die Herstelltechnik mit zunehmender Verbreitung im 1.Jhdt. offensichtlich verbessert. Seit dieser Zeit wird Ziegel immer häufiger als Kunststein mit hoher Druck- und Zugbeanspruchbarkeit in Verstärkungselementen und hochbelasteten Tragwerksteilen verwendet.*

10 *Die römischen Agrimensoren (Landvermesser) waren berühmt für ihre Fähigkeiten. Sie hatten ihre Kenntnisse der Mathematik und Geometrie in Ägypten erworben. Hierzu Cantor [182].*

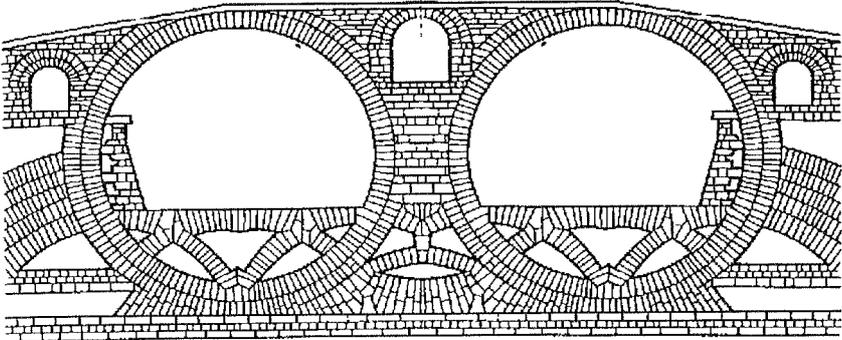


Abb. 6.2.1: Das Bogensystem der Ponte Fabricius nach Müller/Vogel [41].

seiner Fassade ausgenutzt werden, sie erleichterten auch die Herstellung und die Konstruktion der Lehrgerüste und ermöglichten so eine Rationalisierung des Herstellprozesses.

Daneben ordneten die römischen Baumeister der Kreisgeometrie besonders günstige statische Eigenschaften zu. Die Ponte Fabricius (62 v. Chr.) (Abb.6.2.1) ist eine Bogenbrücke aus Werksteinen, die auf einem vollen, im Flußbett eingelassenen, kreisbogenförmigen Fundament aufgemauert wurde, offenbar, um optimale Lastabtragung zu erzielen.

Im Zusammenhang mit den für die römische Architektur typischen bogenüberspannten Kolonnaden und mehrgeschossigen Säulenordnungen kann die Kreisgeometrie tatsächlich als statisch günstig angesehen werden. Die beidseitig auf die Bögen einwirkenden, hohen Randlasten und die in etwa gleichmäßigen

Lasten auf die Bogenöffnung ergeben eine ähnliche Lastfiguratur wie die zu einer kreisbogenförmigen Stützlinie zugehörigen Lastcharakteristik (Abb.6.2.2).

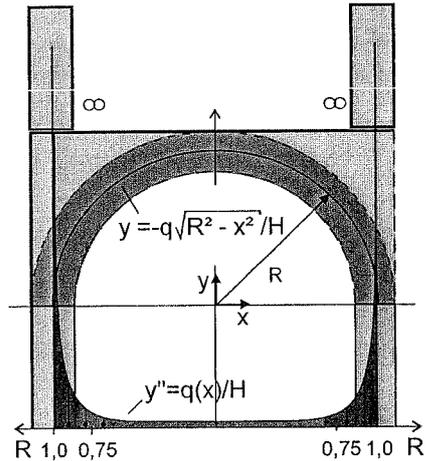


Abb.6.2.2: Kreisbogenförmige Stützlinie (y), Arkadenumriß und zugehörige (affine) Lastverteilung (q) mit sehr hohen Lasten über den Stützen und fast gleichmäßiger Last im Feld.

6.2.2 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen in Werksteintechnik

Wie die Mauerwerkstechnik so geht auch die auf ihr basierende Wölbbaukunst der Römer auf die etruskische Gewölbetechnik zurück. Diese wiederum ist mit der griechischen bzw. akarnanischen Wölbtechnik in Werkstein verwandt¹¹. Charakteristisch ist der etruskische Doppelbogen, der in einigen Exemplaren bis heute erhalten ist (Abb.6.2.3). Im Zusammenhang mit der Einwölbung von Gebäuden wurden zumeist Quader aus Kalkstein im Kufverband vermauert (Abb.6.2.4). Zu den wenigen Beispielen, die bis heute erhalten sind, gehören die Gewölbe in den Tempelanlagen von Baalbek (1.Jhd.), im Jupiter-tempel und Bacchustempel. Auch die in Rom noch bestehenden, großen Bogenbrücken (z.B. Pons Salaris, Pons Fabricius) wurden in dieser Technik gebaut (Abb.6.2.1).



Abb.6.2.3: Etruskischer Doppelbogen in Ferentino, nach Durm [203].

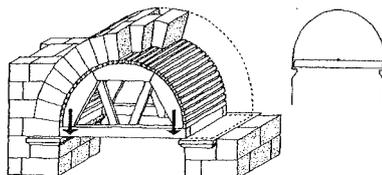


Abb.6.2.4: Römische Tonnengewölbe im Kufverband auf Schalung, nach Cejka[185].

Außerhalb der Apenninhalbinsel wurden häufig andere Wölbtechniken angewandt, wie im gallischen Teil des Römischen Reiches die Tonnengewölbekonstruktionen des 'Pont du Gard' (1.Hälfte 1.Jhd.), der Brücke von Narni, der Amphitheater Arles und Nîmes und des Tempels der Diana in Nîmes (~130n.Chr.) (Abb.6.2.5). Sie werden zu den sogenannten 'gallisch-römischen Tonnengewölben' gezählt und bestehen prinzipiell aus aneinandergereihten Einzelbögen mit jeweils tragender und abschliessender Funktion, die zusammen ein Tonnengewölbe bilden. Die Motivation zu dieser Bauweise lag zweifellos in der Einsparung

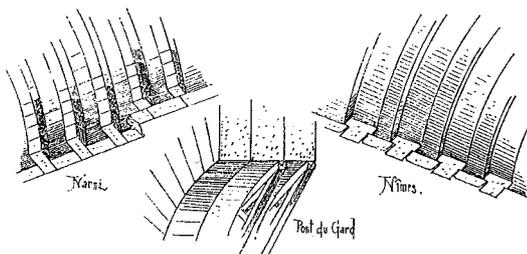
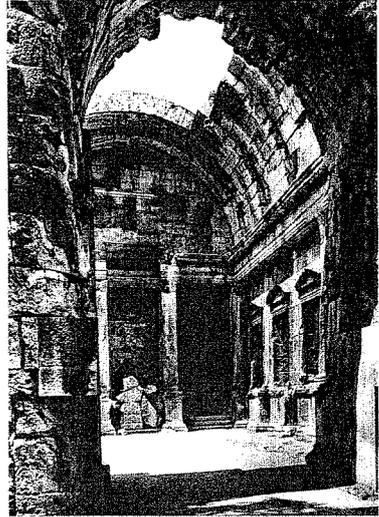


Abb.6.2.5 Aufbau verschiedener gallisch-römischen Werksteintonnengewölbe nach Durm [203].

¹¹ Siehe Durm [203], S.12ff. In Akarnanien wie in Lydien wurden im Gegensatz zu Mykene nicht Kraggewölbe, sondern echte Gewölbe (siehe Abb.5.1.1) gebaut.

von Trag- und Lehrgerüsten, denn es war auf diese Weise möglich, eine Wölbtonne mit einem einzigen Schalungsgestell von der Breite eines Bogens, durch schrittweises Versetzen herzustellen (Abb.6.2.4, Abb.6.2.6).

Die Gewölbbebauweise mit Werksteinen hielt sich bis zum Ausgang der Römischen Republik und wurde zu Beginn der Kaiserzeit mehr und mehr von Wölbtechniken in Gußmauerwerk abgelöst¹².



6.2.3 Bogen- und Tonnengewölbekonstruktionen in Gußmauerwerktechnik

Abb.6.2.6: Reste des aus additiv gereihten Bogen gebildeten Tonnengewölbes im Tempel der Diana in Nîmes, 2.Jhd., aus Poulsen [242].

Die ältesten Tonnengewölbe aus Gußmauerwerk findet man in Ingenieurbauwerken wie Zisternen, unterirdischen Lagerräumen und Substruktionsgewölben¹³. Beim größten antiken Kanalbauwerk, der Cloaca Maxima (Rom, Baubeginn ~500 v.Chr.), lösten sie die althergebrachten Keilsteintonnen ab. Die einfache Bearbeitbarkeit und Formbarkeit des Gußmauerwerks bei einer brauchbaren Festigkeit erweiterte rasch das Einsatzfeld hin zu größeren Gewölben und beflügelte die römischen Baumeister zu immer größeren Spannweiten und zur Erfindung neuer Techniken (Abb.6.2.7). Die Basilika des Maxentius (313) sowie die Gewölbe der Diokletiantherme sind nach einem zellulären Konstruktionsprinzip gebaut, bei dem ein Gerippe aus mehreren Ziegelbögen mit Quer- und Längsschotten mit Beton bzw. Gußmauerwerk verfüllt wurde (Abb.6.2.8).

Die Gußmauerwerktechnik in Kombination mit Ziegelrippen ließ auch Gewölbeformen entstehen wie das Kreuzgewölbe, das bis dahin auf römischem Boden nicht existierte. Dieser Gewölbetyp wurde bisher nur außerhalb Roms, in Syrien und Kleinasien in

¹²Durm ([203], S.249) unterscheidet drei historische Phasen, die sich auch in den dort angewandten Bauweisen unterscheiden: die etruskische Zeit, die Zeit der halb-etruskischen und halbhellenistischen Republik sowie die Zeit des Kaiserreiches. In den beiden ersten Phasen herrscht die aus Kleinasien und Griechenland stammende Wölbtechnik mit behauenen Stein vor, während in der dritten Phase die Entwicklung und Verwendung des opus caementitium die Wölbtechnik verändert.

¹³Beispiele für frühe Tonnengewölbe in Caementitium-Bauweise reichen zurück bis in die 2.Hälfte des 2.Jhdts. v. Chr. Hierzu Riviora 'Lombardic Architecture' [248], S.75/76.

Werksteintechnik mit aufwendig ausgeführtem Steinschnitt gebaut¹⁴. Als Vorläuferkonstruktion des römischen Kreuzgewölbes aus opus caementitium mit Ziegelrippen können die Substruktionsgewölbe der Villa 'Sette Bassi' bei Rom (Abb.6.2.9) aus dem 1.Jhdt.¹⁵ angesehen werden. Die Rippen aus Ziegelplatten dienten dort der Aufteilung in vier Schalungsabschnitte und der Verstärkung des Gußmauerwerks über die Diagonale. Zur Ausbildung des Grates eines Kreuzgewölbes wurde die Verbundbauweise zuerst bei den Gewölben der Maxentiusbasilika und denen des Kaiserpalastes auf dem Palatin angewandt (Abb.6.2.10). Sie zählen zu den bekanntesten Exemplaren dieser Gewölbeart in der Architekturgeschichte.



Abb.6.2.7: Tonnengewölbe aus Gußmauerwerk im 'Goldenen Haus des Nero', 68 n.Chr., aus Poulsen [242].

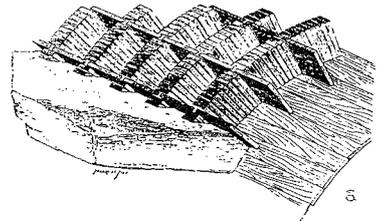


Abb. 6.2.8: Zelluläre Verbundbauweise mit Ziegelrippen und -graten, nach Choisy [186].

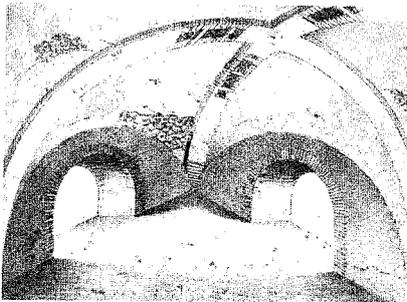


Abb.6.2.9: Kreuzgewölbekonstruktion mit integrierten Ziegelrippen der Substruktion der Villa Sette Bassi, 2.Jhd., nach Riviora [248].

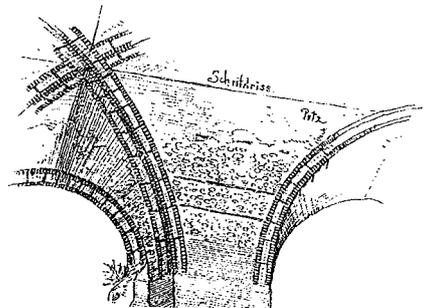


Abb.6.2.10: Kreuzgratgewölbekonstruktion mit Ziegelrippen im Kaiserpalast auf Palatin, nach Durm [203].

¹⁴Ebenda [248], S.246, siehe hierzu Kapitel 7, Abb.7.1.7.

Brands [179] S.35 behauptet, daß neben Beispielen für Kreuzgewölbe aus opus caementitium, die bis ins erste vorchristliche Jahrhundert zurückreichen, auch einige kaiserzeitliche Beispiele aus 'opus quadratum' zu finden wären.

¹⁵ Riviora [248], S.247.

6.3 Kuppelkonstruktionen in Gußmauerwerktechnik

Auch Kuppeln treten im Römischen Reich vermehrt erst mit der Verbreitung der Opus-Caementitium-Bauweise auf¹⁶. Erste kuppelartige Wölbungen erscheinen in Kampanien in Form von Konusgewölben in den sogenannten 'Laconica' (übers.: 'Schwitzbäder') von Pompeji und Herculaneum im 1.Jhdt. vorchristlicher Zeit (Abb. 6.3.7.a). Der früheste Kuppelbau größerer Dimension ist mit 21,63m Durchmesser der Merkurtempel in Baiae (1.Jhdt.v.Chr.). Seine Form zeichnet die römische Kuppelbaukunst der nachchristlichen Zeit vor. Es handelt sich um eine oben mit einem Opaion versehene, offene Hemisphäre auf einem kreisförmigen Mauerwerkzylinder. Die Kuppel des Tempels der Diana aus derselben Zeit, ebenfalls in Baiae, ist spitzkuppelförmig (Abb.6.3.1). Im Gegensatz zum Merkurtempel, bei dem die 'caementa', die Bruchsteine, radial dem Verlauf der Gewölbeachse entsprechend angeordnet sind, wurde die Kuppel des Dianentempels aus regelmäßig geformten Ziegeln und Tuffsteinen, die horizontal geschichtet sind, erstellt.

Die Klostergewölbe des 'Domus Aurea', des 'Goldenen Hauses' des Nero (68, Ø=13,48 m)¹⁷, und des 'Domus Augustana' sind die ältesten erhaltenen Gewölbe über polygonalem Grundriß¹⁸.

Einen frühen und gewichtigen Höhepunkt¹⁹ der römischen Kuppelbaukunst markiert das Pantheon (Abb.6.3.2), gebaut in den Jahren 118-125 von

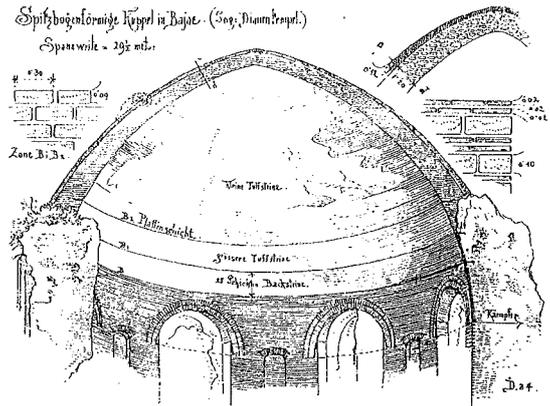


Abb.6.3.1: Querschnitt durch den Tempel der Diana in Baiae, nach Durm [203].

16 Auch die frühesten 'echten' Kuppeln (also nicht in Kragtechnik) aus Werksteinen finden sich außerhalb Rom, in den orientalischen Provinzen des Römischen Reiches, so in Gerasa (heute Jordanien), (3.Jhdt.) (Abb.7.1.7).

17 Da es sich um ein offenes Gewölbe mit kreisrunder Öffnung handelt, ist es kein Klostergewölbe im strengen Sinn. Andere Geometriebeschreibung sind jedoch noch weniger zutreffend, so daß das Gewölbe als 'verschliffenes Klostergewölbe' bezeichnet wird. Siehe Rasch 'Kuppeln in der römischen Architektur...' [244], S.17.

18 Ebenda [244], S.17.

19 Das Pantheon behält die größte Spannweite (43,3m) von Kuppeln über mehrere Jahrhunderte, erst die Peterskuppel in Rom und die Kuppel von 'Santa Maria della Fiore', Florenz kamen in die Nähe dieser Dimension (beide ca.42m); Ausführlicheres hierzu z.B. in de Fine Licht [206].

Apollodorus von Damaskus (60-125). Es beinhaltet drei der wesentlichen römischen Konstruktionsprinzipien des Kuppelbaus der Folgezeit:

- Kombination von opus caementitium mit eingelassenen, bzw. sich durchdringenden Bögen und Rippen aus Ziegelmauerwerk.
- Gewichtsabstufung der Mauersteine des Gußmauerwerkes nach oben hin abnehmend.
- Größenabstufung und horizontale Schichtung der Mauersteine.

Gerade die Rippenkonstruktion des Pantheons wurde von vielen namhaften Architekturhistorikern²⁰ untersucht, konnte aber nie völlig gesichert rekonstruiert werden, weil das Bauwerk über seine gesamte Existenz unversehrt blieb und die innere Struktur nur zum Teil von außen ersichtlich ist. Die römischen Kuppelbauprinzipien lassen sich umso besser an den verwitterten und beschädigten Nachfolgebauten analysieren.

In der Zeit nach Christi Geburt gingen die römischen Baumeister immer häufiger dazu über, wie bei den Tonnen- und Kreuzgewölben auch in das Gefüge der Kuppeln Ziegelrippen aus opus caementitium einzubauen. Neben den seit dem 2.Jhdt. verbreiteten 'echten' Kuppelbauten mit konstanter oder zum Sockel hin zunehmender Wanddicke bildete sich ein Gebäudetyp mit hochgezogener Attika, dessen Kuppelschale nach außen nur als Kalotte in Erscheinung tritt (Abb.6.3.3).

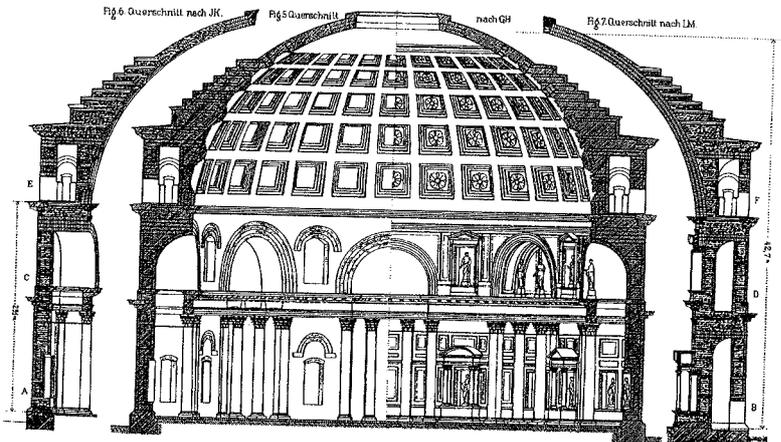


Abb. 6.3.2: Das Pantheon in Rom, Rekonstruktionsversuch nach Egle [9].

²⁰ Genannt seien: Piranesi, Durm und de Fine Licht.

6.3.1 Gußmauerwerkkuppeln in Verbundrippenbauweise²¹

6.3.1.1 Struktur und Funktion der Ziegelrippen

Wesentliches konstruktives Merkmal der Kuppeln aus opus caementitium der Spätantike sind die in die Wölbfläche eingebetteten Ziegelrippensysteme. Es lassen sich drei Arten von Strukturen unterscheiden (Abb.6.3.4):

- Bogensysteme
- Kammersysteme²²
- Bündelsysteme.²²

Erstere finden sich in der Kuppel des Jupitertempel in Spalato (Abb.6.3.4.a) und sind beim Pantheon zumindest im Bereich des Kuppelansatzes nachgewiesen. Darüberhinaus sind Kuppeln mit Bogenrippensystemen jedoch eher selten. Während die Kuppelwand beim Bogensystem in horizontale Ringschichten gegliedert ist, bedeuten Kammer- und Bündelsystem eine Aufteilung der Kuppel in meridionale Sektoren. Die Reste des Tempels der 'Minerva Medica' (~350) (Abb.6.3.4.c und 6.3.5) weisen ein Bündelsystem auf. Rippenanordnungen im Kammer- system in Verbindung mit Querschotten aus Ziegelplatten (zelluläres

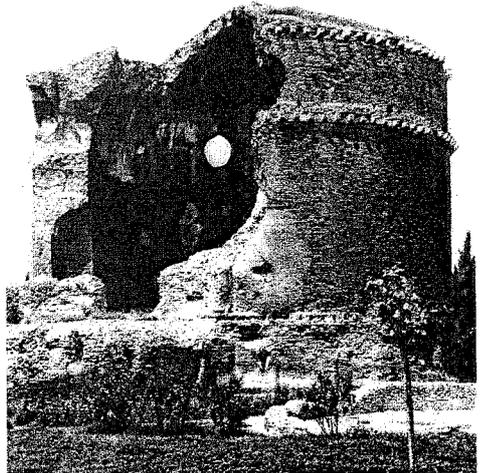


Abb.6.3.3: Mausoleum bei Tor de Schiavi, Rom, Intrados und Extrados wegen hochgezogener Attika verschieden, aus Deichmann/Tschira [194].

System) wurden beim Oktogon der Gordiansvilla (um 250) (Abb.6.3.4.h) und beim 'Tempio della Tosse' / Tivoli (360-400) (Abb.6.3.4.i und 6.3.6) angewandt.

²¹Ein Teil dieser Untersuchungen ist auf das von J.J.Rasch erarbeitete archäologische Material 'Zur Konstruktion spätantiker Kuppeln vom 3. bis zum 6. Jhd.', [245] gestützt.

²²Die Begriffe 'Kammer-' und 'Bündelsysteme' stammen von Rasch: ebenda [245] S.372/373, Rasch hat die letzteren beiden Kuppelarten untersucht und Idealsysteme abgeleitet (Abb.6.3.4).

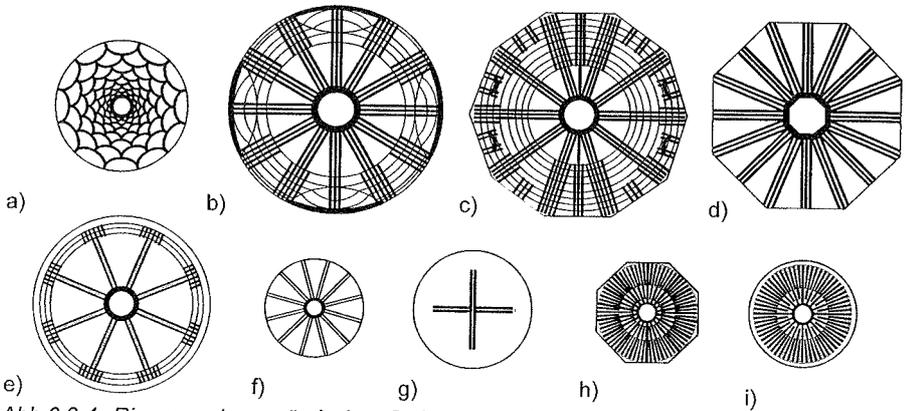


Abb. 6.3.4: Rippensysteme römischer Gußmauerwerkskuppeln: a) Bogensystem: Diokletiantherme, Jupitertempel, Bündelsysteme: b) Agrippathermen, Kuppelsaal, c) Tempel der Minerva Medica, d) Diokletianthermen, Planetarium, e) Helenamausoleum, f) Santa Constanza g) Mausoleum bei Tor de' Schiavi, Kammersysteme: h) Gordiansvilla, i) Tempio della Tosse; b) bis i): idealisierte Systeme nach Rasch [245].

Wie bei den Tonnengewölben und Kreuzrippengewölben kommen den eingebetteten Ziegelrippen der Kuppeln bautechnische, baukonstruktive und statische Funktionen zu. Im einzelnen sind folgende denkbar:

bautechnische Funktionen:

- Die Bildung von Schalungsabschnitten.
- Die Aufgliederung der räumlich gekrümmten Flächenform in Bogenformen, die geometrisch einfacher und genauer zu konstruieren sind.
- Vereinfachung der Sektorenschalung durch Wegfall der Schalungsberandung.

baukonstruktive Funktionen:

- Mittel zur genauen geometrischen und konstruktiven Durchbildung der Innen- oder Außenflächen von Kuppeln oder der Grate bei polygonalen Wölbformen.

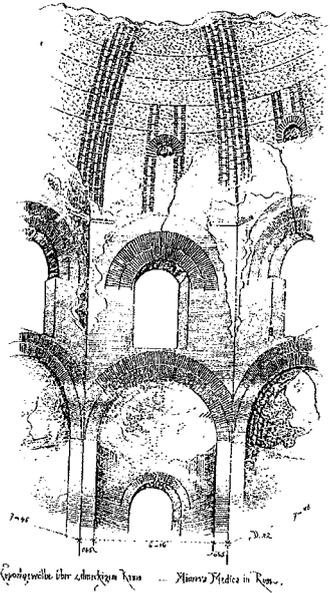


Abb. 6.3.5: Tempel der Minerva Medica nach Durm [203].

statische Funktionen:

- Element zur Verbesserung der Lastabtragung im Bau- und Endzustand.
- Einbau von Material mit günstigeren und gesicherten Festigkeitseigenschaften gegenüber opus caementitium.

6.3.1.2 Formerzeugung und Herstellung der Kuppeln

Ein Zusammenhang der Rippen mit zu bildenden Bau- und Einschaltungsabschnitten ist sowohl beim Pantheon, wegen seiner außerordentlichen Dimensionen, als auch bei den spätantiken Caementitium-Kuppeln unmittelbar anzunehmen. Während die Kuppeln in Baiae, noch ohne Rippen, und die Kuppeln mit horizontal gegliederten Bogenrippensystemen eine horizontale

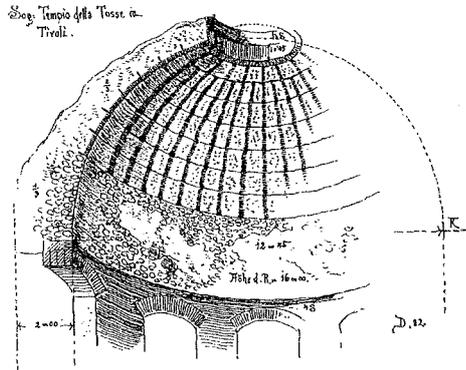


Abb.6.3.6: Tempio della Tosse, n. Durm [203].

Aufmauerung in Ringschichten implizieren²³, weisen die meridionalen Kammer- und Bündelsysteme auf eine Bauweise in vertikaler bzw. meridionaler Richtung hin. Besonders bei den letzteren beiden ist vom Einsatz eines rotativen Lehr- bzw. Schalgerüstes auszugehen. Hierauf deutet bereits die Entwicklungsgeschichte der römischen Kuppeln hin insofern, daß die anfänglichen Konusgewölbe Kampaniens praktisch immer rotations-symmetrische Gewölbeformen waren. Diese konnten von einfacher Form sein, generiert mit einer ebenso einfachen Erzeugenden, der Geraden (Abb. 6.3.7.a), oder eine vergleichsweise komplizierte Form annehmen, die mit einer kurvierten Erzeugenden geformt wurde (Abb.6.3.7 b und c)²⁴. Konkrete Hinweise auf den Bau der rotations-symmetrischen spätantiken Kuppelbauten mit Hilfe einer Drehschalung liefern die photogrammetrischen Aufnahmen von Rasch. Bei den besonders gut erhaltenen Untersuchungsobjekten (Tempio della Tosse/ Tivoli und Santa Constanza/Rom (Kopie hiervon

²³Der steiler geneigte Meridian des Diana-Tempels sowie die bearbeiteten, flachen Steine sind zusätzliche Hinweise. Man suchte damit zu verhindern, daß die Steine in einer noch nicht geschlossenen Ringschicht im oberen Bereich beim Mauern rutschen.

²⁴De Fine Licht [206] S.212 beschreibt das Frigidarium der Stabianer Thermen als ein auf einer Kegelschalung erstelltes Konusgewölbe. Daneben gab es kompliziertere Rotationsformen: Eschebach bezeichnet den Querschnitt des gleichzeitig entstandenen Laconicum der Mysterienvilla als karniesförmig (s-förmig). Siehe auch Rasch [244] S.32, Anm.7.

in Anhang A.6.3.1.2)) ist eine deutliche Übereinstimmung in der Krümmungscharakteristik der Profile verschiedener, rotativ versetzter Schnittebenen festzustellen, was auf die Formung der Kuppel mit Hilfe einer ebenso versetzten Schalung zurückzuführen ist.²⁵

6.3.1.3 Schalung, Schalgerüst und Bauvorgang

Eine solche um die Vertikalachse drehbare Schalung hatte den Vorteil, daß der Scheitelpunkt gleich blieb und einfach durch eine Säule oder Stütze drehbar unterfangen sein mußte (Abb.6.3.8.a und c). Solange man diese Drehchalung in Kombination mit einem Bauvorgang in Ringrichtung einsetzte, wie es bei den früheren Kuppeln des Merkur- und Dianatempels anzunehmen ist, die ohne oder nur mit wenigen Ziegelrippen verstärkt waren, hatte der Schalungsträger einen möglichst großen Sektorenabschnitt abzudecken, wenn er nicht zu oft gedreht werden sollte. Dies hätte sonst einen aufwendig zu leistenden Justieraufwand an der Schalung und einen Verlust an Herstellgenauigkeit bedeutet.

Durch Einbau der Ziegelrippen in meridionaler Richtung als Stützelemente konnte man einen Schalungsträger von geringer Sektorenbreite mehrmals verwenden, ohne ihn versetzen zu müssen. Man gewann so ein bautechnisches Gliederungsgefüge und das Gußmauerwerk wurde

im Bauzustand, wenn es noch nicht durchgehärtet war, verstärkt und im Scheitelbereich, wo die Kreissektorenelemente sich verjüngen und höher beansprucht waren, bewehrt. Um die hohen horizontalen Lasten am Stützenkopf aus dem Gewicht des fertiggestellten Kuppelsegmentes abzufangen, bzw kurzzuschließen konnten paarweise, symmetrisch angeordnete Träger zum Einsatz kommen (Abb.6.3.8.d,e)²⁶. Der Bauvorgang gliederte sich dann in halb so viele Schritte wie die Anzahl der Schalungsabschnitte.

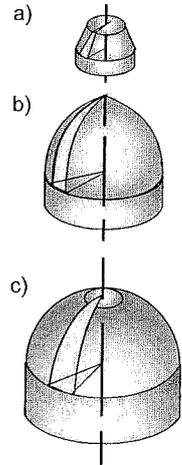


Abb.6.3.7: Römische Kuppelformen erzeugt aus rotativen Schalungsgeometrien: a) Konusgewölbe, b) Spitzkuppel, c) Hemisphäre mit Opaion.

²⁵Rasch hat Schnittprofile des Intrados diverser spätantiker Kuppeln angefertigt (siehe Rasch [245], Abb.2,11,19,42), die zum Vergleich in Überlagerung mit der idealen Geometrie dargestellt sind (siehe Anhang A.6.3.1.2).

²⁶Für einen symmetrischen Aufbau der Schalung und entsprechendes Vorgehen spricht die Tatsache, daß alle der von Rasch aufgeführten Rippenkuppeln eine gerade Anzahl von Rippen aufweisen bzw., daß es sich bei allen Kuppelbauten um geradzählige Isogone handelt.

Abb 6.3.8: Schalungskonstruktion zur sektoriell-rotativen Herstellung der römischen Kuppelgewölbe:

a) Sektorenschalungselement mit meridional verlaufenden Sprengwerken unterstützt.

b) Diagonalstreben, die mit der Lotgeraden (f) zum Schnitt gebracht werden müssen.

c) Mittelstütze.

d) Kreisförmige Zentrierscheibe zur Aufnahme der Horizontalkräfte aus der Sektorenschalung, Verankerungspunkte der Lote.

e) Zangenartige Aufhängekonstruktion der Sektorenschalung, ggf. drehbar gelagert.

f) Lot zur Definition der Rotationsachse.

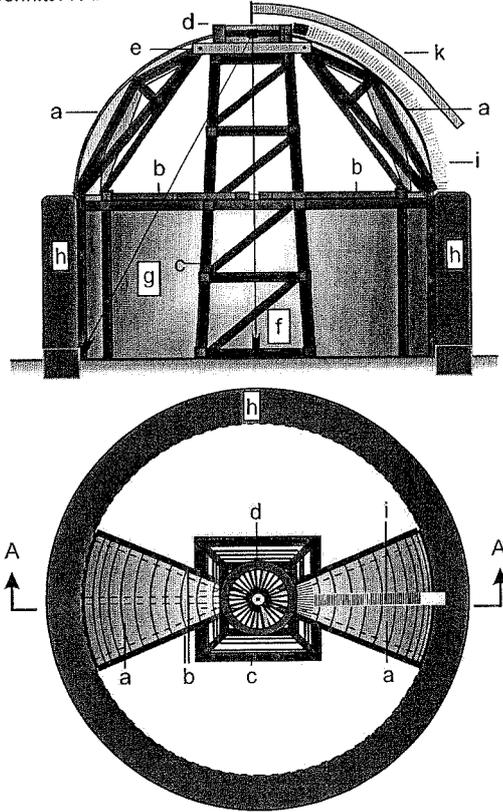
g) Lot zur Bestimmung der Horizontalebene.

h) Basiszylinder, z.B. aus mehrschaligem Mauerwerk.

i) Rippen aus Ziegelplatten.

k) Lehre zum Ausrichten der Außenfläche des Mauerwerks der Attika und der Kuppelabdeckung.

Schnitt A-A:



Während bei den Kuppeln mit radialen Ziegelrippen im Bündelsystem der Rippenabstand noch relativ weit war und der Schalsektor entsprechend groß sein mußte (z.B. Achtelskreisabschnitt), verminderte sich die Breite des Schalelementes beim Kammersystem wie beim Tempio della Tosse auf fast diejenige eines Bogens. Diese Schalungen waren besonders sparsam im Holzeinsatz und noch einfacher zu handhaben und einzurichten²⁷.

Das Hauptelement des Schalgerüsts, die Mittelstütze, diente nicht nur der Unterfangung der Schalträger. Ebenso wichtig war ihre Funktion zum Einmessen der Gewölbegeometrie bzw. zur Bildung der konstruktiven Symmetrieachse für die Herstellung der Gewölbe als

²⁷Die Entstehung des Kammersystems steht insofern in logischem Zusammenhang mit einer im Römischen Reich seit etwa dem 3. Jhdt. aufkommenden Baumaterialverknappung. Hierzu Mislin [40] S.77.

Abb 6.3.9: Bauabschnitte bei der sektoriell-rotativen Herstellung von römischen Kuppeln in Verbundbauweise:

a) Einmessen der Mittelstütze, Ausloten der kreisförmigen Grundebene.

b) Aufbau des Basiszylinders.

c) Horizontale Aufschichtung einer Kuppelbasis aus opus caementitium mit Hilfe der Sektorenschalung.

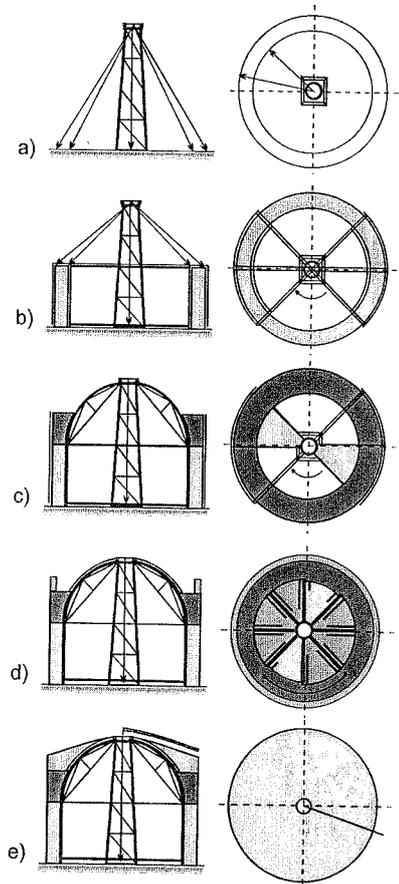
d) Sektorielles Aufmauern der Meridionalrippen und Verfüllen mit opus caementitium.

e) Aufmauern und Verfüllen der Attika.

Rotationskörper. Die Stütze selbst mußte hierzu nicht unbedingt eine exakte Rotationsachse bilden, was eine kaum zu erbringende Herstellgenauigkeit erfordert hätte²⁸, sondern nur den oberen Punkt der Achse im Raum bereitstellen. Der untere Schnittpunkt mit dem Planum konnte exakt mit Hilfe eines Lotes bestimmt werden, so daß die Stütze und die oben fest verbundenen Schalgerüste hiernach genauestens eingemessen werden konnten (Abb.6.3.8.f und 6.3.9.a). Die Ausrichtung zur Erdachse und die Rotationssymmetrie des Gewölbes war so auf einfache Weise und mit maximaler Genauigkeit zu erlangen. Vom oberen Punkt der Rotationsachse im Turm war es zudem mit Hilfe einer Schnur möglich, die ringförmige Begrenzung der Grundebene von Gebäude und Schalung auszunivellieren (Abb.6.3.8.g und 6.3.9.b). Es erscheint im Zusammenhang gerade mit der Kammerbauweise denkbar, daß der Schalungsträger entlang dieser Kreislinie auf Rädern oder auf einer Schiene einfach zu verdrehen war, ohne daß die geodätische Kontrollierbarkeit über das System verloren ging.

Im Zusammenhang mit dieser sektoriell-rotativen Bauweise der Caementitiumkuppeln gewinnt die Ausbildung des Opaions, das bei den allermeisten Kuppeln vorhanden ist,

²⁸Im Gegenteil: Eine gewisse Beweglichkeit der Stütze, um den genauen Scheitelpunkt einrichten zu können und danach zu fixieren, etwa durch den Einbau von Ausfachungen, könnte ein Vorgehen in diesem Zusammenhang gewesen sein.



neben der oft genannten architektonischen Bedeutung einen bautechnischen Sinn. Es markierte den höchsten Punkt der Mittelstütze (Abb.6.3.8.c und 6.3.9.c) und entstand als Ausnahme, in der sich im Bauzustand eine kreisförmige Stütz- bzw. Zentrierscheibe befand (Abb.6.3.8.d), über welche die symmetrisch hergestellten Kuppelschalsektoren sich gegenseitig abstützten. Entlang dieser Stützscheibe konnte der typische Druckring aus Ziegelplatten angelegt werden. Das Opaion ermöglichte eine saubere Fügung der zum Scheitel- bzw. Scheitelring hinführenden Radialrippen. So reduzierte sich auch die Querschnittsfläche der Kuppelsektoren im Scheitelbereich nur soweit, daß dort die Pressungen im Material noch innerhalb der Beanspruchbarkeit des Ziegelmauerwerks lagen (siehe 'Statische Eigenschaften'). Insofern war der Druckring, mit oder ohne Opaion, für die sektoriell-rotative Kuppelbauweise eine unabdingbare Voraussetzung. Eine Öffnung im Kuppelscheitel erlaubte es außerdem, Meßschnüre und -lehren nach außen zu bringen, wie etwa eine Formlehre zum Abziehen der Kuppelaußenfläche.

Rasch [244] hat bei seinen Untersuchungen der Schalbrettabdrücke festgestellt, daß die Bretter vorzugsweise in Meridianrichtung angeordnet waren (Abb.6.3.10), wobei die Längen sich nach oben verringerten und die Abstände in Umlaufrichtung gleich waren. Die horizontalen Schalabschnitte wurden dabei entsprechend der Schalbrettlängen ausgebildet und mit Bipedalziegeln abgeglichen (z.B. Tempio della Tosse). Hierdurch war eine gleichmäßige, meridionale Einteilung der Schalabschnitte gewährleistet, obwohl die Kuppelteile sektoriell hergestellt wurden.

6.3.1.4 Materialeinsatz

Schon bei den frühesten Caementitium-Kuppeln versuchte man durch die Auswahl und Schichtung der Zuschlagsteine die Herstellung zu vereinfachen. Die horizontale Schichtung der Mauersteine wie beim Dianatempel in Baiae, die prinzipiell der Kragtechnik ('Unechtes Gewölbe', Abb.5.1.1) entspricht, hatte den Vorteil, daß die Kuppel vom Ansatz her weit hochgemauert werden konnte, ohne daß die Schalung einer höheren Belastung ausgesetzt war, und gegebenenfalls sogar durch eine einfache Formlehre ersetzt werden konnte. Dies wurde vorallem bei den Kuppelkonstruktionen im Bündelsystem ausgenutzt und der Gewölbeansatz hochgezogen, damit die frei einzuwölbende Kalotte nicht zu groß war (z.B. Mausoleum bei Tor de' Schiavi) (Abb.6.3.9.c). Die verbliebene Öffnung wurde dann mit einer kleinen Sektorenschalung unterfangen und durch abschnittsweises Verdrehen und Verfüllen mit einem betonartigen opus caementitium geschlossen. Wegen des äußerlich hochgezogenen Kuppelansatzes, der die Hemisphärenform des Intrados nur noch abgeschwächt hervortreten läßt (Abb.6.3.3), wird diese Kuppelbauform als 'Attika-

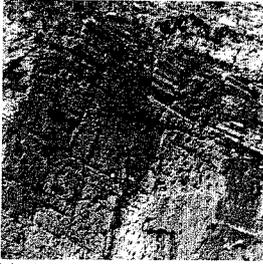


Abb. 6.3.10: Schalabdrücke in der Oktogonalkuppel der Gordiansvilla, aus Rasch [244].



Abb. 6.3.11: Helenamausoleum: Reste eingebauter Tonvasen 3. Jhdt., aus Deichmann/Tschira [194].

bauweise' bezeichnet²⁹.

Die spätantiken Baumeister variierten beim Bau der Kuppeln in Verbundbauweise nicht nur Größe und Form der Mauersteine, je nach Einsatzort und Bauweise, sondern auch das Gewicht. In den oberen Zonen, über der Kuppelindeckung oder im Bereich des Opaions, wurden häufig Leichtzuschläge (Tuff, u.ä.) zugesetzt. Dies verminderte einerseits die Belastung auf die Schalung und verringerte andererseits die anzuheivenden Massen. Letzterer Aspekt erklärt auch den Einbau von Tonvasen z.B. beim Helenamausoleum in Rom (Abb.6.3.11) zwischen Kuppelansatz und Attika, denn entgegen anderen Interpretationen konnten keine statischen Gründe für diese Maßnahme vorliegen.

6.3.1.5 Statische Eigenschaften der Verbundrippenbauweise

Über die archäologischen Befunde und Hinweise bautechnischer und konstruktiver Art auf eine sektoriell-rotative Bauweise hinaus ist eine Verifikation des Verfahrens von seiten der Statik notwendig. Diese kann überschlägig durch einen Vergleich der vorhandenen Verhältnisse von Dicke zu Durchmesser (Schlankheiten) mit den geometrisch zulässigen Verhältnissen für einen Bogen nach Heyman erbracht werden (Kap. 3.2.3.3)³⁰.

Wie aus Tabelle 6.3.1 ersichtlich, ist dieses Kriterium auch für die schlankesten Kuppelkaltotten mit großen Sicherheitsreserven erfüllt.

²⁹Zur Attikabauweise siehe Deichmann/Tschira [194].

³⁰Die Werte zur geometrischen Sicherheit wurden mit eigenen Berechnungen auf Basis einer Kreisbogenkettenlinie ermittelt (siehe auch Kap.8.3.1.1, Abb.8.3.2).

Das Kammersystem des Tempio della Tosse besteht aus Bipedalziegeln, die den Schalblettern folgend polygonale Bögen bilden (Abb.6.3.12). Die Materialkennwerte von entsprechendem Ziegel und opus caementitium wurden aus den Versuchen von Thode [269] und Lamprecht [220] an vergleichbarem Material abgeleitet (Tabelle 6.3.2). Um altersbedingte Verfestigungseffekte beim opus caementitium nicht zu sehr ins Gewicht fallen zu lassen³¹, wurden jedoch grundsätzlich die niedrigsten Werte für die Druckfestigkeit eingesetzt. Die Elastizitätsmoduli ließen sich mit Hilfe der gegebenen Druckfestigkeiten errechnen.

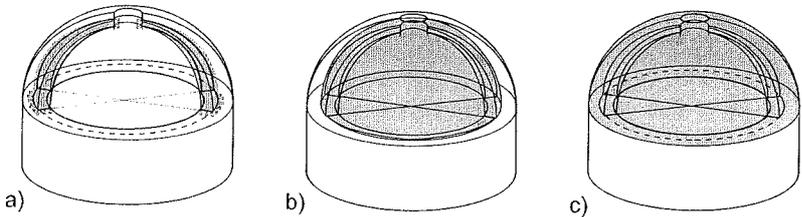


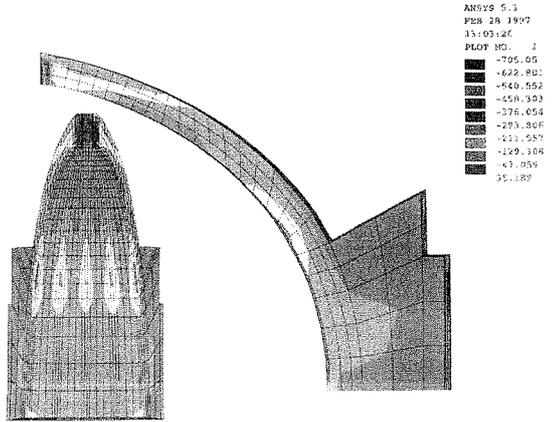
Abb.6.3.13: Untersuchte Baustände und Endzustand: a) Bauzustand, Bogenwirkung b) Bauzustand, Kuppelwirkung mit Aufsichtung, c) Endzustand.

Gegenstand der FE-Untersuchung waren der Bauzustand in der Aufbauphase eines Kuppelsektors mit bogenartiger Abstützung (6.3.13.a), der Zustand nach dem Schließen der Kuppel, vor und unmittelbar nach Aufbringen der Deckschicht (6.3.13.b), sowie der Endzustand (Abb.6.3.13.c).

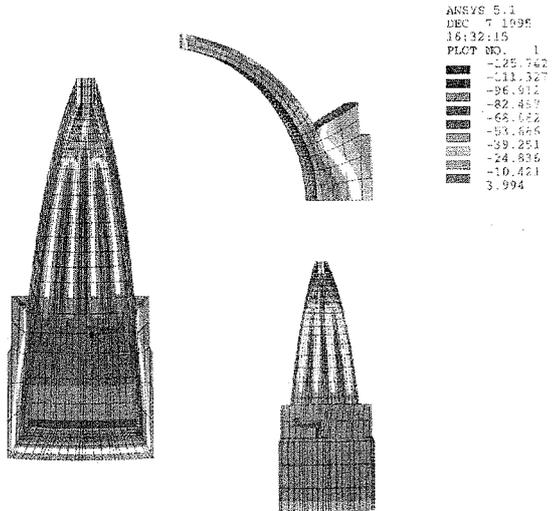
Aus den Ergebnissen im Vergleich ließen sich folgende Aussagen treffen:

³¹Es wird hierbei davon ausgegangen, daß die Festigkeitseigenschaften von 'jungem' opus caementitium eher ungünstig sind. Interpretiert man den Werkstoff als Mauerwerk, dann ist es die hohe und unregelmäßige Fugendicke, die zur Verringerung der Festigkeit führt. Bei Betrachtung als Beton hat die sehr unausgewogene Korngrößenverteilung mit dominantem Größtkornanteil, der zu relativ hohem Mörtelanteil im Gemisch führt, einen negativen Einfluß auf Festigkeits- und Kriecheigenschaften. Es ist darüberhinaus davon auszugehen, daß über den Chemismus von Grundstoffen und Material ein vergleichsweise grobes Wissen zur Verfügung stand, so daß für die Festigkeit bedeutende Zusammensetzungen unbekannt waren (sie werden jetzt seit rund einem Jahrhundert wissenschaftlich erforscht). Auch das Schwindverhalten des ungealterten römischen Betons ist als eher ungünstig einzustufen. Zu den Materialprüfergebnissen von Thode [269] (S.36-55) und Lamprecht [220] (S.41-67) an verschiedenen Originalproben, die opus caementitium eine verhältnismäßig hohe Festigkeit bescheinigen, ist anzumerken, daß es sich dabei um Stein-Mörtelgemische handelt, die mehr als 1500 Jahre alt sind und bei denen sich neben den planmäßigen Verfestigungseffekten auch altersbedingte, festigkeitserhöhende chemische Umwandlungen (z.B. Karbonatisierung) eingestellt haben. Diese können in bezug auf eine Beurteilung des Materials im Zusammenhang mit der Zeit seiner Herstellung zu Verfälschungen führen.

- Die maximalen Druckspannungen eines betrachteten, homogenen Kuppelsektors (ohne Rippen) betragen unter Bogenwirkung am Scheitel 0.42N/mm^2 . Die Rippen bringen bedingt durch ihre höhere Materialsteifigkeit eine Lastumlagerung mit sich, die zu einer Spannungserhöhung um 66% führt (0.70 N/mm^2). Dies ist die absolut höchste örtliche Beanspruchung im Tragwerk (Abb. 6.3.14.a).



- Nach Fertigstellung des Kuppelgerippes mit Caementitium-Verguß und kuppelartiger Lastabtragung in Ring- und Meridianrichtung verringern sich die meridionalen Spannungen in den Rippen auf 0.12N/mm^2 . Die maximalen Druckspannungen in Ringrichtung betragen 0.23N/mm^2 und treten am Opaion auf (Abb. 6.3.14.b).



- Durch Aufbringen der Deckschicht aus opus caementitium, die im Fall des Tempio della Tosse doppelt so dick ist wie die Ziegelrippen, steigen die maximalen meridionalen Druckspannungen auf 0.16N/mm^2 an. Die Druckspannungen im Ziegelring am Opaion betragen 0.28 N/mm^2 .

Abb.6.3.14: Meridianspannungen im: a) Bauzustand, Bogentragwirkung b) Bauzustand, Kuppeltragwirkung.

- Sobald die Deckschicht statisch mit der Rippenschicht verbunden ist, gehen die meridionalen Druckspannungen auf 0.14 N/mm^2 zurück. Die Druckspannungen unter ständiger Belastung im Ziegelring des Opaions fallen gleichzeitig auf 0.25 N/mm^2 ab.

Die Beanspruchungen der Ziegelrippen im Zusammenhang mit den Bauzuständen bestätigen ihre Funktion als Druckverstärkung, besonders in bezug auf den Anfangszustand als bogenförmiger Sektor. Schon im Falle des dickwandigen Kuppelgewölbes des Tempio della Tosse liegen dort die maximalen Beanspruchungen im Bauzustand rund dreieinhalbmal so hoch wie die höchsten Werte aus ständiger Last im Endzustand. Bei schlankeren Kuppeln werden diese Relationen noch ungünstiger. Die Durchsenkungen einer homogenen, rippenlosen Kuppel verglichen mit der gerippten Kuppel liegen im Kuppelscheitel ca. 35% höher, ($3,4 \cdot 10^{-4} \text{m}$ gegenüber $2,5 \cdot 10^{-4} \text{m}$). Neben den bautechnischen Vorzügen, kann die höhere Steifigkeit, welche die Rippen den Caementitiumkuppeln verleihen, und die ebenso günstigen Auswirkungen auf das Kriech- und Schwindverhalten die römischen Baumeister zum Bau immer mehr verdichteter Rippensysteme angeregt haben, und die Entwicklung der Bündelsysteme hin zu den Kammersystemen vorangetrieben haben.

6.3.2 Zusammenfassung

Die Entstehung der Verbundbauweise spätantiker Kuppelbauten als Gußmauerwerkschalen mit eingebetteten Rippen aus Ziegelplatten läßt sich anhand der Konstruktion und archäologischer Merkmale mit einem besonderen Bauverfahren, der sektoriell-rotativen Kuppelbauweise, in Verbindung bringen. Die Kuppeln wurden hiernach aus paarweise angeordneten, mit Ziegelrippen bewehrten Sektorenteilen hergestellt, die von einer entsprechenden Schalung, die rotativ verlagert und mehrmals verwendet werden konnte, unterstützt wurden. Die meridional verlaufenden, gebündelten oder verteilt angeordneten Rippen übernahmen dabei wesentliche bautechnische, baukonstruktive und statische Aufgaben. Das Ziegelmauerwerk gewährleistete wie ein hochfester Baustoff die Standfestigkeit der einzelnen Kuppelsektoren vom frühesten Zeitpunkt des Erhärtens des opus caementitium an und reduzierte die nachfolgend einsetzenden Kriech- und Schwindverformungen. Die Ziegelrippen übernahmen die Hauptbeanspruchungen und Spannungskonzentrationen, etwa an der Scheitelöffnung, dem Opaion, das bei der überwiegenden Zahl der Kuppeln der nachchristlichen Zeit vorhanden ist. Seine Existenz läßt sich mit einer bautechnischen und baukonstruktiven Funktion begründen, nämlich als Öffnung zur Zentrierung der Schalungs- und Rippenkonstruktion. Die rekonstruierte sektoriell-rotative Kuppelbauweise beinhaltet die Möglichkeit einer genauen geodätischen Kontrollierbarkeit der Schalungskonstruktion mit einfachsten Mitteln, d.h. Schnüren und Loten, womit die erstaunlich hohe Formgenauigkeit jener Kuppelbauten erklärt werden kann. Mit diesem Verfahren wird auch die Herstellung der Kuppel des Pantheons in Rom mit 43,3m Durchmesser auf eine plausible Art und Weise rekonstruierbar.

7.0 Byzantinische und osmanische Pendentivkuppeln

Sowohl als Architekturform als auch als Tragkonstruktion stellt die Pendentivkuppel einen Höhepunkt in der Wölbkunst dar. Ihre Entwicklung ging vom Orient aus, bevor sie eine zentrale Bedeutung in der byzantinischen und osmanischen Architektur erlangte.

In der Pendentivkuppelkonstruktion verbinden sich die nutzungstechnischen Vorteile des quadratischen Grundrisses mit den bautechnisch und statisch günstigen Eigenschaften der Kuppel. Gleichzeitig wird eine konstruktiv abgeschlossene, modulare Einheit gewonnen, auf deren Basis größere, zusammenhängende Räume bei vielfältigen Grundrißformen entstehen können. Diese Variabilität des Pendentivkuppelsystems machten sich vor allem die Osmanen zunutze, so daß dieses Bauprinzip zum festen Bestandteil ihrer Moscheenarchitektur wurde.

7.1 Kuppeln über viereckigem Grundriß¹

7.1.1 Die geometrischen Grundtypen der Kuppelkonstruktionen und ihre Lastabtragungsprinzipien

Die Vorformen und verschiedenen Lösungen der Pendentivkuppeln lassen sich allgemein unter dem Begriff 'Kuppeln über viereckigem Grundriß' zusammenfassen. In geometrischer und statischer Hinsicht sind zwei Grundtypen zu unterscheiden:

- Kuppeln über viereckigem Grundriß auf polygonalen Basiskonstruktionen.
- Kuppeln über viereckigem Grundriß als polygonale Verschneidungsformen.

Erstere basieren auf der Überlegung, die polygonale Grundrißgeometrie dem Rund durch Schachtelung mittels gerader Tragelemente anzunähern. Im einfachsten Fall geschieht dies mit über Eck gelegten Platten (Abb.7.1.1.a), so daß die Kuppel in unverschnittener Form aufgesetzt werden kann. Dienen Gewölbeteile (z.B. sogenannte 'Trompen') zur Überspannung der Ecken, so ist die Ausbildung von Verbindungssockeln oder von einem Tambour notwendig (Abb.7.1.1.b). Hierauf wird die Kuppel wiederum in unverschnittener Form aufgesetzt. Kuppeln auf polygonalen Basiskonstruktionen sind also immer mehrteilige,

¹ Nach Finks Umschreibung seiner Untersuchungen 'Die Kuppel über dem Viereck' [207].

zusammengesetzte Systeme.

Demgegenüber sind Verschneidungsformen zwischen Kuppelgeometrie und zu überwölbendem Vieleck wie die sogenannte 'Hängekuppel' (Abb.7.1.1.c) (auch 'Böhmische Kappe' genannt) einteilige Flächengeometrien mit einer bereichsweise stetigen Form des Randes. Weil ihre Fläche im Raum über den Radius des Außenkreises des Polygons bestimmt ist, wird sie auch als 'Außenkreiskuppel' bezeichnet. Durch Addition und Verschneidung einer aufgesetzten Kuppelkalotte mit einer Hängekuppel entsteht ein mehrteiliges Gewölbe, die Pendentifkuppel (Abb.7.1.1.d). Diese wird im Gegensatz zur Hängekuppel - nicht ganz konsequent - als 'Innenkreiskuppel'² bezeichnet.

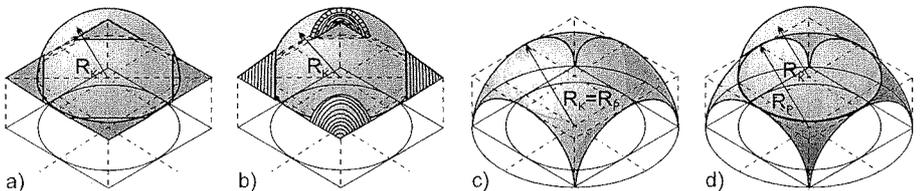


Abb.7.1.1: Konstruktive Lösungen zum Problem der Kuppel über dem Viereck: Kuppeln auf polygonalen Basiskonstruktionen: a) über Eck gelegte Platten, b) Trompenskuppel

Kuppeln als polygonale Verschneidungsformen: c) Hängekuppel, d) Pendentifkuppel.

Aus der Sicht der Statik unterscheiden sich die polygonalen Basiskonstruktionen dahingehend, daß sie die abzutragenden Lasten über Normalkräfte oder Querkraft und Biegung, oder eine Kombination beider Wirkungen abtragen. Sie funktionieren meist durch komplizierte Wechselwirkung der drei Grundbeanspruchungsarten. Die Kuppeln als Verschneidungsformen bestehen hingegen aus schalen- oder scheibenförmigen Bauteilen, deren Lastübertragung vornehmlich über Normalkräfte und weniger über Querkräfte und Biegemomente³ erfolgt. Das prinzipielle statische Verhalten der Verbindungskonstruktionen zwischen Kuppel und Quadratbasis aus Abbildung 7.1.1 a-d ist folgendermaßen charakterisiert:

- a) Kraggewölbe: Abtragung der Lasten über Normalkräfte, kohäsions- bzw. reibungsabhängige Schubkräfte sowie Querkraft und Biegung.

² Die Begriffe 'Innen- und Außenkreiskuppel' beziehen sich auf zusammengesetzte Kuppelformen, beschreiben jedoch nur die geometrische Basis der Kuppelkalotte. Da die Pendentifkuppel sowohl aus dem Außenkreis als auch aus dem Innenkreis konstruiert wird, ist sie sinngemäß als 'Außen-Innenkreiskuppel' zu beschreiben. Nur Kuppeln auf polygonalen Basiskonstruktionen gelten dann als 'Innenkreiskuppeln'.

³ 'Biegung' bedeutet im Zusammenhang mit Tragstrukturen aus nicht-zugfestem Material Kraftübertragung über exzentrischen Angriff der Querschnittsresultierenden, siehe Kap.2 und Kap.4.

- b) Bogen: Abtragung über Normalkräfte durch Bogenwirkung im Zusammenwirken mit anschließender Sockelschale.
- c) Echte (kontinuierliche) Schale (Verbindungselement = Kuppel): Abtragung der Lasten vorwiegend durch Membrankräfte.
- d) Mehrteilige (diskontinuierliche) Schale: Abtragung durch Membrankräfte, sowie Querkraft und Biegung.

7.1.2 Zur Entwicklung der Kuppeln auf eckigem Grundriß

7.1.2.1 Trompenkuppeln

Die Trompenkuppel ist eine Kuppel auf polygonaler Basiskonstruktion, bei der die entstehenden Zwickel mittels kegel- oder bogenförmigen Teilgewölben, den sogenannten 'Trompen', überspannt werden. Zu den frühesten Beispielen von Trompenkuppeln gehören die parthischen und sassanidischen Kuppeln im Palast von Firuzabad und Sarvistan (siehe auch Kap.5.2). Sie wurden in nubischer bzw. vorderorientalischer Wölbtechnik gebaut⁴, wobei die kegelförmigen Trompen durch Aufmauern von Flachziegeln zu gereihten Bögen mit gestaffelt zunehmendem Radius entstanden (Abb.7.1.2). Die Zwickelflächen zwischen den polygonalen Grundmauern und der kreisförmigen Kuppel wurden durch Aufmauern von konoiden Wandflächen zum Kuppelansatz geschlossen.

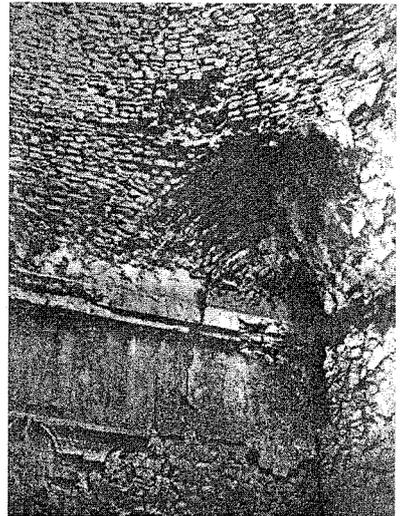


Abb.7.1.2: Trompe im Palast von Firuzabad (4.Jhdt.), nach Dieulafoy [196].

⁴ Der Zusammenhang kann exemplarisch nicht nachgewiesen. Diese Bauart der Trompenkuppel ist jedoch genauso wie die Nubische Wölbtechnik in Ägypten bis heute präsent (Minke [231]). Ein frühes ägyptisches Beispiel für ein zusammengesetztes Trompenkuppelgewölbe zeigt Riviora ('Architettura Muselmana' [249] S.130), für das er die Entstehungszeit vor 1020 angibt.

Trompen in bogenartiger und strahlenförmiger Anordnung und aus Werksteinen nehmen in der armenischen Baukunst des 5. bis 7. Jahrhunderts einen festen Platz ein⁵ (Abb.7.1.3). In der byzantinischen Architektur erfuhr die Trompe eine Wandlung von einer reinen Vermittlungs- bzw. Zwickelform zu einer architektonisch gewollten, nischenartigen Halbkuppelform wie in San Vitale/Ravenna (526-547) (Abb.7.1.4). In ähnlicher Bauart, jedoch mit dem charakteristischen Spitzbogen, wurde sie im persischen Raum, in Bêt-el-Khalîfe/Sâmarrâ, zur Zeit der Kalifen (7. Jhdt.) gebaut.⁶

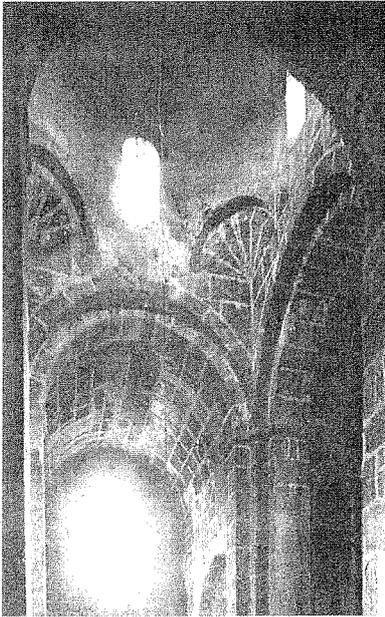


Abb.7.1.3: Armenische Trompen in der Kreuzkuppelkirche von Ojun, 5.-6.Jhdt., nach Donabédian/Thierry [198].

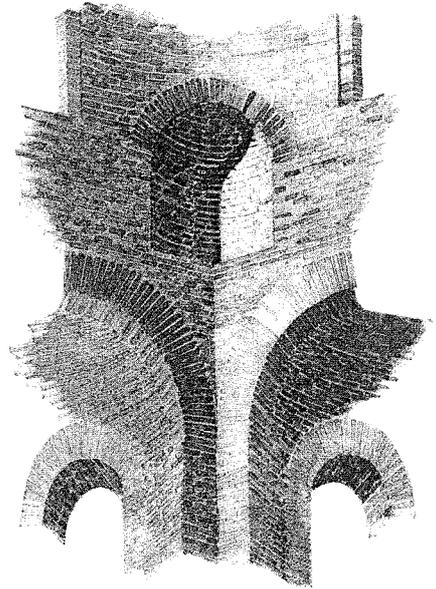


Abb.7.1.4: Byzantinische Trompe in San Vitale Ravenna (526-547), nach Riviora [248].

5 In der armenischen Kirchenbaukunst verschmelzen byzantinische Architekturformen mit kleinasiatischen Formelementen unter Anwendung der Werksteintechnik, hierzu Donabédian/Thierry [198], S.53 ff.

6 Siehe hierzu auch Cejka [185].

7.1.2.2 Andere Vorformen der Pendentivkuppel⁷

Andere Formen zur Überwölbung quadratischer Räume mit einer Kuppel lassen sich in Ägypten nachweisen. Einfache geschichtete Platten bilden die Auflager der Kuppel eines thebanischen Felsengrabes bei Dira-Abu'n-Naga (20. Dynastie, um 1500 v.Chr.)⁸ (Abb.7.1.5).

Eines der ältesten Beispiele für ein mehrteiliges Gewölbe mit kreisförmigen Pendentifs, die jedoch in Kragtechnik ausgeführt wurden und eine ebenfalls in Kragtechnik errichtete kegelförmige Grabkuppel unterstützen, ist der sogenannte 'Tumulus Royal' auf der Insel Krim⁹. Es handelt sich um eine Grabkammer, die auf das 5. Jahrhundert datiert wurde¹⁰.

In ähnlicher Weise errichteten die Etrusker Kuppeln über viereckigen Grundrissen. Die Reste von Grabkammern in Vetulonia und Populonia (7. Jhd. v.Chr.) geben davon Zeugnis. Demgegenüber blieb der Bau von Kuppeln über quadratischen Grundrissen, insbesondere unter Ausbildung pendentifartiger Unterstützungen¹¹, auf der Apenninhalbinsel in der gesamten Zeit der Römischen Republik und der Anfänge des Kaiserreichs ohne Bedeutung¹². In den syrischen Provinzen entstanden neben Vorläuferformen, die ähnlich den ägyptischen Vorbildern mit Hilfe von über Eck angeordneten Steinbalken oder -platten (Omm-es-Seetun, 2. Jhd.) ausgeführt waren,



Abb.7.1.5: Kuppelansatz eines Felsengrabes bei Dira-Abu'n-Naga/Theben (20. Dynastie, um 1500 v.Chr.) nach Creswell [189].

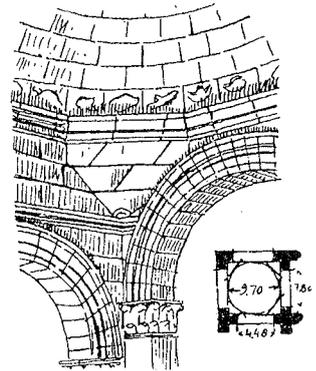


Abb.7.1.6: Pyramidenförmige Zwischenform eines Pendentifs in Lattakieh, aus Rosintal [251].

7 Eine detaillierte Darstellung findet sich in Creswell: 'Early Muslim Architecture', Oxford 1968, Band I und II [189].

8 Ebenda [189] Bd. II, S.450.

9 Die Insel Krim war eine Milesische Kolonie (Pantikapäon), das Bauwerk ist demnach griechischen Ursprungs.

10 Durm behauptete, daß der Bau älter sei. Demgegenüber zitiert Creswell [189] einen Archäologieprofessor aus Odessa, der das Bauwerk auf das 5. Jhd. v. Chr. schätzt.

11 Eventuell entstehende Zwickel wie beim spätantiken Tempel der Minerva Medica (Kapitel 6, Abb.6.3.13) werden einfach mit Platten überspannt.

12 Creswell [189], (S.459) behauptet unter Berufung u.a. auf Riviora, daß es überhaupt keine echten Pendentifs in der römischen Baukunst gibt.

verschiedenste Zwischenformen in Werksteintechnik (Abb.7.1.6), die zum sphärischen, später als 'byzantinisch' bezeichneten Pendentif führten. Hängekuppeln in kleinerem Maßstab und in Werk- oder Keilsteintechnik sind die Gewölbe im Mausoleum Qusayr an Nuwayjis in Amman, über den Westthermen in Gerasa/Syrien (Abb.7.1.7) aus dem 3.Jhdt. und die des Goldenen Tors in Jerusalem (6. Jhdt.).

Früheste Pendentifkuppeln in Ziegelbauweise überwölben die Grabstätte des St.Menas in Abū-Mīna/Maryut bei Alexandria (2.Hälfte 4.Jhdt.), nach Creswell¹³ die erste Anwendung außerhalb Syriens (Abb.7.1.8).

Die früheste erhaltene Kuppel über dem Quadrat in Italien, nach den Etruskern, ist die Vierungskuppel im Mausoleum der Galla Placidia im byzantinischen Ravenna (um 440), eine Hängekuppel aus Ziegelmauerwerk und gebrannten Tonvasen¹⁴ (Abb.7.1.9).

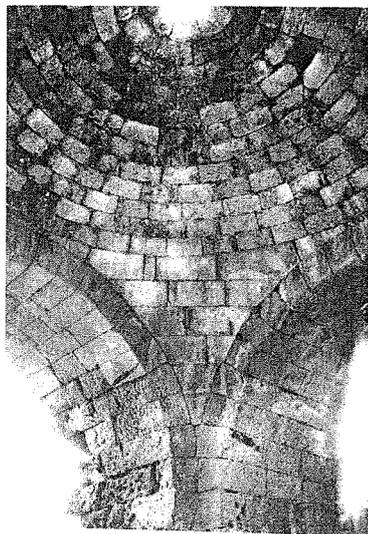


Abb.7.1.7: Pendentifkuppel mit sphärischen Pendentifs in Gerasa (3.Jhdt.), nach Creswell [189].

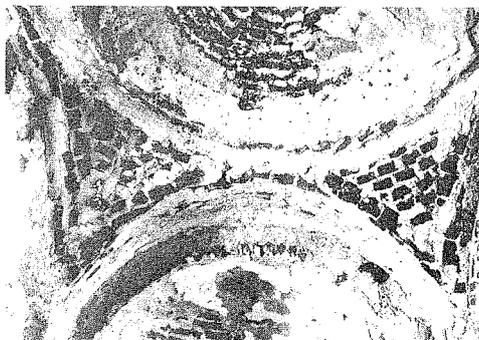


Abb. 7.1.8: Pendentifkuppel aus Ziegeln in Abū-Mīna (4.Jhdt.), nach Creswell [189].

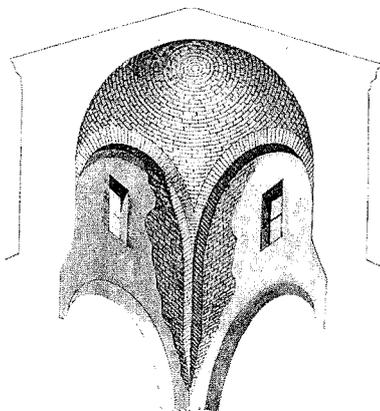


Abb. 7.1.9: Hängekuppel des Mausoleums der Galla Placidia/Ravenna (um 440) nach Riviora [248].

¹³ Creswell [189], Abb.429, S.466.

¹⁴Riviora [248], S.29/30.

7.1.2.3 Byzantinische Pendentfokuppeln

Oktogonale Zentralbauten, Kreuzkuppelkirchen und Kuppelbasiliken

Für die byzantinische Architektur kennzeichnend sind die im Zusammenhang mit der christlichen Zahlensymbolik entstandenen kuppelüberwölbten, oktogonalen Zentralräume altchristlicher Baptisterien und Kirchen (Abb.7.1.10). Bei der Kirche des heiligen Sergius und Bacchus (um 528 begonnen, 535 beendet¹⁵) in Konstantinopel wurde die Verbindung von Kuppel und polygonaler Basis mittels nischenartiger Trompen (siehe auch Abb.7.1.4) hergestellt, die ungefähr die Höhe der Substruktionsbögen erreichen.

Mit dem Typus der 'Kuppelbasilika' der Hagia Sophia und Hagia Irene, welche als Verschmelzungsform des longitudinalen Basilikatyps mit dem Zentralbau beschrieben werden kann, und den sogenannten 'Kreuzkuppelkirchen', auf dem Grundriß eines gleicharmigen griechischen Kreuzes wie die Apostelkirche von Konstantinopel (530-540)¹⁶ und später San Marco in Venedig (um 1063-1094), bilden sich die Vorformen des charakteristischen byzantinischen Kirchenbaus aus.

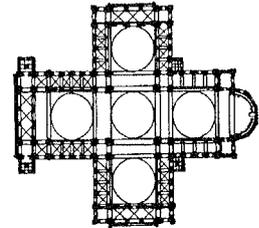
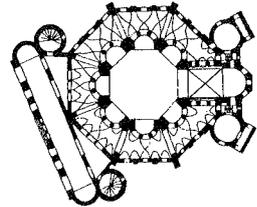
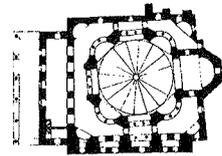


Abb.7.1.10: Grundrisse frühbyzantinischer Kirchenbauten: oben: San Vitale/ Ravenna, mitten: S.Sergius und Bacchus/ Konstantinopel, unten: Apostelkirche/Konstantinopel, nach Koch [27].

Hagia Irene und Hagia Sophia

Konstantinopel war als junge Hauptstadt des Oströmischen Reiches in ihrer Repräsentativität kaum mit Rom vergleichbar. Unter der Regentschaft Justinians (527-565) erfuhr die Stadt schließlich im Kirchenbau einen bedeutenden Aufschwung. Nach dem großen Volksaufstand im Jahre 532 mit der Vernichtung der alten Hagia Sophia und der Hagia Irene durch eine Feuersbrunst wurden beide Kirchen wieder aufgebaut.

Die Hagia Irene, aus einem Heiligtum hervorgegangen, war vor der ersten Sophienkirche

¹⁵Nach Pevsner [45], S.37.

¹⁶Nach Coche de la Ferté, S.45 [188].

(bis 360) die Kathedrale Konstantinopels und blieb auch nach dem Neuaufbau die zweitgrößte Kirche der Stadt. Veränderungen und Erneuerungen ergaben sich durch die Renovierung nach einem Feuer im Jahr 564, bei dem das Atrium und der Narthex beschädigt wurden. Die beiden Kuppeln über dem Mittelschiff, von denen die Ostkuppel eine byzantinische Pendentivkuppel von

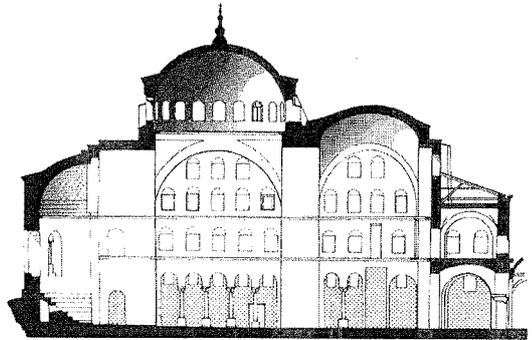


Abb.7.1.11: Schnitt durch die Hagia Irene nach W.S.George, aus *Coche de la Ferté* [188].

ca. 17m Durchmesser ist und die Westkuppel eine Hängekuppel (Abb.7.1.11) ist, wurden nach einem Erdbeben im Jahr 740 wiederaufgebaut bzw. restauriert. In dieser Form sind sie bis heute erhalten¹⁷.



Abb.7.1.12: Die Hagia Sophia/Istanbul.

Der Neubau der Hagia Sophia (Abb.7.1.12) war das ehrgeizige Projekt Justinians. Sie sollte sichtbares Zeichen des aufstrebenden Christentums und des Oströmischen Reiches werden. Der Kaiser scheute weder Kosten noch Mühen und übernahm die schon als Naturwissenschaftler berühmt gewordenen Baumeister Isidorus von Milet und Anthemius von Tralles in seinen Dienst. In nur fünfzehn Jahren, zwischen Februar 532 und

¹⁷ *Coche de la Ferté* [188] S.497.

Dezember 537, erstellten sie die Kirche, an deren Innenausstattung und Mosaikschmuck noch bis in die Zeit von Justinians Nachfolger Justinos I. gearbeitet wurde. Anthemius, dem die Entwürfe zugeschrieben werden¹⁸, entwickelte mit der Hagia Sophia das architektonische Konzept der Kuppelbasilika. Er arbeitete ein monumentales und äußerst komplexes Gewölbe-tragwerk aus, das prinzipiell

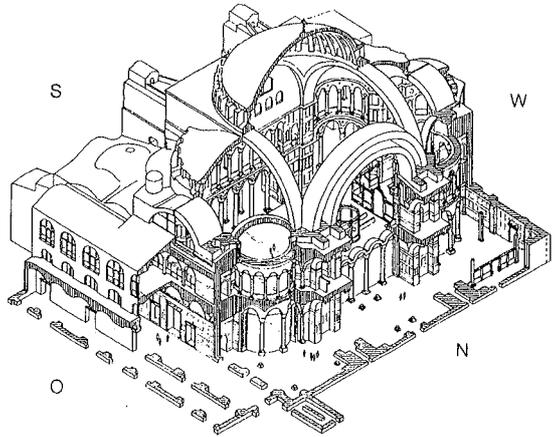


Abb.7.1.13: Isometrie der Hagia Sophia mit Haupt-tragelementen nach Mainstone [225].

auf den bisherigen, in kleinerem und mittlerem Maßstab angewandten Hängekuppeln und Halbkuppel- und Trompenformen basierte (Abb.7.1.13). Von einer rund 22 m hohen Pfeilerbasis spannen vier mächtige, kreisförmige Bögen aus Ziegelmauerwerk über dreißig Meter weit. Auf ihnen und den zwischenliegenden sphärischen Pendentifs ruht eine Kuppel von ebenso gewaltigem Durchmesser. Die westlichen und östlichen Bögen sind seitlich durch angesetzte Halbkuppeln gestützt. An der Nord- und Südseite, wo diese Elemente fehlen, wurden verstärkte Pfeilerbasen und zusätzliche Bögen zur Aufnahme der Horizontal- bzw. Schubkräfte der Kuppel angebaut.

Architekturhistoriker behaupten, daß diese Konstruktion ohne ein direktes Vorbild geschaffen worden wäre¹⁹. Dies mag auf die Verwendung bestimmter Teile wie der Halbkuppeln zutreffen, erscheint aber für das ganze Bauwerk bautechnisch und

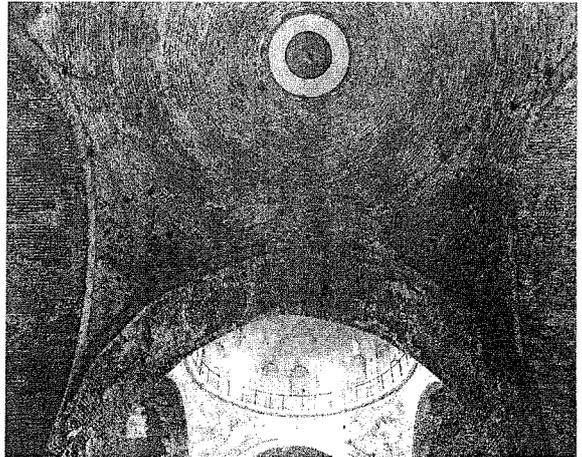


Abb.7.1.14: Innenansicht der Westkuppel der Hagia Irene, aus Mainstone [225].

¹⁸ Siehe Thode [269] S.16.

¹⁹ Siehe Pevsner [45], Müller/Vogel [41], u. a..

konstruktiv, angesichts der Vorläuferkonstruktionen mit geringer Spannweite oder der Zentralbauten wie San Sergios und Bacchus mit ihrem abweichenden Wölbkonzept, eher unwahrscheinlich. Bauwerke wie die Apostelkirche (Abb.7.1.10.c), über deren Entstehungszeit²⁰ und Konstruktion zwar kein gesichertes Wissen vorhanden ist, oder die Hagia Irene, die konzeptionell verwandt ist, können durchaus die Vorläufer für die Wölbkonstruktion der zweiten Sophienkirche gewesen sein. Die Irenenkirche wurde gleichzeitig mit der Hagia Sophia begonnen und wenigstens zwei Jahre früher fertiggestellt²¹.

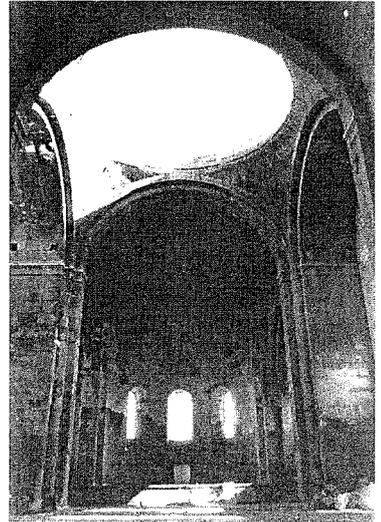


Abb.7.1.15: Pendentifs der Kuppelhallenkirche archaischen Typs von Aruc (660-670), aus Donabédian/Thierry [198].

Byzantinische Pendentifkuppeln in anderen Kulturen

Armenien

In Armenien, das seit dem 6.Jhdt. zum Byzantinischen Reich gehörte, aber schon seit dem 3.Jhdt. christianisiert war, wurde der Typus der Kreuzkuppelkirche entsprechend früh aufgenommen. Armenische Baumeister hatten die Werksteintechnik in Syrien erlernt und

20Die Zahlenangaben zu ihrer Entstehung sind divergent. Nach Coche de la Ferté [188], der sich auf die Geschichtsschreiber Konstantin von Rhodos und Nikolaos Mesarites beruft, hatte Justinian die Apostelkirche bald nach seinem Regierungsantritt bauen lassen (siehe Anmerkung 16). Koch [27] gibt den Baubeginn mit 527 an. Die Datierung Pevsners 536-546 (Pevsner [46], S.83.) erscheint demgegenüber und im Hinblick auf die architektonische und bautechnische Entwicklung weniger zutreffend.

21Ein so großer Sprung im Maßstab ist von statischen aber auch bautechnischen Gesichtspunkten her, trotz der vielfältigen und genialen Ideen, die Anthemius von Tralles und Isidorus von Milet in der Gewölbekonstruktion der Sophienkirche verwirklicht hatten, als unkalkulierbar einzustufen. Wenngleich die jetzigen Kuppeln der Hagia Irene auf das 8.Jhdt. datiert werden (Coche de la Ferté [188] S.497) und über die ursprüngliche Architektur und etwaigen Veränderungen kein genaues Wissen mehr vorhanden ist, so genügt zur Stützung der These einer statisch-konstruktiven Vorgängerrolle alleine die Annahme, daß der Wiederaufbau der Westkuppel und die Restauration der Haupt- oder Ostkuppel in ähnlicher Form wie zuvor durchgeführt worden ist. Hierfür spricht auch die Tatsache, daß zum erhaltenen ursprünglichen Grundriss und zu diesem Spannweitenbereich kaum eine andere Wölbkonstruktion als die der Hängekuppel oder Pendentifkuppel in Frage gekommen wäre. Diese Gewölbe in mittlerem Größenmaßstab ($\varnothing = 16m$) und in Ziegelmauertechnik wären dann zeitlich parallel (Hagia Irene Baubeginn: 532) zur Hagia Sophia entstanden. Der Schritt auf einen Kuppeldurchmesser von über 31m ist dann noch immer als eine gewaltige technische Leistung anzusehen.

führten damit und mit einer eigenen Ornamentik den byzantinischen Sakralbau in eine eigene Architektursprache über. Neben Kuppeln auf Trompen (siehe Kap.7.1.2.1) entstanden in Armenien ausführungsmäßig perfekte Pendentivkuppeln auch größeren Durchmessers (7.1.15), die seit dem 8.Jhdt. mit einem dem Gußmauerwerk ähnlichen Stein-Mörtel-Gemisch hinterfüllt und verstärkt wurden.

Griechenland, Balkan und Rußland

In der sogenannten Makedonischen Ära (867-1025) stellte sich ein letzter politisch stabiler Zustand im byzantinischen Reich ein, vor der Bedrohung und Zerschlagung durch die von Osten kommenden Turkstämme. Es wurden mehrere slawische Volksgruppen christianisiert, wodurch sich die byzantinische Kirchenarchitektur auf dem Balkan und Rußland verbreitete. Als vorherrschender Typus bildete sich die mit zumeist fünf oder mehr schachbrettartig verteilten Pendentivkuppeln bekrönte Kreuzkuppelkirche heraus. Ihr Grundriß ist ungefähr gleichseitig und aus quadratischen Grundformen aufgebaut (Abb.7.1.16).

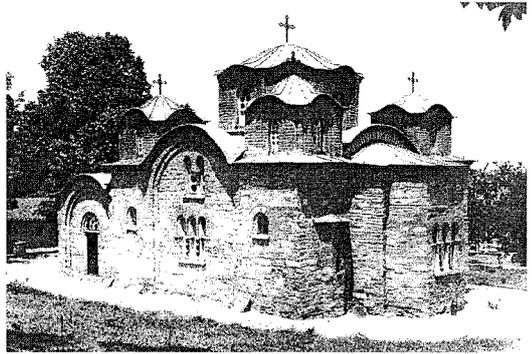


Abb.7.1.16: Panteleimon-Kirche in Nerezi/Nordmakedonien (12.Jhdt.), aus Coche de la Ferté [188].

Als vorherrschender Typus bildete sich die mit zumeist fünf oder mehr schachbrettartig verteilten Pendentivkuppeln bekrönte Kreuzkuppelkirche heraus. Ihr Grundriß ist ungefähr gleichseitig und aus quadratischen Grundformen aufgebaut (Abb.7.1.16).

Mitteleuropa

In den zum Oströmischen Reich gehörenden Gebieten Europas, in Norditalien, entstanden bis zum 11.Jahrhundert einige Sakralbauten im byzantinischen Stil, von denen nur die Markuskirche in Venedig (11 Jhdt.) mit Pendentivkuppeln byzantinischen Typs überwölbt ist.

In Frankreich kamen im 12.Jahrhundert Kirchenbauten auf, die sich in ihrer Grundrißgliederung und in der Einwölbung mit Pendentivkuppeln auf die byzantinischen Kreuzkuppelkirchen wie die Apostelkirche in Konstantinopel (Abb.7.1.10) oder auf die frühchristlichen Bauten Syriens und

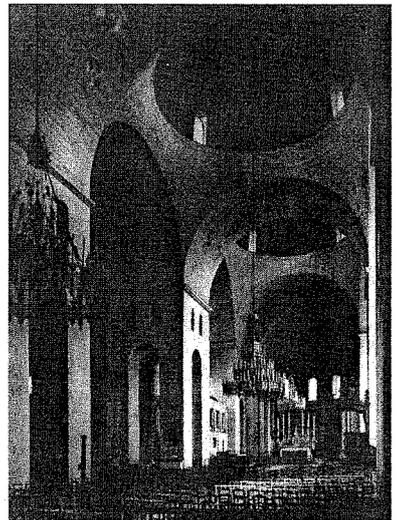


Abb.7.1.17: Périgueux, St. Front, Innenansicht, aus Pevsner [45].

der Levante beziehen, aber nicht mehr auf dem Grundriß des griechischen Kreuzes, sondern dem des lateinischen Kreuzes aufgebaut waren. Diese sogenannten 'Aquitainischen Kuppelkirchen'²² in Périgueux (St.Font, 1120-1173) (Abb.7.1.17), Clermont-Ferrand (Notre-Dame-du-Port, 1145), Angoulême (Kathedrale, ~1170) und anderen Orten unterscheiden sich in ihrer Architektur auch von den frühgotischen Sakralbauten im übrigen Frankreich. Zeitlich gesehen mag ihre Entstehung im Zusammenhang mit den Kreuzzügen und den heimgekehrten Kreuzfahrern stehen.²³

7.1.2.4 Osmanische Pendentivkuppeln

Zu den Ursprüngen osmanischer Wölbtechnik

Bögen

Schon bei der Ausweitung ihres Reiches nach Westen und der Zerstörung des Byzantinischen Reiches brachten die Türken eine eigene Wölbtechnik mit. Der 'Seldschukische Bogen', benannt nach dem gleichnamigen türkischen Stamm, ist ein typisches Bauelement.²⁴ Es handelt sich um einen Kielbogen mit geradem Verlauf im Scheitelbereich, der auch in Nordpersien und Vorderasien verbreitet ist.

Während diese Bogenform bei den Persern erhalten blieb, gingen die Baumeister des Osmanenreiches (ab dem 13.Jhdt.) zu einer aus Kreisbogen-segmenten zusammengesetzten Form über. Von den verschiedenen Hypo-

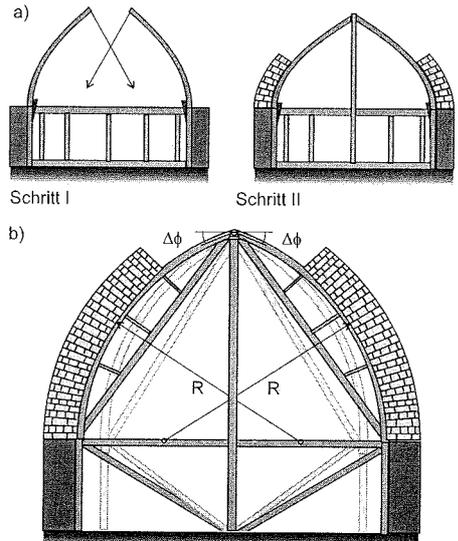


Abb.7.1.18: a) Persische Spitzbogenkonstruktion mit Hilfe von Latten, nach Cejka [185] und b) Spitzbogenkonstruktion mit veränderbarer segmentbogenförmiger Lehre.

²² Hierzu Pevsner [45], S.116/117.

²³ Dieser Zusammenhang wird in den einschlägigen Werken (z.B. Glück [16]) nicht in Erwägung gezogen. Wegen zeitlicher Parallelen (1.Kreuzzug: 1096-1099, unter französischer Führung, 2. Kreuzzug 1147-1149, unter staufischer und französischer Führung) und den architektonischen und baukonstruktiven Ähnlichkeiten sei diese Verbindung aufgezeigt.

²⁴ Cejka [185], S.23/24, Abb.23.

thesen zum Ursprung des Spitzbogens und seiner Varianten sind diejenigen die überzeugendsten, die nicht von der Schöpfung eines ornamentalen Elementes²⁵, sondern von einer technischen Lösung ausgehen. Der seldschukische Kielbogen wurde mittels verspannter und gebogener Bretter oder Planken geformt (Abb.7.1.18.a). Bei Anwendung auf grössere Weiten war dieses Verfahren jedoch nicht mehr effizient, denn entweder hätten die Bretter dicker sein müssen und wären schwierig zu formen gewesen, oder man hätte eine zusätzliche Gerüstkonstruktion gebraucht (Abb.7.1.18 b), die geometrisch schwierig einzurichten

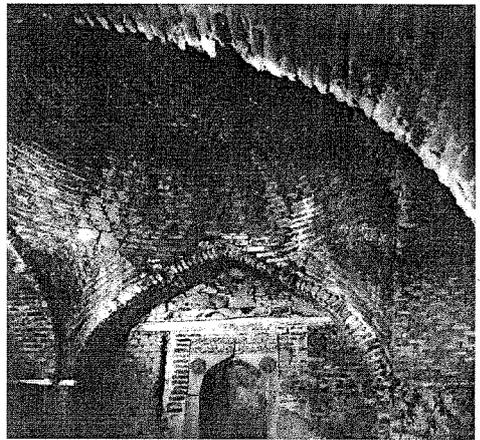


Abb.7.1.19: Pendentivkuppel über dem Scheich-Chorassan-Mausoleum (Nähe Narit-schewan/Aserbeidschan), spätes 12. Jhdt./Anfang 13. Jhdt., aus Turanszky/Gink [274].

gewesen wäre. Stattdessen führten die osmanischen Baumeister des Großreiches des 15.Jhdt. den aus Kreissegmenten zusammengesetzten Spitzbogen ein. Dieser wurde aus zwei entsprechenden Lehren gebildet, die im Scheitel drehbar verbunden waren und innerhalb eines Gebäudes mehrmals verwendet werden konnten, auch wenn die zu überwölbenden Öffnungen in der Weite nicht ganz gleich waren.²⁶ Es entstanden dennoch bezüglich des Radius einheitliche Bogenformen.

Kuppeln

Auch in der Kuppelbautechnik existierte vor der Zerschlagung des Byzantinischen Reiches durch die Türken eine eigene Tradition. In Ziegelmauertechnik und gestützt auf Kielbögen bauten die Seldschuken Vorläuferkonstruktionen osmanischer Pendentivkuppeln (Abb.7.1.19). Die Werksteintechnik erlernten die von Osten kommenden Türken von den Armeniern und brachten sie in die Bautechnik der Kuppelmoscheen ein²⁷. Hierbei kam es auch zur Vermischung armenischer und türkischer Stilmittel. Trompen mit Stalaktiten und die besondere Pendentivform der sogenannten 'Türkischen Dreiecke' entstanden und

²⁵Ebenda [185]. Cejka hat sich mit diesem Problem ausgiebig in seiner Dissertation auseinandergesetzt. Dort sind die wesentlichen Meinungen zusammengetragen und diskutiert.

²⁶Siehe Hierzu Sarré/Herzfeld [256], S. 66.

²⁷Hierzu Vogt-Göknil 'Die Moschee' [277], S.105.

bereicherten die Formensprache der osmanischen Architektur²⁸ (Abb.7.1.20).

Osmanische Kuppelmoscheen

Die seldschukische Wölbtechnik lieferte die handwerklichen Erfahrungen und die Voraussetzungen für die im 14.Jahrhundert aufkommenden, sogenannten Osmanischen Kuppelmoscheen, die als Metamorphose aus den Hofmoscheen hervorgegangen waren²⁹. Der Gedanke der Zentralbauarchitektur war nicht erst mit der Eroberung

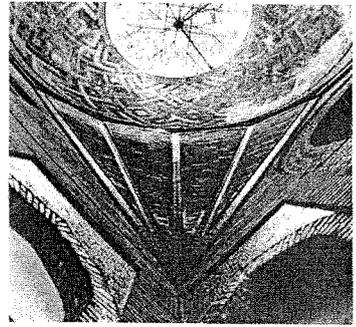


Abb.7.1.20: 'Türkische Dreiecke' als Pendentivkonstruktion in der İnce-Minare-Medrese von 1258, nach Vogt-Göknil [277].

Konstantinopels (1453) und der Umwandlung der Hagia Sophia in eine Moschee in die türkische Baukunst eingegangen, sondern ist früher bei Moscheen in Bursa oder Iznik³⁰ nachzuweisen. In Bursa, der ersten Hauptstadt des Osmanischen Reiches (seit 1326), entwickelte sich ein Kuppelmoscheentyp mit zwei großen Kuppeln über dem Betraum innerhalb eines T-förmigen Grundrisses (Abb.7.1.21).

Moscheen mit einem großen zusammenhängenden Zentralraum entstanden zunächst in Edirne³¹ und dann fast ausschließlich in Istanbul. Zweifellos war dort die Hagia Sophia Vorbild und Herausforderung für die Architekten des Osmanischen Großreichs. Die an die Zentralkuppel angegliederten Halbkuppeln waren ein Element, das von der vormals byzantinischen Hauptkirche übernommen wurde. Die Moschee des Sultans Bayazit (Architekt: Hayreddin³², 1501) ist hierfür ein frühes Beispiel (Abb.7.1.22). Auch inspirierte die Hagia Sophia die berühmtesten Vertreter der türkischen Moscheearchitektur Hayreddin und Sinan (1489-1588)³³ zur Durchgestaltung und Gliederung der äußeren Form der Fassaden. Sinan bezog in seine architektonische Inszenierung konsequent die für das Pendentivkuppel-

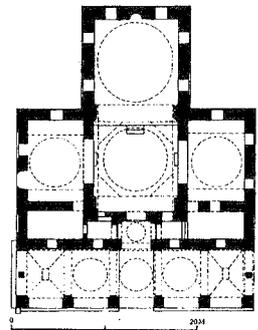


Abb.7.1.21: Grundriß der Orhan-Gazi-Moschee/ Bursa (1339), aus Sauermost/v.d.Mülbe [257].

28 a.a.O. [277].

29 ebenda [277], S.85.

30 Bursa: Aladdin-Moschee, (1335) und Iznik: Hadschi-Özbek-Moschee, (1333).

31 Die Ütsch-Scherefeli-Moschee, (1447), siehe Vogt-Göknil, 'Die Moschee', [277] S. 109.

32 Vogt-Göknil, 'Sinan', [278] S. 14/15.

33 ebenda [278], S.18.

system statisch notwendigen Stütz- und Versteifungselemente ein (siehe Kap 7.2.5), (Abb.7.1.23).

In späteren Jahren wandte er sich von den Zentralkuppelmoscheen ab und belebte die altosmanischen Moscheenformen mit ihrem modularen Grundriß und gruppiertes Anordnung von Pendentivkuppeln (Abb. 7.1.24).

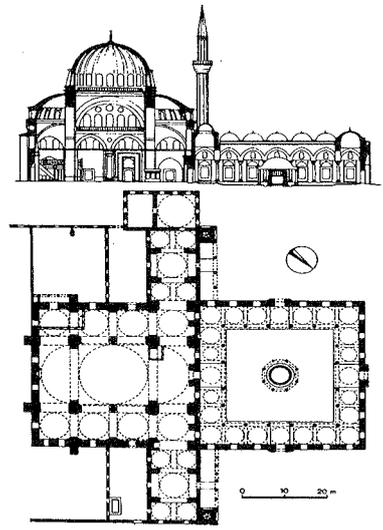


Abb.7.1.22: Schnitt und Grundriß der Bayazit-Moschee in Istanbul, (1501) nach Vogt-Göknil [277].



Abb.7.1.23: Süleymaniye-Moschee/Istanbul (1550-1557) von Sinan, aus Hotz [212].



Abb.7.1.24: Piyale Paşa Camii von Sinan als Beispiel einer Konstruktion mit gereihten Pendentivkuppeln, aus Hotz [212].

7.2 Tragverhalten von Pendentivkuppeln

7.2.1 Geometrische und statische Eigenschaften der Pendentifs

7.2.1.1 Zur Definition des Pendentifs

Befragt man Architekturlexika oder Enzyklopädien, so werden Pendentifs grundsätzlich als die Zwickelflächen aus dem Verschnitt einer Hemisphäre mit einem Kubus, also als sphärische Dreiecke beschrieben. Dies trifft freilich nur auf diejenigen zu, die auf Basis des Kreises und der Kugel mit ihren punktsymmetrischen Eigenschaften konstruiert sind (siehe Kap.7.1.1). Die geringste geometrische Veränderung, beispielsweise der das Pendentif be-
randenden Substruktionsbögen, führt zum Verlust dieser Symmetrieeigenschaften und zu einer anderen achsensymmetrischen oder polyzentrischen Geometrie der Zwickelflächen. Ohne Frage sind auch solche anderen Formen der Zwickel als Pendentifs zu bezeichnen, da sie dieselbe geometrische und statische Funktion haben. Von der Statik aus gesehen ist die Definition des Pendentifs dahingehend abzugrenzen, daß es sich bei den Konstruktionen der Zwickel nicht um volumenartige, sondern - wie bei den darauf gelagerten Kuppeln - um schalen- oder scheibenförmige Bauteile handeln muß, bei denen die Übertragung der Lasten vornehmlich über Normalkräfte und nicht über Querkräfte und Biegemomente erfolgt (siehe auch Kap.7.1.1).

7.2.1.2 Die Geometrie der Pendentifs

Während die Geometrie der Mittelfläche der byzantinischen Pendentifs (in sphärischen Koordinaten) auf einem konstanten Radius $R_p = R_k = \text{const.}$ basiert, (Abb.7.2.1.a), muß das osmanische Pendentif als Konoidfläche beschrieben werden. Zwischen den spitzbogenförmigen Substruktionsbögen als Leitlinien wird eine räumlich gekrümmte Fläche aus einbeschriebenen Bogensegmenten mit veränderlichen Radien gebildet.

In Zylinderkoordinaten, mit Ursprung in der z-Achse, kann der Radius des erzeugenden Bogens als $R_p = R(z)$ beschrieben werden (Abb.7.1.2.b). Wegen der Diskontinuität in Form des Knickes im

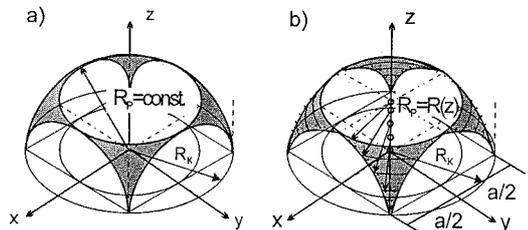


Abb.7.2.1: Geometrische Konstruktion a) des byzantinischen und b) des osmanischen Pendentifs.

Bogenscheitel bilden die osmanischen Pendentifs keine zusammenhängende Form. Die Fläche des osmanischen Pendentifs ist wie der Bogen zur Vertikalen steiler geneigt als die Pendentiffläche des byzantinischen Pendentifs.

7.2.2 Vorgehensweise, Modellierung und Lagerung bei der FE-Simulation

Die Untersuchungen des Tragverhaltens mit Hilfe der Finite-Element-Methode erfolgte in zwei Stufen: Zuerst wurden wegen des Rechenaufwandes Voruntersuchungen an Modellen aus Schalenelementen auf Grundlage eines linearen Materialgesetzes durchgeführt, wobei auch die Geometrie variiert wurde (z.B. die Kuppelkalottenhöhe). Dann erst erfolgten die materiell-nichtlinearen Untersuchungen an den beiden Pendentifkuppeltypen.

Beide Modelle, das der byzantinischen und das der osmanischen Kuppel stimmen in Grundrißfläche, Gesamthöhe (17m x17m x17m) und Höhe des Kuppelansatzes sowie in den Dicken der Tragglieder überein. Das byzantinische und das osmanische Pendentif ist im FE-Simulationsmodell 40% dicker als die Kuppelschale (35cm im Vergleich zu 25cm). Bei der osmanischen Pendentifkuppel wurde als Öffnungswinkel des Spitzbogens des Modells ein für osmanischen Bögen typischer Wert von 170° gewählt.

Die Pendentifkuppeln der nichtlinearen Untersuchungen sind an den Auflagern in vertikaler und horizontaler Richtung gehalten. Die horizontale Stützung ist bis auf ungefähr ein Sechstel der Bogenhöhe hochgezogen, um die Verformungsbehinderung infolge einer Hinterfüterung durch Pfeiler in der Simulation zu berücksichtigen. Die aus dem Aufbau und Bauprozess resultierende schubweiche Verbindung zwischen Bögen und Pendentifs wird durch Elemente mit entsprechendem Materialverhalten wiedergegeben.

7.2.3 Grundsätzliche Merkmale des Tragverhaltens von Hängekuppeln und Pendentifkuppeln unter Eigengewichtsbelastung

Das Tragverhalten von Pendentifkuppeln wie auch der einfachen Vorform der Hängekuppel wird stark beeinflusst von der Auflagerung und Stützung. Letztere hängt von der architektonischen Einbindung ab, d.h. davon, ob die Kuppel als Solitär oder in Gruppen gebaut ist. Als Solitär ist sie nur an ihren Fußpunkten festgehalten. Bei gruppenweiser Anordnung der Kuppeln stützen sich die benachbarten Substruktionsbögen gegenseitig. Im ersten Fall stellt sich eine von den freien Enden abgekehrte und zu den Auflagern hin konzentrierte, gerichtete Lastabtragung über die Pendentifs ein (Abb.7.2.2.a, 7.2.2.b). Die Bogenscheitel verformen sich stark nach außen und bedingen dadurch eine Umleitung der Last über die Diagonalrichtung. Aus diesem Grund wird die Lastabtragung bei der

Hängekuppel von den Randbögen und deren Steifigkeit wenig beeinflusst.

Im zweiten Fall, wo die Horizontalverformungen des Scheitels durch Nachbarkuppeln behindert werden, entsteht eine gleichmäßigere Lastabtragung in der Kalotte und es fließen Lasten über den Bogen ab³⁴ (Abb.7.2.2.c).

Eine Stützung der Bogenscheitel in horizontaler Richtung beeinflusst also in hohem Maße die Abtragung der Vertikallasten und damit den Grad der von der Anordnung und Form der Tragglieder der Pendentfikkuppel suggerierten Lastabtragung³⁵ über die Bögen.

7.2.4 Die freistehende Pendentfikkuppel

In dieser Studie werden vornehmlich freistehende Pendentfikkuppelkonstruktionen untersucht, weil sie einerseits fester Bestandteil der osmanischen Moscheenarchitektur sind, andererseits weil sie die statisch empfindlichsten Formen darstellen. Die Einzelkuppel gibt mit ihren Eigenschaften und Schwachstellen das Tragverhalten des Typs der Pendentfikkuppel am besten wieder. Hierdurch wird es gleichzeitig möglich, die zum Pendentfikkuppelsystem entwickelten Stütz- und Strebesysteme in ihrer statischen Funktion und Notwendigkeit zu beurteilen.

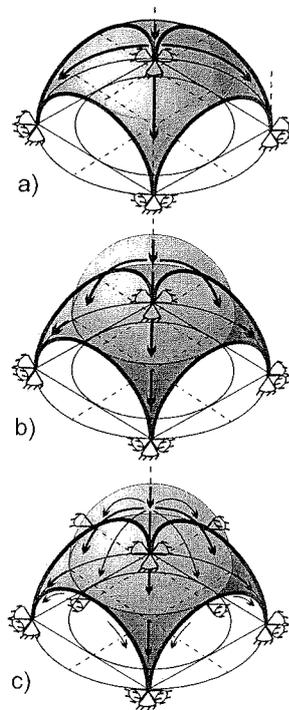


Abb.7.2.2: Vereinfachte Darstellung der Hauptlastpfade unter Eigengewicht und elastischem Materialverhalten a) einer Hängekuppel, b) einer Pendentfikkuppel, beide ohne horizontale Stützung im Bogenscheitel und c) einer Pendentfikkuppel mit horizontaler Stützung im Scheitel.

³⁴Zimmermann [286] hat diese Fälle mit Hilfe linear-elastischer Finite-Element-Rechnungen ausgiebig studiert.

³⁵Beispiele sind die Pfeilbilder zum Kraftfluß in Pendentfikkuppeln nach Mainstone [37], S.193, Fig.12.1.

7.2.4.1 Tragverhalten der byzantinischen Pendentivkuppel

Die grundsätzlichen Veränderungen des Lastabtragungsverhaltens der freistehenden byzantinischen Pendentivkuppel infolge Rißbildung lassen sich anhand der Darstellungen der Hauptspannungsrichtungen ersehen (Abb.7.2.3). Im ungerissenen Zustand (Abb.7.2.3.a) ist die Lastabtragung über die Diagonalrichtung an der Konzentration der Pfeile und an den Pfeillängen und der Pfeilausrichtung an Extrados und Intrados der Pendentifs zu erkennen. Es kommt am Kuppelkalottenansatz zu Biegespannungen, erkennbar an den Zugspannungspfeilen an der Kuppelinnenfläche. Ebenso treten über den Bogenscheiteln am Intrados Zugspannungen auf. Diese werden im Laufe der materiell-nichtlinearen Simulation durch Rißbildung abgebaut (Abb.7.2.3.b), so daß Druckspannungen im Tragwerk vorherrschen und eine Verlagerung der höchstbeanspruchten Zonen einhergeht. Die Hauptspannungsrichtungen im gerissenen Zustand weisen dann einen bogenförmigen, durch den Kuppelansatz verlaufenden Lastpfad aus.

Rißverhalten

Anhand der Rißbilder charakteristischer Stufen der Rißbildung unter sukzessiver Laststeigerung lassen sich die gerissenen Zonen und Tragwerksteile sowie der Grad der Rißbildung im Tragwerk erkennen und die Veränderung des Tragverhaltens nachvollziehen :

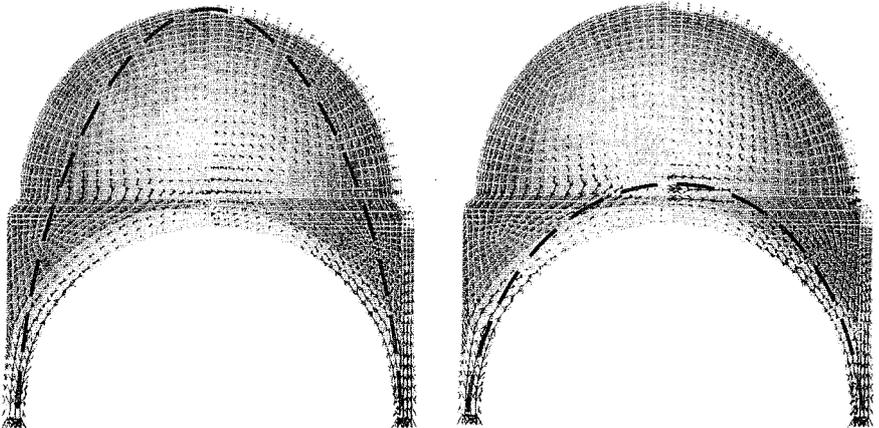
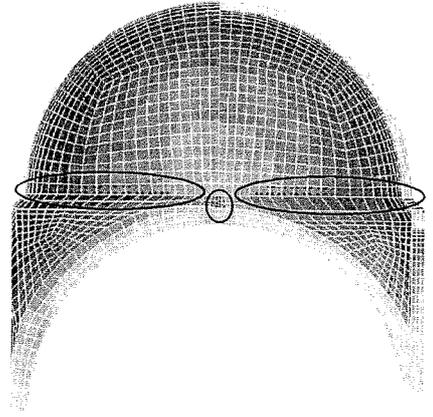
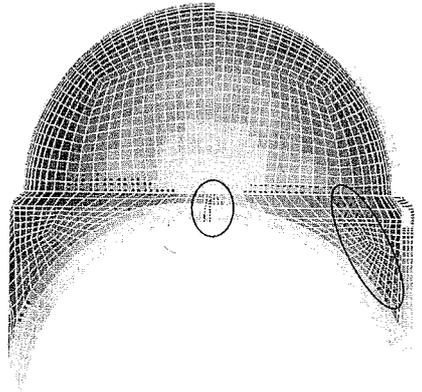


Abb.7.2.3: Hauptdruck- und Hauptzugspannungen in der byzantinischen Pendentivkuppel: a) ungerissen bzw. bei linear-elastischem Materialverhalten und b) gerissen bzw. bei nichtlinearem Verhalten. Zusätzlich gestrichelt eingetragen: die Hauptlastabtragsrichtung, wo die relativen Beanspruchungen am größten sind. (Legende: Linke Hälfte: Außenansicht, rechte Hälfte: Innenansicht, weiße Pfeile: Hauptzugspannungen, schwarze Pfeile: Hauptdruckspannungen, Pfeillänge bezeichnet Größe der Spannung).

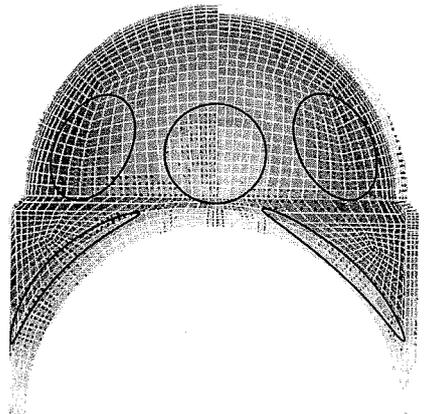
1.Phase: Die Meridianbiegemomente zwischen Kuppelkalotte und Pendentifs führen zu horizontalen Rissen am Kuppelansatz (Abb.7.2.4.a). Biegezugkräfte an den Außenflächen der Substruktionsbögen im Scheitel werden durch Risse abgebaut.



2.Phase: Die Bögen reißen im Scheitel (0.26 EG) ganz durch, und es bilden sich Druckkontaktflächen wie Scheitelgelenke (Abb.7.2.4.b). Die Pendentifs beginnen von der Mitte her vertikal durchzureißen.



3.Phase: Die Bögen trennen sich von den (0.34 EG) Pendentifs, die ihrerseits weiter aufreißen (Abb.7.2.4.c). Diese Vertikalrisse pflanzen sich in die Kuppelkalotte als Trennrisse fort. Über den Bogenscheiteln, an der Außenfläche der Kalotte bilden sich Einrisse. Die Absenkung der Bogenscheitel nimmt zu, erkennbar an weiteren Einrissen der Bögen von unten her (siehe auch Abb.7.2.7).



36 Vielfaches des Eigengewichtes (EG).

4.Phase: Die Durchtrennung der Einrisse (0.40 EG) in der Kuppel setzt ein (7.2.4.d). Hierdurch verschwindet die zwei-dimensionale Lastabtragung. Die Kuppelsegmente stützen sich jetzt gewissermaßen nur noch über die gerissenen Kontaktflächen gegenseitig ab (Abb.7.2.5.c). Hiermit haben die wesentlichen Systemveränderungen stattgefunden. Die Lastabtragung ändert sich mit weiter zunehmender Last qualitativ nicht mehr. Die Last konnte weiter auf das 2,4-fache Eigen-gewicht bis zum Abbruch der Simulation gesteigert werden.

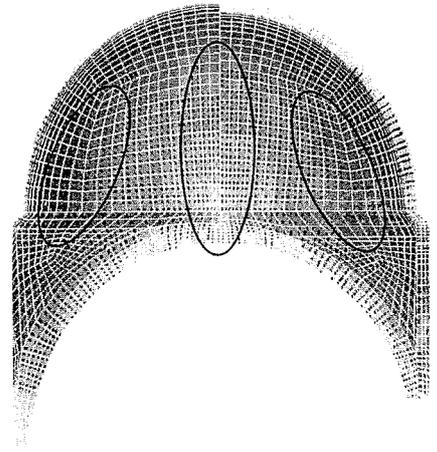


Abb.7.2.4: Rißbildung im Verlauf einer nichtlinearen FE-Simulation einer byzantinischen Pendentifkuppel: a) Phase 1: Umlagerung zur Bogenwirkung, b) Phase 2: Pendentifdurchriß c) Kuppel-einriß über Pendentif und Bogenscheitel, d) Phase 4: völliges Durchreißen der Kuppel.

Verlagerung der Hauptlastpfade

Von den gezeigten Rißbildungsstufen ist der einsetzende Durchriß der Pendentifs (Phase 2) derjenige, mit dem sich das Lastabtragungsverhalten der Kuppel am deutlichsten ändert, und sich der zuerst diagonal verlaufende Lastpfad teilt. Der Wechsel der Lastpfade infolge Rißbildung ist in Abbildung 7.2.5 schematisch dargestellt.

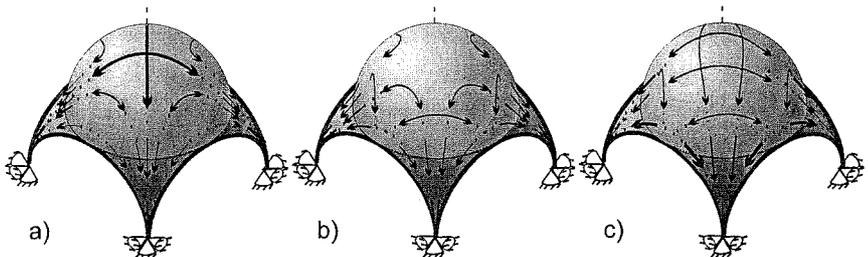


Abb.7.2.5: Verlagerung der Lastpfade infolge der Rißbildung bei der byzantinischen Pendentifkuppel ohne horizontale Stützung des Bogenscheitels: a) ungerissener Zustand b) Phase 2: Pendentifdurchriß c) Phase 4: Kuppel-einriß und Pendentifdurchriß.

(Legende: Pfeile und durchgezogene Linien geben die Hauptlastpfade in der Außenschicht der Kuppelschale an, gepunktete Linien geben die Hauptlastpfade in der Innenschicht an. Die Liniendicke charakterisiert die Beanspruchungsintensität.)

7.2.4.2 Tragverhalten der osmanischen Pendentivkuppel

Rißverhalten

Die osmanische Pendentivkuppel, die sich durch die spitzen Substruktionsbögen und weniger gekrümmte und steilere Pendentive von der byzantinischen unterscheidet, weist in ungerissenem Zustand ebenfalls eine über Kreuz zu den Auflagern gerichtete Lastabtragung auf. Bei der nichtlinearen Simulation ergab sich eine gegenüber der byzantinischen Kuppel veränderte Rißbildungsgeschichte:

1.Phase: Auch hier findet eine Trennung (0.30 EG) der Kuppelkalotte vom Pendentivunterbau durch horizontale Biege-
risse statt, und es bilden sich Risse an den Außenflächen der Bogenscheitel. Neben den Scheiteln, im Abstand von ca. $1/5$ der Bogenlänge treten einzelne Einrisse auf, welche auf die spitzbogige Geometrie zurückzuführen sind (Abb.7.2.6.a). Dies zeigt, daß die Substruktionsbögen der osmanischen Pendentivkuppel schon von Anfang an, also bei ungerissenem Querschnitt, eine Bogenwirkung

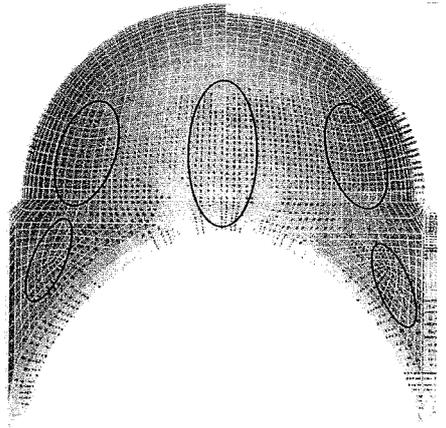
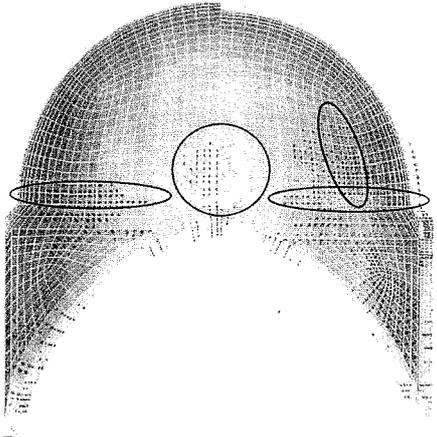
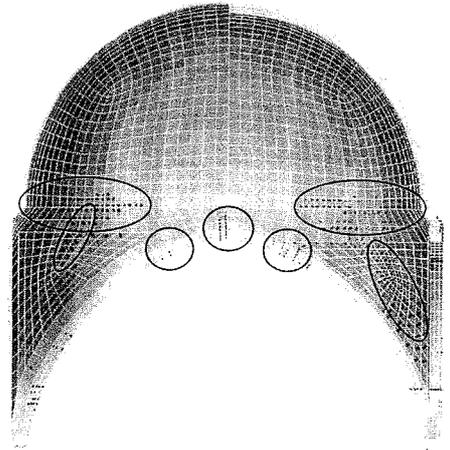


Abb.7.2.6: Rißbildung im Verlauf einer nichtlinearen FE-Simulation einer osmanischen Pendentivkuppel: a) Phase 1: Trennung von Kalotte und Pendentif b) Phase 2: Pendentiveinrisse c) Phase 3: Kuppelrinne über Pendentif und Bogenscheitel.

übernehmen. Es entstehen vertikale Trennrisse an der Pendentifbasis, die sich bis unter den Kuppelansatz ausdehnen.

2. Phase Die Vertikalrisse setzen sich zunächst stärker im Intrados der Kuppelkalotte fort, (0,38 EG) gleichzeitig entstehen Einrisse am Extrados der Kuppel über den Bogenscheiteln (7.2.6.b). Es bilden sich weitere Trennrisse in der Horizontalebene zwischen Pendentif und Kalotte.

3.Phase: Das Pendentif reißt ganz durch. Die Zonen mit Einrissen an Intrados und Extrados der Kalotte verschmelzen und gehen über in Trennrisse (7.2.6.c).

Die wesentlichen Systemwechsel haben stattgefunden, die weitere Laststeigerung vermehrt die Bildung vertikaler Längsrisse, ändert aber die globale Lastabtragung nicht mehr. Die Last konnte über das 3-fache Eigengewicht (3,0 EG) gesteigert werden. Wegen der enormen Rechenzeit wurde die Simulation danach abgebrochen.

Verlagerung der Hauptlastpfade

Die osmanische Pendentifkuppel verhält sich bezüglich der Veränderung der Lage der Hauptlastpfade infolge von Rißbildung prinzipiell ähnlich wie die byzantinische. Wegen des ausgeprägten Bogentragverhaltens der spitzen Substruktionsbögen verlagert sich jedoch der Bogenlastpfad bei der osmanischen Kuppel erst bei einem deutlich höheren Lastniveau in den Kuppelkalottensatz (0,38 EG gegenüber 0,26 EG bei der byzantinischen Kuppel)³⁷.

7.2.5 Verformungsverhalten und konstruktive Stützmaßnahmen³⁸.

Neben der Betrachtung der Rißbildung erlaubt auch die Auswertung des Verformungsverhaltens, sowohl im Zusammenhang mit einem Verformungs-Last-Diagramm als auch

³⁷Die Spannungsverteilung ist bei der spitzbogigen Kuppelkonstruktion schon im elastischen Zustand verhältnismäßig ausgeglichen. Bei höheren Belastungsgraden und nach erfolgter Rißbildung gilt dies umso mehr, so daß derartig hohe Lastfaktoren bei der nichtlinearen Simulation möglich werden. Sowohl bei der byzantinischen als auch bei der osmanischen Pendentifkuppel liegen die maximalen Druckbeanspruchungen ($\sigma_{max} = 0,98 \text{ N/mm}^2$ für die byzantinische Pendentifkuppel) weit unter den für Ziegelmauerwerk kritischen Werten.

³⁸Das Verformungsverhalten wird hier nur qualitativ zum Vergleich herangezogen. Die quantitative Richtigkeit der Ergebnisse der nichtlinearen FE-Simulation muß wegen der Elementeigenschaften und der vereinfachten Materialformulierung in Frage gestellt werden (siehe A. 4. 1.3).

anhand einer Verformungsfigur, Rückschlüsse auf das Tragverhalten von Pendentfokuppeln zu ziehen.

Verformungs-Last-Diagramm

Das Verformungs-Last-Diagramm für die Absenkung des Kuppelscheitels in Abbildung 7.2.7 zeigt wie die byzantinische Pendentfokuppel schon bei Belastungsbeginn sich sehr viel stärker verformt als die osmanische Pendentfokuppel. Beide Diagramme weisen bei jenen Belastungsstufen

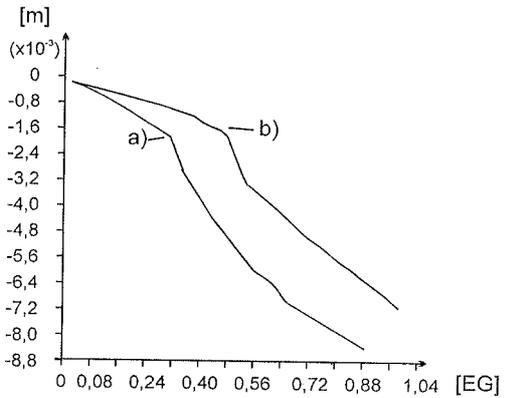


Abb.7.2.7: Verformungs-Last-Diagramm unter faktoriertem Eigengewicht [EG] für den Kuppelscheitel: a) der byzantinischen Pendentfokuppel und b) der osmanischen Pendentfokuppel.

Unstetigkeiten ('Knicke') auf, bei denen sich die Lastabtragung verändert und die Hauptlastpfade bogenförmig durch den Kuppelkalottenansatz verlaufen. Dieser Wechsel erfolgt bei der osmanischen Variante plötzlich, wenn die Bögen und die Kuppelschale im Bereich der Scheitel durchtrennt sind. Die ausgeprägte Bogenwirkung der Spitzbögen mit den steileren Pendentifs der osmanischen Pendentfokuppel bestätigt sich hierbei nochmals. Die Verformung des Kuppelscheitels ist um 30% geringer im Vergleich zu derjenigen der aus Kreisbögen konstruierten, byzantinischen Gattung.

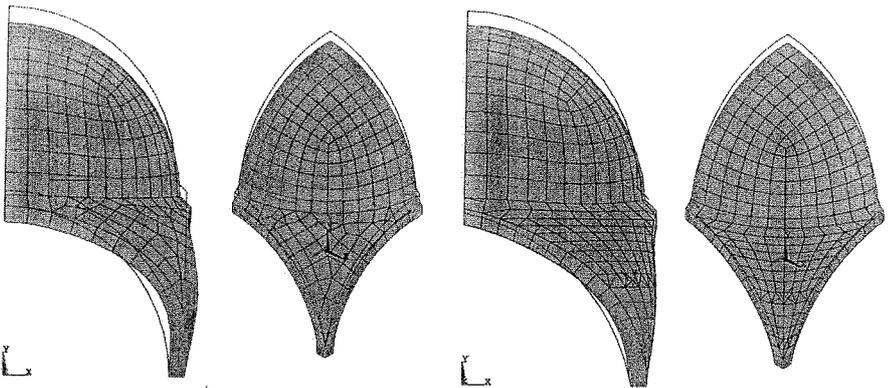


Abb.7.2.8: Verformungsfiguren einer byzantinischen Pendentfokuppel (links) und einer osmanischen Pendentfokuppel (rechts) aus einer linearen FE-Berechnung (überhöhte Darstellung).

Die Verformungsfiguren der freistehenden Pendentivkuppeln zeigen die 'nachgiebigen' Stellen der Tragstrukturen. Erwartungsgemäß deformieren sich die Pendentifs und Kreisbögen der byzantinischen Kuppel verhältnismäßig stark (Abb.7.2.8.a) und weichen nach außen aus. Die osmanische Pendentivkuppel gibt im entsprechenden Bereich, auf halber Bogenhöhe, deutlich weniger nach. Die Ursache für dieses Tragverhalten ist die geometrisch bedingte Neigung der Substruktionsbögen zur Vertikalen am Kämpfer im Gegensatz zur byzantinischen Kuppel, wodurch sich die Abtragung über Normalkräfte verstärkt. Die Pendentifs der byzantinischen Kuppel müssen demgegenüber bis zu einer gewissen Höhe horizontal gestützt werden (wie es bei den nichtlinearen Simulationsmodellen gemacht wurde), dann verlagert sich der Kämpferansatz der Randbögen vorteilhaft nach oben, so daß die Bogenwirkung stärker wird.

Die horizontale Stützung der Pendentivbasen ist demnach eine wichtige Maßnahme zur Stabilisierung vorallem des byzantinischen Pendentivkuppelsystems. Byzantinische wie auch osmanische Baumeister haben deshalb die äußere Form der freistehenden Kuppeln häufig als Kubus gewählt und die Zwickelvolumen zwischen Pendentiv und Außenfläche entweder massiv aufgebaut oder hinterfüllt (siehe Abb.7.1.12, Hagia Sophia). Die Ecktürme vieler osmanischen Moscheen haben Ballastfunktion und sollen den am Pendentivsockel auftretenden, auswärts gerichteten Kräften entgegenwirken bzw. dazu beitragen, Biegezugspannungen zu überdrücken. (z.B. Süleymaniye Moschee, Abb.7.1.23 und Mirimah Moschee, Abb.7.2.9).

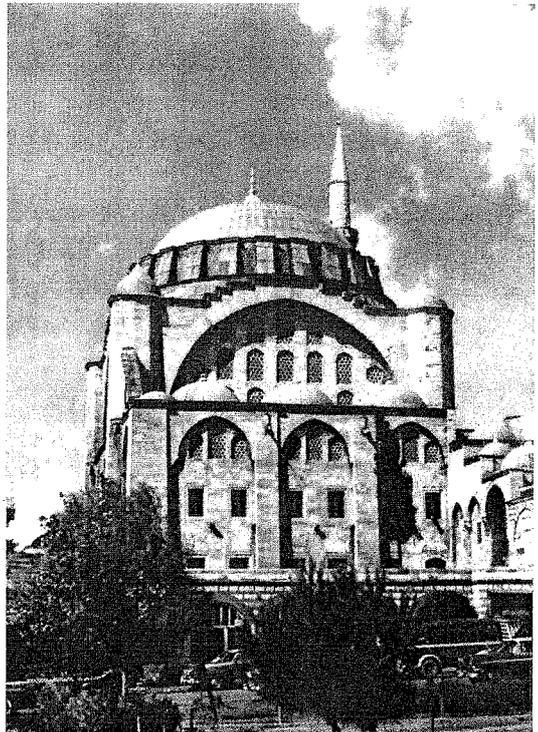


Abb.7.2.9: Moschee der Prinzessin Mirimah von Sinan (1555).

7.2.5.2 Viertelkugelgewölbe zur Horizontalstützung, Stützen und Streben

Um der Wirkung des Horizontalschubs von Kuppeln und Halbkuppeln zu begegnen, sahen schon Anthemius von Tralles und Isidorus von Milet bei der Sophienkirche vielfältige konstruktive Maßnahmen vor. Sie führten Substruktionsbögen besonders breit aus, um sie zur Stützung heranzuziehen oder setzten Halbkuppeln an den Bögen über den angegliederten Apsidenräumen an beiden Seiten an. Hierbei lag offenbar die Vorstellung zugrunde, daß sich die Kraftwirkungen symmetrisch gegenüberliegender Halbkuppeln ergänzen würden. Tatsächlich trennt sich die Halbkuppel wegen der geringen Zugfestigkeit des Mauerwerks, besonders bei Erschütterungen und Erdbeben ab. Das Gleichgewicht zwischen den Halbkuppeln ist damit gestört. Die abgetrennte Viertelkugelkalotte kann ohne weitere Stützung für sich stehen, indem sie am festen Auflager einreißt und entlang des freien Randes über Bogenwirkung ihre Lasten abträgt (Abb.7.2.10). Ihre horizontale Stützreaktionskräfte auf den Substruktionsbogen werden somit wesentlich geringer. Die wiederholten Teileinstürze, welche die Hagia Sophia in ihrer Baugeschichte erlitten hatte, dokumentieren gerade diese Schwäche der mit Halbkuppeln überwölbten Apsiden, die mehrmals wiederaufgebaut³⁹ werden mußten. Die

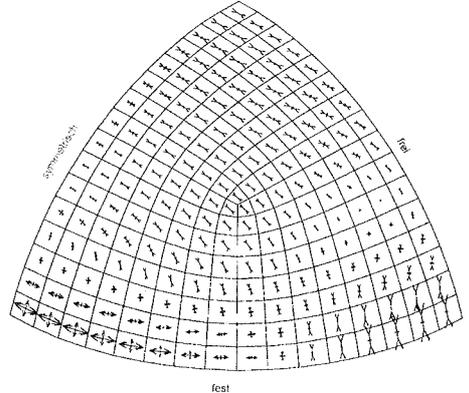


Abb.7.2.10: Hauptspannungen einer Achtelkugelkalotte mit freiem Rand unter Eigengewicht.

abträgt (Abb.7.2.10). Ihre horizontale Stützreaktionskräfte auf den Substruktionsbogen werden somit wesentlich geringer. Die wiederholten Teileinstürze, welche die Hagia Sophia in ihrer Baugeschichte erlitten hatte, dokumentieren gerade diese Schwäche der mit Halbkuppeln überwölbten Apsiden, die mehrmals wiederaufgebaut³⁹ werden mußten. Die

³⁹Die Schwachstellen der Konstruktion der Hagia Sophia wurden durch wiederholte Erdbeben zutage gebracht und machten aus den ersten 800 Jahren der Geschichte der Hagia Sophia gewissermaßen eine Entwicklungs- und Optimierungsphase des freistehenden Pendentifkuppelsystems. Nach einem Erdbeben im Dezember 557, ein halbes Jahr verzögert, stürzte der östliche Substruktionsbogen und der darüberliegende Teil der Kuppel ein. Isidorus der Jüngere, ein Neffe des Meisters, der nunmehr mit der Sanierung betraut war, entschied sich für den Aufbau der heutigen Pendentifkuppeln, nachdem die Vorgängerschale um gut 6m flacher war und wahrscheinlich die Form einer Hängekuppel hatte. Dennoch blieb die Sophienkirche von weiteren Kuppelinstürzen nicht frei. Im 10.Jhdt. brach - wieder infolge eines Erdbebens - der westliche Bogen und ein Teil der Kuppel darüber ein. Der armenische Baumeister Trdat unter Kaiser Baselius II. reparierte den Schaden, indem er den Querschnitt des westlichen Substruktionsbogens bedeutend verbreiterte. Er führte zudem umfangreiche Verstärkungsmaßnahmen durch, ließ Fensteröffnungen zumauern oder verkleinern und Bogenverstärkungen ansetzen. Obwohl im 14.Jhdt. (um 1317) weitere massige Stützpeiler an Nord- und Südfront angesetzt wurden, brach kurz danach (1344), infolge eines starken Erdbebens der westliche Bogen samt

Sophienkirche mit ihren im Lauf der Jahre immer zahlreicheren Stütz- und Strebepfeilern und Korsetttagen zeigt die Vielfalt möglicher Hilfskonstruktionen zur Stabilisierung des Pendentifsystems und spiegelt gleichzeitig die damit verbundene Problematik und die Unsicherheit der am Bau und der Sanierung beteiligten Baumeister wider (Abb.7.2.11).

Die osmanischen Baumeister und unter ihnen vorallem Sinan analysierten die Eigenschaften von Strebbögen, Halbkuppeln, Substruktionsbögen, Hintermauerungen und Hinterfüllungen der Pendentifs und ergänzten sie durch eigene Erfindungen wie Strebewände, Ecktürme und eiserne Zuganker⁴⁰. Letztere verwendete Sinan, um den Horizontalschub von Halbkuppeln direkt abzufangen, und nicht wie bei der Hagia Sophia indirekt durch gegenseitige Stützung mehrerer gereihter Halbkuppeln kurzzuschliessen. Mit diesen Details verbesserte er das Tragsystem der Pendentifkuppel und brachte ihre Konstruktion auf einen hohen technischen wie ästhetischen Stand. Sinans Moscheen waren gerade in dieser Hinsicht bedeutende Vorbilder für seine Nachfolger⁴¹.

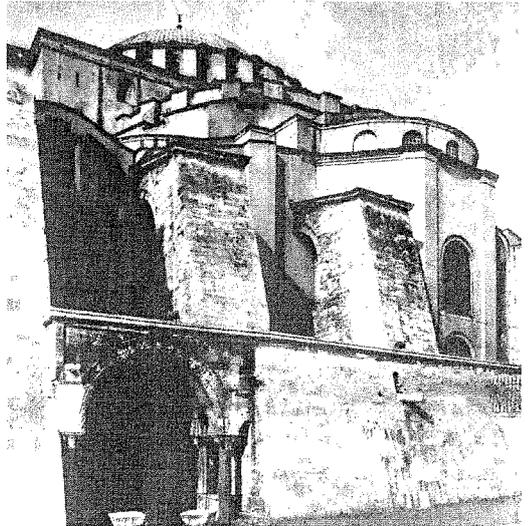


Abb.7.2.11: Südostseite der Hagia Sophia mit Verstärkungen an dem südlichen Substruktionsbogen, den Strebbögen und den Fensterpfeilern an der Kuppelbasis, aus Mainstone [225].

7.2.6 Zusammenfassung

Das System der Pendentifkuppel entwickelte sich vorzugsweise im westlichen Orient, in Syrien, als Kleinform aus der Mausoleen- und Thermenarchitektur heraus. Im Oströmischen Reich wurden die auf der Basis des Kreises konstruierten sogenannten byzantinischen Pendentifkuppeln zum Symbolelement der gleichnamigen Architektur. Die Hagia Irene und die Hagia Sophia markieren die großen Entwicklungsschritte, in denen das

unterstützter Kuppelteile abermals ab. Erst in der nachfolgenden Zeit blieben größere Schäden aus. Hierzu Thode [269] und Mainstone [225].

⁴⁰ Tanyeli/Tanyeli, [268].

⁴¹ Z.B. Mehmet Aga mit der Blauen Moschee in Istanbul (1610-1617).

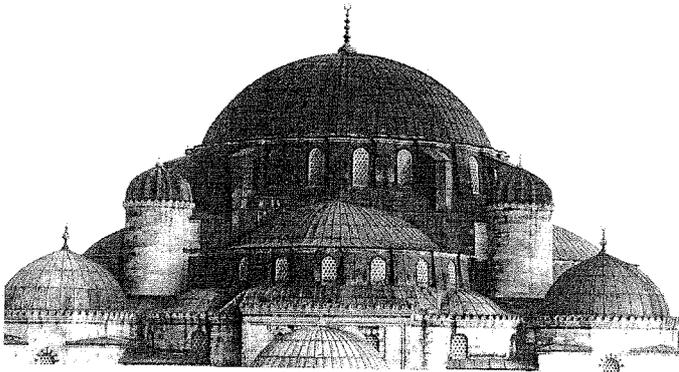


Abb.7.2.12 Ecktürme, Halbkuppeln und Strebewände der Shezade-Moschee/ Istanbul (1543) von Sinan, aus Vogt-Göknil [278].

Pendentifkuppelsystem als solitäre Struktur in große Dimensionen übergeführt wurde. Die Größe und Monumentalität der Sophienkirche wurde von keinem anderen, späteren byzantinischen Bauwerk auch nur annähernd erreicht, obwohl die Pendentifkuppelbauweise im ganzen Einflußgebiet Ostroms verbreitet war.

Die Osmanen, die 1453 Byzanz unterworfen hatten, verbanden eigene Wölberfahrungen mit Kuppeln über quadratischen Grundrissen mit den Elementen der byzantinischen Architektur. Wie Tragverhaltensstudien an freistehenden Pendentifkuppeln byzantinischer und osmanischer Geometrien zeigen, bedingt die von ihnen mitgebrachte Spitzbogenbauweise eine veränderte Pendentifgeometrie, die das statische Verhalten der Kuppel positiv beeinflusst. Die auf Kreis und Hemisphäre basierte Geometrie der byzantinischen Pendentifkuppel führt demgegenüber zu einem 'weichen' Tragwerk, das infolge der Rißbildung Lastumlagerungen unterworfen ist, die mit starken Verformungen verbunden sind. Um hier Abhilfe zu schaffen, und um das Tragwerk standsicherer zu machen, erfanden schon die Baumeister der Hagia Sophia die verschiedensten Versteifungskonstruktionen. Die osmanischen Baumeister entwickelten diese weiter und verbesserten so das statisch an sich empfindliche Pendentifkuppelsystem in einer Weise, daß es auch auf dem seismisch aktiven Boden Kleinasien standsicher wurde.

8.0 Kreiszyllindrische Tonnengewölbe am Beispiel von St.Michael in München (1597)

8.1 Zur Entwicklung tonnenüberwölbter Kirchenbauten

Wie die frühesten Kuppeln und Pendantkuppeln so finden sich auch die ältesten Tonnengewölbe aus Mauerwerk im vorderen Orient (Abb.8.1.1 bzw. Abb.5.2.3). In Europa bauten zuerst die Etrusker und die Römer Tonnengewölbe aus bearbeitetem Stein, bevor diese Bauweise durch die Wölbtechnik in

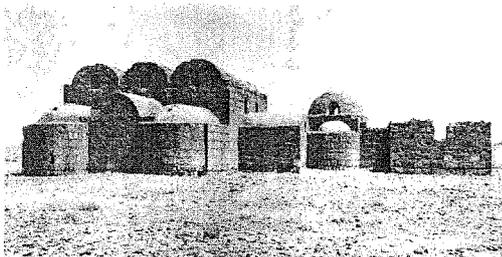


Abb.8.1.1.: Quasyr'Amra, 4.Jhdt., aus Creswell [189].

opus caementitium abgelöst wurde (Abb.6.2.6). Auch die ersten Versammlungshallen der Christen, die Basiliken, waren in dieser Art aus Gußmauerwerk gebaut und mit Kreuzgewölben überdacht (Abb.6.2.10). Nachdem sich schließlich ein sehr viel schlichterer, zumeist dreischiffiger, longitudinaler Basilikatyp entwickelt hatte, der mit einem einfachen hölzernen Dachstuhl gedeckt war und für einige Zeit in Kirchenbau vorherrschte, versuchte man vorallem außerhalb Italiens, die Basilikaform wieder mit der Wölbung in Verbindung zu bringen.

8.1.1 Nordspanien und Frankreich

Die Wölbkunst Nordspaniens und Südfrankreichs wurde durch zwei geschichtliche Entwicklungen geprägt: das Eindringen der Westgoten von der Balkanhalbinsel her und aus Thrakien, das unter byzantinischem Einfluß stand, Anfang des 5.Jhdt., und der Bau von Festungs- und Kirchenbauten im asturischen Raum im Zuge der 'Reconquista', des Kampfes gegen die arabische Vorherrschaft. Diese Wehrbauten waren



Abb.8.1.2.: Santa Maria de Naranco, vormals Königshalle bei Léon (8.Jhdt.), aus Pevsner [45].

häufig mit einfachen Tonnen- oder Gurttonnengewölben überdacht (Abb.8.1.2). Ab dem 10.Jhdt. entstanden zwischen Pyrenäen und Ebro eine Vielzahl tonnenüberwölbter, einschiffiger Saalkirchen und mehrschiffiger Hallenkirchen, deren Grundrisse häufig durch drei Apsiden gekennzeichnet sind¹. Der Wille zur Anwendung der Wölbtechnik führte hierbei zunächst zu einem, von der Basilika abweichenden Kirchenbautypus, weil die charakteristischen basilikalen Obergadenöffnungen mit gemauerten Gewölben schwer zu realisieren waren. Massige Wände wurden gebaut, um bei den Saalkirchen den Horizontalschub der Längstonnen abzufangen, während bei den Hallenkirchen diese Aufgabe von den Tonnengewölben der Seitenschiffe (Abb. 8.1.3) oder quergestellten Tonnen (Abb.8.1.4) übernommen wurde. Diese Bauweise prägte den Grundriß der Wandpfeilerkirche vor (Abb.8.1.5).

In der Kirchenarchitektur Südwestfrankreichs verschmolzen im 11. und 12.Jhdt. die Bauformen und Wölbkonstruktionen der angrenzenden Landschaften und führten zur Weiterentwicklung der Wölbtonne. Säulenvorlagen, welche in die Gurte der Tonnen des Mittelschiffes münden, erlaubten die Skelettierung des Bauegefüges und leiteten die Auflösung der Wandflächen ein (Abb.8.1.6). Die Einwölbung des basilikalen Grundrisses mit einer monu-

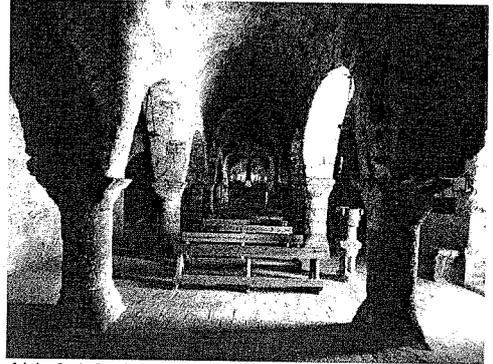


Abb.8.1.3: La Tossa de Montbui, Katalonien, 10.Jhdt., aus Kubach [217].

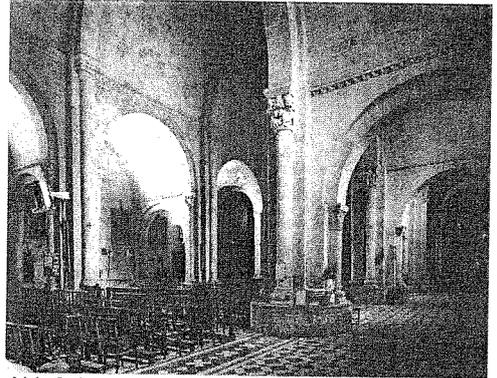


Abb.8.1.4: Lescar, Kathedrale, 11.Jhdt. aus Kubach [218].

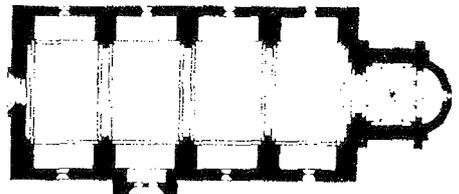


Abb.8.1.5: Orange, Kathedrale, 12.Jhdt., Grundriß, nach Koch [27].

¹ Wenngleich die architekturstilistischen Merkmale der Bauten des asturischen Raums von denen des katalonischen verschieden sind (siehe Kubach [217], S.71), so ist das Tonnen- und Gurttonnengewölbe dennoch das gemeinsame bautechnische Element.

mentalen, zentralen Tonne und quer dazu verlaufenden Seitentonnen begünstigte die Ausbildung von stabilen Pfeilern, die den aufgelegten, schweren Gewölben angemessener waren als Säulen. Es entstand die sogenannte Pfeilerbasilika (Abb.8.1.7 und Abb.8.1.8).

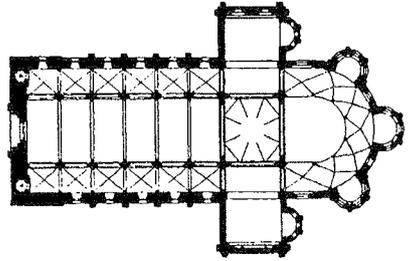


Abb.8.1.7: St.Etienne, Nevers, 11.Jhdt., aus Pevsner [45], Grundriß.

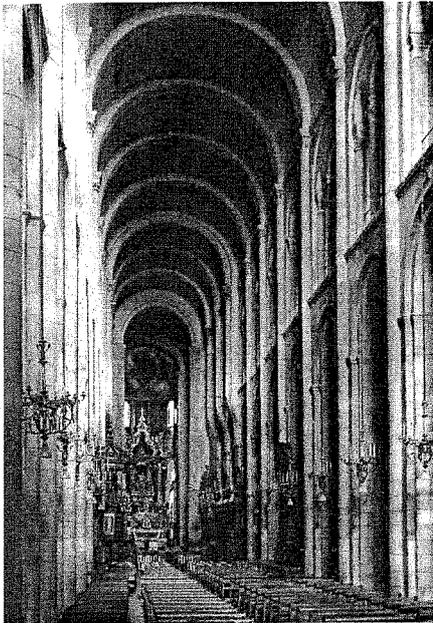


Abb.8.1.6: St.Sernin, Toulouse, 1095-1135, aus Pevsner [45].

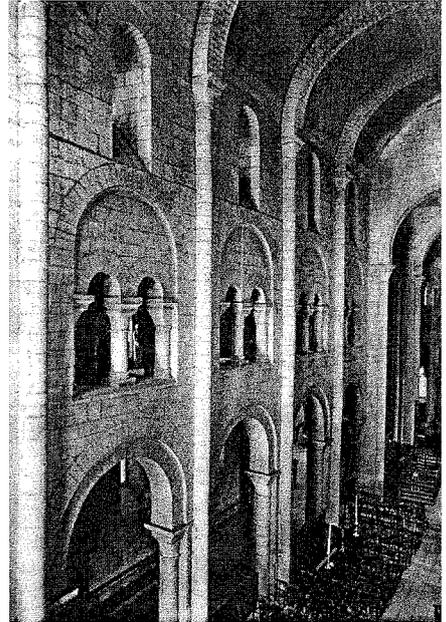


Abb.8.1.8: St.Etienne, Nevers, 11.Jhdt., Innenansicht, aus Pevsner [45].

8.1.2 Italien

Während das kreiszylindrische Tonnengewölbe im Römischen Reich einen festen Platz unter den angewandten Architekturformen hatte, kam es nach der Teilung nur im byzantinisch beeinflussten weströmischen Teil zur Anwendung, in Ravenna und Venedig (Mausoleum der Galla Placida (siehe Kap.7.1.2.2) und in Süditalien. In San Marco/

Venedig (Abb.8.1.9) übernehmen Tonnen, ähnlich wie bei den romanischen Kirchenbauten in Frankreich, eine Stützfunktion gegen den Horizontalschub der Pendentivkuppel.

Etwa 250 Jahre später, in der italienischen Renaissance (ab 1420), entdeckte der Architekt, Schriftsteller und Philosoph Leon Battista Alberti (1404-1472) die kreiszylindrische Wölbtonne als Bauform wieder. In Anknüpfung an die römischen Basiliken (siehe Kap.6.3.2) wandte er bei St. Andrea in Mantua diese Gewölbart in Verbindung mit dem Grundrißkonzept der Wandpfeilerkirche an (Abb.8.1.10). Die Pfeiler sind jetzt blockartige, aus Wänden zusammengesetzte Gebilde, welche die Mitteltonne tragen, deren Horizontalschub wiederum von den Quertonnen über den seitlichen Altarnischen aufgenommen wird. Über dem Vierungsquadrat erhebt sich eine Pendentivkuppel (Abb.8.1.11).

Rund ein Jahrhundert nach Albertis Entwurf von San Andrea griff Giacomo da Vignola (1507-1573) abermals das Grundriß- und Wölbschema der Wandpfeilerkirche auf, bei seinem Entwurf zur jesuitischen Hauptkirche Il Gesù in Rom (Abb.8.1.12)². Die Wandpfeiler stehen in engerer Ordnung als beim Mantueser Vorbild, und das Querschiff überschreitet nicht die vom Längsschiff vorgegebene Breite. Fensteröffnungen

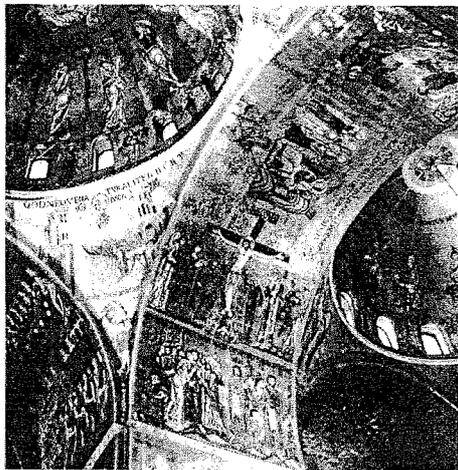


Abb.8.1.9: San Marco/Venedig, Kuppel, Gurtbogen und Tonnen, begonnen 9.Jhdt., aus Coche de la Ferté [188].

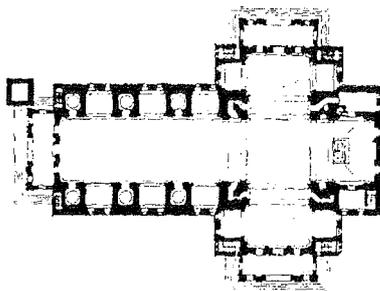


Abb.8.1.10: S.Andrea/Mantua, Alberti 1470, Grundriß, nach Koch [27].



Abb.8.1.11: S.Andrea/Mantua, Inneres.

² Er stützte sich hierbei auf Entwurfsideen eines Jesuitenmönches namens G.Tristano. Bottineau [178], S.509.

als Stichkappen im Gewölbe lassen einen hellen Raum entstehen, der in seiner Übersichtlichkeit ganz den liturgischen Anforderungen entspricht³. Il Gesù wurde zum Vorbild für alle weiteren Jesuitenkirchen der Renaissance und des Barocks innerhalb und außerhalb Italiens. Hierfür sorgte nicht zuletzt die strenge Führung des Ordens, welche die Bauvorhaben und Entwürfe aller neuer jesuitischen Kirchenbauten überwachte. Es entstand so eine strenge, überregionale Einheitlichkeit in der Architektur bis ins Detail, wie es sie bei anderen Orden und Glaubensgemeinschaften nicht gab.

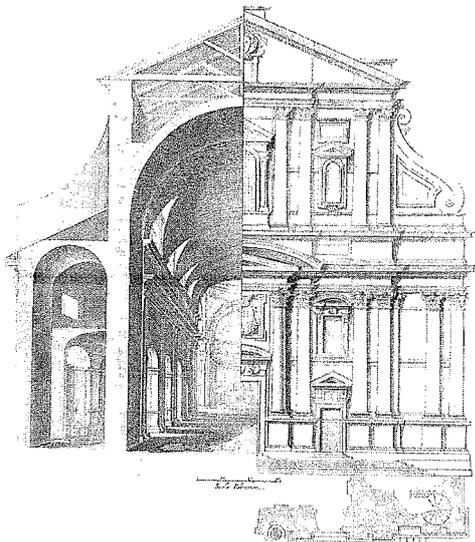


Abb.8.1.12.: Il Gesù, beg. 1568, Schnitt und Ansicht, aus Pevsner [45].

³ Müller/Vogel [41], S.489.

8.2 Baugeschichte und Konstruktion von St. Michael.

8.2.1 Zur Baugeschichte

Der Gründung der 'Societas Jesu' 1534 als gegenreformatorische Bewegung durch Ignatius v. Loyola (1491-1556), die sich 1540 im Jesuitenorden formierte, folgten bald auch in anderen Ländern Gründungen gleichgesinnter Glaubensgruppen. München entwickelte sich zu einem der frühen Stützpunkte der Jesuiten in Deutschland, nachdem sie der bayerische Herzog Albrecht 1559⁴ gerufen hatte. Einer vorläufigen Unterbringung der Ordensmitglieder bei den Augustinern folgte der Bau eines eigenen Schulgebäudes. Der Nachfolger Herzog Wilhelm V. war den Jesuiten ebenso wohlgesonnen (er trug den Beinamen 'der Fromme') und unterstützte sie schließlich bei ihrem Plan, eine eigene Kirche zu errichten. Am 1. Januar 1582 bot Wilhelm V. an, vier Grundstücke an der Jesuitengasse für das Vorhaben zu kaufen und zur Verfügung zu stellen. Nach langen Diskussionen um den kleinen Bauplatz, der gerade einer Kirche der Größe der Augsburgener Jesuitenkirche Raum geboten hätte, wurden weitere Grundstücke erworben.

Obwohl der Kirchenbau den Entwürfen des niederländischen Architekten Friedrich Sustris (1524-1599) und des Augsburger Meisters Wendel Dietrich zugeschrieben werden, stammen die ältesten vorhandenen Planunterlagen von einem geosteten Langbau aus dem Jahr 1582 wahrscheinlich von einem Mitglied des

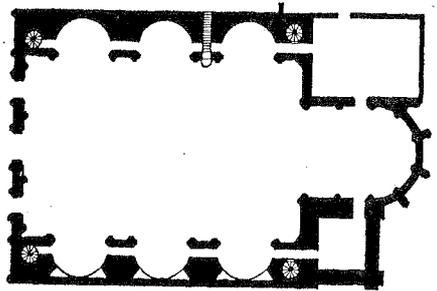


Abb.8.2.1: Erster, Sustris zugeschriebener Entwurf von 1583, Grundriß, nach Sauermost [258].

Jesuitenordens⁵. Ein Plan vom April 1583 gilt als erster Entwurf Friedrich Sustris. Die Kirche ist um 90° gegenüber dem 'Urplan' gedreht und richtet sich jetzt mit der Schmalseite zur Neuhauser Gasse (heute: Neuhauser Straße) (Abb.8.2.1).

Verwirklicht wurde der erste Bau (Abb.8.2.2) jedoch mit einigen Abwandlungen, die wahrscheinlich auf den beteiligten Maurermeister Wolf Miller zurückgehen. Vermutlich zur

4 Nach Sauermost [258], S.88.

5 Eine Folgerung von Dischinger [197], S.161.

Verbesserung des statischen Verhaltens ließ er die Durchgänge zwischen den Kapellen wegfällen und verbreiterte die Pfeiler auf Kosten der Weite der Kapellennischen.

Im Jahre 1590, bald nach der Fertigstellung, stürzte der Turm nach Schiefstellung ein. Wilhelm der Fromme sah hierin eine Botschaft Gottes, die Kirche noch größer zu bauen. Der Entwurf zum Erweiterungsbau soll wiederum von Sustris stammen, wengleich 1591 der Jesuitenmönch Valeriani nach München gekommen war, um an der Restaurierung bzw. dem Weiterbau mitzuwirken. Eine Entwurfsvariante von Sustris aus dieser Zeit sah eine Kuppel über der Vierung - wie bei Il Gesù - vor (Abb.8.2.3). Im Jahr 1593 wurden die Bauarbeiten fortgesetzt und schon 1595 waren die Gewölbe fertiggestellt, so daß der Innenausbau beginnen konnte. Am 6. Juli, nach insgesamt 14 Jahren Bauzeit wurde die Kirche geweiht.

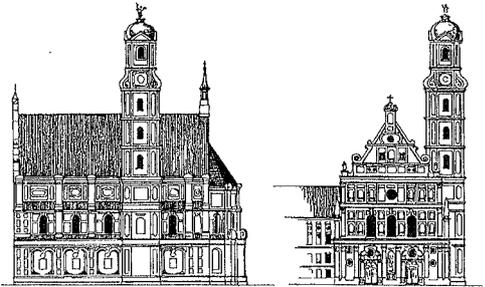


Abb.8.2.2: Ansichten des ersten Baus von St. Michael, aus Pfister [240].

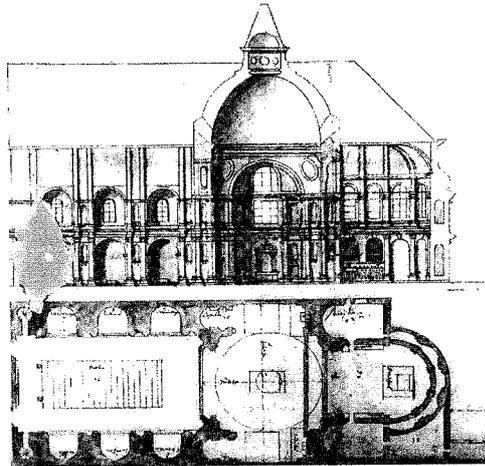


Abb.8.2.3: Entwurf von Sustris mit Kuppel, nach Sauermost [258].

St. Michael war eines der Bauwerke, die unter den Bombenangriffen des 2. Weltkrieges erheblich in Mitleidenschaft gezogen wurden. Die Ruinen wurden für den Wiederaufbau sorgfältig studiert und soweit wie möglich in den Neubau integriert. Hierbei traten bemerkenswerte konstruktive Merkmale zutage, die bis dahin unbekannt waren und für die hier durchgeführten Untersuchungen des Tragverhaltens von Interesse sind.

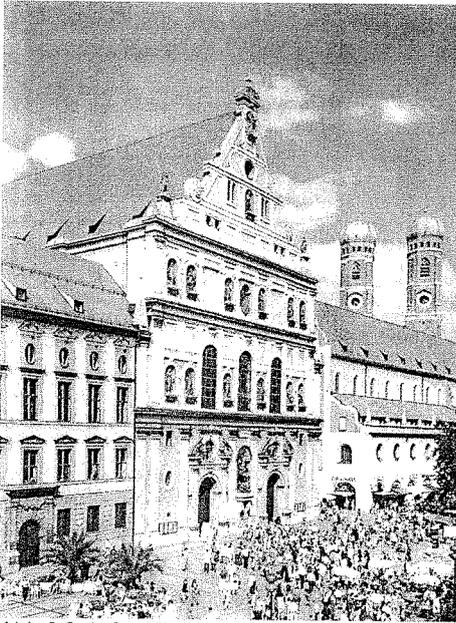


Abb.8.2.4: St. Michael, Fassade.

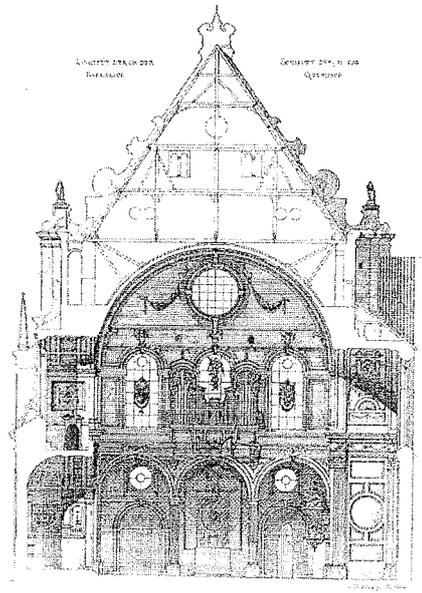


Abb.8.2.5: St. Michael, Querschnitt, aus Gmelin [208].

8.2.2 Konstruktion der Gewölbe

8.2.2.1 Dimensionen

Das Tonnengewölbe, das den Kirchenraum der Michaelskirche überspannt, stellt wegen seiner Spannweite von durchschnittlich rund 20,2m ($R=10m$), in der es die italienischen Vorbilder übertrifft, eine technische Besonderheit dar. Auch die Schlankheit von $d/R = 1/45$ ($d=22$ bis $24cm$) in den Wölbflächen und $d/R = 1/23$ ($d=44cm$) bei den Gurten ist ungewöhnlich. Das Langhaus mißt eine Breite von ca. 34,6m und eine Länge von rund 54,1m. Die eingemauerten Gurte verlaufen paarweise entlang der Pfeilerachsen. Die Tonne wird von den Einwölbungen der Wandnischen und des Querschiffs am Ansatz angeschnitten (Abb.8.2.6).

Das aus dem späteren Bauabschnitt stammende Apsidengewölbe weist ungefähr dieselben Schlankheiten auf wie die Hauptgewölbe ($d/R = 1/46$), die Gewölbedicke beträgt dort im Durchschnitt $d=16cm$ bei 7,6m Radius des Tonnengewölbes.

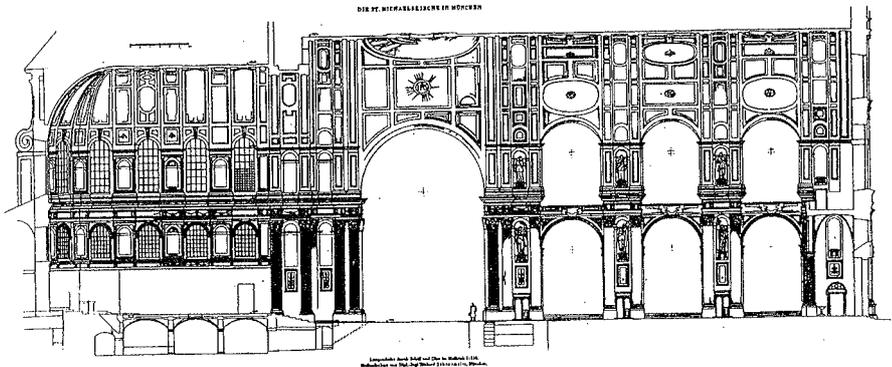


Abb.8.2.6: St. Michael, Längsschnitt, nach Pfister [240].

8.2.2.2 Konstruktive Merkmale

Gegenkrümmung an der Gewölbekrone der Tonne

Zu den mit dem Wiederaufbau zutage getretenen Besonderheiten gehört der variierende Abstand der Pfeilerkronen unter der Wölbtonne, der von beiden Enden zur Mitte hin abnimmt (Abb.8.2.7). Die Tonne war somit keine perfekte Kreiszyindertonne, sondern hatte einen leicht elliptischen Querschnitt auf halber Länge. Neben ästhetischen Gründen⁶ mag diese Ausformung aus statischen Überlegungen entstanden sein. Man versuchte hiermit, den Verformungen aus dem Gewölbeschub, die in Tonnenmitte am größten sind, zu begegnen.

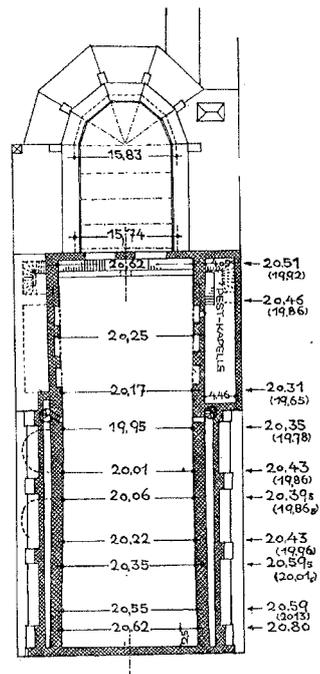


Abb.8.2.7: St. Michael, Pfeilerabstände an Basis und Krone, nach Pfister [240].

⁶ Pfister [240], S.237.

Wölbansatz und Vermauerung

Das Auflager der Tonne war als konsolenartiger Vorsprung in das Wandmauerwerk integriert (Abb. 8.2.8), so daß ca. 16° des Viertelbogens in die Pfeilerwand als Widerlager eingebunden waren. Der verbliebene Öffnungswinkel von 74° im Feldbereich des freigespannten Gewölbes ist dennoch groß. Man ermittelt mit Hilfe von Heyman's Kriterium der geometrischen Sicherheit (Abb.3.2.15) für die Gurtbögen einen maximal möglichen Öffnungswinkel von 72° für den Feldbereich der Wölbtonne sogar nur von ca. 60° . Das Gewölbe ist demnach in Teilen nicht standsicher.

In Schnittzeichnungen, etwa der von Zehentmeier (Abb.8.2.10), lassen sich Öffnungswinkel von 63° und bei Gmelin (Abb.8.2.5) von 58° zum Scheitel messen. In beiden Zeichnungen ist wahrscheinlich eine Hinterfüllung dargestellt, die jedoch nicht als solche gekennzeichnet ist. Dies war bei Kirchen mit kreiszylindrischen Tonnengewölben eine übliche Maßnahme. Meistens benutzte man Bauschutt, was gerade auf Laien einen willkürlichen Eindruck machte und kaum den Gedanken einer statisch begründeten Maßnahme aufkommen ließ. Infolgedessen kam es vor, daß im Rahmen von Sanierungsarbeiten der vermeintlich unbedeutende Schutt entfernt wurde, was zu Rissen im Gewölbe und zu statischen Problemen führte⁷.

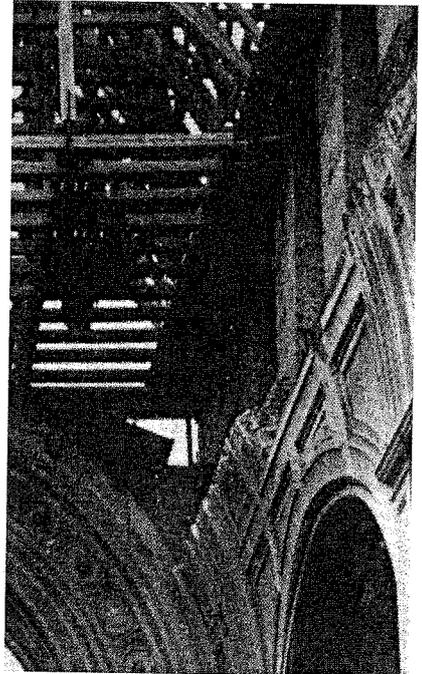


Abb.8.2.8: Wölbansatz der großen Tonne an der zerstörten Kirche sichtbar, aus Pfister [240].

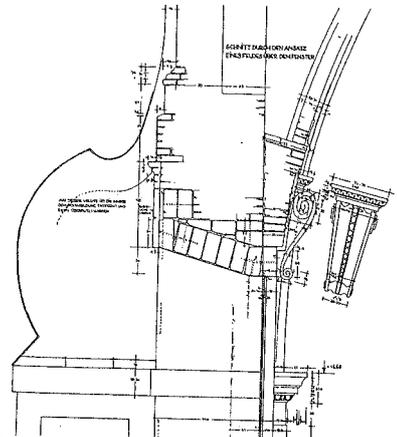


Abb.8.2.9: Wölbansatz in der Apsis, nach Pfister [240].

⁷ Von entsprechenden Vorkommnissen bei verschiedenen Kirchen Italiens berichtete Prof. Ballio vom Politecnico di Milano dem Verfasser im Mai 1994.

Hölzerne Gurtabstrebungen

Wenig beachtet, jedoch von ähnlicher statischer Bedeutung wie die Hinterfüllung, sind die in Gmelins Schnitt (Abb.8.2.5) und in der letzten Bauaufnahme des Originals von Zehentmeier (Abb.8.2.10) geometrisch und konstruktiv verschieden dargestellten hölzernen Abstrebungen des Gewölbes. Dieser Konstruktion lag der Gedanke zugrunde, an den kritischen Stellen, auf etwa der halben Scheitelhöhe, wo die Verformungen unter Eigengewicht am größten sind und sich beim Nachgeben der Auflager ein zur Kinematik führendes drittes Gelenk bilden könnte, entgegenzuwirken. Ihre Wirksamkeit freilich hing davon ab, wie bündig und schlupffrei die Verbindung zwischen der Verankerung und dem Gewölbe war. Es ist davon auszugehen, daß diese Streben nur an den Gurtbögen angesetzt waren, nicht in den Feldern dazwischen. Unterstellt man, daß die Darstellung der Streben bei Gmelin qualitativ richtig ist, so erscheint die dort gezeigte, direkte Verbindung der Streben mit dem Auflager des Dachstuhls als konstruktiv effizienter als die Abstützungen gegen die Seitenwände und Pfeiler, wie sie später eingebaut wurden (Abb.8.2.10).

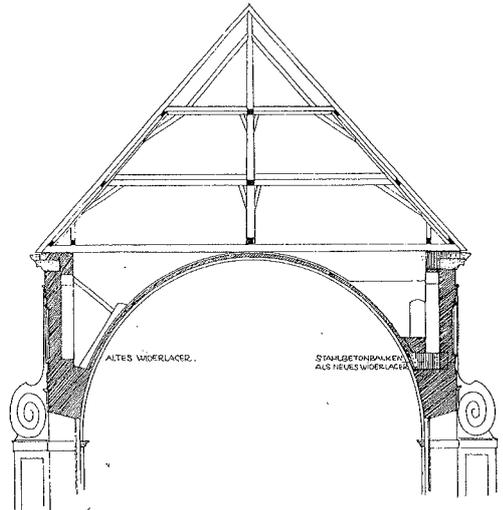


Abb.8.2.10: Querschnitt nach der Bauaufnahme von Zehentmeier, Gerhart und Treimer, nach Pfister [240].

8.3 Tragverhalten des Tonnengewölbes von St. Michael

Hauptgegenstand der Untersuchungen war das Tragverhalten eines Tonnenabschnitts unter Eigengewicht bei verschiedenen Öffnungswinkeln, das Tragverhalten der Tonne unter Rißbildung und der Einfluß der geschilderten konstruktiven Details, insbesondere der Diagonalstreben.

8.3.1 Untersuchung der Tonne unter verschiedenen Öffnungswinkeln

Es wurden die Gewölbegeometrien bzw. -konstruktionen (Abb.8.3.1) folgender Zustände des Gewölbes untersucht:

- a) Kritischer Zustand:
Gewölbe mit Öffnungswinkel 74° ohne Hinterfüllung und ohne zusätzliche Abstützung.
- b) Ungünstigster Zustand in der Zeit vor der Zerstörung 1945:
Gewölbe mit Öffnungswinkel 74° und zusätzlicher Hinterfüllung auf 63° , ohne Abstützung.
- c) Vermutlicher früherer Zustand:
Gewölbe mit Öffnungswinkel 74° und Hinterfüllung auf 63° und zusätzlicher Streben in der Konstruktion nach Gmelin bzw. Zehentmeier.

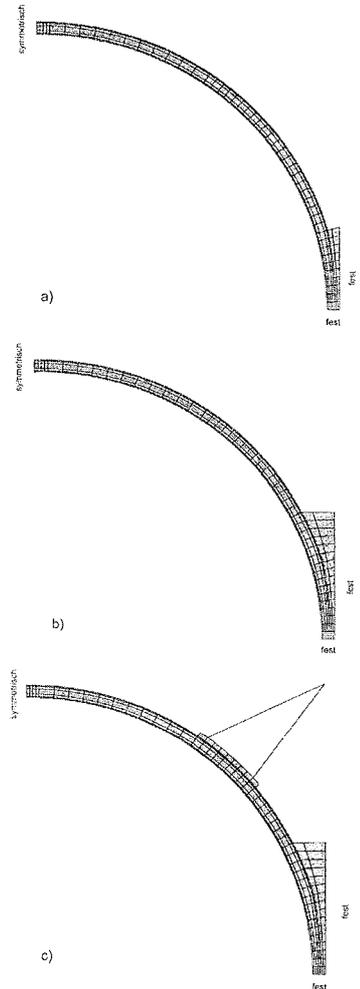


Abb.8.3.1: Verschiedene FE-Modelle mit verschiedenen Öffnungswinkeln: a) ohne zusätzliche Stützung, b) mit Hinterfüllung c) mit Hinterfüllung und Abstützung durch hölzerne Streben.

Die Hinterfüllung wurde als Material geringer Zugfestigkeit ($\beta_{cr} = 0.03 \text{ N/mm}^2$) modelliert. Die Simulation der Abstreibungen erfolgte mittels Stabelementen, wobei die charakteristischen Materialkennwerte für Nadelholz ($E = 10000 \text{ MN/m}^2$) zugrundegelegt waren. Die Fuge zwischen Gewölbe und hölzernem Auflagerbalken wurde als Material geringer Zugfestigkeit und geringer Schubsteifigkeit ($C_o \sim 0, C_c \sim 0$, siehe Kap.4.1.2.4) modelliert.

8.3.1.1 Tragverhalten eines Tonnenabschnittes

Voruntersuchungen

Wie in Kapitel 8.2.2.2 beschrieben, erfüllen die sehr schlanken Tonnen gewölbe der Michaelskirche nicht ohne weiteres das geometrische Sicherheitskriterium von Heyman (Kap.3.2.3). Es zeigte sich allerdings, daß das von Heyman erstellte Diagramm (Abb.3.2.15), auf Berechnungen der Stützlinien als Seillinien und nicht als Kettenlinien beruht. Die geometrischen Sicherheitsverhältnisse sind demnach nicht ganz so ungünstig wie sie zunächst erscheinen. Im Gurtbereich sind die Sicherheitskriterien bei den fraglichen Öffnungswinkeln immer erfüllt. Im Bereich der Wölbflächen ist zumindest bei einem Öffnungswinkel von 63° Gleichgewicht im Gewölbe möglich (Tabelle 8.3.1).

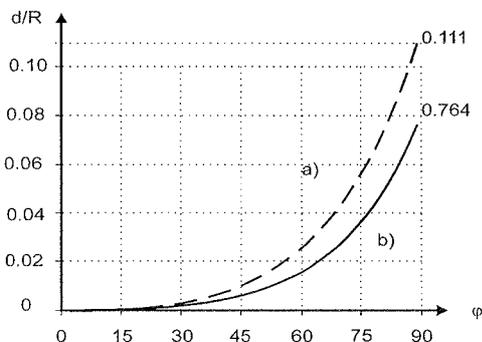


Abb.8.3.2: Diagramm der Mindestschlankheiten für Kreisbögen zur Ermittlung der geometrischen Sicherheit, wenn die Stützlinie des Grenzzustandes a) als Seillinie und b) als Kettenlinie berechnet wird.

Im Bereich der Wölbflächen ist zumindest bei einem Öffnungswinkel von 63° Gleichgewicht im Gewölbe möglich (Tabelle 8.3.1).

Öffnungswinkel:	63°	74°	90°
Vorhandene Schlankheit [d/R]	0.0222 (Wölbflächen), 0.0435 (Gurte)		
Mindestschlankheit nach Seillinienberechnung: [d/R]	0.028 <0.0435 >0.0222	0.05 >0.0435 >0.0222	0.111
Mindestschlankheit nach Kettenlinienberechnung [d/R]	0.016 <0.0222 <0.0435	0.033 <0.0435 >0.0222	0.764

Tabelle 8.3.1: Mindestschlankheiten für Kreisbögen bzw. kreiszylindrische Tonnen (Faktor der geometrischen Sicherheit : $\lambda = 1$) nach verschiedenen Berechnungsarten.

Rißbildung und Traglasten in den Gurtquerschnitten

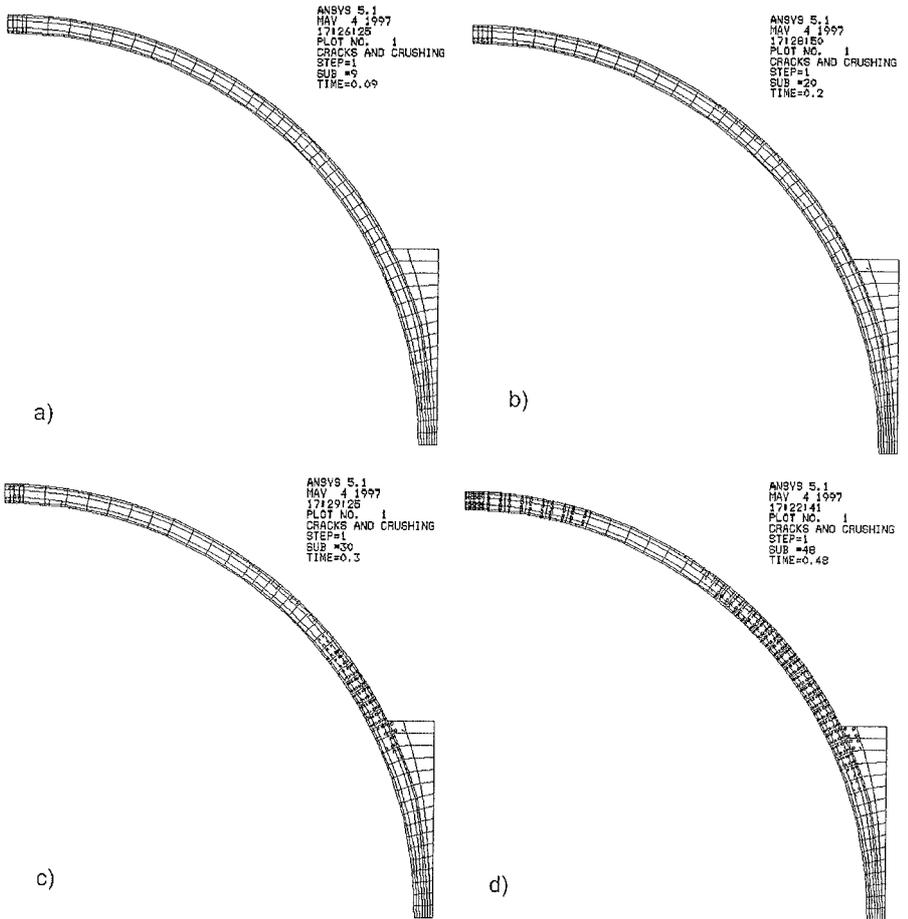


Abb.8.3.3: Rißbildung unter mehrfachem Eigengewicht im Gurtbogen von St. Michael im Bauzustand vor 1945 (Abb.8.3.1.b): a) Scheitel und Basiseinrisse am Intrados, b) Längsrisse (Scherrisse) entlang der Hinterfüllung c) Längsrisse in der Zone des Gewölbeansatzes d) Rißbild bei 50% der Versagenslast.

Bei der Erhöhung des Eigengewichtes (Abb.8.3.3) werden die aus Kap.4.2.4 bekannten Phasen der Rißbildung durchlaufen (Abb.4.2.10). Die numerisch errechnete Versagenslast des Modells des kritischen Zustandes des Tonnengewölbes (Zustand a) liegt bei 1.58-fachem Eigengewicht, und beim Modell des Zustandes vor 1945 (Zustand b, mit Hinterfüllung) bei 4.34-fachem Eigengewicht. Bei Modell c) konnte man die Last noch

weiter erhöhen, wegen des Zeit- und Speicheraufwandes wurde diese Rechnung jedoch nicht zu Ende geführt (Tabelle 8.3.2).

Zum Vergleich wurde überschlägig die Traglast des Bogens mit Hilfe der Stützzlinie ermittelt. Hierzu wurde die zur Lastkonfiguration des Kreisbogens zugehörigen Kettenlinie (siehe Kap.2.1.5, Kettenlinie, Kuppelkettenlinie) ermittelt, die den Verlauf der Exzentrizität der Spannungsresultierenden in einem hin-

sichtlich der inneren Beanspruchungen konsolidierten Bogentragwerk darstellt (Kap.4.2.4, Abb. 4.2.10.d). Für den Querschnitt mit der maximalen Exzentrizität und größten Beanspruchung wurde unter der Annahme, daß dort ein vollplastischer Querschnittszustand vorliegt und die Versagensspannung $\beta_{\text{crü}}$ erreicht wird, die Bogennormalkraft errechnet. Für den Gewölbezustand b) beträgt die Exzentrizität ca. 0.07m (Abb.8.3.4, durchgehende Linie beim Winkel $\varphi = 43,2^\circ$), so daß sich bei einer Versagensspannung von $\beta_{\text{crü}} = 3\text{N/mm}^2$ eine max. Normalkraft von 0.90 MN/m ergibt. Dieser Wert ist 7,5 mal so hoch ($\lambda = 7.56$) wie die Normalkraft im Bogen an dieser Stelle unter Eigengewicht (max. $N_{\text{EG}} = 0.12 \text{ MN/m}$ ⁸⁾). Die Berechnungen für die anderen Gewölbebaustände ergaben qualitativ ähnliche Verhältnisse (Tabelle 8.3.2). Auch bei diesen Beispielen waren die Versagenslasten bei FE-Simulationen gegenüber der Stützzlinienberechnung mit gleicher eingesetzter einaxialer Druckfestigkeit $\beta_{\text{crü}}$ deutlich geringer (vgl. Kap.4.2.4). Hieraus zeigt

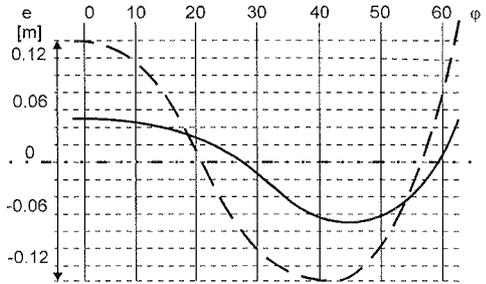


Abb.8.3.4: Exzentrizität der Spannungsresultierenden eines Gurtbogens mit 63° Öffnung entlang der Tragwerksachse, bei - - - unbeschädigtem Tragwerk (linear-elastisches Werkstoffverhalten) und bei — rißdurchsetztem Tragwerk (no-tension-Werkstoffgesetz)

Zustand (Abb.8.3.1)/ Öffnungswinkel	a) / 74°	b) / 63°
max. Exzentrizität e [m] bei φ [°]	0.15/ 50,5°	0,07 / 43,2°
Traglast aus der FE-Simulation (λ)	1,58	4,34
Mit Hilfe der Stützzlinie überschlagene Traglast (λ)	3,53	7,56
Abweichung des FE-Ergebnisses von der Stützzlinienabschätzung	-55%	-43%

Tabelle 8.3.2: Gegenüberstellung der aus materiell-nichtlinearen FE-Simulationen gewonnenen Traglasten und der mit Hilfe der Stützzlinie abgeschätzten Traglasten für Gewölbezustände a) und b).

8 Dieser Wert stammt aus der FE-Rechnung bei einfachem Eigengewicht.

sich, daß die Beanspruchbarkeit des Materials durch die Rißbildung in Wechselwirkung mit der Struktur und Form des Tragsystems erheblich verringert wird.

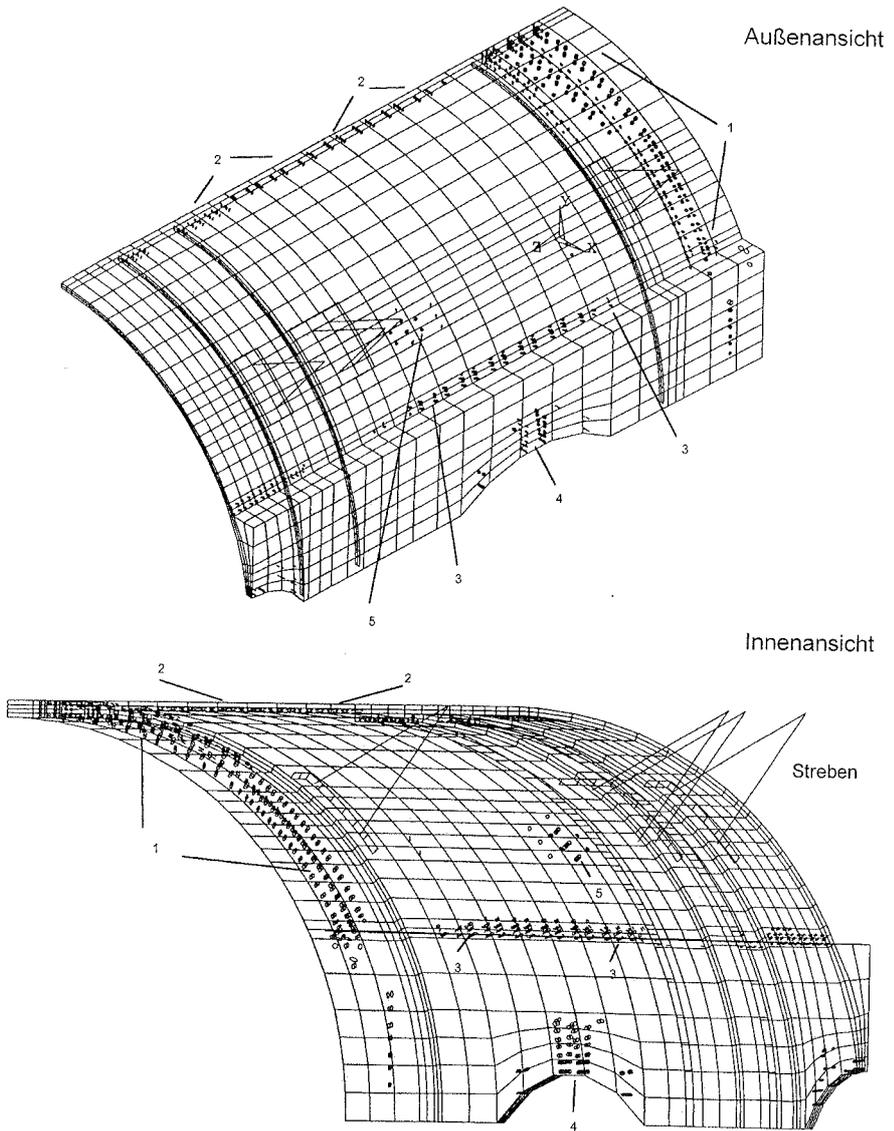


Abb.8.3.5: FE-Modell des Tonnengewölbes im Zustand vor der Kriegszerstrung (Zustand c) mit Rißbild bei 1.08 EG. (Numerierung der Risorte in der Reihenfolge des Auftretens innerhalb der Belastungsgeschichte).

Tragverhalten des Tonnengewölbes als Ganzes

Das Zusammenwirken der Gurte mit den Wölbflächen und die Wirkung der Gegenkrümmung der Gewölbebasis im Grundriß der ganzen Tonne wurde mit einem räumlichen FE-Modell studiert. Es wurde der Gewölbezustand vor der Zerstörung 1945 (Zustand c) unter Eigengewicht untersucht. Am Anschluß der Querwand bzw. des Bogens vor der Apsis ist das Modell des Tonnengewölbes in radialer Richtung gelagert.

Das Reißbild (Abb.8.3.5) zeigt, wie sich die Tonne zunächst von den steifen Querwänden bzw. vom Portalbogen vor dem Chor abtrennt (1). Ferner treten die bekannten Einrisse am Intrados und die aus der zweidimensionalen Bogenrechnung hervorgegangenen Längsrisse am Tonnenscheitel und am Gewölbeansatz auf (2),(3). Der Scheitel der Querschifföffnung reißt vom Intrados aus auf (4). An verschiedenen Stellen sind Trennrisse in Bogenebene zu erkennen, welche die Zerteilung der Tonne in einzelne Bogenabschnitte und die Auflösung des räumlichen Tragverbundes signalisieren (5). In der Darstellung der

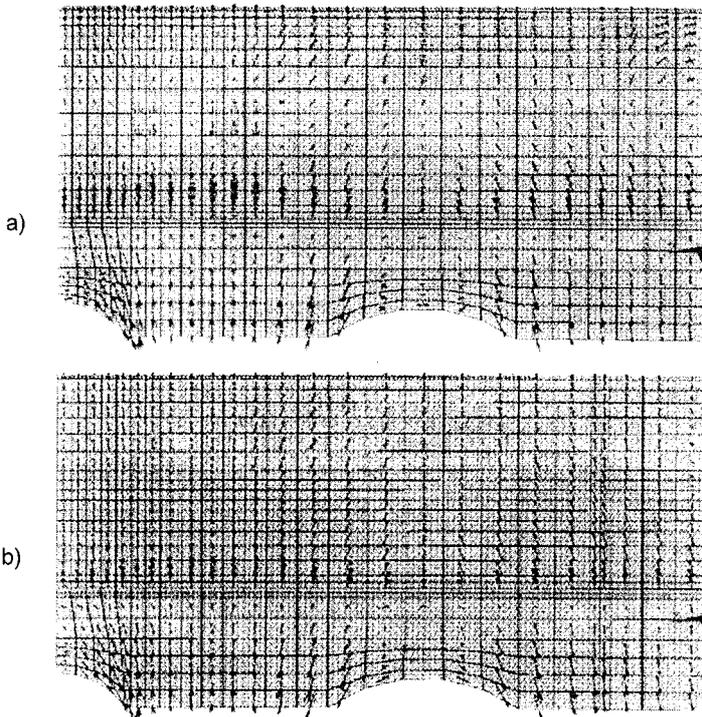


Abb.8.3.6: Hauptspannungen in der Außenschale beim a) ungerissenen Tonnengewölbe und beim b) gerissenen Tonnengewölbe unter Eigengewichtsbelastung

Hauptspannungsverteilungen zeigt sich dies in der deutlich parallelen Ausrichtung der Hauptdruckspannungen im gerissenen Zustand gegenüber dem ungerissenen Zustand (Abb.8.3.6.a und b). Aus der Simulation des Rißverhaltens der Tonne ergibt sich schließlich, daß das Tragwerk problemlos in der Lage ist, das Eigengewicht zu tragen (1,08 EG), wobei bereits bei dieser Beanspruchung die wesentlichen Lastumlagerungen durch Rißbildung in der Wölbtonne stattgefunden haben.

8.3.2 Zusammenfassung

Die Finite-Element-Berechnungen am kreiszylindrischen Tonnengewölbe der St.Michael-Kirche in München demonstrieren den positiven statischen Effekt von Gewölbehinterfüllungen und Hilfsabstrebrungen, mit denen die alten Baumeister die Wölbkonstruktion sicherten. Sowohl mit Hilfe von materiell-nichtlinearen FE-Berechnungen als auch mit der Stützlinienberechnung auf Basis von Kettenlinien läßt sich für das große Tonnengewölbe der Michaelskirche nachweisen, daß schon der alte Gewölbeansatz mit einem Öffnungswinkel der Tonne von 74° und mit einer zusätzlichen Hinterfüllung es erlaubte, ein standsicheres Gewölbe zu errichten. Durch die an den Viertelpunkten schlupffrei angreifenden Streben erhöhte sich die Sicherheit zudem noch. Die große Tonne verfügte demnach im vermeintlich riskanten Vorkriegszustand mit Auffüllung und Abstrebrungen sogar über Tragreserven. Eine Verlagerung des Wölbansatzes mit einer eingelassenen Betonkonsole nach oben (Öffnungswinkel 55°), wie beim Wiederaufbau der Kirche 1946/47 vorgenommen, wäre statisch nicht notwendig gewesen. Eine genaue Ermittlung der Stützlinie analog zur Kettenlinie und nicht zur Seillinie hätte damals eine Entscheidungshilfe sein können, weil das Tragverhalten von Kreisbögen und Kreis-zylindertonnen tatsächlich günstiger ist, als es sich durch die vereinfachende Seillinien-berechnung darstellt.

9.0 Gewölbe des Barocks und Rokokos am Beispiel der Wallfahrtskirche von Steinhausen (1733)

9.1 Stationen barocker Baukunst und Wölbkunst

9.1.1 Ursprünge der Barockarchitektur

Mit der Gründung des Jesuitenordens im 16. Jhd. war ein Instrument der Gegenreformation geschaffen, das die geistige Erneuerung der katholischen Kirche vorlebte und vorantrieb. Dennoch fehlte es an äußeren Kennzeichen, welche diese innere Wandlung für jedermann sichtbar machten. Die entsprechende Symbolik deutete sich im architektonischen Konzept, der prunkvollen Fassadenarchitektur und der vielgestaltigen Innenausstattung der Jesuitenkirche Il Gesù in Rom (siehe Kap. 8.1.2) an, deren Stilelemente typisch für den sogenannten 'Stile Barocco' werden sollten. Die in der Renaissance wiederaufgenommenen antiken Säulenordnungen blieben in der frühen italienischen und in der nordeuropäischen Barockarchitektur zunächst erhalten, sie wurden jedoch bald von neuen Formen und Gliederungsschemata



Abb. 9.1.1: Inneres von Il Gesù, aus Bottineau [178].

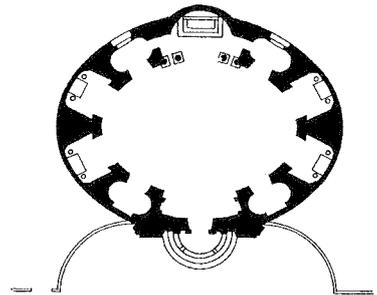
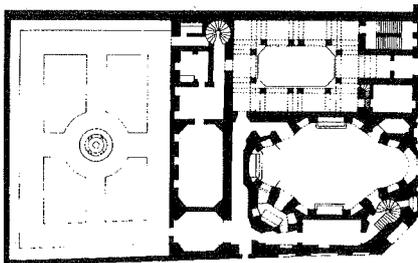


Abb. 9.1.2: a) Grundriß von San Carlo alle Quattro Fontane, b) Grundriß von Sant' Andrea al Quirinale (1658-1670), aus Bottineau [178].

abgelöst. Die Integration von Architektur, Malerei und Stuckarbeiten im Sinne eines Gesamtkunstwerkes entwickelte sich schließlich im Hochbarock zu einem Thema von zentraler Bedeutung.

Vignola (1507-1573), der Schöpfer von Il Gesù, war gleichzeitig Architekt des ersten Sakralbaus mit dem stiltypischen ovalen Grundriß: S. Anna dei Palafrenieri in Rom (beg. 1573). Seine Nachfolger, der universal begabte Bernini (1589-1680) und Borromini (1599-1667) banden die Ovalform fest in die Architektur des römischen Barocks ein, Borromini beim Entwurf zum Kloster San Carlo alle Quattro Fontane (begonnen 1634) mit der Kuppel (Abb.9.1.2.a) und Bernini im Grundriß einer kleinen Kapelle des Collegio di Propaganda Fide (1634) und später bei

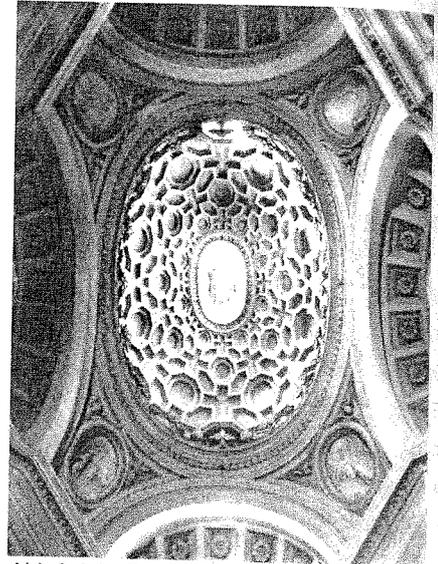


Abb.9.1.3: San Carlo alle Quattro Fontane von Borromini, Blick in die Kuppel, aus Pevsner [45].

Sant'Andrea al Quirinale (1658-1670) (Abb.9.1.2.b), der Kirche zu einem jesuitischen Noviziat. Das Oval in Grundriß und Überwölbung ermöglichte die Verschmelzung von Zentralbau und Longitudinalbau und wurde so zum bedeutendsten Motiv der Barockarchitektur überhaupt.

9.1.2 Barocke und spätbarocke Baukunst nördlich der Alpen

Nach dem Westfälischen Frieden (1648) verbreitete sich die Barockbaukunst vornehmlich in deutschsprachigen Gebieten mit katholischer Regentschaft und in katholischen Bistümern. Das Schaffen italienischer Baumeister unter den Wittelsbachern in Bayern¹, aber auch die Reisen von Johann Dientz-

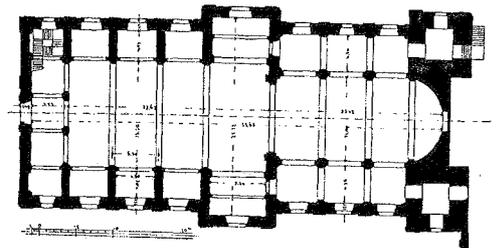


Abb.9.1.4: Grundriß der Abteikirche Obermarchtal (1686-1701) von M. und Chr.Thumb und F.Beer, aus Lieb/Hirmer [222].

1 Die Theatiner Hofkirche St.Kajetan wurde von dem Bologneser Architekten Barelli 1663 begonnen. Durch ihn soll die Barockbaukunst in Bayern Verbreitung gefunden haben, nach Lieb/Hirmer [222].

enhofer (1663-1726) oder des späteren Wiener Hofarchitekten J.B. Fischer von Erlach (1656-1723) (Abb.9.1.5) trugen zur Verbreitung der barocken Raum- und Gestaltungsauffassung bei und inspirierten die hiesigen Meister zur Ausprägung neuer, individueller Richtungen.

Die Vorarlberger Baumeister der Familien Beer, Thumb und Moosbrugger knüpften an das Grundrißkonzept der Wandpfeilerkirche an, wie es vor dem Dreißigjährigen Krieg mit St. Michael in München von den italienischen Vorbildern übernommen worden war. Hieraus entwickelten sie das sogenannte 'Vorarlberger Münsterschema' (Abb.9.1.4).

Demgegenüber setzten sich die Vertreter der bayerischen, österreichischen und böhmischen Bauschulen, J. Dientzenhofer (1643-1689), L.v. Hildebrandt² (1668-1745) und J.B. Neumann (1687-1753) mit den Form-

ideen des Theatinerpaters, Mathematikers und Architekten Guarino Guarini (1624-1683) (Abb.9.1.6) auseinander. Die hieraus entstandenen Raumschöpfungen 'konstituieren sich aus imaginären, sich durchdringenden Raumkörpern'³, deren Verschnittzonen, die sogenannten Guarinesken, durch räumlich gekrümmte Blendbögen aus Stuck akzentuiert werden (Abb.9.1.7, Abb.9.1.8). Für die Konstruktion und Ausbildung dieser Raumformen hatte in jener Zeit die Wölbtechnik eine zentrale Bedeutung. J.B. Neumann schuf in dieser Richtung besonders geniale Bauten, sowohl in bezug auf ihre architektonische Dramatik als auch in bezug auf die technische Realisierung (Abb.9.1.8, Abb.9.2.3).

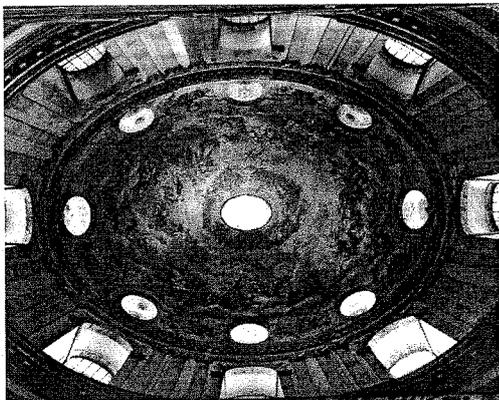


Abb.9.1.5: Karlskirche, Wien (1716-1725) von J.B. Fischer v. Erlach, Innenansicht der Kuppel.

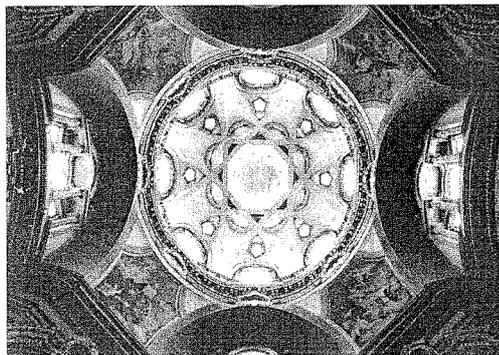


Abb.9.1.6: Innenansicht der Kuppel von San Lorenzo/Turin (1668-1687) von G. Guarini.

² Lukas von Hildebrandt wuchs als Sohn einer italienischen Mutter und eines österreichischen Vaters in Italien auf und lebte auch in Piemont, kannte deshalb die Werke Guarino Guarinis, siehe Norberg-Schulz [237], S.40.

³ Zitat Pevsner [46], S.231.

Die Bauwerke von Dominikus Zimmermann (1685-1766), dem berühmtesten Baumeister der Wessobrunner Schule, die bis dahin hervorragende Stukkateure hervorbrachte, sind kunstgeschichtlich der spätbarocken Phase bzw. dem Rokoko zuzuordnen. Zugunsten von hellen, lichten Räumen und einer fast pastellen Farbgestaltung sowie leichter Stuckornamentik machte sich Zimmermann beim Bau der Wallfahrtskirche in Steinhausen 'Zur schmerzhaften Muttergottes auf der Saul' frei von den vorausgegangenen, oft schwülstigen barocken Gestaltungsschemata.

Die zahlreichen Kirchen und Klöster J.M.Fischers (1692-1766), des Münchener Stadtbaumeisters und Kurkölnischen Hofbaumeisters, beinhalten konzeptionell eine Versachlichung und deuten die Entwicklung zum architektonischen Klassizismus an.

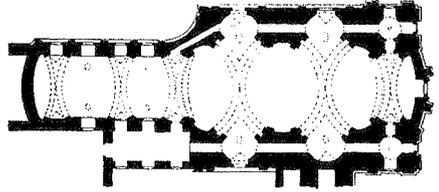


Abb.9.1.7: Klosterkirche Banz von Chr. Dientzenhofer (beg. 1710), Grundriß, aus Schnell [262].

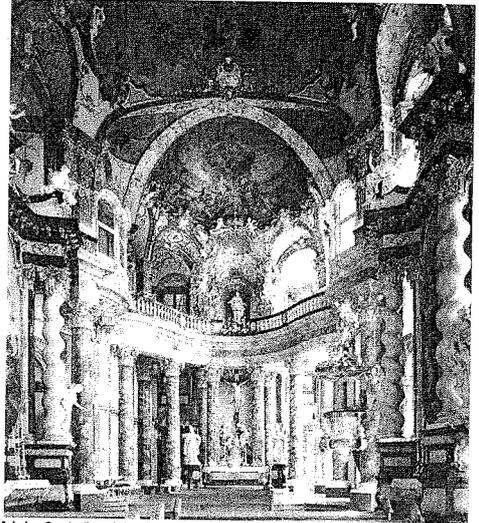


Abb.9.1.8: Hofkirche der Residenz von Würzburg von Balthasar Neumann, Innenansicht, aus v. Freeden [279].

9.1.3 Dominikus Zimmermann und die Wallfahrtskirche zu Steinhausen

Als Mitglied der Wessobrunner Schule lernte auch Dominikus Zimmermann zunächst das Stukkateurhandwerk. Um 1716 trat er schließlich auch als Baumeister mit der Klosterkirche Mödingen bei Dillingen in Erscheinung. Nach mehreren Arbeiten für den Dominikanerorden wurde Zimmermann auf Empfehlung der Priorin des Dominikanerinnenklosters Siessen bei Saugau, das er zuvor ausgeführt hatte, nach Steinhausen berufen. Im März 1727 lieferte er dem verantwortlichen Schussenrieder Abt P.Diadaktikus Ströbele die ersten Pläne ab und schon 1730 war der Rohbau abgeschlossen. 1733 wurde die Kirche vom Konstanzer Erzbischof geweiht. Wegen mehrfacher Überschreitung⁴ des

⁴ Schnell [263], S.2.

Etats mußte der Abt im gleichen Jahr ab danken. Für Dominikus Zimmermann jedoch war die Wallfahrtskirche die erste Gelegenheit, seinen eigenen Stil auszuprägen. Kennzeichnend ist der dreigliedrige Grundriß mit der längsovalen Grundrißform des pfeilerumstandenen Zentralraumes, dem Altarraum auf quere ovalem Grundriß und dem gegenüberliegenden quadratischen Vorraum und den Treppenhäusern (Abb.9.1.10). Zimmermann mag durch das Studium des Schussenrieder Planalbums mit Entwürfen und Skizzen der Vorarlberger Meister Moosbrugger und Beer zum ovalen Zentralraum mit Umgang angeregt worden sein⁵. In seinem Spätwerk, der Wallfahrtskirche Wies bei Steingaden (1745-1754), brachte er dieses Grundrißkonzept zur Vollendung (Abb.9.1.11).



Abb.9.1.9: Wallfahrtskirche Steinhausen, Außenansicht.

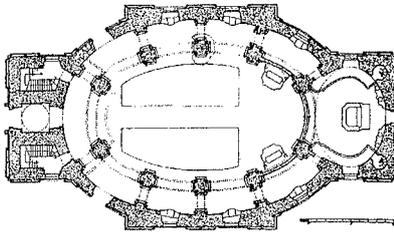


Abb.9.1.10: Wallfahrtskirche Steinhausen, Grundriß, nach Lieb/Hirmer [222].

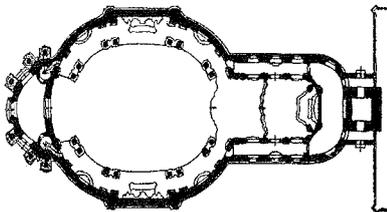


Abb.9.1.11: Wallfahrtskirche Wies bei Steingaden, Grundriß, aus Koch [27].



Abb.9.1.12: Wallfahrtskirche Steinhausen, Innenansicht zum Altar.

⁵ Hierzu Kasper [215].

9.2 Die Zentralkuppel der Wallfahrtskirche zu Steinhausen

9.2.1 Zur Wölbtechnik der Barockbaukunst und der Bedeutung der Zentralkuppel der Wallfahrtskirche

Die Wahl eines gediegenen Gewölbes für die Überdeckung des Kirchenraumes von Il Gesù statt einer einfachen Holzkonstruktion entspricht ebenso dem gegenreformatorisch selbstbewußten Geist wie die aufwendige Fassadengestaltung und die reiche Dekoration des Innenraumes. So nutzte man schon bald die Wölbtechnik bis an die Grenzen der Möglichkeiten (z.B. St.Michael). Lag die baumeisterliche Herausforderung beim Tonnengewölbe in der Vergrößerung der Spannweite, so stellte das nunmehr 'moderne' Ovaloidgewölbe mit seinem noch unbekanntem Tragverhalten Ansprüche an das statische Gefühl seiner Erbauer. Tonnengewölbe konnten sukzessiv errichtet werden, ohne daß eine Schalung für das ganze Tragwerk notwendig gewesen wäre, Ovaloidgewölbe hingegen erforderten komplizierte Schalungsträger und Lehrgerüste, die größere, zusammenhängende Unterstützungsflächen bilden mußten. Inwiefern das Tragverhalten der Gewölbe mit ovaloider Form demjenigen der hundertfach gebauten Hemisphärenform ähnlich wäre, hatten die Baumeister erst zu erkunden.

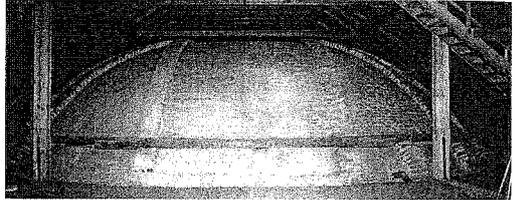


Abb.9.2.1.: Zentralkuppel der Abteikirche Ottebeuren von J.M.Fischer (1745-1765) mit Rippen und hölzernem Ringanker.

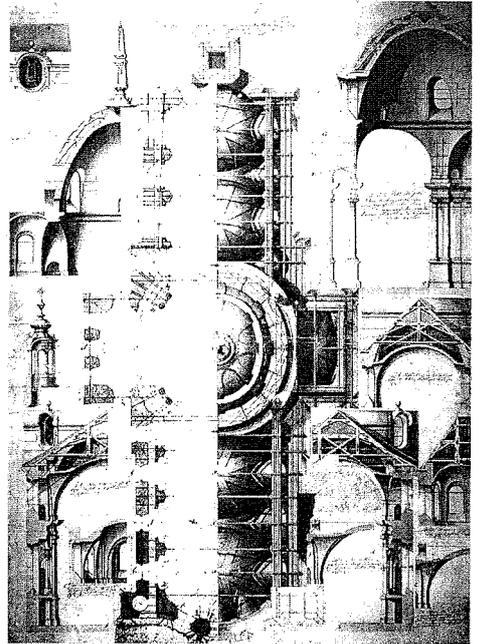


Abb.9.2.2: Gewölberippen der Gewölbe der Abteikirche Neresheim, B.Neumann zugeschrieben, dargestellt von Neumanns Sohn Ignaz Franz, von 1755, aus Manitz [227].

Die konstruktiven Prinzipien zum Abfangen bzw. zur Umlenkung des Kuppelschubes durch an der Basis angehäufte Hinterfüllung, durch Streben oder quer verlaufende Tonnengewölbe oder durch Ringanker (Abb.9.2.1) konnten natürlich auch auf das Ovalgewölbe angewandt werden. Größere statische Schwierigkeiten brachten dagegen die unregelmäßigen Abstände von Pfeilern oder Säulen, auf denen die Gewölbe ruhen sollten. Die nächstliegende konstruktive Lösung für diese Probleme war der Rückgriff auf Rippen und Rippen-systeme als Verstärkungen, die bereits in den gotischen Kathedralen zur Perfektion entwickelt worden waren. Bedingt durch die barocke Gestaltungsauffassung einer von der Konstruktion unabhängigen Raumgestaltung zugunsten von Stuckverzierung und illusionistischer Malerei, mußten diese unsichtbar sein und traten nur aus dem Extradros der Wölb-schalen hervor.



Abb.9.2.3: Vierung der Wallfahrtskirche Vierzehnheiligen von Balthasar Neumann, aus v.Freedeen [279].

Obwohl das Gewölbe bis zur Barockzeit die konstruktive Voraussetzung für die Verwirklichung der raumplastischen Ideen Guarinis mit den sich durchdringenden und verschneidenden Flächen war, fehlte es offenbar vielen Barockbaumeistern am Mut oder an der Fähigkeit, zu den hieraus erwachsenden, anspruchsvollen geometrischen Aufgaben qualitativ ebenbürtige statische und konstruktive Lösungen zu entwickeln. Eine Ausnahme war Balthasar Neumann, er gehörte zu den wenigen, die mit einem sicheren statischen Gefühl das Tragverhalten von ovaloiden oder freiförmigen Kuppeln und Gewölbe erspürten, und dem Verlauf der Kräfte entsprechende Wölbverstärkungen einbauten (Abb.9.2.2). Doch auch er war es, der mit seiner Innengestaltung den Zusammenhang zwischen Konstruktion und Form in geradezu 'dekonstruktivistischer Weise

obwohl das Gewölbe bis zur Barockzeit die konstruktive Voraussetzung für die Verwirklichung der raumplastischen Ideen Guarinis mit den sich durchdringenden und verschneidenden Flächen war, fehlte es offenbar vielen Barockbaumeistern am Mut oder an der Fähigkeit, zu den hieraus erwachsenden, anspruchsvollen geometrischen Aufgaben qualitativ ebenbürtige statische und konstruktive Lösungen zu entwickeln. Eine Ausnahme war Balthasar Neumann, er gehörte zu den wenigen, die mit einem sicheren statischen Gefühl das Tragverhalten von ovaloiden oder freiförmigen Kuppeln und Gewölbe erspürten, und dem Verlauf der Kräfte entsprechende Wölbverstärkungen einbauten (Abb.9.2.2). Doch auch er war es, der mit seiner Innengestaltung den Zusammenhang zwischen Konstruktion und Form in geradezu 'dekonstruktivistischer Weise

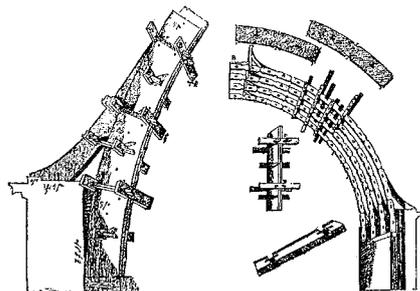


Abb.9.2.4: Bohlenbogenkonstruktion nach Philibert de L'Orme, 1561, aus Graefe [19].

persiflierte⁶ (Abb.9.2.3). Dieses künstlerische Bewußtsein führte bald, in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, weg von den traditionellen Gewölben aus Mauerwerk und hin zu leichten Holzkonstruktionen mit Gipsverschalung. Hierbei kam u.a. die fast zweihundert Jahre zuvor von dem französischen Architekten Philibert de l'Orme erfundene Bohlenbogenkonstruktion zu neuem Einsatz (Abb.9.2.4).

Auch in Dominikus Zimmermanns Werk hat sich diese Abkehr von der echten Wölbtechnik vollzogen. Die Steinhausener Kuppel war seine letzte echte Gewölbekuppel in Mauerwerkstechnik. Schon bei der Pfarrkirche in Günzburg (1736-1739) ging er zu einer hölzernen Konstruktion über, wie schließlich auch sein Alterswerk, die Wieskirche, nicht mit echten Gewölben eingedeckt ist.

9.2.2 Die Konstruktion der Zentralkuppel der Wallfahrtskirche

9.2.2.1 Gewölbeform und Gewölbekonstruktion

Die Form des großen Ovaloidgewölbes, die von den Pfeilerinnen-seiten des Grundrisses vorgegeben wird, ist, von relativ geringen Abweichungen (max. 0.2m) abgesehen, eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 11,5\text{m}$ und $b = 7,0\text{m}$ (Abb.9.1.10). Die darüber sich erhebende Kuppel aus Ziegelmauerwerk ist dementsgegen kaum mit einer geometrischen Grundform, einem Rotationsellipsoid oder dergleichen zu beschreiben

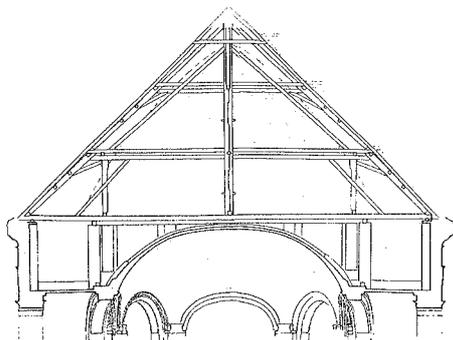


Abb.9.2.5: Wallfahrtskirche Steinhausen, Schnitt entlang der kurzen Halbachse durch das Zentralgewölbe, aus Speidel [266].

(Abb.9.2.5) (Abb.9.2.6). Sie ist stark abgeflacht, wobei der Meridian im Längsschnitt relativ steil, mit ca. 50° zur Grundebene ansteigt und nach einer starken Krümmung nahezu horizontal weiterläuft, so daß man die Kuppel auch zur Kategorie der 'Spiegelgewölbe' zählen könnte (siehe Tabelle 2.1). Gründe für die flache Form mögen darin gelegen haben, die Sichtbarkeit des Deckenfreskos zu verbessern und eine möglichst schattenfreie Beleuchtung zu gewährleisten⁷.

6 Auch Guarino Guarini arbeitete bei San Lorenzo und bei San Sindone mit Blendbögen und Tragbögen, die nicht sichtbar im Hintergrund verlaufen.

7 Nach Lieb/Hirmer [222], S.120.

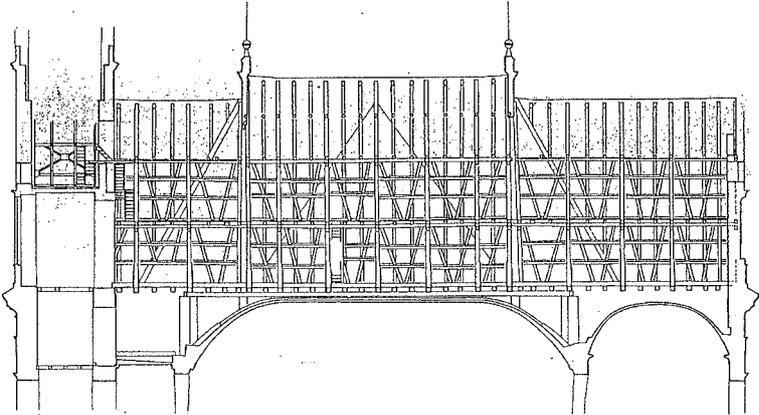


Abb.9.2.6: Wallfahrtskirche Steinhausen, Längsschnitt durch das Zentralgewölbe, aus Speidel [266].

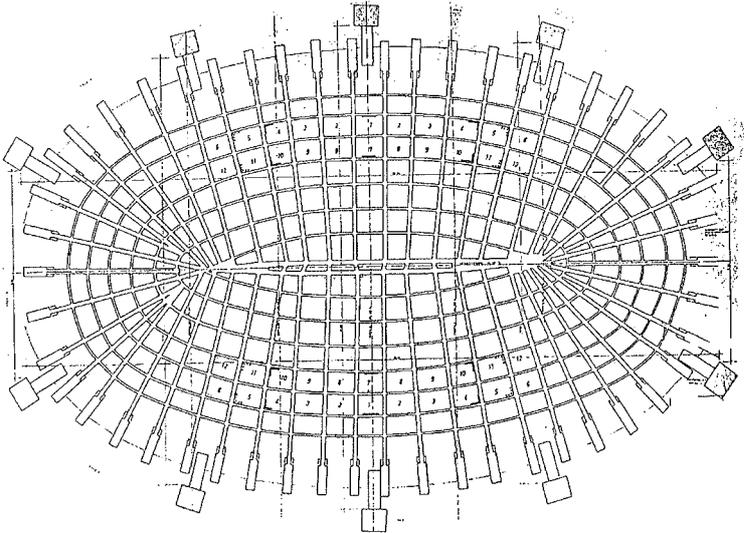


Abb.9.2.7: Wallfahrtskirche Steinhausen, Rippennetz auf dem Extrados des Gewölbes, aus Speidel [266].

Der Extrados der Zentralkuppel ist von einem Rippennetz überzogen (Abb.9.2.7). Bei einer durchschnittlichen Dicke von $d = 31\text{cm}$ und den dazwischenliegenden Gewölbeflächen von etwa der Hälfte $d = 15\text{cm}$, und einer mittleren Dicke von $18,6\text{cm}$ ergibt sich eine Schlankheit der Rippen von $d/R_{\text{max}} = 1/37$ über die Längsachse und $d/R_{\text{min}} = 1/23$ über die Querachse.

Der Horizontalschub der Zentralkuppel wird rundherum über die zwischen Pfeiler und

Wand gespannten Tonnengewölbe über dem Umgang aufgenommen. Die Tonnengewölbe sind entsprechend ihrer Beanspruchung im Kufverband vermauert. Von der Existenz irgendwelcher Metall- oder Holzanker in der ursprünglichen Konstruktion ist nichts bekannt.

9.2.2.2 Bauvorgang

Außer der Funktion einer optimalen Form für ein Deckengemälde hatte die Gewölbeform mit einem rundum ähnlichen Profil bautechnische Vorteile. Das Rippensystem basiert auf einer Ovaleinteilung (Abb.9.2.8.A), wobei die Rippen an den Seiten stärkerer Krümmung innerhalb eines Winkels von ca. 140° radial auf zwei Konstruktionspunkte zulaufen, die jedoch nicht den Brennpunkten der Grundrißellipse entsprechen. Die Meridianschnitte deuten darauf hin, daß zumindest für den Gewölbeansatz Lehren gleicher Grundform benutzt wurden. Der Bauprozess kann demnach folgendermaßen abgelaufen sein (Abb.9.2.8.B):

1) Aufstellen eines Mittengerüstes mit der Zentraltraverse zwischen den Konstruktionspunkten des Ovals. Aufmauern der Gratrippen und des Gewölbes an den Übergangsméridianen zu bogenartigen Teilen mit Hilfe von kreisbogenförmigen Lehren.

2) Aufmauern der stark gekrümmten, zu den Konstruktionspunkten symmetrischen Ovaloidteile in Ringschichten bis auf etwa $2/3$ der Höhe (innerhalb mäßiger Meridianeigung) der zu überwölbenden Fläche. Die gegenseitige Abstützung erfolgte dabei über die Gratrippe.

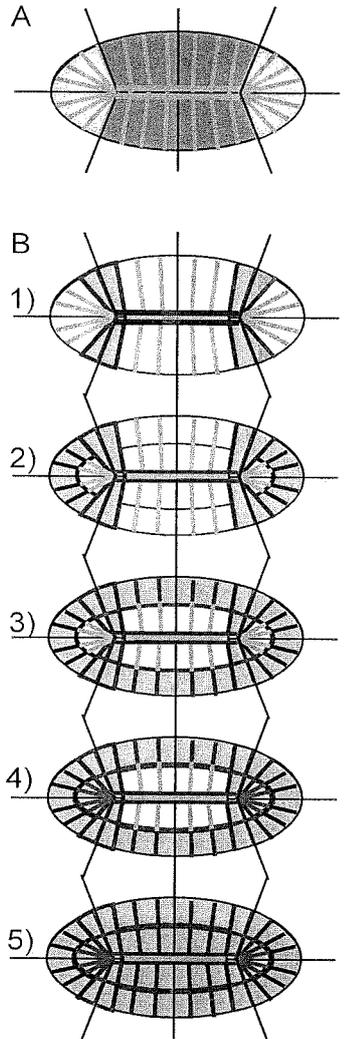


Abb.9.2.8: A: Gewölbegliederung, B: Rekonstruktion der Stufen des Bauprozesses des Zentralgewölbes der Wallfahrtskirche.

- 3) Aufmauern der schwach gekrümmten Ovaloidteile in Ringschichten mit denselben, etwas gekürzten Lehren, ebenfalls bis auf etwa 2/3 der Höhe der Wölbfläche.
- 4) Aufmauern in Ringschichten und Schließen der stark gekrümmten Ovaloidteile.
- 5) Aufmauern in Ringschichten und Schließen der schwach gekrümmten Ovaloidteile.

Die Lehren konnten so mehrfach abwechselnd zur Aufmauerung der stark gekrümmten Gewölbeabschnitte und der schwach gekrümmten Abschnitte mit wenigen zusätzlichen Teilen benutzt werden. Auch die nicht vollkommen reguläre Lage der Meridionalrippen kann mit derartigen herstelltechnischen Gegebenheiten in Verbindung gebracht werden.

9.2.3 Tragverhalten der Kuppel

9.2.3.1 Tragverhalten von Ellipsoidkuppeln

Wenngleich die Unterschiede in der Geometrie zwischen der Steinhauser Ovaloidkuppel und einem echten Rotationsellipsoid groß sind, so ist die Betrachtung der Trageigenschaften einer rotatorisch erzeugten Kuppel mit verschiedenen langen Halbachsen zum Vergleich mit der gebauten Kuppel dennoch hilfreich (Abb.9.2.9).

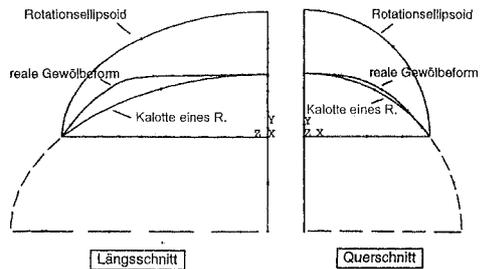


Abb.9.2.9: Vergleich der Geometrie der Hauptkuppel mit einem Rotationsellipsoid und der Kalotte eines Rotationsellipsoids.

Membrangerechte und kontinuierliche Lagerung bei linearem Materialverhalten

Die geometrische Verwandtschaft des Rotationsellipsoids mit der Hemisphäre geht einher mit einem ähnlichen Tragverhalten. So können die inneren Kräfte einer Kuppel in Form eines Rotationsellipsoids mit Hilfe einer affinen Transformation aus den Membrankräften der Hemisphäre abgeleitet werden. Die Verteilung der Meridian- und Ringkräfte bleibt qualitativ erhalten, erkennbar an der unveränderten Lage der Bruchfuge bei $51,8^\circ$ vom Scheitel (Abb.9.2.10.b). Die achsensymmetrische Form führt zu einer relativen Erhöhung der Meridiankräfte entlang der langen Halbachse und zu einer Umverteilung der Ring-

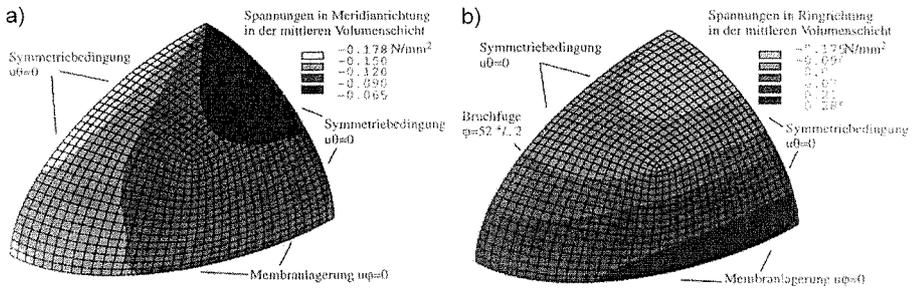


Abb.9.2.10: a) Meridian- und b) Ringspannungen in einer membrangerecht gelagerten Schale in Form eines Rotationsellipsoids in Schalenmittelfläche (Darstellung eines symmetrischen Kuppelabschnittes).

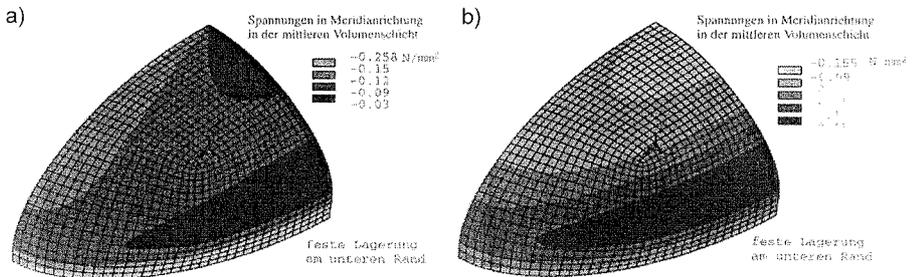


Abb.9.2.11: a) Meridian- und b) Ringspannungen in einer fest und kontinuierlich gelagerten Schale in Form eines Rotationsellipsoids in Schalenmittelfläche.

kräfte, ungefähr im Verhältnis der Längen der Halbachsen, mit einer Konzentration der Kräfte an der Stelle schwächster Krümmung.

Wird die Verformung nicht nur in Richtung der meridionalen Auflagertangenten (membrangerechte Lagerung) behindert, sondern auch senkrecht dazu, wie es ein eingebauter Ringanker bewirken würde, ergibt sich eine deutliche Verringerung der Beanspruchungen in Ringrichtung um 12% (Abb.9.2.11.b).

Diskontinuierliche Lagerung und lineares Materialverhalten

Eine Lagerung der Schale an diskreten Stellen, entsprechend der auf Pfeilern gelagerten Steinhausener Zentralkuppel, konzentriert die Meridiankräfte entlang den zum Auflager führenden Lastabtragungswegen (Abb. 9.2.12.a). Die Verteilung der Ringkräfte verändert sich so, daß unterhalb der Bruchfuge eine wechselbeanspruchte Zone wie bei einem Durchlaufträger entsteht, mit hohen Druckkräften direkt über der Stützung und hohen Zugkräften an den dazwischenliegenden freien Rändern der Kuppelbasis.

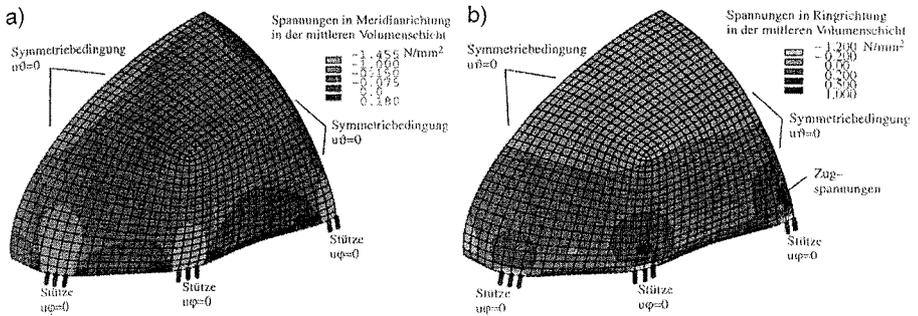


Abb.9.2.12: a) Meridian- und b) Ringspannungen in einer diskontinuierlich gelagerten Schale in Form eines Rotationsellipsoids in Schalenmittelfläche.

9.2.3.2 Tragverhalten der Steinhausener Ovaloidkuppel

Um den Vergleich zu den Berechnungen am Ovaloidgewölbe zu ermöglichen, wurden die Simulationen des Tragverhaltens der Steinhausener Kuppel zunächst unter Vernachlässigung des nichtlinearen Materialverhaltens durchgeführt. Hierzu wurde ein vereinfachtes Tragwerksmodell mit 'verschmierten' Rippen, d.h. mit einer aus Schalen- und Rippendicke gemittelten Gewölbedecke verwendet. Um die Unterschiede in der Beanspruchung festzustellen, wurde die kontinuierliche Lagerung und die eigentliche diskontinuierliche Lagerung auf Pfeilern untersucht.

Aus Gründen der verfügbaren Rechner- und Speicherressourcen mußten die Varianten zur Untersuchung des Effektes verschiedener Auflagersteifigkeiten bei materiell-nicht-linearem Verhalten sowie die numerische Traglastermittlung ebenfalls am Modell ohne ausgeprägte Rippen gemacht werden⁸. Im einzelnen wurden folgende Auflagerbedingungen untersucht:

- in vertikaler und radialer Richtung starr
- in vertikaler Richtung elastisch, in radialer Richtung starr
- in vertikaler und radialer Richtung elastisch

Die elastische Auflagerung in vertikaler Richtung beschreibt das Tragverhalten der heutigen Kuppel, die auf den nachgiebigen Bögen aufliegt, und von einer praktisch starren Betonscheibe eingefasst wird. Die allseits elastische Lagerung gibt den Zustand vor der Sanierung mit der Abstützung durch die umliegenden Tonnengewölbe wieder.

⁸ Weitere Untersuchungsergebnisse sind bei Voormann [280] aufgeführt.

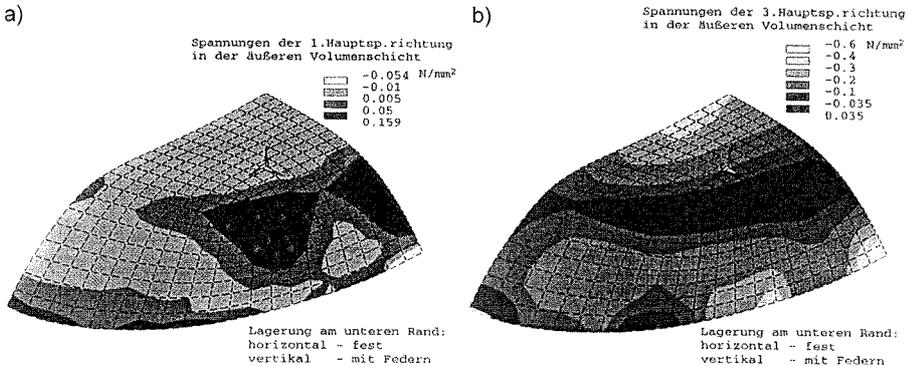


Abb.9.2.13: a) Maximale Hauptspannungen und b) minimale Hauptspannungen in der äußeren Schalenfläche der Steinhausener Zentralkuppel mit elastischer Lagerung auf Stützen bei linearem Materialverhalten.

Kontinuierliche, starre und diskontinuierliche, elastische Vertikallagerung bei linearem Materialverhalten

Die im Vergleich zum Ellipsoid ungleichmäßige Verteilung der Meridiankrümmung der Steinhausener Kuppel schlägt sich deutlich in der Lastabtragung nieder. Die schwach gekrümmte Scheitelzone induziert hohe Druckspannungen in Meridian- und Ringrichtung, die durch eine ungefähr ringförmige Zugzone im Bereich der meridionalen Krümmungskonzentration gegengehalten wird (Abb.9.2.13.a,b).

Entlang der kurzen Halbachsen des Gewölbes sind die Hauptspannungen, die parallel zum Meridian verlaufen, am Extrados positiv und gleichbedeutend mit Biegezugspannungen.

Diskontinuierliche, elastische Vertikallagerung bei nichtlinearem Materialverhalten

Die vorausgegangenen Betrachtungen unter Vernachlässigung des Reißverhaltens des Materials geben Auskunft über die zu erwartenden Zugversagenszonen der materiell-nichtlinearen Simulation (Abb.9.2.14). Zuerst bildet sich bei 86% der Eigengewichtsbelastung ein Einriß (1), der bei ca. 98% zum Durchriß (2) quer zur langen Achse in Gewölbemitte führt. Hierdurch wird die Lastabtragung in Ringrichtung abgebaut und die Bogentragwirkung entlang der kürzeren Halbachse entsprechend stärker aktiviert. Einrisse an den Gewölbeunterkanten (3) zwischen den Pfeilern stellen sich bei Lastfaktor 1,16 ein. Bei ca. 1,36-fachem Eigengewicht findet ein weiterer meridionaler Durchriß (4) statt, so daß insgesamt vier, nur in der Scheitelzone verbundene, praktisch separate

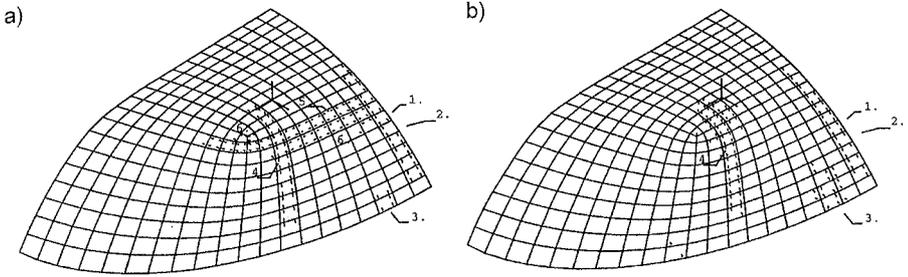


Abb.9.2.14: Rißbildung bei zunehmender Eigengewichtsbelastung in der Abfolge des Erscheinens: a) in der äußeren Elementschicht und b) in der inneren Elementschicht (elastische Vertikallagerung und starre Radiallagerung).

Tragelemente entstehen (Abb.9.2.15). Bei einer Lasterhöhung auf 1,47-faches Eigengewicht bilden sich schließlich die aus der Tonnentragwirkung herrührenden Risse am Extrados, welche das Versagen der tonnenförmigen Gewölbeteile ankündigen. Die numerisch ermittelte Traglast lag weit über dem doppelten Eigengewicht (2,5 EG).

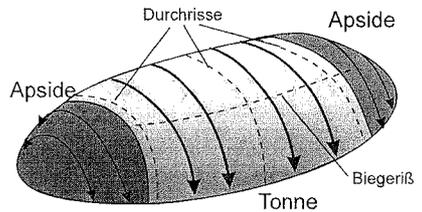


Abb.9.2.15: Schematische Darstellung der durch Rißbildung sich trennenden Tragwerksteile unter zunehmendem Eigengewicht bei radial starrer Lagerung.

Rippenmodell bei diskontinuierlicher, elastischer Lagerung in vertikaler Richtung und unter linearem und nichtlinearem Materialverhalten⁹

Die Berechnungen am realistischen Rippenmodell zeigen die typischen Lastkonzentrationen in den Rippen (Abb.9.2.16). Die zusätzliche Biegesteifigkeit durch die Rippen verbessert insbesondere das Verformungsverhalten des Gewölbes. Die Scheitelabsenkung reduziert sich gegenüber dem vergleichbaren Modell mit konstanter Dicke um rund 28% (2.4mm gegenüber 3.4mm¹⁰). Entsprechend stellen sich die Rißereignisse bei der materiell-nichtlinearen Untersuchung erst bei einem höheren Belastungsgrad ein. Die Gewölbeshale bleibt bis zum eineinhalbfachen Eigengewicht fast rissefrei, nur an den Stellen größter Rippenkrümmung reißen die Rippen ein. Die Zentralkuppel ist also in

⁹ Am großen Rippenmodell wurde wegen der großen Speicheranforderungen und Ergebnisdateien nur einige nichtlineare Simulationen durchgeführt. Hierzu wurde der Großrechner CRAY C94D des Rechenzentrums der Universität Stuttgart benutzt.

¹⁰ Die Angaben dienen wiederum nur dem Vergleich, sie sind quantitativ nicht als gültig anzusehen (siehe auch Kap.A.4.1.3).

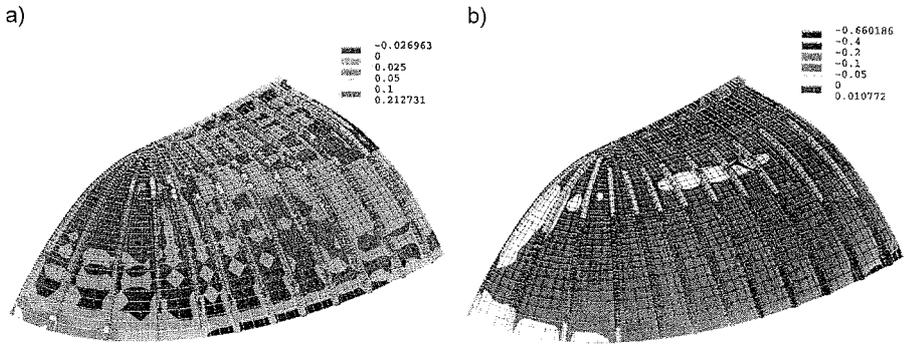


Abb.9.2.16: a) Kleinste und b) größte Hauptspannungen an der Außenfläche des Rippenmodells mit elastischer Lagerung auf Stützen, bei materiell-nichtlinearem Verhalten.

Wirklichkeit sehr viel standsicherer, als es die Simulationen mit den vereinfachten Modellen konstanter Dicke erscheinen lassen.

Diskontinuierliche und elastische Lagerung in vertikaler und horizontaler Richtung bei nichtlinearem Materialverhalten

Vollkommen anders ist das Tragverhalten der Ovaloidkuppel, wenn die Auflagersteifigkeit nicht nur in vertikaler, sondern ebenso in radialer Richtung begrenzt ist. Bedingt durch die mögliche horizontale Auswärtsbewegung, besonders entlang der langen Halbachse, bilden sich schon bei einem Dreiviertel des Eigengewichts in derselben Richtung im Scheitel Längsrisse (Abb.9.2.17), welche die Ausbildung eines Gelenkes aus der Bogenwirkung über die kurze Achse signalisieren (1). Die hiermit verbundene, starke Deformation in Kuppelmitte führt etwa gleichzeitig zu Rissen am Extrados in Ringrichtung an den stark gekrümmten Enden (2). Die Breite dieser Ringrisszone dehnt sich mit zunehmender Last zur Kuppelmitte hin aus (0.93 EG), (3). Bei Erreichen des Eigengewichts (0.98 EG) bildet sich in meridionaler Richtung ein zweiter Durchriß, der ebenfalls aus der nun fortgeschrittenen Absenkung des Systems im Mittenbereich resultiert. Diese Art von Riß findet sich auch am 'echten' Gewölbe an der NW-Ecke¹¹ und der SO-Ecke (Abb.9.2.18) sowie am östlichen Ende. Der Scheitel hat sich bei dieser Belastungsstufe und dieser Auflagervariation rund 1,70 mal so stark gesenkt wie bei starrer Radiallagerung (5,6mm statt 3,3mm¹²).

¹¹Der Riß an der NW-Ecke ist bei Sachse [255], S.227, Abb.18 photographisch dargestellt.
¹²Siehe Anmerkung 10.

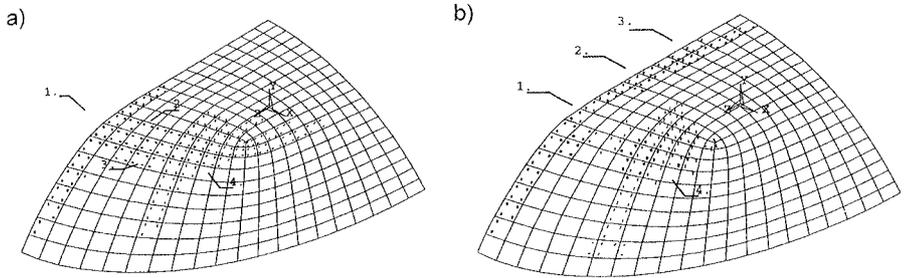


Abb.9.2.17: Rißbildung bei zunehmender Eigengewichtsbelastung in der Abfolge des Erscheinens: a) in der äußeren Elementschicht und b) in der inneren Elementschicht (elastische Vertikal- und Radiallagerung).

Das Berechnungsmodell mit vertikal- und radial-elastischer Auflagerung versagt numerisch bedingt bei 1,18-fachem Eigengewicht. Schematisiert dargestellt teilt sich das Gewölbetragwerk in einzelne Bögen über die kurze Halbachse, an die sich senkrecht Halb- bzw. Segmentbögen anlehnen (Abb.9.2.19).

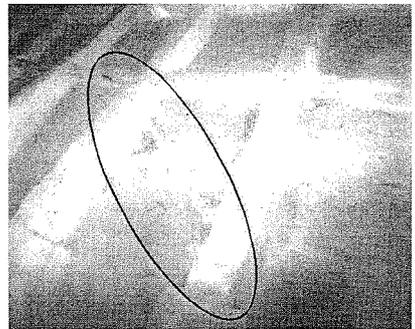


Abb.9.2.18: Ausgebesselter, schräg zur Meridianrichtung verlaufender Riß an der SO-Seite des Ovaloidgewölbes der Wallfahrtskirche von Steinhausen.

9.2.4 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Finite-Element-Untersuchungen an Ellipsoidkuppeln und an der Steinhausener Ovaloidkuppel zeigen, daß die inneren Beanspruchungen von ovalen Gewölben im Zusammenwirken mit dem Rißverhalten des Materials und der Wirkung nachgiebiger Lager zu sehr unterschiedlichen Rißbildern und Versagensformen führen. Ovaloidkuppeln erweisen sich demnach als besonders empfindlich bezüglich einer Veränderung der Lagerbedingungen.

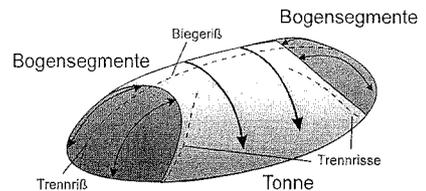


Abb.9.2.19: Schematische Darstellung der durch Rißbildung sich trennenden Tragwerksteile unter zunehmendem Eigengewicht und bei vertikal und radial elastischer Lagerung.

Die 1970 durchgeführten Sicherungsmaßnahmen an der Steinhausener Kuppel, bei denen eine Ringankerscheibe (Abb.9.2.20.a) um die Zentralkuppel gebaut wurde, erweisen sich grundsätzlich als notwendig, wenn man die Simulationsergebnisse der Kuppel mit elastischer Radiallagerung betrachtet, die qualitativ das damalige statische

System wiedergeben. Die horizontale Stützung nur durch die Tonnengewölbe über dem Umgang war weich und mauerwerktypisch mit bleibenden Verformungen verbunden. Die Finite-Element-Ergebnisse zeigen jedoch auch, daß trotz der nachgiebigen Stützung Sicherheitsreserven vorhanden gewesen wären, und es genügt hätte, einen biegesteifen Ringanker, der im Bereich größter Verformungen (entlang der langen Halbachsen) aufgevoutet ist (Abb.9.2.20.b), um die Basis zu legen, um das Gewölbe ausreichend zu sichern. Die schwere Ringankerscheibe aus Beton macht zwar das Gewölbe sicher, indem sie den Gewölbeansatz praktisch starr fixiert und so eine höhere Tragfähigkeit und eine geringere Rißbildung bewirkt. Der allseitige Anschluß der Scheibe an Wände und Glockenturm und die große Steifigkeit führen jedoch andererseits zu einer statischen Kopplung dieser Bauteile bei Erschütterungen, woraus mittlerweile neue Sanierungsprobleme entstanden sind.

Die qualitative Übereinstimmung der am Tragwerk vorhandenen Risse und der aus der Finite-Element-Rechnung ermittelten Rißbildung, gerade bei diesem Beispiel, unterstreicht die Aussagefähigkeit des nichtlinearen Finite-Element-Verfahrens.

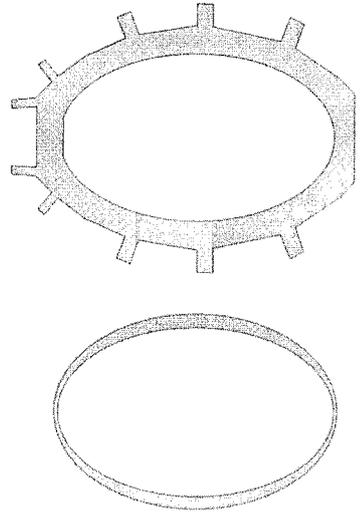


Abb.9.2.20: a) 1970 eingebaute Ringankerscheibe zur Sicherung der Zentralkuppel b) ausreichende Alternative.

10.0 Erste Versuche der Anwendung statisch begründeter Formen im Gewölbebau

Das Aufblühen der Naturwissenschaften im 16. Jahrhundert blieb nicht ohne Auswirkungen auf die praktizierende Baukunst. Zur Ausnutzung und Erweiterung der Anwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse trug damals das Wirken von Universalgelehrten bei, die in mehreren verschiedenen Wissenschaftszweigen forschten oder in unterschiedlichen Berufsfeldern aktiv waren.

10.1 Drei Kathedralen mit stützlinienförmigen Kuppeln

10.1.1 St. Paul's - Kettenform versus Kreisform

Sir Christopher Wren (1632-1723), Mathematiker, Astrologe, Baumeister und Erbauer der St. Paul's Cathedral in London (1675-1709) ist dieser Art von Wissenschaftlern zuzurechnen. Er gilt als der erste, der die Erkenntnisse um die statischen Eigenschaften der Kettenlinie baupraktisch zu nutzen versuchte. Wren wurde hierzu offenbar durch die Freundschaft mit dem Physiker Robert Hooke (1635-1703) angeregt, dessen Tagebuchnotizen von Diskussionen der beiden über die Konstruktion des monumentalen Kirchengebäudes berichten¹.

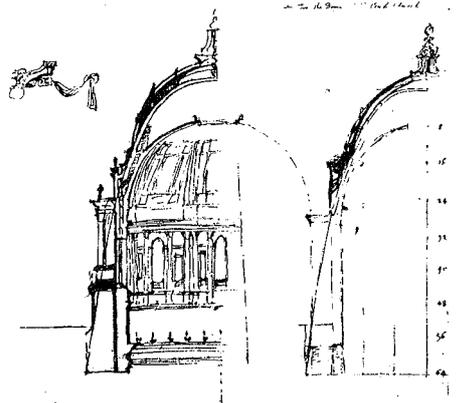


Abb.10.1.1: Zwei Skizzen von Wren zur Meridianform der Kuppeln der St. Paul's Cathedral mit eingezeichneten Kettenlinien, aus Mainstone [38].

Zwei Skizzen von Wren (Abb.10.1.1), noch aus der Zeit vor Gregorys Veröffentlichung über die Kettenlinie, mit einer Zwischenkuppel mit kettenlinienförmigem Meridian und einer weiteren, durch den Kuppelscheitel bis unter den Tambour gezogenen Kettenlinie beweisen², daß der Baumeister in Hookes Entdeckung, welche erst später bekannt wurde, eingeweiht war (Kap.3.1.1, S.36). Etwa zur selben Zeit, also zwischen 1675 und 1680 entstanden in der Werkstatt Wrens verschiedene Entwürfe von Kuppeln in spitzbogiger

¹ Siehe Robinson (Hrsg.) [250].

² Aus Mainstone [38], S.289.

und kettenlinienähnlicher Form für die Hauptkuppel der St.Paul's Cathedral (Abb.10.1.2), die auf Wren's Auseinandersetzung und den Versuch der Einbindung dieser 'natürlichen' Form in die Architektur hinweisen³. Im endgültigen Plan (Abb.10.1.3) war jedoch keine der drei geschachtelten Kuppeln im Ganzen nach der Kettenlinie geformt. Die Außen- und Innenkuppel und Gewölbe des Ausführungsprojektes basierten auf kreisförmigen Meridianen, die Zwischenkuppel war kegelförmig. Tatsächlich aber wurde die Neigung des Meridians des inneren Tambours so gewählt, daß der Winkel an der Basis demjenigen einer Kettenlinie

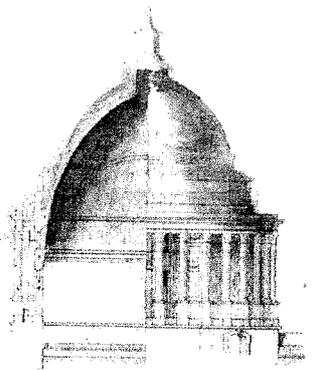


Abb.10.1.2: St.Paul's Cathedral, Skizze der Kuppel mit kettenlinienförmigem Meridian nach 1675, aus Whitechapel [284].

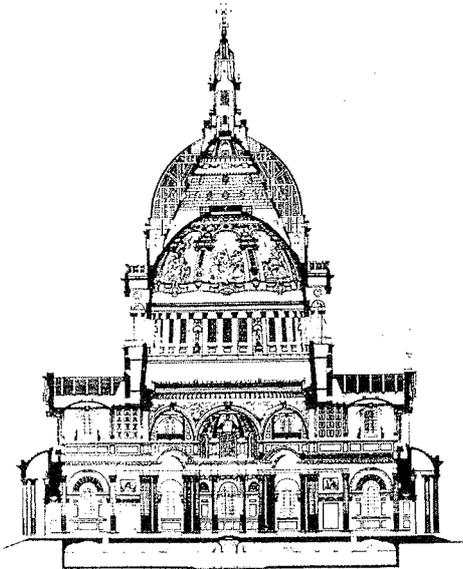


Abb.10.1.3: St.Paul's Cathedral, Schnitt durch die Vierung, aus Cowan [7].

entspricht (Abb.10.1.4 links), die wie in der Skizze (Abb.10.1.4 rechts), vom Sockel des Vierungsturms beginnend durch den oberen Kuppelscheitel verläuft⁴. Aus diesen Maßnahmen zeigt sich, daß Wren beim Entwurf der endgültigen Kuppelformen nur einige Gedanken der Hooke'schen Kettenlinientheorie umgesetzt hatte, nämlich, daß die ideale Stützlinie eines Gewölbes am Auflager zur Vertikalen geneigt verlaufen muß und, daß zu einer konzentrierten Last eine abschnittsweise lineare Stützlinie gehört. Aus diesem Grund formte er die

3 Aus dem Ausstellungskatalog 'Sir Christopher Wren': [284], Exponat Nr.8 (Zeichner: E.Woodroffe), Nr.21 (Zeichner unbekannt) und Nr.26 (Wren).

4 Die zu diesen Feststellungen führenden Untersuchungen wurden am Institut für leichte Flächentragwerke an Hängemodellen durchgeführt und mit Hilfe von computergraphischen Mitteln verifiziert. Weshalb von zahlreichen Technikhistorikern und Ingenieuren (z.B.: Cowan [7] 1977, S.179; Dorn/Mark [199] 1981 (Abb.A.10.1.1)) immer wieder der Versuch gemacht wird, zusammenhängende Kettenlinienkuppeln, d.h. Rotationskatenoide, in den endgültigen Entwurf zu interpretieren, bleibt angesichts dieser einfachen, aber exakten Prüfmethode unverstänlich.

Zwischenkuppel mit der aufgesetzten, schweren Laterne als Kegelgewölbe.

Aus der Entwicklung und Veränderung der Form der Vierungskuppeln der St.Paul's Cathedral, mit Studien der verschiedensten kettenlinienähnlichen und zusammengesetzten Kurven⁵ sowie aus negativen Bemerkungen Wrens zur Form kettenlinienförmiger Kuppeln ist zu schließen, daß es architektonische Erwägungen gewesen sein mußten, die Wren veranlaßten, letztlich von der Konstruktion der Kuppeln als Rotationskatenoide abzuweichen⁶.

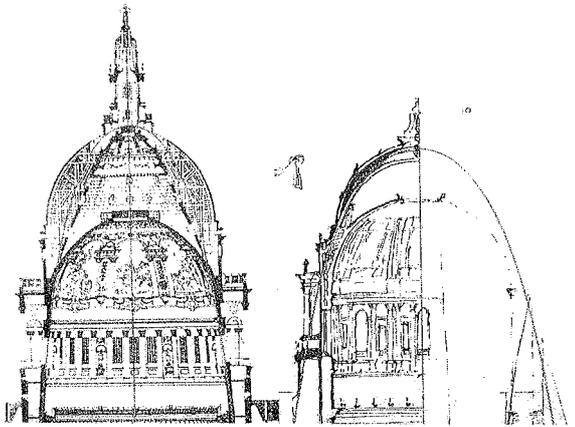


Abb.10.1.4: St.Paul's Cathedral, Hängemodell zur Demonstration der Kettenlinienform der Tambourneigung, (links) und der Entwurfsskizze (rechts).

10.1.2 Ste. Geneviève - die Kettenlinie als statische Absolutform

Rund hundert Jahre nach Wren propagierte der französische Ingenieur J.B.Rondelet (1734-1829) die Konstruktion von Kuppeln mit kettenlinienförmigem Meridian und realisierte seine Idee beim Bau des Pariser Panthéons - vor der Revolution Ste. Geneviève (1757-1790) genannt - indem er die Zwischenkuppel als Rotationskatenoide ausbildete. Das architektonische Konzept des Vierungsturms, das J.G.Soufflot (1713-1780) zugrundegelegt hatte, lehnt sich unverkennbar an das Dreikuppelsystem von Wren an, mit einer Innenkuppel als innerem Raumabschluß, einer Zwischenkuppel als Träger eines durch den Okulus sichtbaren Freskos und der Laterne sowie einer Außenkuppel als Bedachung⁷. Alle drei Kuppeln des Panthéons sind im Gegensatz zu den Holz- und Ziegelkonstruktionen der Paulskirche in London aus Werksteinen gefertigt und ruhen auf einem von schlanken Säulen gestützten Unterbau. Neben der Zwischenkuppel sind auch die Wandöffnungen, z.B. unter dem Stylobat, nach der Kettenlinie geformt.

⁵ Weitere Entwürfe in *Whitechapel* ed. [284], Exponate Nr. 16,23,25,27,28.

⁶ Siehe auch Graefe [209], S.56.

⁷ Soufflot studierte Wren's Pläne für St.Paul's intensiv; Petzet [239], S.113.

10.1.2.1 Jean Baptiste Rondelet und seine Konstruktionstheorien⁸

Im Gegensatz zu dem universal ausgebildeten und orientierten Wren repräsentierte Jean Baptiste Rondelet (1734-1829) den neuen, spezialisierten Berufsstand des Zivilingenieurs, mit dem sich das Tätigkeitsfeld der Baukunst in einen naturwissenschaftlich-technisch geprägten und einen architektonisch-gestalterischen Bereich teilte. Rondelet verstand es durchaus, sich in seiner Rolle zu profilieren. Alle seine Erfahrungen, konstruktiven Überlegungen und theoretischen Untersuchungen, die er im Zusammenhang mit dem Panthéon durchführte, legte er in dem Werk 'Traité de l'art de bâtir' (Paris ab 1803, [48]) nieder, dem ersten umfassenden Werk zu praktischen Problemen des Bauens. Rondelet machte so als ein theoretisch gebildeter Ingenieur von sich reden.

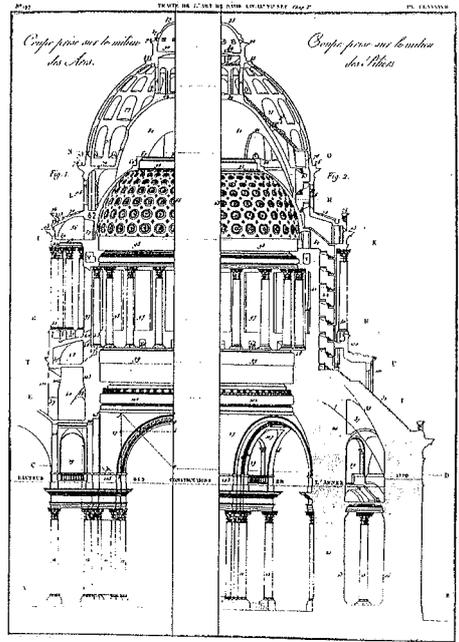


Abb.10.1.5: Ste.Geneviève, Zentralkuppel, Schnitt durch die Gewölbe und Ansicht aus Rondelet [48].

Er führte zahlreiche Versuche und die ersten systematischen Materialfestigkeitsuntersuchungen durch⁹ und sammelte auf diese Art und Weise seine Erfahrungen und Erkenntnisse¹⁰. Neueren Theorien oder Arbeiten zeitgenössischer Wissenschaftler gegenüber schien er jedoch nicht gerade offen zu sein, obwohl er in der Vorrede des vierten Bandes einige der zeitgenössischen Arbeiten, z.B. auch von Mascheroni und Bossut (siehe Kap.3.1.1) erwähnt¹¹. So arbeitete er noch nach Erscheinen von Couplets und Coulombs Bruch- und Gewölbetheorien mit der Gewölbetheorie von de la Hire (1640-1780) (Kap.3.1.2), die er zusammen mit E.M.Gauthey (1732-1806) modifiziert hatte.

⁸ Nach der Übersetzung von 'L'art de bâtir' [48] 'Theoretisch-praktische Anleitung zur Kunst zu bauen' [49], des Themas des 9.Bandes: 'Theorie der Constructionen'.

⁹ Straub [54], S.154.

¹⁰ Als Beispiel sei der aus seinem Werk häufig zitierte Versuch erwähnt, Kugeln entlang einer Kettenlinie zum stehenden Bogen aufeinanderzusetzen. Nach eigenen Angaben soll es ihm zweimal (von dreißig Versuchen) gelungen sein. In: 'Theoretisch-praktische Anleitung zur Kunst zu bauen', Leipzig 1834, 2.Band, S.79 [49].

¹¹ Ebenda [49], Band 4, S.240.

Hinsichtlich der Formgebung von Gewölben schenkte er neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen, etwa der Kuppeltheorie seines Landsmannes Bouguer (1734) (siehe Kap.3.1.1) oder dem statischen Nachweis der Standsicherheit der Peterskuppel des Italieners Poleni (1748) wenig Beachtung. Sein Werk 'L'art de bâtir' besteht demnach nicht nur aus Theorien, sondern aus Regeln, die er aus Versuchen abgeleitet hatte und selbstbewußt wie absolute Wahrheiten darstellt. Rondelet hielt die Kettenlinie offenbar für die ideale Gewölbegeometrie, wenn er schrieb: '...so ist es gewiß die Kettenlinie, welche am besten zur Bogengestalt geeignet ist, besonders wenn die Gewölbe überall die gleiche Dicke haben sollen, einen großen Durchmesser haben oder mit einer großen Last beschwert werden.'¹² In einer Analyse der St.Paul's Cathedral kritisierte er die logische und statisch absolut richtige Kegelkonstruktion, auf welcher die Laterne ruht, weil sie, seiner Ansicht nach, zu hohe Horizontalkräfte an der Basis erzeugen würde¹³.

10.1.2.2 Tragverhalten der Zwischenkuppel von Ste. Geneviève

Vielleicht ist es auf Rondelet und sein sehr verbreitetes Werk zurückzuführen, daß gegenüber der dort propagierten Verallgemeinerung der Kettenlinie als statisch günstige Form - auch für Kuppeln - kaum Zweifel erhoben wurden¹⁴. Daß die Kettenlinie eine statisch affine Form zu einer konstanten Gleichlast ist und deshalb als Rotationsform der Stützfläche einer Kuppel, bei der sich die Gleichlast linear mit dem Radius ändert, nicht entsprechen kann, hatte eigentlich die

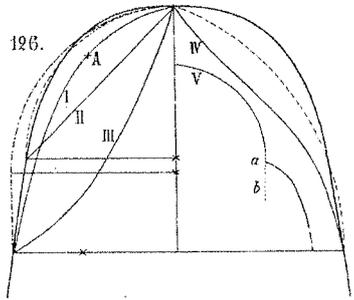


Abb.10.1.6: Verschiedene Meridiangeometrien für eine Kuppel nach Ungewitter/Mohrmann 1890 [163]. Die äußerste, durchgezogene Linie ist die Kuppelstützlinie als Referenzform.

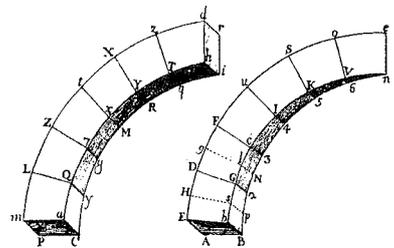


Abb.10.1.7: Polenis Veranschaulichung des Belastungsvolumens eines Bogens und einer Kuppel, aus Poleni [140].

¹²Zitiert aus der deutschen Übersetzung von 'Traité de l'art de bâtir [49]', 'Theoretisch-praktische Anleitung zur Kunst zu bauen', Leipzig 1835, 4.Band, 6.Abtheilung, 1.Kapitel, S.276.

¹³Ebenda [49]: Kapitel 'Nachträgliche Bemerkungen', S.426.

Konstruktiv können gerade diese Auflagerkräfte besser abgefangen werden, wie wenn sie in der Kuppelschale als Ringkräfte wirken würden.

¹⁴Diese Idee ist bis heute in der Tragwerkslehre präsent und wird sogar in Fachbüchern u.a. über Kuppeln unreflektiert weiterverbreitet.

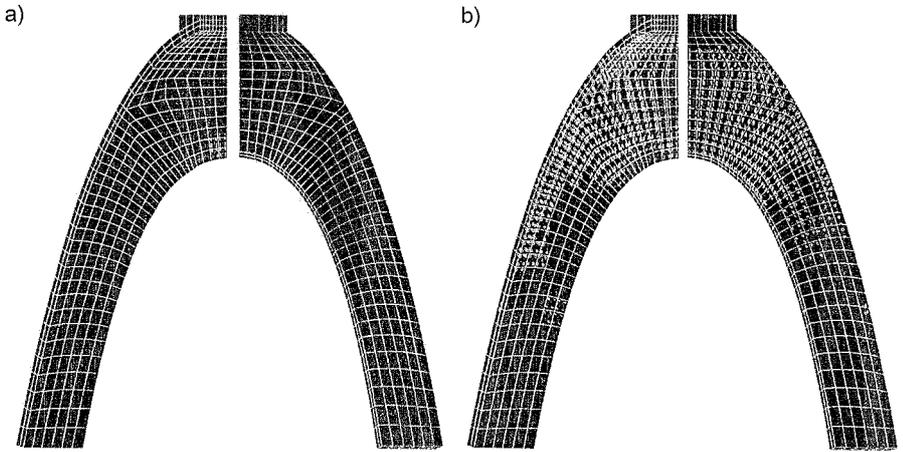


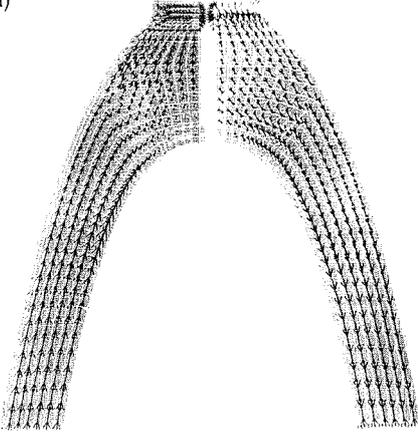
Abb.10.1.8: Ste.Geneviève, Reißbild a) bei 35% und b) bei 75% der Last aus Eigengewicht und Laterne (linke Hälfte: Kuppelinnenseite, rechte Hälfte: Kuppelaußenseite).

Theorie von Bouguer zu einer der idealen Bogenstützlinie analogen, idealen Kuppelstützlinie geliefert (Abb.10.1.6, Abb.3.1.3). Auch Polenis Hängemodell (Abb.3.1.4) und seine Ausführungen (Abb.10.1.7) machten den Unterschied der einwirkenden Belastung auf eine Kuppel im Gegensatz zum Bogen deutlich. Die Untersuchungen der Form und des statischen Verhaltens der Zwischenkuppel beweisen, daß die Ursache der Risse und Schäden nach der Ausschalung der Gewölbe¹⁵ nicht nur auf eine zu niedrig ermittelte Druckfestigkeit des Steinmaterials oder auf Setzungen zurückzuführen war, wie man damals glaubte oder glauben machen wollte¹⁶, sondern im Zusammenhang mit der zur Belastungskonfiguration unangemessenen Gewölbeform stand. Gerade das Gewicht der Laterne, die auf der Zwischenkuppel ruht (Abb.10.1.8), wirkt sich negativ auf das Tragverhalten aus, insbesondere in Verbindung mit den großen eingeschnittenen Lichtöffnungen, welche die räumliche Lastabtragung in Ringrichtung aufheben. Sie machen aus der Rotationsschale ein Gewölbe aus zwei sich kreuzenden Bögen in Kettenlinienform mit einer kleinen Kalotte. Paradoxerweise entspricht gerade diese Tragwerksform dem angestrebten optimierten Tragwerk, aber eben nur in bezug auf das

¹⁵Straub [54], S.154. Mainstone [38] S.292.

¹⁶Rondelet blieb auch nach Auftreten der Schäden in den Gewölben in das Projekt involviert, auch in die Sanierung. Siehe Petzet [239] S.36ff.. Es ist nicht auszuschließen, daß er bewußt nach Schadensursachen gesucht hatte, die seine Theorie unberührt lassen würden.

a)



b)

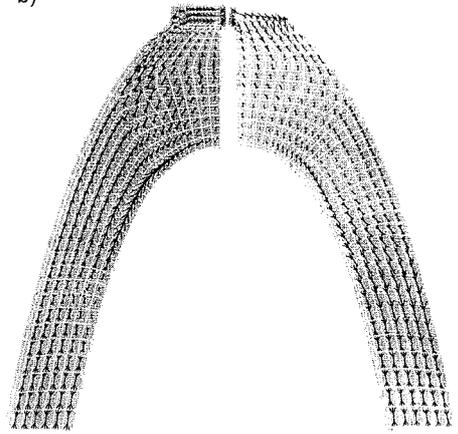


Abb.10.1.9: Ste.Geneviève, Hauptspannungen a) im ungerissenen und b) gerissenen Zustand bei Last aus Eigengewicht und Laterne (linke Hälfte: Kuppelinnenseite, rechte Hälfte: Kuppelaußenseite).

Eigengewicht der Kuppel und nicht auf die Belastung durch die Laterne¹⁷.

Die nichtlinearen Simulationen zeigen, wie die Kalotte unter Last von unten einreißt, bis praktisch keine räumliche Schalen-tragwirkung mehr vorhanden ist (Abb. 10.1.8.a), und die durch die Lichtöffnungen freigeschnittenen Gewölbeteile 'Biegerisse' erleiden (Abb.10.1.8.b). Hieraus resultiert schließlich eine örtliche Kantung der Bögen, die zur besagten Überbeanspruchung des Steinmaterials führte. Aus den durch Risse getrennten Teilen entstand ein Tragwerk, das von der Lastabtragung her gesehen, aus vier

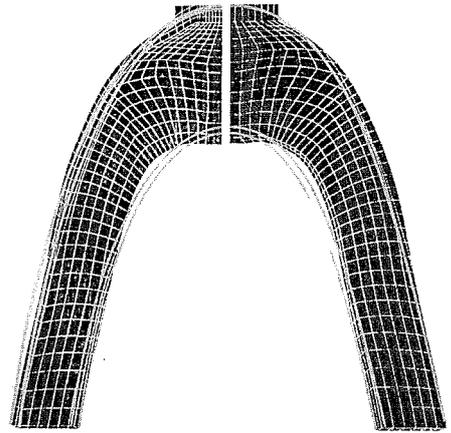


Abb.10.1.10: Verformungsfigur der Zwischenkuppel unter Eigengewicht und Laternenlast (linke Hälfte: Kuppelinnenseite, rechte Hälfte: Kuppelaußenseite).

¹⁷Hätte man keine Lichtöffnungen in die Kuppel geschnitten, dann hätte sich eine Lastkonfiguration ergeben, deren Stützlinie gut mit dem kettenlinienförmigen Meridian übereingestimmt hätte, so daß das Rotationskatenoid zufälligerweise eine statisch günstige Form zu dieser Belastung im Sinne einer Stützlinienkuppel gewesen wäre (siehe Stocker [267].S.70, Abb.A.10.1.2). Dies war sicherlich nicht beabsichtigt, denn an keiner Stelle in 'L'art de bâtir' ist ein Hinweis auf derartige statische Eigenschaften zu finden. Man muß eher annehmen, daß Rondelet sich der Existenz einer dem ebenen Problem analogen Kuppelstützlinie gar nicht bewußt war.

gegeneinander gelehnten Bögen bestand (Abb.10.1.9.b). Die Belastung induzierte eine starke Auswärtswölbung, so daß der Kollaps offenbar nur durch den auf einem Viertel der Höhe ansetzenden, ringförmigen Umgang verhindert wurde, der dieses radiale Ausweichen behinderte¹⁸ (Abb.10.1.10).

10.1.3 San Gaudenzio/Novara - von der Kettenlinie zur Kuppelkettenlinie

Der italienische Architekt A.Antonelli (1798-1888) ist außerhalb seiner Heimat Italien wenig bekannt, obwohl er einige bemerkenswerte Bauwerke im norditalienischen Raum hinterlassen hat (Abb.10.1.11). Er wuchs im französisch beeinflussten Piemont auf und besuchte die neugegründete Schule der Architektur in Turin, wo er eine technisch orientierte Ausbildung nach dem Vorbild der Pariser École des Ponts et des Chaussées genoß. Neben dem Studium praktizierte Antonelli bei einem Zivilingenieur namens Michela, durch den er mit Rondelets Werk 'L'art de bâtir' vertraut wurde¹⁹.

Die mit der Industriellen Revolution zunehmende Anwendung von Eisen im Bauwesen ermöglichte es, sowohl leichtere und filigranere Tragwerke zu bauen als auch größere Spannweiten zu überwinden, und neue Bauweisen anzuwenden²⁰. Diese Entwicklung

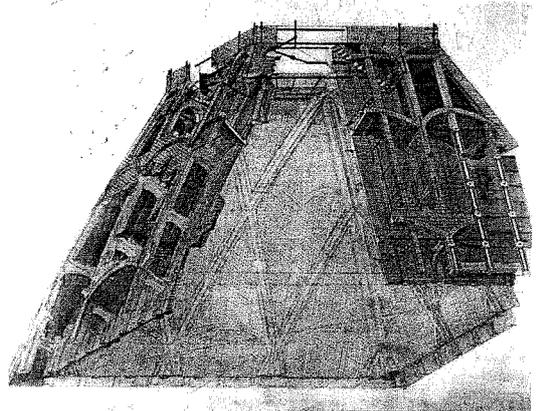


Abb.10.1.11: Mole Antonelliana/ Turin, Tragwerkisometrie des Klostergewölbes aus Rosso [252].

¹⁸Die materiell-nichtlineare Berechnung der Zwischenkuppel ohne horizontale Stützung auf Höhe der ringförmigen Plattform erlaubt eine Laststeigerung bis ca. 22% des Eigengewichts. Die numerische Analyse bestätigt die Untauglichkeit der Zwischenkuppel als freistehende Tragkonstruktion.

¹⁹Rosso 1989 [253], S.22.

²⁰Zu Antonellis Studienzeit entstand die St.Isaak Kathedrale in St.Petersburg (1818-1858) im Rahmen umfangreicher, durch den Zar eingeleiteter Baumaßnahmen, bei denen zahlreiche englische und französische Fachleute mitarbeiteten. Der Architekt Montferrand ([232]) nahm das Wren'sche Dreikuppelkonzept auf. Die Ingenieure Lamé (1795-1870) und Clapéyron (1799-1864) entwickelten ein ganz neuartiges Bauprinzip für die Innenkuppel, die aus einem gußeisernen Rippenskelett bestand, das mit Röhren ausgemauert war. In seinen Rippenschalen bei der Mole Antonelliana und der Außenkuppel von San Gaudenzio mag er versucht zu haben, diese Bauweise in den Mauerwerksbau zu übertragen .

motivierter Antonelli, die traditionelle Ziegelmauertechnik, die er gerade für seine Heimat Italien wegen der langen handwerklichen Tradition und den wirtschaftlichen Gegebenheiten als besonders günstig und erhaltenswert ansah²¹, in seinen Bauten durch ausgeklügelte Konstruktion und Technik mit den neuen technischen Möglichkeiten konkurrenzfähig zu halten. Er wandte viele, von Rondelet aufgestellte Regeln an und griff auf alte Mauerwerkdetails zurück, die er den Anforderungen entsprechend umfunktionierte oder erfinderisch weiterentwickelte. Hierzu gehört u.a. das 'legato' (Abb.10.1.12) (legare = verbinden), eine in Pfeiler oder druckbeanspruchte Tragglieder eingebaute Platte aus festem Naturstein (vorzugsweise Granit) als Querszugverstärkung, die Antonelli bei seinen oft sehr schlanken Stützen einsetzte.

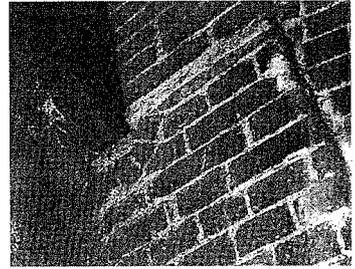


Abb.10.1.12: 'Legato', Bindeplatte aus weißem Granit in der Zwischenkuppel von San Gaudenzio/Novara.

10.1.3.1 San Gaudenzio

Neben seinem Hauptwerk, der Mole Antonelliana (1862-1900) in Turin, die als Hauptsynagoge Turins und Italiens geplant war, und deren zweischaliges, riesiges Klostergewölbe von jeweils nur 12cm Dicke (Abb.10.1.11) mit aufgesetztem Turm vormals das höchste Bauwerk der Welt aus Ziegelmauerwerk war, ist der Vierungsturm der Novareser Kirche San Gaudenzio (1840-1878) (Abb.10.1.13) von ebenbürtiger baumeisterlicher Leistung. Antonelli hatte hierbei die Aufgabe, die fehlende Vierungsüberwölbung der bestehenden Barockkirche (1577-1590) von Pellegrino Tibaldi zu ergänzen. Die lange Bauzeit von beinahe vierzig Jahren war im wesentlichen

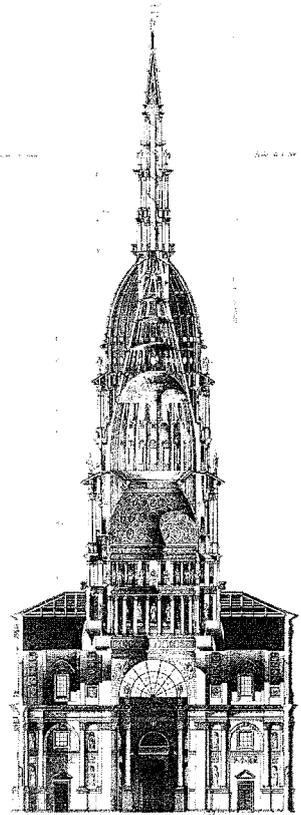


Abb. 10.1.13: San Gaudenzio/Novara, Schnitt durch den Vierungsturm von L.Caselli 1877 [184].

²¹Rosso 1977 [252], S.35.

dadurch bedingt, daß Antonelli seine Konzepte immer wieder änderte und den Turm zusehends monumentalisierte. In einer Serie von acht Entwürfen vergrößerte er das Bauwerk samt seiner inneren Gewölbe um mehr als das Doppelte (58m beim 1.Entwurf, bzw. 121m beim 8.Entwurf). Dem Auftraggeber gegenüber soll er diese Veränderungen unter anderem mit dem Argument verteidigt haben, daß höhere Gewölbe geringere Kämpferkräfte erzeugen würden, einer Behauptung, zu der er wahrscheinlich bei Rondelet die entsprechenden Referenzen gefunden hatte²². In seinen Entwürfen arbeitete Antonelli nicht nur das architektonische Konzept, das er von Soufflot übernommen hatte, auf die neue Situation um, er modifizierte Schritt für Schritt das Dreikuppelsystem und verbesserte Rondelets Idee der Kettenlinienkuppel:

Im ersten Entwurf von 1841 (Abb.10.1.14) ist der Turm und das Dreikuppelsystem ganz an Ste. Geneviève orientiert, mit der auf dem Peristyl ruhenden Innenkuppel, der Zwischenkuppel mit dem Fresko, auf der zusätzlich die Laterne ruht, und der umschließenden, gemauerten Außenkuppel. Die Zwischenkuppel wurde dort nach einem kreisförmigen Meridian geformt. Im dritten Projekt von 1855 (Abb.10.1.15) ruht die Laterne auf der Außenkuppel und der Meridian der Zwischenkuppel ist im zusammenhängenden Schalenbereich kettenlinienförmig. Im vierten Entwurf aus demselben Jahr ruht der Kern der Laterne zusammen mit der Wendeltreppe auf einem Kegeltgewölbe, das auf die Zwischenkuppel aufgesetzt ist. Die Meridianform entspricht nun einer Kettenlinie über die ganze Höhe,

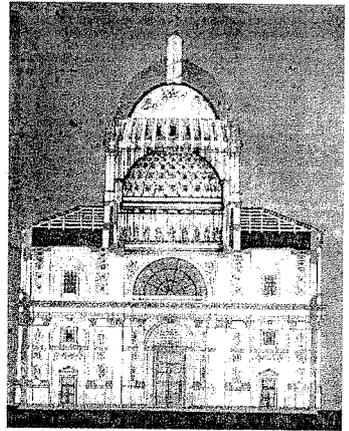


Abb.10.1.14: San Gaudenzio/ Novara, 1.Projekt 1841, Schnitt und Ansicht, aus Rosso [253].

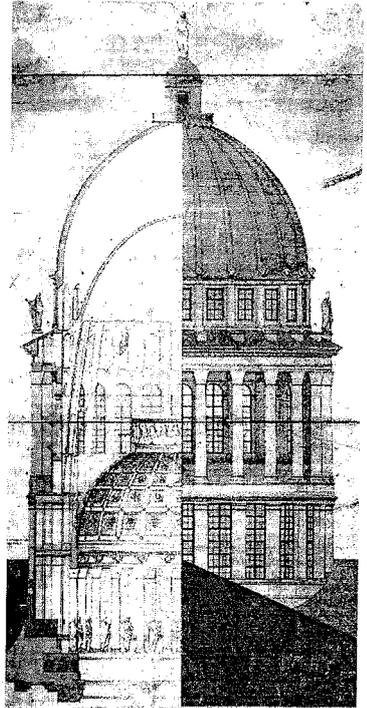


Abb.10.1.15: San Gaudenzio/ Novara, 3.Projekt 1855, Schnitt, aus Rosso [253].

²²Siehe Anmerkung 13 bzw. zugehöriger Text.

also im Bereich der Schale und im Rippenbereich (Abb.10.1.16). Als Auflagerpunkt bzw. Basis der Kettengeometrie wurde der äußere Substruktionsbogen angenommen. Ab dem sechsten Projekt (Abb.10.1.17) ist die Treppe und der Laternenkern auf einer separaten, kegelförmigen Ziegelrippenkonstruktion gelagert wie bei der St.Paul's Cathedral. Die Geometrie der Zwischenkuppel ist nun vollkommen anders als in den vorausgegangenen Entwürfen: Die Meridiankrümmung ist im Scheitel am geringsten und hat einen der Kuppelstützlinie (siehe Abb.3.1.3, Abb.3.2.8, Abb.10.1.6) ähnlichen Verlauf.

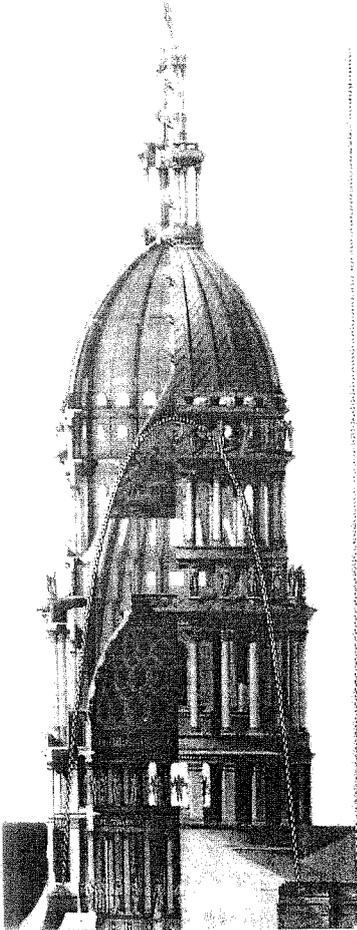


Abb.10.1.16: San Gaudenzio/Novara, 4.Projekt 1855, Schnitt aus Rosso [253] mit eingehängter Kette.

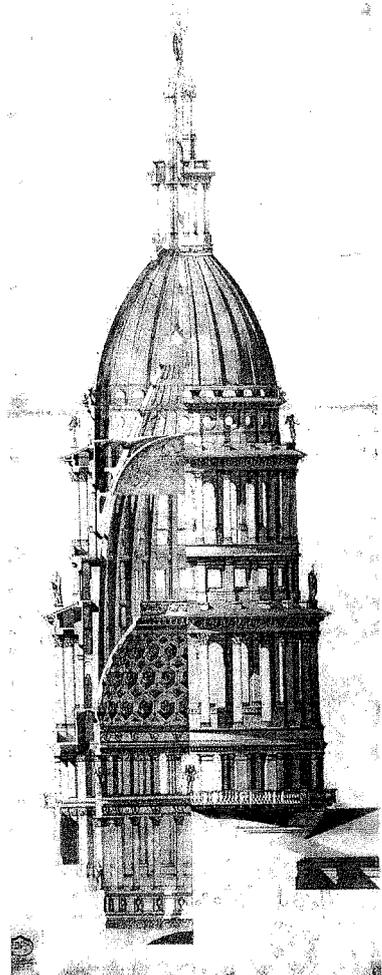


Abb.10.1.17: San Gaudenzio/Novara, 6.Projekt 1860, Schnitt, aus Rosso [253].

Im ausgeführten Projekt (Abb.10.1.18) schwenkte Antonelli dann wieder von dieser komplexen Form ab und realisierte eine mit einem Okulus versehene Kugelkalotte²³.

10.1.3.2 Hypothese zur angewandten Formfindung bei der Zwischenkuppel von San Gaudenzio

Die Stützlinie zum Eigengewicht der ausgeführten Zwischenkuppel (Abb.10.1.19) stimmt sehr gut mit dem Verlauf des Meridians im Rippenbereich überein und schneidet dessen Schwerlinie ungefähr am Rand der Kuppelkalotte. Darüber, im Schalenbereich, verläuft die Stützlinie über dem Extrados, was gleichbedeutend mit der Induktion von Ringdruckkräften ist²⁴. Alle Kuppelformen des Meridians der Zwischenkuppel, ab dem sechsten Projekt, konnte Antonelli entweder analytisch, was eher unwahrscheinlich ist (siehe Kapitel 3.1.1), oder mit Hilfe eines räumlichen Hängemodells gewonnen haben. Er muß dabei herausgefunden haben, daß er die mit dem Modell erhaltene Kuppelstützlinienform (Entwurf 6-8) bereichsweise manipulieren kann, indem er Fäden in Ringrichtung so einbaut, daß sie unter Spannung stehen und somit für das Mauerwerk unschädliche Ringdruckkräfte simulieren (Abb.10.1.20). Auf diese Weise konnte er verifizieren, daß eine kreisförmige Kalotte aus Mauerwerk auf einer sonst stützlinienförmigen Kuppel im oberen Teil statisch ebenso möglich ist wie eine ganz nach der Stützlinie geformte Kuppel.

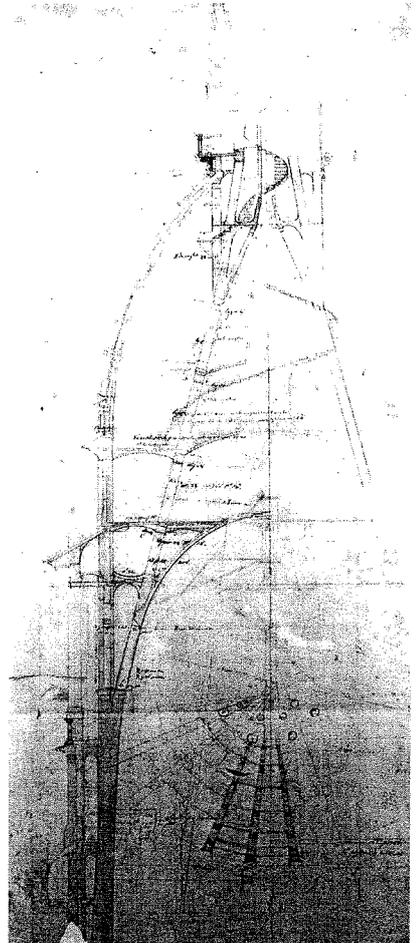


Abb.10.1.18: San Gaudenzio/Novara, Zwischenkuppel, wie sie ausgeführt wurde, Schnittskizze vom Juli 1861, aus Rosso [253].

²³Hierfür mögen zu erwartende herstelltechnische und vermessungstechnische Schwierigkeiten die Ursache gewesen sein.

²⁴Dies wurde mit einer FE-Simulation überprüft. (Siehe Anhang A.10.1.3).

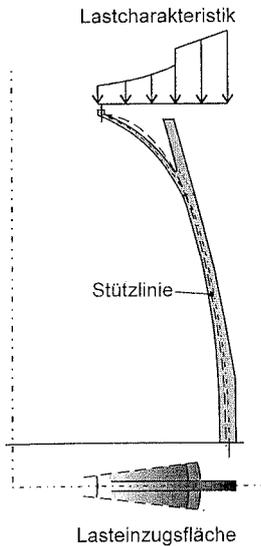


Abb.10.1.19: Stützlinienuntersuchung an der Zwischenkuppel: --- Stützlinie zur Belastung durch Eigengewicht.

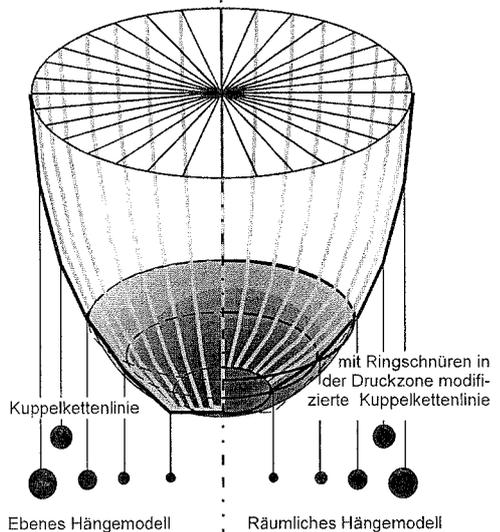


Abb.10.1.20: Rekonstruktion eines räumlichen Hängemodells zur Formfindung für die Zwischenkuppel des Vierungsturms von San Gaudenzio.

10.1.4 Zusammenfassung

Die Entwicklung optimierter Gewölbeformen zur Verbesserung des statischen Verhaltens läßt sich anhand der Kuppelkonstruktionen der Vierungstürme der St.Paul's Cathedral, des Panthéons in Paris und von San Gaudenzio in Novara besonders anschaulich aufzeigen und nachvollziehen. Wie in einer Trilogie stellt sich die Entdeckung der Eigenschaften der Kettenlinie bis hin zur Kuppelkettenlinie dar und gleichzeitig die Bewältigung der Schwierigkeiten, theoretisches Wissen in eine adäquate praktische Übersetzung zu bringen. In den Konzepten und im Ablauf der Projekte spiegelt sich das Berufsethos und die Einstellung der Baumeister zu ihrer Aufgabe wider:

Wren, ein naturwissenschaftlich mathematisch ausgebildeter Baumeister, versuchte im Streben nach einer Verbindung von Physik und Architektur eine gegenseitige Verifikation zu erlangen. Aus formalen Gründen, vielleicht auch aus einer gewissen Unsicherheit über die physikalische Richtigkeit seiner Ideen, setzte er die Kettenlinie nicht in beabsichtigter Weise als Kuppelmeridian um. Er konstruierte jedoch das die Laterne tragende Gewölbe im Sinne des Stützliniengedankens richtig in Kegelform.

Rondelet, als einer der ersten Bauingenieure, der sich das Verhalten von Materialien und Tragstrukturen vornehmlich mit Hilfe von Versuchen erschlossen hatte, sich jedoch weniger für die damals neuen theoretisch-physikalischen Erkenntnisse interessierte, wollte die Kettenlinie als absolut ideale Gewölbeform sehen. Es störte ihn wenig, daß er ihre statischen Eigenschaften auf andere Weise und nach anderen Aspekten untersucht hatte und mit einer halb auf Empirie basierenden Gewölbetheorie zu seiner Schlußfolgerung kam. Er verbreitete selbstbewußt seine - nach eigener Überzeugung - wissenschaftlich gewonnenen Erkenntnisse als Regeln, die in dieser Weise nicht zu verallgemeinern waren. Es zeigt sich hieraus, daß er den Inhalt der Kettenlinientheorie nicht verstanden hatte.

Antonelli, ein leidenschaftlicher Ingenieurarchitekt und exzellenter Konstrukteur, versuchte durch Anwendung von Rondelets Erkenntnissen und durch eigene Versuche, eine ökonomische und moderne und damit oft kühne Bauweise mit Mauerwerk umzusetzen. Die Besessenheit, mit der er seine Ideen in bezug auf die Formgebung der Zwischenkuppel des Vierungsturms von San Gaudenzio/Novara verfolgte, brachte ihn dazu, die Fehlschlüsse seines Vorbildes Rondelet auszumerzen, ohne daß etwas von seinen Bemühungen und Verbesserungen als Leistung bekannt geworden wäre.

11.0 Zusammenfassung

11.1 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

11.1.1 Technikgeschichtliche Schlußfolgerungen

In den vorliegenden bautechnikgeschichtlichen Studien wurden statisch-konstruktive Eigenschaften von Gewölben an sechs Beispielen verschiedener Gattungen und Epochen untersucht. Besonderer Wert wurde auf die Darstellung der Wechselwirkung aus statischen, architektonisch-gestalterischen und bautechnischen Erfordernissen gelegt. Im einzelnen ließen sich folgende Schlüsse ziehen:

- Die Kenntnis der vorteilhaften statischen Eigenschaften der Kettenlinienform für einen Bogen von gleichmäßiger Dicke war im Orient schon im 6. Jhdt. vorhanden. Dies kann anhand der Form des Intrados des Tonnengewölbes über dem Audienzsaal des Palastes von Ktesiphon nachgewiesen werden. Die dem Oval ähnliche Form sowie die Bauweise aus schräg hintereinander liegenden Einzelbögen sind zudem Merkmale der jahrtausendealten nubischen Wölbtechnik, die auf Verbindungen zum ägyptischen Kulturraum hindeuten. Ob dort bereits die Kettenlinienform in der Wölbtechnik bekannt war, ließ sich im Rahmen dieser Studien nicht nachweisen.
- Die Entwicklung der Rippenkuppeln in Verbundbauweise im spätantiken Gewölbebau stellt sich als vorwiegend bautechnisch motiviert heraus. Anhand der Ergebnisse neuerer archäologischer Untersuchungen von Rasch (Rasch 1991, [245]) kann gezeigt werden, daß diese Kuppeln mit Hilfe einer um die Symmetrieachse verdrehbaren Schalung gebaut wurden. Bei der Rekonstruktion des Bauverfahrens wurde davon ausgegangen, daß die Rippen aus Flachziegeln meridionale Herstellabschnitte abteilten und das stabilisierende Skelett der paarweise gegenüberliegenden, auf einer Schalung ruhenden Kuppelsektoren aus Gußmauerwerk bildeten. Durch schrittweises Verfüllen, Verdrehen und wiederholtes Verfüllen der Schalung, die mittels einfacher Lote auf die Erdnormale ausgerichtet werden konnte, entstanden Kuppeln von höchster Herstellgenauigkeit.
- Das Tragverhalten von Pendentifkuppeln ist stark abhängig von der architektonischen Einbindung, entweder als Serie mehrerer Kuppeln, oder als Solitär. Gerade in der solitären Bauart und als byzantinische Pendentifkuppel, mit kreisförmigen Substruktions-

bögen, weicht das Tragverhalten im ungerissenen Zustand deutlich von dem ab, was die einzelnen Tragglieder, Kuppel, Pendentif und Rand- bzw. Substruktionsbogen suggerieren. Die Substruktionsbögen sind weniger an der Lastabtragung beteiligt als die Pendentifs. Mit Hilfe nichtlinearer Finite-Element-Simulationen läßt sich zeigen, daß die Rißbildung eine Verlagerung der Lastpfade hin zu den Bögen bewirkt und ihre Tragwirkung aktiviert. Das Tragverhalten der osmanischen Pendentifkuppel ähnelt dem der byzantinischen Kuppel. Die spitzen Substruktionsbögen führen jedoch zu einer veränderten Pendentifgeometrie und zu einem steiferen Gewölbe mit einer geringeren Neigung zu Rissen.

Schon die byzantinischen Baumeister erfanden Konstruktions- und Stützelemente, um die Rißbildung in Grenzen zu halten und um Verformungen entgegenzuwirken. Osmanische Baumeister übernahmen diese Elemente, erfanden neue dazu und bezogen sie als gestalterische Komponenten in die Moscheenarchitektur ein.

- Kreiszyklindrische Tonnengewölbe, wie sie in Verbindung mit dem Bautypus der Wandpfeilerkirchen angewandt wurden, sind statisch sensible Formen. Wie sich am Beispiel des Tonnengewölbes der Kirche St. Michael in München (1597) zeigen läßt, hatten schon die Baumeister der Renaissance das Tragverhalten dieser Gewölbegattung und die daraus entstehenden statischen Probleme intuitiv richtig erfaßt. Dem Gewölbeschub begegneten sie mit wirkungsvollen konstruktiven Maßnahmen, wie Auffüllungen der Zwickel zwischen Gewölbe und Traufwänden und Streben zur Stützung der Gewölbe an statisch empfindlichen Stellen.

Untersuchungen des Tonnengewölbes von St. Michael mittels FE-Simulationen und kettenlinienbasierten Stützlinienmethoden ergaben, daß das Gewölbe im Vorkriegszustand, mit einer effektiven Scheitelöffnung von 63° , trotz der außergewöhnlichen Schlankheit von $d/R = 1/23$ auch ohne zusätzliche konstruktive Mittel ausreichend standsicher gewesen wäre, so daß auf eine Veränderung des Gewölbeansatzes beim Wiederaufbau der Kirche nach 1945 hätte verzichtet werden können.

- Die Finite-Element-Untersuchungen von Ovaloid- und Ellipsoidkuppeln, wie sie im Zusammenhang mit der Zentralkuppel der Wallfahrtskirche Steinhausen (1733) durchgeführt wurden, bringen die besondere Empfindlichkeit dieser Strukturen hinsichtlich der Lagerbedingungen zutage. Eine elastische Ringankerstützung führt gegenüber einer starren Lagerung zu einem abweichenden Tragverhalten und zu einem stark veränderten Rißverhalten. Die Simulationen zeigen dennoch, daß auch die ursprüngliche, nachgiebige Stützung im Fall der Steinhausener Kirche, u.a. wegen der Meridianrippen auf dem

Extrados des Gewölbes, ausreichende Tragreserven belassen hätte, um von der massiven Ringankerscheibe, wie sie zur Sicherung des Gewölbes Ende der siebziger Jahre eingebaut wurde, abzusehen. Ein dem Gesamtgefüge des Bauwerks mehr entsprechender, kleiner Ringanker hätte dieselbe Aufgabe vollkommen erfüllt.

- Die gewöhnliche Kettenlinie als ideale (= rein normalkraftbeanspruchte) statische Form des Bogens konstanter Dicke kann im selben Sinne nicht auf Kuppeln übertragen werden. Der Weg zu dieser Erkenntnis läßt sich anhand der Entwicklung der historischen Beispiele der Zwischenkuppeln der St. Paul's Cathedral (1709), des Pariser Panthéons (1790) und des Vierungsturms von San Gaudenzio (1878) in Novara eindrucksvoll nachvollziehen.

Die Vorstellung von der Kettenlinie als absolute Idealgeometrie für Gewölbe wurde besonders von dem französischen Ingenieur J.B.Rondelet propagiert. Im Falle des Pariser Panthéons, dessen Zwischenkuppel nach seinem Entwurf als Rotationskatenoid mit eingeschnittenen Lichtöffnungen gebaut wurde, führte dieser Fehlschluß zu bedeutenden Schäden. Unter anderen Gegebenheiten, nämlich ohne Stützung durch eine umlaufende Plattform, hätte dies sogar den Einsturz des Gewölbes zur Folge haben können.

A.Antonelli, der Rondelets Gedanken aufgenommen und verfolgt hatte, entwickelte bei seinem Projekt des Vierungsturms von San Gaudenzio die Zwischenkuppel als statisch optimierte Form weiter. Er lagerte die Laterne auf einer statisch äquivalenten Kegelschale auf, wie Wren es bereits bei der St.Paul's Kathedrale getan hatte. Ebenso wie Wren formte er die Zwischenkuppel aus einer zusammengesetzten kreisbogigen Meridiankurve, obwohl er in einer vorausgehenden Entwurfsmetamorphose von insgesamt acht Entwürfen auf die gesuchte, statisch ideale Kuppelkettenlinienform gekommen war.

11.1.2 Ergebnisse aus der Anwendung numerischer und statischer Methoden bei der Untersuchung von Gewölben

Zur Untersuchung des statischen Verhaltens wurden materiell-nichtlineare Finite-Element-Methoden angewandt und einfache mechanische Betrachtungen zur Verifikation der Ergebnisse aus diesen Simulationen erarbeitet. Die wichtigsten Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Das Rißverhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial kann trotz der Verwendung eines vereinfachten Werkstoffmodells für Beton in qualitativ befriedigender Weise wiedergegeben werden. Die wesentlichen rißbedingten meso- und makroskopischen System-

änderungen, sowohl bei niedrigen als auch bei höheren Belastungsstufen können realitätsnah erfaßt werden. Dies läßt sich sowohl durch den Vergleich von Rißbildern aus Finite-Element-Simulationen mit solchen aus Materialversuchen bestätigen, als auch durch Auswertung der ausgegebenen Spannungszustände eines Tragwerks unter Rißbildung bei Einwirkung sukzessiv gesteigerter, verteilter Belastungen. Hierbei kann mit Hilfe eines Interaktionsdiagramms für das aufnehmbare Moment und die aufnehmbare Normalkraft der beiden charakteristischen Querschnittszustände, des quergerissenen und des quer- und längsgerissenen Zustandes, die exzentrische Lage der Spannungsergebnisse im Querschnitt und die Spannungsverteilung verifiziert werden.

Anhand der letzten numerisch ermittelten Rißzustände aus der Simulation von Kreisbögen unter sukzessiv gesteigertem Eigengewicht zeigte sich, daß die Momentenabtragung in den Querschnitten des Tragwerkes reduziert und minimiert wird und sich die Stützlinie der Systemachse entgegenbewegt. Hierbei gehen auch die Spannungen im System zurück, so daß dieser rißdurchsetzte Zustand als beanspruchungsmäßig konsolidiert bezeichnet werden kann. Verantwortlich für diese Konsolidierung ist die Bildung von Längsrissen, die parallel zu den Hauptdruckspannungsrichtungen verlaufen und zum Zerfall der Querschnitte in geschichtete Einzelquerschnitte mit verringerter Momenten Tragfähigkeit führen (Delamination des Querschnitts).

Die Positionen der Spannungsergebnisse im rißdurchsetzten Zustand weisen nicht nur minimale Exzentrizitäten zur Tragwerksachse auf, sondern entsprechen dem Verlauf der zur einwirkenden Lastkonfiguration zugehörigen Kettenlinie. Stützlinientheorie und nichtlineare Finite-Element-Simulationen lassen sich so gegenseitig verifizieren.

Übertragen auf die Stützlinientheorien lauten die aus der Finite-Element-Methode gewonnenen Erkenntnisse:

- Die zu einem Tragwerk zugehörige Kettenlinie mit minimalen Exzentrizitäten zur Schwerachse stellt die Kurve der Spannungsergebnisse eines bezüglich der inneren Beanspruchungen konsolidierten Tragwerks unter Eigengewicht dar.
- Entsprechend dem Momenten-Normalkraft-Interaktionsdiagramm eines Querschnittes aus Sprödmaterial ergibt sich die relativ größte Momentenübertragung im eingerissenen Querschnitt bei einer Exzentrizität der Spannungsergebnisse von $e=0.25h$. Dieser Wert kann als Näherung zur Abschätzung von Traglasten unter Eigengewicht oder anderen gleichmäßig verteilten Lasten zur

Festlegung der Lage der Stützlinie in den Anfangs- und Endpunkten angenommen werden.

Die Rißbildung und damit die Delamination der Querschnitte eines Wölbtragwerkes ist die Ursache dafür, daß die Stützlinie aus der Einwirkung verteilter Belastungen sich zur Schwerachse hin bewegt und nicht, wie bei singulären Beanspruchungen und Zwangsbeanspruchungen wie Auflagerverschiebungen, von ihr weg. Aus diesem Effekt beziehen Gewölbe ihre sprichwörtlichen, oft Jahrhunderte überdauernden Tragreserven.

11.2 Ausblick

Über die behandelten, sechs technikhistorischen Fragestellungen hinaus ist freilich noch eine Vielzahl anderer Themen zum Gewölbebau zu untersuchen, um ein umfassendes Verständnis dieser Tragwerke und ihrer statischen Eigenschaften zu erlangen. So konnten die 'unechten Gewölbe' nicht näher behandelt werden. Weitere Arbeiten dieser Art werden helfen, die Vorstellungen vom historischen und gegenwärtigen Bauen zu erweitern und der Methodik der Sanierung von Gewölben, vielleicht auch dem beinahe schon verlorengegangenen Gewölbebau, neue Impulse zu geben.

Die Untersuchungsergebnisse zum Tragverhalten von gemauerten Gewölben mit numerischen Mitteln unterstreichen die Eigenständigkeit dieser Forschungsrichtung der Gewölbestatik. Das statische Verhalten von Tragwerken aus Sprödmaterialien bedarf noch eingehenderer Untersuchungen, als es in diesem Zusammenhang möglich war. Die numerischen Analysemethoden eröffnen jedoch schon jetzt Möglichkeiten, die das reine Versuchswesen nicht liefern kann, denn die Veränderungen des Materials und des ganzen Tragwerks durch Rißbildung unter Last werden mit Hilfe der nichtlinearen FE-Methoden in Ort und Abfolge unmittelbar erkennbar. Mit den einfachen Versagensmodellen kommerzieller Programme läßt sich das Verhalten von Tragwerken aus Sprödmaterial gut erfassen und Ergebnisse von hohem praktischem Nutzen erzielen. Der Einsatz verbesserter Material- und Elementformulierungen wird helfen, neben den qualitativen Aussagen, die quantitative Aussagekraft der FE-Simulationen, z.B. hinsichtlich der Traglasten, zu verbessern. Die Gewölbestatik wäre dann vollkommen mit Hilfe der Finite-Element-Methode erfaßbar.

Literatur

Die Literaturangaben betreffen nur die wichtigsten verwendeten Bücher und Aufsätze.

Teil I: Grundlagen: Problemstellung, Methodik, Klassifikation, Analyse- und Finite-Element-Methoden.

Architektur-, Technik- und Kulturgeschichte.

- [1] Alberti, L.B. 'Zehn Bücher über die Baukunst', übersetzt v. M. Theurer, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1975.
- [2] Badr, I.E.A. 'Vom Gewölbe zum räumlichen Tragwerk', Dissertation ETH Zürich, Dielsdorf 1962.
- [3] Benvenuto, E. 'An Introduction to the History of Structural Mechanics', Part I + II, Springer-Verlag, New York 1991.
- [4] Borrmann, F. 'Geschichte der Baukunst', Band I, Leipzig 1904.
- [5] Cantor, M. 'Vorlesungen über Geschichte der Mathematik', Leipzig 1894.
- [6] Conrad, D./ Häsleroth, Th. 'Die Geburtsstunde des modernen Bauingenieurwesens vor 250 Jahren und ihre Vorgeschichte' in: 'Die Bautechnik', Heft 3, 1993.
- [7] Cowan, H. 'The Master Builders', John Wiley & Sons, New York 1977.
- [8] Dehio G./ Bezold, G. 'Die kirchliche Baukunst des Abendlandes', Stuttgart 1948.
- [9] Egle, J. 'Baustil- und Bauformenlehre', in: 'Baustile des Altertums', Band 1, Stuttgart 1905.
- [10] Feyerabend, P. 'Wider den Methodenzwang', Rowohlt-Verlag, Frankfurt/Main 1978.
- [11] Fitchen, J. 'Mit Leiter, Strick und Winde', Birkhäuser-Verlag, Basel 1988.
- [12] Freund, J. 'Der Topologiebegriff in der Mathematik' in: 'Topologie - Ein Ansatz zur Entwicklung alternativer Strukturen', Konzepte SFB 230, S.15-31, Heft 44, 9/1994.
- [13] Friedell, E. 'Kulturgeschichte Ägyptens und des alten Orients', München 1951.
- [14] ders. 'Kulturgeschichte der Neuzeit', Band I und II, dtv-Verlag 1976.
- [15] Giedion, S. 'Raum, Zeit, Architektur', Artemis-Verlag, Zürich 1976.
- [16] Glück, H. 'Der Ursprung des römischen und abendländischen Wölbungsbau', Wien 1933.
- [17] Gottgetreu, R. 'Ein Beitrag zur geschichtlichen Entwicklung der Gewölbe', in: 'Zeitschrift für Bauwesen', S.91ff., Heft 29, Berlin 1879.
- [18] Graefe, R. 'Kettenlinien und Stützlinien' in: 'Die Baukultur', S.4.-12, 1/83.
- [19] Graefe, R. (Hrsg.) 'Zur Geschichte des Konstruierens', DVA, Stuttgart 1989.
- [20] Gwilt, J. 'The Encyclopedia of Architecture; Historical, Theoretical and Practical', London, Longman's 1867, Reprint: New York 1982.

- [21] Hart, F. 'Kunst und Technik der Wölbung', Callwey-Verlag, München 1966.
- [22] Heinle, E./ Schlaich, J. 'Kuppeln, aller Zeiten- aller Kulturen ', DVA Stuttgart 1996.
- [23] Heinrich, B. 'Am Anfang war der Balken', dtv-Verlag, München 1979.
- [24] Herrmann, J.(Hrsg.) 'Lexikon früher Kulturen', Band I und Band II, Leipzig 1984.
- [25] Hertwig, A. 'Die Entwicklung der Statik der Baukonstruktionen im 19.Jahrhundert' in 'Technikgeschichte', Band 30, S.82-98, Berlin 1941.
- [26] Jesberg, P. 'Die Geschichte der Ingenieurbaukunst', DVA Stuttgart 1996.
- [27] Koch, W. 'Baustilkunde', München 1988.
- [28] Koepf, H. 'Struktur und Form', Stuttgart 1979.
- [29] Kurrer, K.-E. 'Entwicklung der Gewölbetheorie vom 19.Jahrhundert bis zum heutigen Stand der Wissenschaft am Beispiel der Berechnung einer Bogenbrücke', Teil II, Diplomarbeit, TU Berlin, Berlin 1981.
- [30] ders. 'Der Beitrag Emil Winklers zur Herausbildung der klassischen Baustatik', in: 'Humanismus und Technik', Jahrbuch 1987, S.11-39, Berlin 1988.
- [31] ders. '200 Jahre, Einleitung in die statische Baukunst', in: 'Der Bauingenieur 65', S.3-10,Berlin 1990.
- [32] ders. 'Auf der Suche nach der wahren Stützlinie in Gewölben', in: 'Humanismus und Technik', Jahrbuch 1990, S.20-53,Berlin 1991.
- [33] ders. 'Zur Entstehung der Stützlinientheorie', in: 'Die Bautechnik 68', Heft 4/91, S.109-117,Berlin 1991.
- [34] ders. 'Von der Theorie des Gewölbes zur Theorie des elastischen Bogens, Teil I: Das Verhältnis der Gewölbe - zur Bogentheorie zwischen 1826 und 1860', in: 'Humanismus und Technik', Jahrbuch 1991, S.16-47,Berlin 1992.
- [35] Lenk, H. 'Zur Sozialphilosophie der Technik', Frankfurt/Main 1982.
- [36] Lömpel, H. 'Die monumentale Tonne in der Architektur', München 1913.
- [37] Mainstone, R.J. 'Structural Theory and Design before 1742'. in: 'Architectural Review 143, S.303-310, 1968.
- [38] ders. 'Developments in Structural Form', MIT -Press, New York 1975.
- [39] ders. 'Einflüsse der Konstruktion auf die Form von Kuppeln und Gewölben' in 'Geschichte des Konstruierens', Hrsg. R. Graefe, pp. 17-37, DVA, Stuttgart 1989.
- [40] Mislin, M. 'Geschichte der Baukonstruktion und der Bautechnik', Werner-Verlag, Düsseldorf 1989.
- [41] Müller, W. Vogel, G. 'dtv-Atlas zur Baukunst', Band I+II, 6. Aufl. 1985, München 1974.
- [42] Otto, Frei 'IL37-Alte Baumeister', Stuttgart 1994.
- [43] Palladio, Andrea 'I Quattro Libri dell' Architettura', Venezia 1570, Reprint Milano 1980
 -'The Four Books of Architecture', englische Übersetzung von Isaac Ware, London 1738.
 -'Die vier Bücher zur Architektur', deutsche Übersetzung von U.Schütte und A.Beyer, Zürich 1983.

- [44] Parsons, W.B. 'Engineers and Engineering in the Renaissance', Reprint from 1939-Edition, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1976.
- [45] Pevsner, N. 'Europäische Architektur', Prestel Verlag, München 1957.
- [46] Pevsner, N., Fleming, G., Honour, H. 'Lexikon der Weltarchitektur', dtv-Verlag München 1971.
- [47] Rehork, J. 'Archäologisches Lexikon zur Bibel', Hrsg. A. Negev, München 1972.
- [48] Rondelet, J.B. 'Traité de l'art de bâtir', Vol. 1-8, Paris, 1803-1812.
- [49] ders. 'Theoretisch-praktische Anleitung zur Kunst zu bauen', deutsche Übersetzung, Leipzig 1834/1835.
- [50] Rühlmann, M. 'Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik und der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften', Leipzig 1885.
- [51] Scheidegger, F. (Hrsg.) 'Aus der Geschichte der Bautechnik', Band I und II, Birkhäuser Verlag, Basel 1992.
- [52] Schinkel, K. F. 'Reisen nach Italien', Tagebücher, Band 1 und 2, Aufbau-Verlag, Berlin 1995.
- [53] Schreiber, H. 'Weltreiche', 'Das Imperium Romanum', Band 2, Braunschweig 1980.
- [54] Straub, H. 'Die Geschichte der Bauingenieurkunst', Birkhäuser Verlag, Basel, 1. Auflage 1949.
- [55] ders. 'Die Geschichte der Bauingenieurkunst', Birkhäuser Verlag, Basel, 4. Auflage, Herausgeber: P.Zimmermann, 1992.
- [56] Szabó, I. 'Geschichte der mechanischen Prinzipien', Birkhäuser Verlag, Basel 1979.'
- [57] ders. Einige Marksteine in der Entwicklung der theoretischen Bauingenieurkunst', in: 'Beiträge zur Bautechnik', Ernst & Sohn-Verlag, Berlin 1980.
- [58] Timoshenko, S. 'History of Strength of Materials', London 1953.
- [59] Tomlow, J. 'Rekonstruktion von Gaudís Hängemodell', Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart 1986
- [60] ders. 'Geschichte des Konstruierens VII' bzw. 'Gaudinismo', Projekte der Gaudí -Schüler Jujol und Rubió, Konzepte SFB 230, Heft 43, 7/1995.
- [61] ders. 'Die Kuppel des Gießhauses der Firma Henschel in Kassel' (1837), in: 'architectura- Zeitschrift für Geschichte der Baukunst', Heft 23, S.151-172, München 1993.
- [62] Trautz, M. 'Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe, unveröffentl. Manuskript eines Förderungsantrages zu gleichnamigem Forschungsvorhaben an die Deutsche Forschungsgemeinschaft, Stuttgart 1995.
- [63] ders. 'Die Anfänge der Gewölbestatik und der Wölbkunst nach statischen Gesetzen', in: 'Prozess und Form 'Natürlicher Konstruktionen', Hrsg. K.Teichmann und J.Wilke, S.90-95, Berlin 1996.

- [64] Virtruv, M.P. 'Zehn Bücher über die Architektur' übersetzt v. J. Prestel, Koerner-Verlag, Baden-Baden 1987.
- [65] ders. 'Zehn Bücher über Architektur', übersetzt von C.Fensterbusch, 5. Auflage, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1991.

Gewölberechnungen, Werkstoffwissenschaft und Finite-Element-Methoden.

- [66] Argyris, J.H. et al. 'Finite Element Analysis of Concrete Cracking', in: 'IASS-Proceedings 1978, S.95-115, Darmstadt 1978.
- [67] Backes, H.-P. 'Zugfestigkeit von Mauerwerk und Verformungsverhalten unter Zugbeanspruchung' in: 'Mauerwerks-Kalender 1985, S.719-725, Berlin 1985.
- [68] ders. 'Traglastprobleme im Mauerwerksbau' in: 'Die Bautechnik 71', Berlin 1994.
- [69] Barthel, R. 'Tragverhalten gemauerter Kreuzgewölbe', Dissertation TH Karlsruhe 1991.
- [70] Barthel, R. et al. ARC-Projekt 313 - Arbeitsbericht, TU München Lehrstuhl für Hochbaustatik und Tragwerksplanung, University of Dundee, Department of Civil Engineering.
- [71] Bathe, K.-J. 'Finite-Element-Methoden', deutsche Übersetzung von P.Zimmermann, Springer Verlag Berlin 1989.
- [72] Becker, G./ Bernard, R. 'Nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verläufe bei Mauerwerk' in: 'Die Bautechnik 68', S.155-169, Berlin 1991.
- [73] Berger, F. 'Zur nachträglichen Bestimmung der Tragfähigkeit von zentrisch gedrücktem Ziegelmauerwerk' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1996' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.231-248, Ernst & Sohn, Berlin 1987.
- [74] Bergander, H./ Jäger, W. 'FEM-Berechnungen des Fundamentes der Frauenkirche Dresden', In: 'Finite Elemente in der Baupraxis', Tagungsband, Hrsg.: E.Ramm, E.Stein und W.Wunderlich, S.359-370, Berlin 1995.
- [75] Blasi, C./ Sorace, S. 'Special Finite Element Approaches to the Study of Masonry Domes. Comparative Numerical Analyses and Experimental Researches' in: 'Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings', Ed.: C.A.Brebbia, Birkhäuser Verlag, Basel 1989
- [76] Bletzinger, K.-U. 'Formoptimierung von Flächentragwerken', Dissertation, Bericht Nr. 11 (1990), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1990.
- [77] Bufler, H. 'Vorlesungen über technische Mechanik', Band I, Universität Stuttgart, Stuttgart 1978.
- [78] Burth, K./Brocks, W. 'Plastizität', Vieweg-Verlag, Wiesbaden 1991.
- [79] Chiarugi, A. et al. 'Analysis of a Brunelleschi-type Dome including Thermal Loads' in: IABSE-Proceedings, S.169-178, Venezia 1983.
- [80] Choo, B.S. et al. 'Analysis of Masonry Arch Bridges by Finite Element Method' in: 'Proceedings of the Forth Rail Bridge Centenary Conference', Edinburgh 1990.

- [81] Clemente, P. et al. 'Limit Behaviour of Stone Arch Bridges', in: 'Journal of Structural Engineering', S.1045-1050, July 1995.
- [82] Crisfield, M.A. 'A Finite Element Computer Program for the Analysis of Masonry Arches', in: Department of Transport-TRRL Report RR 19, 1985.
- [83] Culmann, C. 'Die graphische Statik', 2. Auflage, Zürich 1875.
- [84] Davidson, R.A. 'The Mother of All Churches - A Static and Dynamic Structural Analysis of Hagia Sophia', Princeton/ New Jersey, 1993.
- [85] Dhanasekar, M./ Page, A.W./ 'The Failure of Brick Masonry under Biaxial Stresses, Proceedings of the Inst. of Civil Engineers, Part 2, 79, pp 295-313, 1985.
- [86] Dialer, C. 'Bruch- und Verformungsverhalten von schubbeanspruchten Mauerwerksscheiben, zweiachsige Versuche an verkleinertem Modellmauerwerk', 'Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau', 1/90, TU München, München 1990.
- [87] ders.. 'Modellierung von Mauerwerk mittels Distinkter Elemente' in: 'Mauerwerkskalender 1993', Ernst & Sohn, Berlin 1995.
- [88] Eber, K. 'Formfindung und Stabilität von Steinbogenbrücken', Diplomarbeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1996.
- [89] Eckert, H. 'Altes Mauerwerk nach historischen Quellen' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1991' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.19-64, Ernst & Sohn, Berlin 1993.
- [90] Egermann, R./ Mayer, K. 'Die Entwicklung der Ziegelherstellung und ihr Einfluß auf die mechanischen Eigenschaften von Mauerziegeln' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1988 des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.107-130, Ernst & Sohn, Berlin 1989.
- [91] Egermann, R. 'Modelluntersuchungen zum Tragverhalten von ein- und mehrschaligem Mauerwerk' in : ' Untersuchungen' Arbeitsheft 10/91 des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.23-29, Karlsruhe 1991.
- [92] ders. 'Zur nachträglichen Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Mauerziegeln' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1990' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.159-182, Ernst & Sohn, Berlin 1992.
- [93] Falter, H. 'Geometrie und Tragverhalten historischer Kuppeln und Gewölbe', Diplomarbeit am Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion, Universität Stuttgart, Stuttgart 1993.
- [94] Fladt, K. 'Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven', Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main, 1962.
- [95] Flügge, W. 'Statik und Dynamik der Schalen', 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1962.
- [96] ders. 'Festigkeitslehre', Springer-Verlag, Berlin 1967.
- [97] Föppl, L. 'Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt', Kohlhammer-Verlag, München 1959.
- [98] Furler, R. 'Tragverhalten von Mauerwerkswänden unter Druck und Biegung' Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, Zürich 1981.
- [99] Ganz, H.R./ Thürlimann, B. 'Versuche an Mauerwerksscheiben unter Normalkraft und Querkraft' Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, Bericht Nr 7502-4, Birkhäuser-Verlag, Basel 1984.

- [100] Ganz, H.R. Mauerwerksscheiben unter Normalkraft und Schub, Dissertation an der ETH Zürich, Zürich 1985.
- [101] Grassnick, M. 'Die gothischen Wölbungen des Domes zu Xanten und ihre Wiederherstellung nach 1945', Dissertation TH Darmstadt, Darmstadt 1963.
- [102] Haas, W. 'Hölzerne und eiserne Anker an mittelalterlichen Kirchenbauten' in: 'Architectura - Zeitschrift für Baukunst', Heft 13, S.136-151, München 1983.
- [103] Hagen, G. 'Über Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln', Berlin 1862.
- [104] Hampe, E. 'Bauwerk, Tragwerk, Tragstruktur', Band 2, Berlin 1985. Büttner, O.
- [105] Heyman, J. 'The Stone Skeleton' in: Int. Journal of Solids Structures, Vol.2, S.249-279, Pergamon Press, G.B., 1966.
- [106] ders. 'On Shell Solutions for Masonry Domes' in: Int. Journal of Solids Structures, Vol.3, pp 227 to 241, Pergamon Press, G.B., 1967.
- [107] ders. 'The Masonry Arch', Ellis Horwood, Chichester 1982.
- [108] ders. 'Poleni's Problem' in Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 1, S.737-759, London, Aug. 1988.
- [109] Hiduka, K. et al. 'Structural Stability and Profile in the Dome of Hagia Sophia, Istanbul', in: 'Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings', Ed.: C.A.Brebbia, S.511-523, Birkhäuser, Basel 1989.
- [110] Hilsdorf, H. 'Untersuchungen über die Grundlagen der Mauerwerksfestigkeit', Bericht Nr.40, Materialprüfungsamt für das Bauwesen, TU München, München 1965.
- [111] Hörsch, T. 'Tragwerksentwürfe mit Hängemodellen am Beispiel der Gießhauskuppel in Kassel', Diplomarbeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1993.
- [112] Jäger, W. 'Structural Behaviour of the Dome of the Church of Our Lady in Dresden' in : IASS-Proceedings 'Spatial Structures: Heritage, Present and Future', S.1215-1222, Milano 1995.
- [113] Jurina, L. 'Reinforcement of Palazzo della Ragione, Milan' in: Structural Engineering International', S.32-33, 1/93.
- [114] Kleiber, M. 'Incremental Finite Element Modelling in Non-linear Solid Mechanics', Ellis Horwood, Chichester 1989.
- [115] Kompfner, T.A. 'Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen', Dissertation, Bericht Nr. 2 (1983), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1983.
- [116] Kupfer H.B. et al. 'Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses', Proceedings of the ACI, Vol.66, No.8, 1969.
- [117] Kupfer, H./Linse, D. 'The Baroque Monastery Church of Diessen/Bavaria - Strengthening of the Nave's Vault and Construction of the New Steeple' in : IASS-Proceedings 'Spatial Structures: Public Assembly Structures - From Antiquity to Present', S.205-213, Istanbul 1993.
- [118] Launay, P./ Gachon, H. 'Strain and Ultimate Strength of Concrete Under Triaxial Stress', in: 'ACI Special Publication SP-34, 1972.

- [119] Loria, G. 'Spezielle algebraische und transzendente Kurven', Band I, Leipzig 1910, Band II Leipzig 1911.
- [120] Lourenço, P.B. 'Implementation of an Interface Cap Model for the Analysis of Masonry Structures' in: Proceedings of EURO-C 1994, Innsbruck 1994, pp123-134, Pineridge Press, Swansea 1994.
- [121] ders. 'Computational Strategies for Masonry Structures', Dissertation Universität Delft, Delft 1996.
- [122] Mack, R. 'Modellstudien zum Tragverhalten der Kuppel des Pantheons' in: 'Geschichte des Konstruierens', Hrsg. R.Graefe, S. 48-69, DVA, Stuttgart 1989.
- [123] Mann, W./
Müller, H. 'Bruchkriterien für querkraftbeanspruchtes Mauerwerk und ihre Anwendung auf gemauerte Windscheiben, Teil I-III., Lehrstuhl für Statik der Hochbaukonstruktionen, TH Darmstadt, Darmstadt 1977.
- [124] Mann, W. 'Druckfestigkeit von Mauerwerk, eine statistische Auswertung von Versuchsergebnissen in geschlossener Darstellung mit Hilfe von Potenzfunktionen', in: 'Mauerwerk-Kalender 1983', S.687-699, Berlin 1983.
- [125] ders. 'Altes und neues Mauerwerk - Gemeinsamkeiten und Unterschiede' in : ' Untersuchungen' Arbeitsheft 10/91 des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.9-14, Karlsruhe 1991.
- [126] Manns, W./
Schneider, H. 'Zur Volumendehnung als Kriterium für die Tragfähigkeit von Mauerwerk', in: 'Ziegelindustrie International', Heft 3, S. 143-149, Berlin 1981.
- [127] Mark,R./Prentke,R. 'Model Analysis of Gothic Structures', in: Journal of the Society of Architectural Historians, Vol. 23, S.44-48, 1968.
- [128] Mark,R., Abel, J.,
O'Neill, K. 'Photoelastic and Finite-Element Analysis of a Quadripartite Vault' in: Experimental Mechanics, Vol.13, pp 322-329, 1973.
- [129] Matzenmiller, A. 'Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen', Dissertation, Bericht Nr.8 (1988), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1988.
- [130] Meerwein, C.-F. 'Beitrag zur richtigen Beurteilung der Eigenschaften und Wirkungen der Gewölbe wie auch zur adäquaten Benennung der Theile', Frankfurt/M. 1802.
- [131] Mörsch, E. 'Statik der Gewölbe und Rahmen', K.Wittwer-Verlag, Stuttgart 1947.
- [132] Moseley, H. 'The Mechanical Principles of Engineering and Architecture' in: 'Philosophical Magazine, London 1833.
- [133] Page, A.W. 'Finite Element Model for Masonry' in: Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, pp 1276-1285,1978.
- [134] ders. 'The Strength of Brick and Brick Masonry under Biaxial Tension-Compression', in: 'International Brick Masonry Conference', S. 3-15, Rom 1982.
- [135] Pesciullesi, C. et.al. 'Optimal Spherical Masonry Domes of Uniform Strength', in: Journal of Structural Engineering, Febr.1997.
- [136] Pieper, K. 'Von der Statik mittelalterlicher Kirchenbauten' in: 'Der Baumeister', S.600-604, München 1950.
- [137] ders. 'Sicherung historischer Bauten', Ernst & Sohn, Berlin 1983.

- [138] Pippard, K./ Ashby, R.J. 'An Experimental Study of Voussoir Arch' in: 'Journal of the Institution of Civil Engineers', Vol.10, S.383-405, London 1938.
- [139] Pizetti, G. 'Restoration and Strengthening of the Elliptical Dome of Vicoforte Sanctuary', in: 'Domes from Antiquity to the Present', Proceedings of the IASS- MSU International Symposium 1988, S.289ff. Istanbul 1988.
- [140] Poleni, G. 'Memorie storiche della gran cupola del Tempio Vaticano', Padova 1748.
- [141] Poncelet, J.V. 'Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes', Paris 1835.
- [142] Ramm, E. 'Strategies for Tracing the Nonlinear Response near Limit Points', in: 'Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics', Proceedings of the Europe-U.S. Workshop in Bochum, Berlin 1981.
- [143] ders. 'Shape Finding Methods of Shells'. in: Wester, T., Medwadowski, S. (ed.) 'Spatial Structures at the Turn of the Millenium', pp 59-68, Proceedings of the IASS Symposium, Kopenhagen 1991.
- [144] Ramm, E./ Müller, J. Vorlesungsmanuskript 'Schalen', Universität Stuttgart, Stuttgart 1995.
- [145] Ramm, E. et al. Vorlesungsmanuskript 'Finite Elemente', Universität Stuttgart, Stuttgart 1995.
- [146] Rave, W. 'Über die Statik mittelalterlicher Gewölbe', in: 'Deutsche Kunst und Denkmalpflege', S.193-198, 1939/40.
- [147] Reinhardt, H.W. 'Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material like Concrete', Heron, Vol. 29, No.2, 1984.
- [148] ders. Vorlesungsmanuskript 'Werkstoffe im Bauwesen', Universität Stuttgart, Stuttgart 1985.
- [149] Ritter, W. 'Anwendungen der graphischen Statik', Teil 4, 'Der Bogen', Zürich 1906.
- [150] Sabha, A./ Schöne, I. 'Untersuchungen zum Tragverhalten von Mauerwerk aus Elbsandstein' in: 'Die Bautechnik', Heft 3, Berlin 1994.
- [151] Salmon-Fiedler, E 'Analytische Geometrie der höheren, ebenen Kurven', 2. Aufl., Leipzig 1882.
- [152] Schäfer, J./ Hilsdorf, H.K. 'Der Mörtel in historischem Mauerwerk' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1989' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.63-72, Ernst & Sohn, Berlin 1990.
- [153] dies. 'Struktur und mechanische Eigenschaften von Kalkmörteln' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1993' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S.65-76, Ernst & Sohn, Berlin 1996.
- [154] Schubert, P. 'Eigenschaftswerte von Mauerwerk, Mauersteinen und Mauermörtel' in: 'Mauerwerkskalender 1993', Ernst & Sohn, Berlin 1993.
- [155] Schwedler, W. 'Theorie der Stützlinie' in: 'Zeitschrift für Bauwesen', Jhg.1859, S.110-126., Berlin 1859.
- [156] Segger, J. 'Zur Statik gotischer Kathedralen - dargestellt am Kölner Dom und statisch verwandten Kathedralen', Dissertation TH Aachen, Aachen 1969.

- [157] Seim, W. 'Numerische Modellierung des anisotropen Versagens zweiachsig beanspruchter Mauerwerksscheiben', Dissertation Universität Karlsruhe, Karlsruhe 1995.
- [158] Suanno, R.L.M. 'Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung', Dissertation, Bericht Nr. 18 (1995), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1995.
- [159] Swan, C.C./
Çakmak, A.S. 'Nonlinear Quasi-Static and Seismic Analysis of the Hagia Sophia Using an Effective Medium Approach', Princeton, New Jersey 1993.
- [160] Taylor, R. et al. 'A Non-conforming Element for Stress Analysis' in: 'International Journal for Numerical Methods in Engineering', Vol.10, S.1211-1219, 1976.
- [161] Timoshenko, S. 'Strength of Materials', Princeton, New Jersey, New York, Toronto, Third Edition 1955.
- [162] Thunnissen, H.J.W. 'Gwelven', Amsterdam 1950.
- [163] Ungewitter, G./
Mohrmann, K. 'Lehrbuch der gotischen Konstruktionen' Leipzig 1890.
- [164] VanGulick, L.A. 'ANSYS-Analysis of Monumental Historical Buildings' in: 'ANSYS Conference Proceedings News', pp. 4.13-4.19, Houston 1994.
- [165] Warnecke, P./
Rostasy, F.S. 'Tragverhalten und Konsolidierung von Wänden und Stützen aus historischem Natursteinmauerwerk' in 'Mauerwerkskalender 1995', Ernst & Sohn, Berlin 1995.
- [166] Warth, O. 'Die Konstruktionen in Stein' Band 4 der 'Allgemeinen Baukonstruktionslehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen' von G.U. Breymann, Leipzig 1903.
- [167] Wendehorst Bautechnische Zahlentafeln, Hrsg. O.Wetzell, 26.Aufl., B.G.Teubner, Stuttgart 1994.
- [168] Wesche, K. Baustoffe für tragende Bauteile, Bd. II, Beton, Mauerwerk, 3. Aufl., Bauverlag Wiesbaden 1993.
- [169] Willam, K.J./
Warnke, E.P. 'Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete', IABSE-Proceedings of the Seminar 'Concrete Structures subjected to Triaxial Stresses', Bergamo 1974.
- [170] Winkler, E. 'Lage der Stützlinie im Gewölbe', in: 'Deutsche Bauzeitung', Jhg.1879, S.117-119 und 127-130, und Jhg. 1880, S.58-60.
- [171] Ziegler, R. 'Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jhd.', Stuttgart 1985.
- [172] Zienkiewicz, O.C. 'The Finite Element Method', 3.Auflage, McGraw-Hill, New York 1985.

Teil II Studien: Arbeitsmaterialien, Quellen.

- [173] Amiet, P. 'Die Kunst des alten Orient' aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1977.

- [174] Andrews, P.A. 'Zwiebelkuppel und Gitterzelt' in 'Geschichte des Konstruierens', Hrsg. R.Graefe, S. 48-69, DVA, Stuttgart 1989.
- [175] Arnold, D. 'Lexikon der ägyptischen Kunst', Artemis- Verlag, Zürich 1994.
- [176] Bacon, E. (Hrsg.) 'Versunkene Kulturen', Zürich 1963.
- [177] Barthel, G. 'Barockkirchen in Altbayern und Schwaben', München 1960.
- [178] Bottineau, Y. 'Die Kunst des Barock', aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1986.
- [179] Brands, G. 'Anfänge und Nachleben römischer Kreuzgewölbe' in 'Bautechnik der Antike', Berichte zu einem internationalen Kolloquium in Berlin 1990, Mainz 1991.
- [180] Bruno, A. 'The Preservation and Restoration of Tāq-Kisrā, in Mesopotamia I/1966, pp 89-108.
- [181] Cantor, M. 'Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker', Halle 1863.
- [182] ders. 'Die römischen Agrimensoren', Leipzig 1875.
- [183] Carne, J. 'Syria, The Holy Land, Asia Minor, etc.' in 'Fisher's Views', Vol.I, London & Paris 1836.
- [184] Caselli, C. 'La cupola della basilica di San Gaudenzio in Novara', in: L'ingegnere Civile e le Arti Industriali, Torino, 1877.
- [185] Cejka, J. 'Tonnengewölbe und Bogen islamischer Architektur', Dissertation der TU München, München 1978.
- [186] Choisy, A. 'L'art de bâtir chez les Romains', Paris 1873
- [187] Choisy, A. 'Histoire de l'Architecture', Paris 1899.
- [188] Coche de La Ferté, É. 'Byzantinische Kunst', aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1983.
- [189] Creswell; K.A.C. 'Early Muslim Architecture', Bd. I., Oxford 1969.
- [190] Daverio, A. 'La Cupola di S.Gaudenzio', Novara 1940.
- [191] Deichmann, F. W. 'Studien zur Architektur Konstantinopels', Baden-Baden 1954.
- [192] ders. 'Rom, Ravenna, Konstantinopel, Naher Osten- Gesammelte Studien zur spätantiken Architektur, Kunst und Geschichte', Wiesbaden 1982.
- [193] ders. 'Westliche Bautechnik im römischen und rhomäischen Osten' in: 'Rom, Ravenna, Konstantinopel, Naher Osten- Gesammelte Studien zur spätantiken Architektur, Kunst und Geschichte', S.712-782, Wiesbaden 1982.
- [194] Deichmann, F. W./ Tschira, A. 'Das Mausoleum der Kaiserin Helene' in: 'Rom, Ravenna, Konstantinopel, Naher Osten- Gesammelte Studien zur spätantiken Architektur, Kunst und Geschichte', S.305-373, Wiesbaden 1982.
- [195] Diemer, D. und P. 'Die Wunden des Krieges sind nicht mehr erkennbar - zum Wiederaufbau der Münchner Michaelskirche', in 'Kunstchronik', 36.Jhg., Heft 4, Nürnberg, April 1983
- [196] Dieulafoy, M.A. 'L'Art antique de la Perse', 5. Bände, Paris 1885.
- [197] Dischinger, G. 'Die Jesuitenkirche St.Michael in München. Zur frühen Planungsgeschichte' in: 'Beiträge zur Bayerischen Geschichte und Kunst' 1573-1657, Ausg. II/1,, München und Zürich.

- [198] Donabedian, P./ Thierry, J.M. 'Armenische Kunst', aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1987.
- [199] Dorn, H./ Mark, R. 'Sir Christopher Wren- Astronom und Architekt', in: 'Spektrum der Wissenschaft', 9/81.
- [200] Durliat, M. 'Romanische Kunst', aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1983.
- [201] ders. 'Die Kunst des frühen Mittelalters' aus der Serie 'Ars Antiqua', Herder-Verlag, Freiburg 1983.
- [202] Durm, J. 'Zwei Großkuppeln der Renaissance' in: 'Zeitschrift für Bauwesen', Berlin 1887.
- [203] ders. 'Die Baustile - historische und technische Entwicklung', Band II, 'Die Baukunst der Etrusker, die Baukunst der Römer', Stuttgart 1905.
- [204] Emerson, W./ van Nice, R.L. 'Hagia Sophia, The Construction of the Second Dome.' in: 'Architectura', S.163-171, 4/1951.
- [205] Fedorov, S.G. 'Frühe Eisenkuppeln in der russischen Sakralarchitektur vor 1840. Zur Entwicklung der eisernen Dachtragwerke in Europa' in: 'Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke', Jahrbuch 1993' des SFB 315 Universität Karlsruhe, S163-193, Ernst & Sohn, Berlin 1996.
- [206] Fine Licht, K.de 'The Rotunda in Rome', Kopenhagen 1968.
- [207] Fink, J. 'Die Kuppel über dem Viereck', Freiburg, München 1958.
- [208] Gmelin, L. 'Die St. Michaelskirche in München und ihr Kirchenschatz', in: 'Bayerische Bibliothek, Band 16, K.v.Reinhardtstoetter & K.Traummann, Bamberg 1890.
- [209] Graefe, R. 'Zur Formgebung von Bögen und Gewölben': in Architectura, p. 50-67, Deutscher Kunstverlag, München 1986.
- [210] Hoffmann, A. et.al. (Hrsg.) 'Bautechnik der Antike', Berichte zu einem internationalen Kolloquium in Berlin 1990, Verlag Philipp von Zabern, Mainz 1991.
- [211] Hootz, R. 'Wien' aus der Reihe: 'Kunstdenkmäler Österreichs', Deutscher Kunst Verlag, München 1968.
- [212] Hotz, W. 'Handbuch der Kunstdenkmäler Byzanz Konstantinopel Istanbul', Deutscher Kunstverlag, Berlin-München 1971.
- [213] Hubala, E. 'Vom europäischen Rang der Münchner Architektur um 1600', in: 'Beiträge zur Bayerischen Geschichte und Kunst' 1573-1657, Ausg. II/1., München und Zürich.
- [214] Kähler, H. 'Der römische Tempel', Berlin 1970.
- [215] Kasper, A. 'Zur Vorgeschichte des Ovalgrundrisses der Wallfahrtskirche Steinhausen' in: 'Ulm und Oberschwaben- Zeitschrift für Geschichte und Kunst', Heft 34, S.153 ff., 1955.
- [216] Kimpel, D. Suckale, R., Hirmer, M. 'Die gotische Architektur in Frankreich, 1130-1270', Deutscher Kunst Verlag, München 1985.
- [217] Kubach, H.E. 'Romanik' aus der Reihe 'Weltgeschichte der Architektur' Hrsg. P.L.Nervi, DVA, Stuttgart 1986.
- [218] ders. 'Kuppelkirchen und Tonnenhallen- über Vermischung romanischer Kirchenhallen' in 'Architectura Zeitschrift für Geschichte der Baukunst', Heft 24, S. 99-103, Deutscher Kunstverlag München 1994.

- [219] Lange, D. 'Theorie zur Entstehung der byzantinischen Kreuzkuppelkirche', in 'architectura Zeitschrift für Geschichte der Baukunst', Heft 22, S. 93-113, Deutscher Kunstverlag München 1992.
- [220] Lamprecht, H.-O. 'Opus Caementitium', Düsseldorf 1984.
- [221] Lepsius, C.R. 'Denkmäler aus Ägypten und Äthiopien', Berlin 1859.
- [222] Lieb, N. / Hirmer, M. 'Barockkirchen zwischen Donau und Alpen', 6.Auflage, Hirmer Verlag, München 1992.
- [223] Lloyd, S., Müller H., Martin, R. 'Ancient Architecture - Mesopotamia, Egypt, Crete, Greece', New York 1974.
- [224] Lacoste, H. 'L'arc de Ctesiphon', in: 'Journal of Archeology of Irak', 1, 1954.
- [225] Mainstone, R.J. 'Hagia Sophia', London 1988.
- [226] Malraux, A./ Salles, G. (Hrsg.) 'Iran, Parther und Sasaniden' in: 'Universum der Kunst', Band 3, München 1962.
- [227] Manitz, B. 'Wand, Wölbung und Rotunde - zu Balthasar Neumanns kurvierter Architektur', Bd. I und Bd.II, Worms 1995.
- [228] Michael, U. 'Untersuchungen zum Tragverhalten barocker Holzkuppeln', Dissertation, TH Karlsruhe, Karlsruhe 1975.
- [229] Michell, G. (Hrsg.) 'Architecture of the Islamic World', London 1978.
- [230] Millon, H.A./ Lampugnani, V.M. 'The Renaissance from Brunelleschi to Michelangelo', Ausstellungskatalog, Milano 1994.
- [231] Minke, G. 'Lehmbau Handbuch- Der Baustoff Lehm und seine Anwendung', Staufen b. Freiburg 1994.
- [232] Montferrand, A.R. 'L'église de St. Isaac', Petersbourg 1845.
- [233] Muchall-Viebrook, Th. 'Dominikus Zimmermann- Ein Beitrag zur Geschichte der süd-deutschen Kunst im 18.Jahrhundert, Dissertation, München 1911.
- [234] Mutz, J. 'Untersuchung römischer Rippenkuppeln mit Hilfe der Finite-Element- Methode', Studienarbeit 2/95 am Institut für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Stuttgart 1995.
- [235] ders. 'Historische Tonnengewölbe im Kirchenbau am Beispiel von St Michael in München, Diplomarbeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1996.
- [236] Naumann, R. 'Architektur Kleinasiens', Wasmuth, Tübingen 1971.
- [237] Norberg-Schulz, C. 'Spätbarock und Rokoko' aus der Reihe 'Weltgeschichte der Architektur' Hrsg. P.L.Nervi, DVA, Stuttgart 1985.
- [238] Özsen, G.A. 'Structural Systems of Byzantine Churches in Istanbul' in : IASS-Proceedings 'Public Assembly Structures from Antiquity to Present', Istanbul 1993.
- [239] Petzet, M. 'Soufflots Sainte-Geneviève und der französische Kirchenbau des 18. Jahrhunderts', Walter de Gruyter & Co., Berlin 1961.
- [240] Pfister, R. 'Die Wiederherstellung der St. Michaelskirche in München', in: 'Der Baumeister', Jahrgang 44, S.236-248, München 1947.
- [241] Pinder, W. 'Deutscher Barock', Königstein/Ts. 1957.
- [242] Poulsen, V. 'Römische Bauten', Königstein/Ts. 1964.

- [243] Rakob, F. 'Römische Architektur in Nordafrika' in: 'Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts', S.107-115, Mainz 1982.
- [244] Rasch, J.J. 'Die Kuppel in der römischen Architektur- Entwicklung, Formgebung, Konstruktion, in 'Geschichte des Konstruierens' , Hrsg. R. Graefe, S. 17-37, DVA, Stuttgart 1989.
- [245] ders. 'Zur Konstruktion spätantiker Kuppeln vpm 3. bis 6. Jahrhundert' in: 'Jahrbuch des Deutschen Archäologischen Instituts', Berlin 1991.
- [246] Reuter, H. 'Zu den Wölbungen Balthasar Neumanns und seines Kreises', Hrsg. R.Graefe, S. 117-128, DVA, Stuttgart 1989.
- [247] Reuther, O. 'Die Ausgrabung der deutschen Ktesiphon-Expedition' im Winter 1928/29', Berlin 1933.
- [248] Riviora, G.T. 'Lombardic Architecture', Übersetzung des italienischen Originals von G.McN. Rushforth, Vol. I und II, London 1910.
- [249] ders. 'Architettura Muselmana', Milano 1914.
- [250] Robinson, H.W. 'The Dairy of Robert Hooke, 1672-1680', London 1935.
- [251] Rosintal, J. 'Pendentifs, Trompen und Stalaktiten' Dissertation Berlin 1912.
- [252] Rosso, F. 'Alessandro Antonelli e la Mole di Torino', Torino, 1977.
- [253] ders. 'Alessandro Antonelli 1798-1888', Electa, Milano, 1989.
- [254] Sachse, H.J. 'Die barocken Dachwerke- und Gewölbekonstruktionen der Abteikirche zu Neresheim unter der Berücksichtigung der im 19. Jahrhundert durchgeführten konstruktiven Veränderungen', Dissertation, Berlin 1967.
- [255] ders. 'Das auf Freistützen errichtete Kuppelgewölbe über dem Gemeindeforum der Wallfahrtskirche zu Steinhausen', in: 'Das Münster', Heft 30, S. 221-229, 1977.
- [256] Sarré, F./ Herzfeld, E. 'Archäologische Reise im Euphrat- und Tigris-Gebiet', Berlin 1920.
- [257] Sauermost, H.J./ v.d. Mülbe, W.-Chr. 'Istanbuler Moscheen', Bruckmann-Verlag München 1981.
- [258] Sauermost, H.J. 'Zur Rolle St. Michaels im Rahmen der wilhelminisch-maximilianischen Kunst', in: 'Beiträge zur Bayerischen Geschichte und Kunst 1573-1657', Ausg. II/1, München und Zürich.
- [259] Sauermost, H.J./ Lieb, N. (Hrsg.) 'Münchens Kirchen', München 1988.
- [260] Schinkel, K.F. 'Reisen nach Italien 1-2', Aufbau-Verlag, Berlin und Weimar 1994.
- [261] Schmöckel, H. 'Ur, Assur und Babylon - drei Jahrtausende im Zweistromland', Stuttgart 1955.
- [262] Schnell, H. (Hrsg.) 'Banz am Main', 17.Aufl., Verlag Schnell & Steiner, München 1987.
- [263] ders. 'Wallfahrtskirche Steinhausen', 25.Aufl., Verlag Schnell & Steiner, München 1994.
- [264] Schütz, B. 'Balthasar Neumann', Freiburg 1986.

- [265] Sekler, E.F. 'Wren and his Place in European Architecture', London 1956.
- [266] Speidel, E. Prüfbericht zur Sanierung der Wallfahrtskirche Steinhausen, Ulm 1970.
- [267] Stocker, J. 'Zum Tragverhalten der Zwischenkuppel von St. Geneviève in Paris', Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1987.
- [268] Tanyeli G./ Tanyeli U. 'Structural Use of Iron in Ottoman Architecture (from the 15th to the Early 19th Century) in: 'Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings', Ed.: C.A.Brebba, Birkhäuser Verlag, Basel 1989.
- [269] Thode, D. 'Untersuchungen zur Lastabtragung spätantiker Kuppelbauten', Diss. Universität Darmstadt, Darmstadt 1975.
- [270] Tomlow, J. 'Alessandro Antonelli (1798-1888)- Rationelle Gewölbekonstruktionen im neoklassischen Gewand' in: 'Architektur im Spannungsfeld zwischen Klassizismus und Romantik', Wissenschaftliche Zeitschrift der Bauhaus Universität Weimar, S.87-100, Heft 2,3, 1996.
- [271] Trautz, M. 'Alessandro Antonelli (1798-1888) Lightweight Masonry Structures in Neoclassical Architecture' Part II in: 'Evolution of Natural Structures', Proceedings of the III rd. International Symposium of the Sonderforschungsbereichs 230, Stuttgart 1994.
- [272] ders. 'Frühe Wölbkunst und Wölbversuche nach den Regeln der Statik' In: Natürliche Konstruktionen, Ernst & Sohn, Berlin 1995.
- [273] Trautz, M./ Ramm, E. 'Structural Studies on Antonelli's San Gaudenzio. In: 'Spatial Structures: Heritage, Present and Future', ed. G.C.Guilliani, IASS- Proceedings 1995, Milano 1995.
- [274] Turanszky,I./Gink,K. 'Aserbaidshan- Paläste,Türme,Moscheen', Budapest 1976.
- [275] Van Beek, G.W. 'Der Ursprung des Gewölbbaus' in: 'Spektrum d. Wissenschaft', 9/87, S.112-123.
- [276] Vandersleyen, C. 'Das alte Ägypten' in: 'Propyläen der Kunstgeschichte', Propyläen-Verlag, Berlin 1975.
- [277] Vogt-Göknil, U. 'Die Moschee - Grundformen sakraler Baukunst', Artemis Zürich 1978.
- [278] dies. 'Sinan', Wasmuth Verlag Tübingen und Berlin 1993.
- [279] von Freeden, M.H. 'Balthasar Neumann', 3. Aufl., Deutscher Kunst Verlag, München 1981.
- [280] Voormann, F. 'Die Ovalekuppel der Wallfahrtskirche Steinhausen', Diplomarbeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart 1996.
- [281] Wachsmuth, F. 'Die Baufunde' aus 'Die Ausgrabungen der zweiten Ktesiphon-Expedition- Winter 1931/32', Berlin 1933.
- [282] Ward-Perkins, J. 'Rom' aus der Reihe 'Weltgeschichte der Architektur' Hrsg. P.L.Nervi, DVA, Stuttgart 1988.
- [283] Wendland, D. 'Antonellis Großkuppeln', Studienarbeit 2/94 am Institut für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Stuttgart 1994.
- [284] Whitechapel Art Gallery (Hrsg.) 'Sir Christopher Wren', catalogue of the exhibition selected by K.Downes, London 1982.
- [285] Yarshater, E. 'The Seleucid, Parthian and Sasanian Periods' in 'The Cambridge History of Art, Volume 3, London 1968.

[286] Zimmermann, K. 'Tragverhalten von Pendentfokuppeln' Diplomarbeit am Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion der Universität Stuttgart, Stuttgart 1992.

Handbücher:

[287] Stegmüller, H./ Bletzinger, K.-U. CARAT, Handbuch, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Stuttgart 1995.

[288] Swanson Analysis 'Ansys 5.0 -User's Manual', 5 Bände, Swanson Analysis Ltd., 1.st. Revision, Houston, 1991.

[289] Waterloo Maple Software Maple V, Release 2, New York 1993.

Bezeichnungen:

h_F	Höhe der Mauerwerksfuge.
h_{ST}	Höhe der Steine.
A	Querschnittsfläche.
I	Flächenträgheitsmoment, statisches Moment zweiter Ordnung.
μ	Querdehnzahl.
β_t	Zugfestigkeit ($\beta_t = \beta_z$).
β_{cra}	rißbedingte Fließspannung (entspricht für zentrische Drucknormalbeanspruchung der Rißfestigkeit β_R).
β_{cru}	Druckfestigkeit (Versagensspannung) ($\beta_{cru} = \beta_D$).
β_R	Rißfestigkeit nach Manns/Schneider.
$\varepsilon_t, \varepsilon_{cr}$	Zugversagensdehnung.
$\varepsilon_{cra}, \varepsilon_R$	Rißdehnung, Rißdehnung nach Manns/Schneider.
ε_{cru}	Druckversagensdehnung.
s	Koordinate der ebenen Kurve s . Es gilt: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.
x	Abszissenkoordinate.
C_i	Integrationskonstanten.
$q(x)$	Streckenlast bezogen auf x , stetige Lastkonfiguration.
$q(s)$	Streckenlast bezogen auf s , stetige Lastkonfiguration.
q_0	Anfangswert, Streckenlast.
$q^*(x)$	Streckenlast definiert in x , bezogen auf s (siehe Bülfer [78] S.125).
\bar{q}	Streckenlast, definiert in x oder s , bezogen auf s bzw. x .
k	Multiplikator, verwendet für $q/H = k$.
H	Horizontalzug der Seil-/Kettenlinie. Es wird angenommen: $H = \text{const.}$
s_B	Wegkoordinate entlang einem Kreisbogen.
n_φ	Membrankräfte in einer rotationssymmetrischen Schale in Meridianrichtung.
n_ν	Membrankräfte in einer rotationssymmetrischen Schale in Ringrichtung.
Q	Summe der Lasten des Bogens.
$b(x)$	Variable Segmentbreite bei der Kuppel.

$\text{erf}(u)$	Errorfunktion von u .
C_1	Tension-stiffening-factor (Schwächungsgrad nach Zugversagen).
C_o	Schubübertragungsfaktor bei offenem Riß.
C_c	Schubübertragungsfaktor bei geschlossenem Riß.
E_s	Senkantenmodul.
E_t	Tangentenmodul.
c	Kohäsion .
φ	Innerer Reibungswinkel.
σ_i	Hauptspannungen (Es gilt im Dreidimensionalen: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).
σ_x, σ_y	Längsspannungen im ebenen Ausgangskordinatensystem.
τ_{xy}	Schubspannung im ebenen Ausgangskordinatensystem.
σ_{zp}	Spannung senkrecht zu den zwei betragsmäßig größten Hauptspannungen im Versagensmodell nach Willam/Warnke.
σ_o	Spannung an der Querschnittsoberkante.
σ_u	Spannung an der Querschnittunterkante.
σ_m	Spannung in Querschnittsmitte bzw. mittlere Normalspannung.
b	Querschnittsbreite.
h	Querschnittshöhe.
\bar{h}	reduzierte bzw. statisch wirksame Querschnittshöhe.
e	Exzentrizität der Spannungserzeugenden.
Π	Formänderungsenergie.
Π_{el}	Formänderungsenergie des Rechteckquerschnitts mit elastischer Spannungsverteilung.
$\Pi_{el,cr}$	Formänderungsenergie des teilflächenbelasteten (= eingerissenen) Rechteckquerschnitts mit elastischer Spannungsverteilung.
$\Pi_{pl,cr}$	Formänderungsenergie des teilflächenbelasteten (= eingerissenen) Rechteckquerschnitts mit plastischer Spannungsverteilung.
Φ	Interaktionsbeziehung von Moment und Normalkraft.
Φ_{el}	Interaktionsbeziehung von M und N des Rechteckquerschnitts mit elastischer Spannungsverteilung.

$\Phi_{el,cr}$	Interaktionsbeziehung von M und N des teilflächenbelasteten (= eingearissenen) Rechteckquerschnitts mit elastischer Spannungsverteilung.
$\Phi_{pl,cr}$	Interaktionsbeziehung von M und N des teilflächenbelasteten (= eingearissenen) Rechteckquerschnitts mit plastischer Spannungsverteilung.
Φ_y	Teil der Interaktionskurve der unteren Fließgrenze (Fließbeginn) im Interaktionsdiagramm eines Rechteckquerschnitts aus Sprödmaterial.
$\Phi_{y,cr}$	Teil der Interaktionskurve der unteren Fließgrenze (Fließbeginn) im Interaktionsdiagramm eines teilflächenbelasteten Rechteckquerschnitts aus Sprödmaterial.
$\Phi_{y,cr,max}$	Interaktionskurve der oberen Fließgrenze im Interaktionsdiagramm eines teilflächenbelasteten Rechteckquerschnitts aus Sprödmaterial.
Φ_{oru}	Interaktionskurve der Versagenslast im Interaktionsdiagramm eines teilflächenbelasteten Rechteckquerschnitts aus Sprödmaterial.

Anhang

Die Numerierung der Kapitel des Anhangs bezieht sich direkt auf die Hauptkapitel. Da nicht zu allen Kapiteln ein Anhang existiert, ergeben sich Lücken in der Zählung.

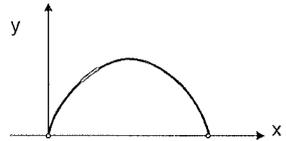
Anhang A.3

A.3.2.2.1 Herleitung der mittels Differentialgleichungen errechneten Seillinien und Kettenlinien

Ausgegangen wird von den Differentialgleichungen 3.1.2 und 3.1.3, wobei bezüglich deren Herleitung auf das Manuskript von Bufler [78], S. 123-133 verwiesen wird:

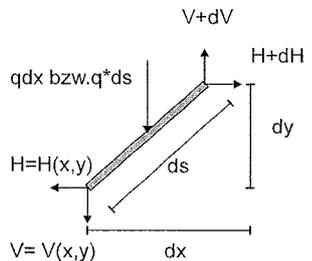
Differentialgleichung der Seillinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(x)}{H} \quad (\text{A.3.2.1})$$



Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q^*(x)}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{A.3.2.2})$$



mit der Beziehung für ds:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A.3.2.3})$$

Abb.A.3.2.1: Parameter am infinitesimalen Bogenstück.

Gleichung (A.3.2.1) ist separierbar und direkt integrierbar. Gleichung (A.3.2.2) wird durch Substitution integriert, so daß sich folgendes Zwischenergebnis ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left[\frac{q^*}{H} (x - C_1) \right] \quad (\text{A.3.2.4})$$

Belastungsfunktion und Seil- und Kettenlinie des Bogens

Die Belastungsfunktion des Bogens wird über das Gewicht Q bestimmt (Abb.A.3.2.2). Die Last eines Bogensegmentes mit konstanter Breite $b(x)=\text{const.}$ ist:

$$Q = q_0(s_B) \cdot R \cdot \arctan(x/y) \quad (\text{A.3.2.5})$$

Es gilt ferner: $q_0(s_B)=q=\text{const.}$ und: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Hieraus ergibt sich für Q :

$$Q = -q_0 \cdot R \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \quad (\text{A.3.2.6})$$

Aus Q geht die Belastungsfunktion $q^*(x)$ bzw. $q(x)$ durch Differentiation hervor:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (\text{A.3.2.7})$$

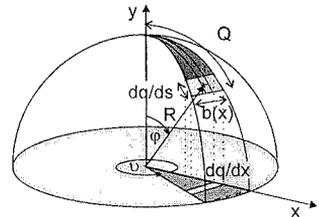


Abb.A.3.2.2: Parameter zur Errechnung der Belastungsfunktionen an Kuppel bzw. Bogen.

Aus Gleichung (A.3.2.6) entsteht demnach die reellwertige Belastungsfunktion des Bogens $q(x)$:

$$q(x) = q_0 \cdot R \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{x^2}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3} \right)}{\left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} \right)} \right) \quad (\text{A.3.2.8})$$

Die zugehörige Stammfunktion wird in die Differentialgleichung (A.3.2.1) eingesetzt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{H} \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \cdot R + C_1 \quad (\text{A.3.2.9})$$

Hieraus folgt für $y(x)$ mit den Randbedingungen: $dy/dx (x = 0) = 0$ und $y (x = R) = 0$ die Gleichung der Seillinie des Bogens:

$$y = -\frac{q_0}{H \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} \left(\left(\frac{x}{R} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.3.2.10})$$

Die Lastfunktion gilt für die zugehörige Kettenlinie, die Stammfunktion konnte jedoch nicht symbolisch ermittelt werden, so daß die Funktion durch Taylorreihenentwicklung ausgewertet werden mußte.

$$y = \int \sinh\left(-\frac{q_0}{H} \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \cdot R + C_1\right) dx + C_2 \quad (\text{A.3.2.11})$$

Seil- und Kettenlinie von Kuppeln gleichmäßiger Lastverteilung (Bouguer-Kuppel)

Zur Anpassung der Belastungsfunktion des Bogens an die Kuppel muß $q(x)$ lediglich mit x multipliziert werden. Wie aus Abb.A.3.2.2 zu ersehen ist, verhält sich q direkt proportional zu x . Für die Idealkuppel zur projizierten Last, die 'Seillinienkuppel' (analog zur Stützlinienkuppel) ergibt sich demnach einfach eine kubische Parabel als Meridianfunktion durch zweimaliges Aufintegrieren nach x :

$$y = -\frac{q_0}{H} (R - x^3) \quad (\text{A.3.2.12})$$

Die Stützlinienkuppel nach Bouguer ist eine komplexwertige Funktion:

$$y = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{H}{q_0}} \cdot \left(\sqrt{\pi} \sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{q_0}{H}} \cdot x\right) + i \cdot \sqrt{\pi} \sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} i \cdot \sqrt{2} \sqrt{\frac{q_0}{H}} \cdot x\right) - \sqrt{\pi} \sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{q_0}{H}}\right) - i \cdot \sqrt{\pi} \sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} i \cdot \sqrt{2} \sqrt{\frac{q_0}{H}}\right) - 4 \cdot \sqrt{\frac{q_0}{H}} \right) \quad (\text{A.3.2.13})$$

Sie läßt sich aber wegen der Möglichkeit, i^2 zu bilden, in eine reelle Funktion überführen. Wegen der wesentlich kürzeren Form durch Verwendung der sogenannten Error-Funktion¹ wurde Gleichung (3.2.13) hier nicht umgeformt dargestellt.

¹ Hierzu *Maple Handbuch* [289].

Minke [231] hat die Stützlinienkuppeln iterativ mit einem graphostatischen Verfahren ermittelt². Seine Ergebnisse stimmen mit den hier analytisch bzw. numerisch gewonnenen gut überein. Als wesentlicher Indikator dient die Lage des Kreuzungspunktes der errechneten Stützlinie mit der Schwerlinie einer Kreiskuppel von entsprechendem Radius (siehe Abbildung 3.2.7).

Belastungsfunktion und Seil- und Stützlinie der Hemisphärenkuppel

Die Belastungsfunktion zur Stützlinie einer Hemisphärenkuppel unterscheidet sich von derjenigen des Bogens ebenfalls nur durch den Multiplikator x . Die Stammfunktion lautet dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_0}{H} \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + x^2} + C_1 \quad (\text{A.3.2.14})$$

Die Meridianfunktion der zugehörigen Seillinie mit den Randbedingungen: $dy/dx (x = 0) = 0$ und $y (x = r) = 0$ lautet:

$$y = \frac{q_0}{H \cdot \left(1 - \frac{\Pi}{4}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot R^2} \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right) - \frac{x}{R} - \left(\frac{\Pi}{4} + 1\right) \right) \quad (\text{A.3.2.15})$$

Die Meridianfunktion der zugehörigen Kettenlinie führt zu folgender Funktion, die numerisch integriert werden muß:

$$y = \int \left(\sinh \frac{q_0}{H} \left(R \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) + C_1 \right) dx + C_2 \quad (\text{A.3.2.16})$$

² Siehe Minke 'Lehmbauhandbuch' [231], S.230-237 .

Anhang A.4

A.4.1.1.3 Materialgesetz nach Willam/Warnke

Übertragung der Materialparameter aus den Testergebnissen von Launay et. al. und Kupfer auf die Versagensgrenzkurven nach Willam/Warnke [169]: eben (Abb.A.4.1.1), dreidimensional (Abb.A.4.1.2). Zugversagenskriterium im dreidimensionalen Hauptspannungsraum (Abb.A.4.1.3).

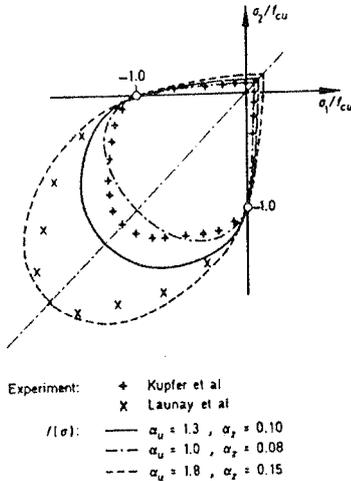


Abb.A.4.1.1: Einpassen der Ergebnisse des Biaxialversuchs nach Kupfer [116] und Launay [118] in das Versagensmodell von Willam/Warnke [169].

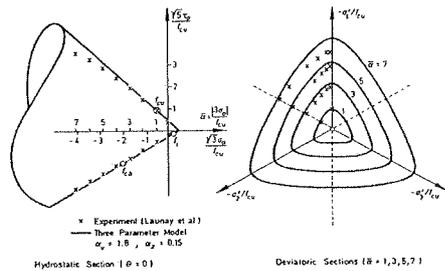


Abb.A.4.1.2: Einpassen der Ergebnisse des Triaxialversuchs nach Launay [118] in das dreiparametrische Versagensmodell von Willam/Warnke [169] für niedrige Druckbeanspruchung.

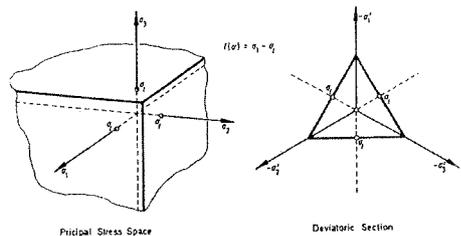


Fig. 8 Tension Cut - Off Criterion
 Maximum Stress Condition

Abb.A.4.1.3: Zugversagenskriterium (Tension Cut-Off-Criterion) im Räumlichen nach Willam/Warnke [169].

A.4.1.3 Test- und Vergleichsrechnungen

Kragarmtest

Mit dem Kragarmtest ($h/l=1/10$) wurde die Ergebnisqualität des Elementes SOLID 65 bei materiell- und geometrisch-linearen Verhältnissen überprüft. Es zeigt sich, daß das Element eine feine Diskretisierung verlangt, um eine akzeptable Ergebnisqualität liefern zu können. So ist aus Abb.A.4.1.4 zu ersehen, daß bei 5 Elementen über die Querschnittshöhe mindestens 20 Elemente in Längsachse notwendig sind, um eine Abweichung der Spannungen von weniger als 5% gegenüber der analytischen Lösung zu erreichen.

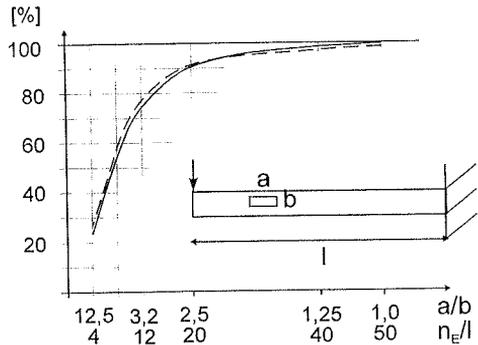


Abb. A.4.1.4: Konvergenzdiagramm für Verschiebungen (- -) und Spannungen (—) beim Element SOLID 65. (a/b : Seitenlängenverhältnis des Elementes; n_e/l : Anzahl der Elemente pro Länge, $b = l/50$).

Biegebalkentest

Die Wiedergabe des Anrißverhaltens des Elementes SOLID 65 wurde mit Hilfe eines statisch bestimmt gelagerten Balkens, der mit zwei symmetrisch angeordneten Einzelkräften belastet ist, getestet. Hierbei wurde der rechnerisch ermittelte Lastfaktor beim Bruch mit dem aus der Finite-Element-Rechnung für verschiedene Diskretisierungen verglichen. Es wurde ein schlanker Balken gewählt ($l/h = 12$), um einerseits für die Handrechnung die Balkentheorie rechtefertigen zu können, andererseits in der FE-Simulation einen möglichst 'reinen' Biegespannungszustand in Feldmitte

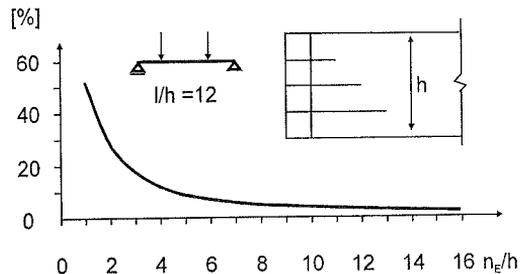


Abb. A.4.1.5: Einfluß der Diskretisierung über die Querschnittshöhe (n_e/h : Anzahl der Elemente über die Querschnittshöhe) auf den Fehler der Versagenslast bei einem statisch bestimmten Balken mit SOLID 65 Elementen.

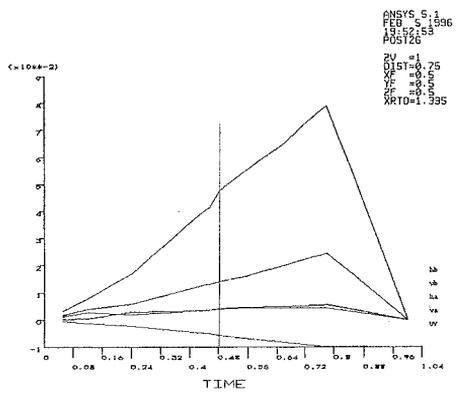
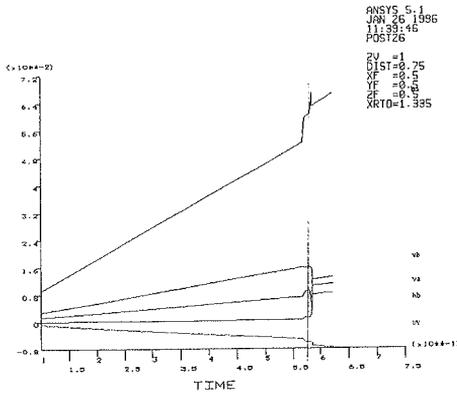


Abb.A.4.1.6: Auflagerkräfte (Ordinatenwerte in MN) an den Knoten zweier geometrisch identischer, aber über die Höhe unterschiedlich dicht diskretisierter Balken (wie in Abb.4.1.5) in Abhängigkeit vom Lastfaktor (Abszissenwerte, Faktor 'time' als Lastschritt). Linkes Diagramm: drei Elemente über die Querschnittshöhe, rechtes Diagramm: fünf Elemente über die Querschnittshöhe mit r-Adaption. Beim grob diskretisierten Querschnitt (links) führt ein Systemwechsel zur sprunghaften Veränderung der Auflagerkräfte (time=0.57) und zum baldigen numerischen Versagen (time=0.63). Beim fein diskretisierten Balken tritt derselbe Systemwechsel wesentlich früher ein (time=0.45) und das numerische Versagen wesentlich später (time =0.78).

zu erhalten, und um einen geringen negativen Einfluß der St.Venant-Bereiche (Lasteinleitung, Lager) sicherzustellen. Die Diskretisierung über die Länge ist in Dichte und Verteilung konstant (20 E/l), die Anzahl der Elemente über die Querschnittsdicke wird von 1 bis 20 variiert. Die prozentuale Abweichung der numerisch ermittelten Versagenslast von der rechnerischen Versagenslast ist dem Diagramm in Abbildung A.4.1.5 zu entnehmen. Grobe Diskretisierungen führen zu sehr hohen Abweichungen. Dies ist auf die unterschiedliche Lage der Gaußpunkte, an denen die Bruchspannungen abgeprüft werden, und der Knoten, wo die tatsächlichen, höheren Spannungen auftreten und extrapoliert werden, zurückzuführen. Bei der Simulation führt dies zu einer Verzerrung der Rißversagensereignisse innerhalb der Belastungsgeschichte, [%]

so daß Lastumlagerungen bei grob diskretisierten Tragwerken später eintreten (Abb.A.4.1.6). Das Versagen wiederum tritt bei einer grob diskretisierten Struktur früher ein, weil die zugehörige Steifigkeitsmatrix weniger Glieder besitzt und deshalb durch den Wegfall schon von einigen Gliedern schlecht konditioniert ist.

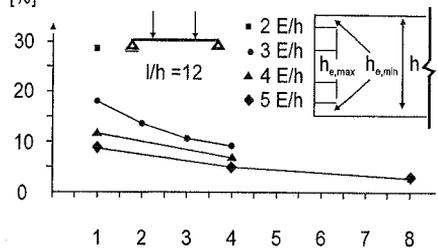


Abb.A.4.1.7: Einfluß der Diskretisierungsdichte und Verteilung (relocation adaptation) auf den Fehler der Bruchlast bei einem statisch bestimmten Balken in %.

Dieser ungünstige Effekt kann nur durch die Verdichtung der Diskretisierung in den äußeren Schichten (relocation-adaptation) verringert werden. Es wurden mehrere Verteilungen und Dichten untersucht (siehe Abb.A.4.1.7). Mit drei Elementen über den Querschnitt liegt die Abweichung knapp 12% zwischen tatsächlicher und der mit FE-Simulation ermittelten Bruchlast.. Erst mit fünf Elementen beträgt der Fehler unter 5% .

Kleinfeilerversuche nach Berger und nach Egermann und FE-Vergleichsrechnungen

Die Druckversuche an Kleinfeilern im Maßstab 1:1 (Abb.A.4.1.8) von F. Berger [74] und an Modellfeilern von R. Egermann [91] im SFB 315 an der Universität Karlsruhe zeigten sich von dem betreffenden Materialspektrum, der Versuchsanordnung, der Variantenbreite und der Dokumentation als besonders geeignet für Vergleichsrechnungen.

Versuche nach Berger

Berger [74] untersuchte Mauerwerkspfeiler aus insgesamt 16 Stein-/Mörtelkombinationen an einem Pfeiler aus fünf Steinen vom Maß 240/115/71 und einer Fugendicke von 12 mm. Als Material dienten fabrikneue Mauerwerkziegel und Mörtel aus PM-Binder (Zement) und Sand. Im Hinblick auf historisches Mauerwerk

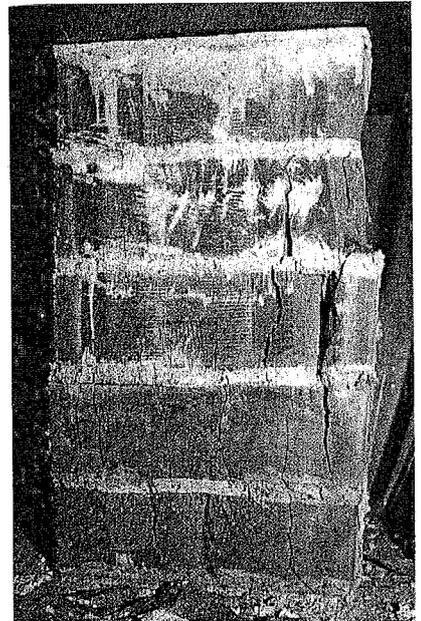


Abb. A.4.1.8: Kleinfeilerversuche nach Berger [74].

sind die niederfesten Stein-/Mörtelkombinationen A/I, A/II, B/I (V1-V3) von besonderem Interesse. Als Ergänzung wurden noch Pfeiler aus B/II und C/III (V4,V5) simuliert. Die in den Versuchen erzielten Festigkeiten (siehe Tabelle A.4.1.1) stehen im Einklang mit den Voraussetzungen und den Ergebnissen aus anderen Untersuchungen.

Mörtel-eigen-schaften*	Typ A	Typ B	Typ C	Ziegeigen-schaften *	Typ I	Typ II	Typ III
Verhältnis Sand:PM-Binder	10 : 1	5 : 1	3,8 : 1	Druckfestigkeit β_{cru} nach DIN 105, [MN/m ²], Abweichung %	28,1 (27,8) (SfKI 28)	45,1 (5,2) (SfKI 36)	55,9 (8,2) (SfKI 48)
Druckfestig-keit β_{cru} [MN/m ²]	1,59 (MG I)	3,8 (MG II)	10,7 (MG III)	Druckfestigkeit β_{cru} aus Bohrkernen [MN/m ²], Abweichung %	27,6 (26,8)	37,3 (16,8)	50,6 (13,0)
Elastizitäts-modul E [MN/m ²]	2254	6071	9927	Elastizitäts-modul E [MN/m ²]	9874	9141	19140

Tabelle A.4.1.1: Materialdaten der Mauerwerkskomponenten aus den Druckversuchen von Berger [74].

Versuche nach Egermann

Egermanns Versuche an Kleinfteilern [91] wurden sowohl an Modellprüfkörper verschiedener Maßstäbe als auch an Pfeilern aus niederfestem Mörtel und niederfesten, alten Ziegeln im Maßstab 1:1 durchgeführt. Die aus dieser Serie abgeleitete Regressionsgerade (Abb. A.4.1.9) zwischen E-Modul und Druckfestigkeit ergibt folgenden Zusammenhang : $E = 565 \beta_{\text{cru}}$.

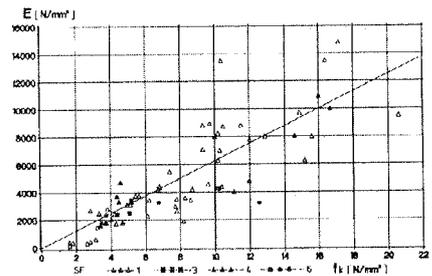


Abb. A.4.1.9: Prüfergebnisse und Regressionsgerade aus Kleinfteilerversuchen nach Egermann [91] ($f_k \Rightarrow \beta_{\text{cru}}$.)

Für den festgelegten Wert von $E = 3000 \text{ MN/m}^2$ ergibt sich eine eher hohe Pfeilerbruchfestigkeit von 5.3 MN/m^2 . Dieser Wert wurde nur für eine Vergleichsrechnung V6/1 benutzt. Für historisches Mauerwerk wurde die ermittelte Bruchfestigkeit β_{cru} nach Schubert herangezogen (siehe Tabelle A.4.1.2).

Ermittlung von Elastizitätsmodul und Druckfestigkeit von Mauerwerk für die FE-Simulation

Für die Simulation der Versuche mit Hilfe materiell-nichtlinearer FE-Methoden war die Umrechnung der Materialparameter von Stein und Mörtel in charakteristische Werte für das jeweilige Mauerwerk notwendig.

Elastizitätsmodul von Mauerwerk :

Zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls wurde die Formel von Hilsdorf [107] verwendet, wonach die E-Moduli der Einzelkomponenten nach Maßgabe von Fugen- und Steindickenanteil gewichtet werden:

$$E_{\text{MW}} = \frac{(f + s)}{\left(\frac{f}{E_f} + \frac{s}{E_s}\right)} \quad (\text{A.4.1.1})$$

Hierin bedeutet: f : Fugendicke, s : Steinhöhe ;
und die Indizes: MW : Mauerwerk, F: Fuge, S : Stein.

Druckfestigkeit :

Die Abschätzung der mittleren Druckfestigkeit erfolgte nach der bekannten, auf Mann [124] zurückgehenden Formel:

$$\bar{z} = a \cdot x^b \cdot y^c \quad (\text{A.4.1.2})$$

Während x die mittlere Steinfestigkeit und y die mittlere Mörtelfestigkeit bezeichnet, sind a, b und c Koeffizienten, die je nach Stein- und Mörtelart und Kombination variieren. Insbesondere der Unterschied in der Bruchfestigkeit der Komponenten führt zu verschiedenen Koeffizientensets, u.a. weil die Mauerwerkfestigkeit mit zunehmender Mörtelfestigkeit der Steinfestigkeit entgegenstrebt. Da sich die Ergebnisse für gleiche oder ähnliche Materialkomponenten aus den Formeln verschiedener Verfasser nicht unerheblich unterscheiden (siehe Tabelle A.4.1.2), wurden die Druckfestigkeiten nach Bröcker¹ (1961) aus [148], Mann (1983) [124] und Schubert (1995) [154] verglichen, bevor eine Festlegung getroffen wurde. Die sogenannte 'Bröcker-Formel' ist eine allgemeine Schätzformel, die bekanntermaßen zu konservativen Bruchfestigkeitswerten führt. Die von Mann angegebenen Koeffizienten beruhen auf Versuchen an normalfesten und hochfesten Hlz-Ziegel in der Kombination mit Normalmörtel. Übertragen auf massive Mauerwerksziegel wie in den zu simulierenden Versuchen ergeben auch sie zu geringe Festigkeiten. Demgegenüber liegen die Schätzwerte aus neueren Untersuchungen nach Schubert vergleichsweise hoch. Sie beruhen auf der Untersuchung von Stein-/Mörtelkombinationen mit Mörteln von

¹ Die Koeffizienten wurden aus der gleichartigen Formel nach Bröcker ermittelt :

$$\bar{z} = a \cdot \sqrt{x/10} \cdot \sqrt[3]{10y}$$

mindestens MG II. Sie sind deshalb unmittelbar auf die Simulationen der Versuche V4 und V5 übertragbar, sowie auf die Kombination von Steinen und Mörtel mit geringerem Festigkeitsunterschied wie bei V6. Niederfeste Stein-/Mörtelkombinationen werden jedoch hiermit in ihrer Tragfähigkeit überschätzt.

[MN/m ²]	Koeffizienten:			Versuche nach Berger bzw. Egermann					
Formel: $\bar{z} = a \cdot x^b \cdot y^c$	a	b	c	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Versuchsergebnisse:	-	-	-	6,16	7,9	7,9	13,8	23,4	5,3
$\beta_{\text{crü}}$ nach Bröcker:	0,681	0,5	0,333	4,21	5,34	5,63	7,14	11,22	2,36
$\beta_{\text{crü}}$ n. Mann, (Hlz II):	1,465	0,291	0,410	4,69	6,69	5,38	7,67	12,49	3,42
$\beta_{\text{crü}}$ n. Mann (Hlz III) :	0,294	0,829	0,299	5,37	6,96	7,96	10,30	16,78	3,93
$\beta_{\text{crü}}$ n. Schubert, (Mz II):	0,73	0,73	0,16	8,98	10,52	12,69	14,57	20,12	3,69
$\beta_{\text{crü}}$ n. Schubert, (Hlz II):	0,55	0,56	0,46	4,42	6,58	5,76	8,58	15,57	2,32
Mittelwert aus Mz II u. Hlz II n. Schubert:	-	-	-	6,70	8,55	9,23	-	-	-

Tabelle A.4.1.2: Druckfestigkeiten von Mauerwerk aus Versuchen und Schätzwerte nach verschiedenen Näherungsformeln (Koeffizienten).

Im Einklang mit den Versuchsergebnissen und dem Vergleich zu den Zahlen nach Mann und Bröcker wurde ein Mittelwert aus den Druckfestigkeiten nach Schubert von Mz und Hlz gebildet und den Simulationen der Stein-/Mörtelkombinationen V1 bis V3 zugrundegelegt.

Zugfestigkeit:

Als Zugfestigkeit wurde der ausgewiesene Wert (Kap.2.3.2, Tabelle 2.3.2) $\beta_1 = 0,05$ N/mm² verwendet.

FE-Simulationen

Die Vergleichsrechnungen mit Hilfe materiell-nichtlinearer FE-Simulationen hatten im einzelnen folgende Ziele:

- 1) Die Überprüfung der Qualität der Simulation unter 'reiner Normalkraftbeanspruchung' und Wiedergabe der Rißbildung.

- 2) Die Festlegung von Elastizitätsmodul und Druckfestigkeiten beim jeweiligen Simulationsproblem.
- 3) Die Kalibrierung der nicht direkt übertragbaren Materialparameter des Programms.
- 4) Tragfähigkeitsberechnungen mit der FEM, Abschätzung der Möglichkeiten und Grenzen.

Die Versuche wurden mit einem homogenen FE-Modell des Pfeilers und allseitig gehaltenen Knoten einer verschiebungsgesteuerten Rechnung nachgerechnet. Die Simulationsmodelle des Pfeilers waren an den Lagerflächen in jedem Knoten allseitig gehalten, es wurde also dem Versuch entsprechend eine querdehnbehindernde Lagerung simuliert. Die nach Hilsdorf errechneten E-Moduli des Mauerwerkes wurden entsprechend denjenigen der Komponenten als Werte bei 1/3 der Bruchfestigkeit angenommen und als Tangentenmodul $E_{T,0}$ in die in Abschnitt 4.1.2.4 beschriebene, bilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung (Abb.4.1.7) einbezogen. Aus Bruchspannung und E-Modul ergab sich die Bruchdehnung, so daß die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik auf die vorgegebenen Werkstoffkennwerte abgestimmt wurde. Hernach wurden mehrere Testrechnungen durchgeführt und die Wiedergabe des Rißverhaltens geprüft und durch entsprechende Veränderung von Materialparametern korrigiert.

Überprüfung der Rißwiedergabe

Zur Überprüfung der Wiedergabe von Rissen wurden Grobrechnungen mit den Materialkennwerten (siehe Kap.4.1.2.5) durchgeführt. Die entstehenden Rißbilder wurden auf Plausibilität und Übereinstimmung mit den Photographien von Berger bzw. Egermann (Abb.4.1.6, A.4.1.8 u.a.) überprüft. Als charakteristisch wurden dabei die Längsrisse an der kurzen Seite festgestellt (Abb. A.4.1.10.a), die einerseits mit den im Ziegel durch den Mörtel induzierten Zugspannungen im Zusammenhang stehen, andererseits von der Umlenkung der in der Nähe des Lagerbereiches konzentrierten Druckspannungen herrühren und sich mit größerer Last von den Viertelspunkten zur halben Höhe ausbreiten (Aufreißen). Als Folge der hieraus resultierenden Spannungsumlagerung bilden sich in der Mitte der breiten Seite Längsrisse (Abb.A.4.1.10,b und c), die von halber Pfeilerhöhe ausgehen und von Spannungskonzentrationen ausgelöst werden.

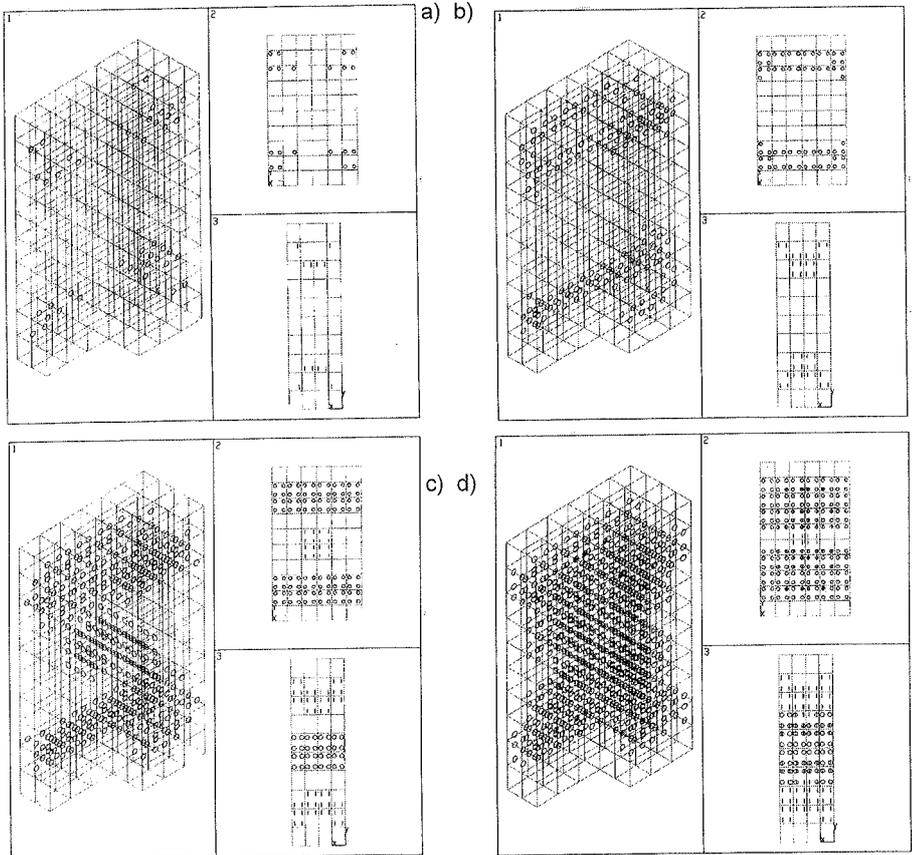


Abb.A.4.1.10: Phasen der Rißbildung beim simulierten Kleinfellerversuch: a) Erstrißbildung b) Rißbildung über die kürzere Seite, c) Rißbildung in Pfeilermittle über die breitere Seite, d) Rißbild vor Abbruch der Simulation. (Kreise stellen Riß und Rißebeane dar, Strich stellt Riß in Seitenansicht dar).

Kalibrierung der nicht direkt übertragbaren Materialparameter des Programms

Von den nicht direkt einsetzbaren Materialparametern haben die Schubübertragungsfaktoren C_0 und C_c den nachhaltigsten Einfluß auf das Rechenergebnis. Rißlänge und Rißverteilung werden durch sie beeinflusst, außerdem kann ein verfrühter Abbruch der Simulation durch deren Belegung induziert werden. Der theoretisch abgeleitete Wert $C_c = 0.4$ (siehe Kap.4.1.2.4) hat sich auch bei den Versuchsrechnungen und den Vergleichen mit der fotografischen Dokumentation der Kleinfellerversuche als optimal erwiesen.

Versuchsergebnisse, Möglichkeiten und Grenzen

Die Ergebnisse der Vergleichsrechnung der Traglasten der Kleinfleiler sind sehr unterschiedlich, wie aus Tabelle A.4.1.3 ersichtlich. Bei V1 bis V3 war der Abbruch der Rechnung planmäßig durch Wirkung des Druckversagenskriteriums verursacht. Das Erreichen der Bruchfestigkeit ohne vorheriges numerisches Versagen sowie die Errechnung der Druckfestigkeit mit einer hohen Genauigkeit (Abweichung bei V1-V3 und V6/2 : 0,9%) sprechen sowohl für die Qualität der zugrundeliegenden Materialdatensätze, als auch die Einstellung der Steuerungsparameter des nichtlinearen Rechenprozesses. Die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen zu den Kleinfleilerversuchen mit höherer Festigkeit (V4, V5 und V6/1) weichen stärker ab, auch von der vorgegebenen Bruchspannung. Weitere Versuchsrechnungen haben gezeigt, daß dieser Effekt mit der geringen Zugfestigkeit im Zusammenhang steht. Werden die Werte von β_t um 50% erhöht (dies würde eine Schätzformel nach Schubert [154] ergeben), nähert man die vorgegebene Bruchspannung mit wesentlich besserer Genauigkeit an. Die Anpassung des Materialdatensatzes auch anderer Materialparameter (C_σ , C_c , ν) führt schließlich zur selben Genauigkeit wie in den Rechnungen V1-V3. Die Gegenrechnungen V6/1 und V6/2 wurden zur Überprüfung des Simulationsmodells bei weichen Materialien benutzt. Die guten Ergebnisse von V6/2 lassen ebenfalls auf aussagefähige Simulationen mit dem verwendeten typischen Materialdatensatz für historisches Mauerwerk erwarten.

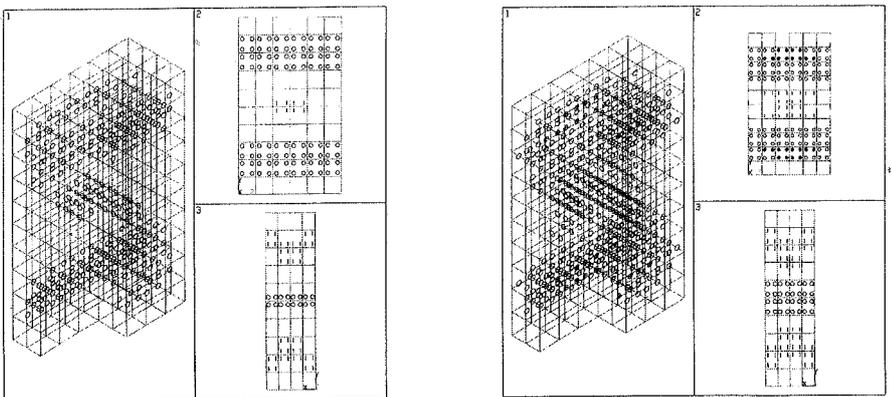


Abb.A.4.1.11: Rißbilder der Simulation eines steifen ($E_T = 12000$, links) und weichen ($E_T = 4000$, rechts) Kleinfleilers bei gleicher Belastung. (Kreise stellen Riß und Rißebeane dar, Strich stellt Riß in Seitenansicht dar).

Versuch	Berger					Egermann
	V1	V2	V3	V4	V5	V6/1,V6/2
Materialkomponenten	MA + Z I	MA + ZII	MB + ZI	MB + ZII	MC + ZIII	
Versuchsbruchspannung $\beta_{\text{crü,v}}$ [MN/m ²] (Var.-koeff.)	6,16 (21,6)	7,9 (10,1)	7,9 (17,5)	13,8 (21,0)	23,4 (14,4)	5,3 -
Materialwerte Mauerwerk						
E-Modul (nach Hilsdorf) [MN/m ²]	6485	6206	9001	8478	16736	3000
Quotient $E/\beta_{\text{crü,v}}$	1053	785	1139	614	712	565/800*
Geschätzte Bruchfestigkeit $\beta_{\text{crü}}$ (Tab. 2) [MN/m ²]	6,70	8,55	9,23	14,57	20,12	5,3/3,69*
Zugfestigkeit β_1 [MN/m ²]	0,150	0,20	0,21	0,36	0,50	0,05*
Materialwerte der FE-Rechnung						
Tangentenmodul $E_{t,0}$ [MN/m ²]	6500	6200	9000	8500	16750	3000
Sekantenmodul E_s [MN/m ²]	4875	4650	6750	6375	12563	4000
Verfestigungsmodul $E_{t,1}$ [MN/m ²]	3250	3100	4500	4250	8375	2000
Materialdruckfestigkeit $\beta_{\text{crü}}$ [MN/m ²]	8,93	11,40	12,31	19,43	26,83	7,07/5,03
Bruchdehnung $\varepsilon_{\text{crü}}$ [‰]	1,38	1,84	1,37	2,29	1,60	2,36/1,61
Zugfestigkeit [MN/m ²]	0,15	0,20	0,21	0,36	0,50	0,05
Querdehnung ν	0,12					0,1
Max. Verschiebung [m]	1,26 · 10 ⁻³ m					
Ergebnisse						
Max. Lastfaktor	0,50	0,66	0,43	0,79	0,54	0,44/0,42
Bruchdehnung $\varepsilon_{\text{crü}}$ [‰]	-1,50	-2,00	-1,29	-2,37	-1,56	-1,32/-1,26
Spannungsbereich im Pfeilerquerschnitt beim letzten konvergenten Lastschritt [MN/m ²]	-6,29	-7,99	-8,16	-13,42	-18,49	-4,36/-3,50
	-7,07	-8,98	-8,81	-15,14	-19,86	-5,02/-4,17
Durchschnittliche Bruchspannung [MN/m ²]	-6,68	-8,49	-8,37	-14,29	-19,16	-4,73/-3,75
Abweichung vom Versuchsergebnis [%]	+8,4	+7,4	+6,9	+3,5	-18,1	-9,0/ -
Abweichung v.d. vorgeg. Druckfestigkeit ** [%]	-0,3	-0,7	-0,9	-1,9	-4,9	-9,0/+1,6
* siehe Materialkennwerte für historisches Mauerwerk (Kapitel 4.2.2.3).						
** ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers (siehe Tabelle 3).						

Tabelle A.4.1.3: Versuche nach Berger [74] und Nachrechnung mit materiell-nichtlinearer FEM.

Die Auswertung der Rißbilder der unterschiedlichen Pfeilerrechnungen läßt eine ungefähre, prinzipielle Übereinstimmung der Verteilungen erkennen. Die Unterschiede liegen in der Dichte bzw. Anzahl der Rißlokationen. Ist das Material weicher, verstärkt sich die Rißbildung im Bruchzustand (Zerbröseln) (V1, V6) gegenüber den Pfeilern aus steiferem Material (V5) (Abb. A.4.1.11). Bei allen Simulationen ist eine Nivellierung des Spannungszustandes im Pfeiler zu beobachten derart, daß die Spannungsspitzen, die mit der Lagerung der Pfeiler mit Querdehnbehinderung zusammenhängen, abgebaut werden.

Versuche an Gasbetonsteinen nach Barthel, Jagfeld, Harvey und FE-Vergleichsrechnungen

Die Vergleichsrechnungen zu den Bogenversuchen von Barthel et al. [70] dienen sowohl der Überprüfung der Wiedergabe des Rißverhaltens (Abb.A.4.1.12), hier bei Verschiebungslastfällen, als auch der Überprüfung der Wiedergabe des Einflusses geometrischer Nichtlinearitäten.

Die angegebene Druckfestigkeit der Steine von 2N/mm^2 mußte in der Simulation erhöht werden, weil sie zu vorzeitigem Abbruch der Rechnung führte. Die veränderte Druckfestigkeit wurde auf Basis der Zugfestigkeit ($0,4\text{N/mm}^2$) extrapoliert zu $1/0,025 \cdot 0,4 = 11,4\text{N/mm}^2$. Dies führte zu einer Überschätzung der Versagenslast von ca.

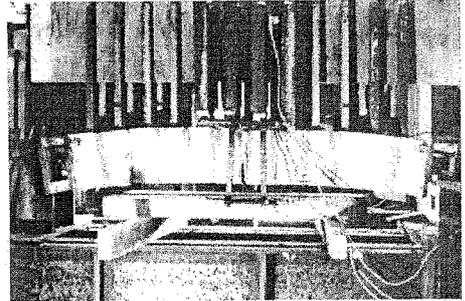


Abb.A.4.1.12: Aufbau der Versuche an Bogen aus Gasbetonsteinen unter Auflagerverschiebung nach Barthel et al. [70].

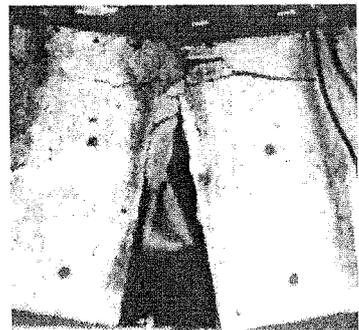
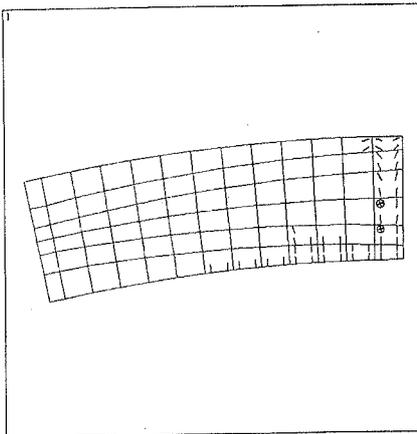


Abb.A.4.1.13: Rißbild des Bogenscheitels aus Versuch 4 nach Barthel et al. [70] und links Rißbild der FE-Vergleichsrechnung.

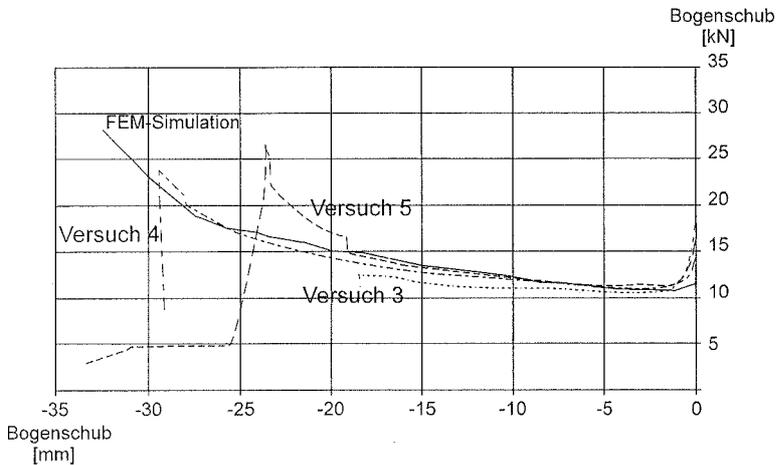


Abb A.4.1.14: Last-Verformungskurve (Horizontale Kämpferkraft über Verschiebung des Widerlagers aus den Versuchen von Barthel et al. [70] und der FE-Vergleichsrechnung.

20%. Die Rißbilder zeigten jedoch gute Übereinstimmung der langen Einrisse in Feldmitte und der mit zunehmender Verschiebung eintretenden Längsrisse im Scheitel (Abb.A.4.1.13). Auch der Verlauf der Last-Verformungskurve aus der FE-Simulation weist eine ähnliche Charakteristik wie die Versuchskurve auf (Abb.A.4.1.14).

Zusätzliche Berechnung für Eigengewicht

Für das Modell wurde schließlich das Rißverhalten unter λ -fachem Eigengewicht berechnet, sowie die Traglast numerisch ermittelt. Zur Kontrolle wurde eine einfache Abschätzung der auftretenden Spannungen gemacht. Hierzu wurde angenommen:

- Innerer Hebelarm im Bogen: $0.55 \cdot (\eta + h)$
 - h: Querschnittsdicke (0.215 m)
 - η : Scheitelhöhe Intrados (0.06 m) => 0.15m
- maximales Moment M aus Eigengewicht ($\lambda = 1$): $1.4 \cdot 10^{-4}$ MNm
- im Programm eingesetzte max. Druckspannung: $\beta_{\text{cu}} = 8 \text{ N/mm}^2$
- Belastete Teilfläche aus Trajektorienbild: $\bar{h} = 2/3 h$
- Querschnittsfläche: $A = h b = 0.095 \text{ m}^2$
- Versagen tritt am Auflager ein (indiziert durch Programm), dort dreiecksförmige Spannungsverteilung => $R = 1/2 \bar{h} \cdot \beta_{\text{cu}}$

Hieraus ergibt sich als überschlägige Traglast :

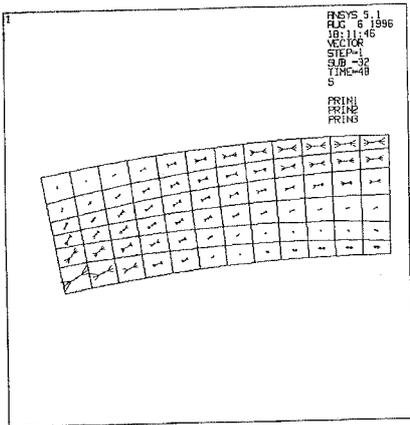
$$2/3 \cdot 1/2 \cdot 0.095 \cdot 8 \cdot 0.15 = 0.038 \text{ MNm} = M_{\max}$$

$$M_{\max} / M = 0.038 / 1.4 \cdot 10^{-4} = \lambda = 271$$

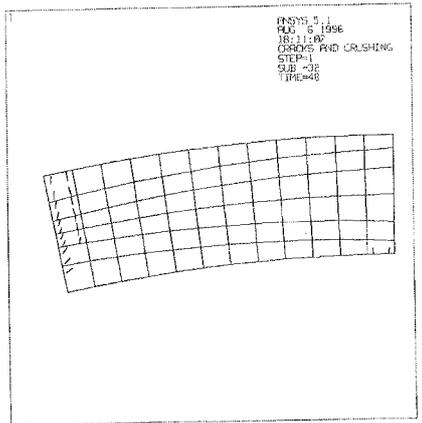
Vom Programm wurden errechnet: $\lambda = 204$

Der Wert liegt ca.25% unter der überschlägigen Kapazität.

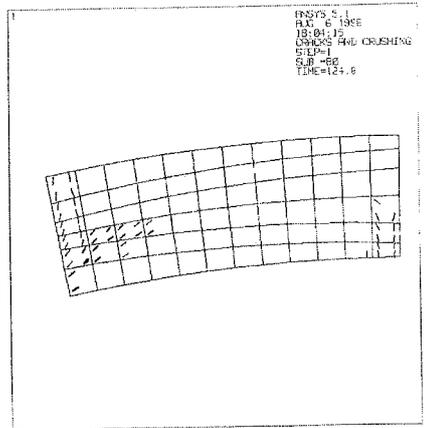
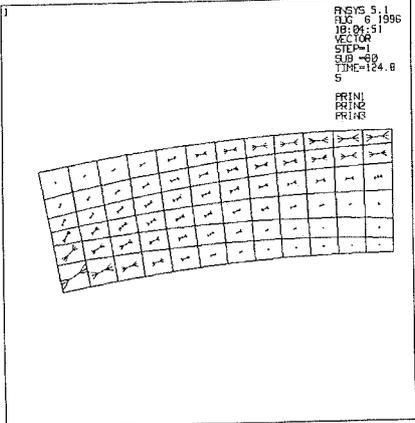
Die Reißbilder zeigen den Abriß des Bogens vom Auflager und das Einreißen in Feldmitte (Abb.A.4.1.15.a), die ersten Längsrisse an der maximal beanspruchten Stelle (untere Kante Auflager, Abb.A.4.1.15.b), die Umwandlung der höchstbeanspruchten Druckzonen mit dreiecksförmiger Spannungsverteilung in trapezförmige Verteilung durch Bildung von

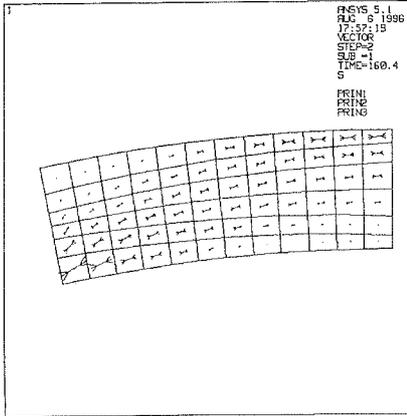


a)

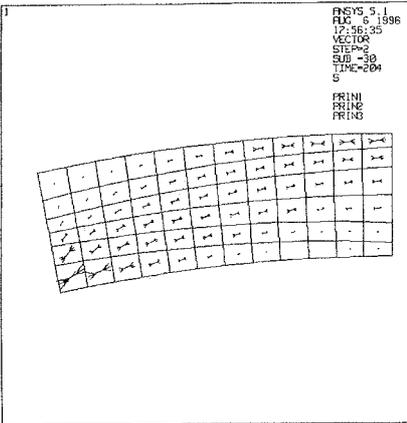
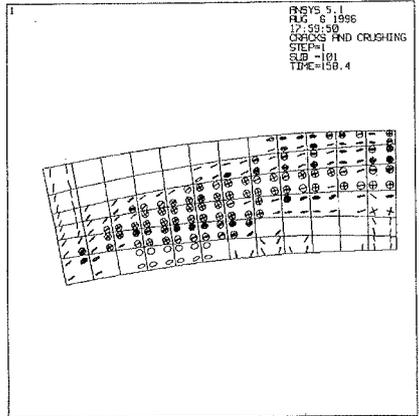


b)





c)



d)

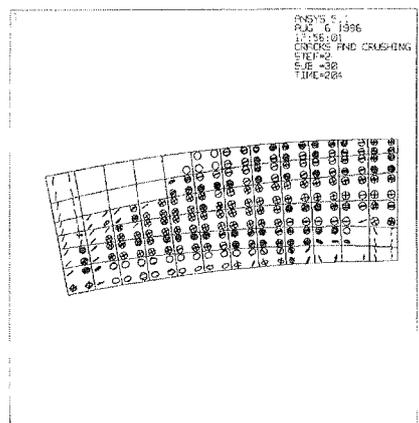


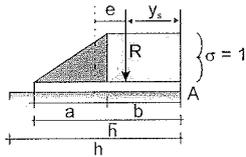
Abb.A.4.1.15: Rißbildung in einem flachen Bogen unter mehrfachem Eigengewicht ('time' = Faktor λ).

weiteren Längsrissen aus Querdehnversagen (Abb.A.4.1.15.c) sowie die beanspruchungsmäßige Konsolidation des Tragwerks durch vollkommene Durchsetzung mit Längsrissen (Abb.A.4.1.15.d).

A.4.2.2.2 Herleitung der Beziehung von $\bar{h}(e)$ für die teilplastischen Zwischenzustände

Für die folgenden beiden teilplastischen Zwischenzustände existieren reelle Lösungen für \bar{h} :

Teilplastischer Zustand beim Fließen eines Querschnitts aus duktilem Material:



Normalkraft und Moment :

$$N = 1/2 \cdot a + b \quad (\text{A.4.2.1})$$

$$M_A = 1/2 \cdot a \cdot (b + a/3) + b \cdot b/2 \quad (\text{A.4.2.2})$$

mit: $N = 1/2 a + b$

$$M = R \cdot e$$

$$b = R - 1/2 \cdot a$$

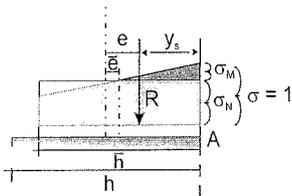
$$y_s = h/2 - e$$

$$\bar{h} = a + b$$

ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Höhe der Teilfläche und R und e:

$$\bar{h} = R + \sqrt{2 \cdot R \cdot e - R^2} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{A.4.2.3})$$

Teilplastischer Zustand beim Fließen eines Querschnitts aus sprödem Material durch Delamination:



Normalkraft und Moment :

$$N = \bar{h} \cdot \sigma_N \quad (\text{A.4.2.4})$$

$$M_A = (\bar{h}^2 \cdot \sigma_M) / 6 \quad (\text{A.4.2.5})$$

mit: $\sigma_M + \sigma_N = 1$

$$\sigma_N \cdot \bar{h} = R$$

$$\bar{e} = \frac{M}{N}$$

und: $\frac{\bar{h}}{2} - \bar{e} = y_s \quad \frac{h}{2} - e = y_s$

$$\bar{h} = 2 \cdot R - \sqrt{4 \cdot R^2 + 6 \cdot R \cdot e - 3Rh} \quad (\text{A. 4.2.6})$$

A.4.2.2.3 Formänderungsenergie des gerissenen Querschnitts

Ausgangspunkt ist die folgenden Definitionen der Formänderungsenergie am momenten- und normalkraftbeanspruchten Querschnitt nach Bufler [77] (TM II, S.95) mit Π^* als spezifische, d.h. volumenbezogene Formänderungsenergie:

$$\Pi = \int_{(V)} \Pi^* dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_{(0)} \int_{(A)} \Pi^* dA \cdot dx \quad (\text{A.4.2.7})$$

Entsprechend der Herleitung (ebenda [77]) spaltet sich die Verformungsenergie folgendermaßen auf:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_{(0)} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right] dx = \Pi_N + \Pi_M \quad (\text{A.4.2.8})$$

Für die Betrachtungen in diesem Zusammenhang ist die querschnittsbezogene Verformungsenergie von Interesse:

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right] \quad (\text{A.4.2.9})$$

Der Zusammenhang zwischen π und unterschiedlichen Momenten-/Normalkraftkombinationen wurde über eine Lastexzentrizität einer Spannungsresultierenden R mit einem Moment $R \cdot e$ formuliert:

$$\text{mit} \quad M = R \cdot e \quad (\text{A.4.2.10})$$

$$N = R \quad (\text{A.4.2.11})$$

$$\pi = \frac{1}{2E} \cdot \left[\frac{R^2}{A(e)} + \frac{(Re)^2}{J(e)} \right] \quad (\text{A.4.2.12})$$

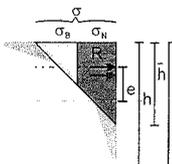
und für die in Abb. 4.2.8 gezeigten Querschnittszustände ermittelt:

a) Für die Flächenwerte des ungerissenen Querschnitts gelten die bekannten Formeln:

$$A = b \cdot h \quad (\text{A.4.2.13})$$

$$J = b \cdot h^3 / 12 \quad (\text{A.4.2.14})$$

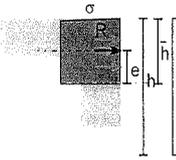
b) Für den gerissenen Querschnitt mit linear-elastischer Spannungsverteilung im Druckbereich gelten die Querschnittswerte:



$$A = \bar{h} \cdot b = 3 b (h/2 - e) \quad (\text{A.4.2.15})$$

$$J = 3/4 b (h/2 - e)^3 \quad (\text{A.4.2.16})$$

c) Für den gerissenen plastizierten Querschnitt ist nur die Fläche relevant. Es gelten die Querschnittswerte:



$$A = \bar{h} \cdot b = 2 b (h/2 - e) \quad (\text{A.4.2.17})$$

π lautet dann für den elastischen, den elastisch gerissenen und den plastisch gerissenen Querschnitt wie folgt:

$$\pi_{el} = \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot b h} \left[1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2} \right] \quad (\text{A.4.2.18})$$

$$\pi_{el,cr} = \frac{4 \cdot R^2}{9 \cdot E} \left[\frac{1}{b \cdot (h - 2e)} \right] \quad (\text{A.4.2.19})$$

$$\pi_{pl,cr} = \frac{R^2}{2E} \left[\frac{1}{b \cdot (h - 2e)} \right] \quad (\text{A.4.2.20})$$

Der Verlauf der Kurven ist in Abbildung 4.2.7. gezeigt, wegen der starken Zunahme von π bei größeren Ausmitten, jedoch nur im Bereich $0 < e < 0.4 h$.

Das Minimum von π des elastischen und des plastizierten Querschnittes ergibt sich für $e = 0$. Die Kurve von π_{el} des ungerissenen, elastischen Querschnitts schneidet die des gerissenen Querschnitts mit elastischer Spannungsverteilung $\pi_{el,cr}$ bei $e = h/6$ (dreifache Nullstelle der Gleichung $\pi_{el,cr} - \pi_{el} = 0$), die Tangentensteigung ist gleich.

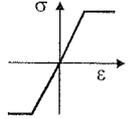
A.4.2.3.3 Herleitung der Interaktionsbeziehungen

Die Interaktionsbeziehungen wurden für Querschnitte mit elastischer, elastisch-zugbegrenzter und plastisch-zugbegrenzter Spannungs-Dehnungs-Beziehung ermittelt (Abb. 4.2.4).

Alle Interaktionsbeziehungen, auch die des gerissenen Querschnittes beziehen sich auf den Schwerpunkt des ursprünglichen, ungeschädigten Querschnitts in Einheitsgrößen ($b = h = 1$) und unter vorgegebener Grenzspannung.

a) Für die Interaktion Φ des ungerissenen, elastischen Querschnitts gilt (nach Burth/ Brocks 'Plastizität', Vieweg Braunschweig 1993 [78]):

$$|n| + |m| \leq 1 \quad (\text{A.4.2.21})$$



bezogen auf Spannungen gilt:

$$\sigma_N + \sigma_M - 1 = 0 \quad (\text{A.4.2.22})$$

$$N/A + M/W - 1 = 0 \quad (\text{A.4.2.23})$$

mit: $A = bh$ und $W = bh^2 / 6$ für den Rechteckquerschnitt, sowie $b=h=1$:

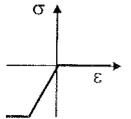
$$N + 6 M - 1 = 0 \quad (\text{A.4.2.24})$$

$$M = \pm 1/6 (1 - N) \quad (\text{A.4.2.25})$$

b) Für den gerissenen Querschnitt mit elastischer Spannungsverteilung wird angeschrieben:

$$N = 3 \cdot (h/2 - e) b \sigma/2 = (R) \quad (\text{A.4.2.26})$$

$$M = 3 \cdot (h/2 - e) e \cdot b \sigma/2 = (R \cdot e) \quad (\text{A.4.2.27})$$



Für Einheitsquerschnitt mit $h=1$, $b = 1$, und $\sigma = 1$:

$$N = 3/4 - 3/2e \quad (\text{A.4.2.28})$$

$$M = 3/4 e - 3/2 e^2 \quad (\text{A.4.2.29})$$

aufgelöst nach e :

$$e = 1/2 - 2/3 N \quad (\text{A.4.2.30})$$

$$M = N \cdot e \quad (\text{A.4.2.31})$$

eingesetzt:

$$M = \pm (1/2 N - 2/3 N^2) \quad (\text{A.4.2.32})$$

c) Für den gerissenen, plastischen Querschnitt gilt

$$N = 2 \cdot (h/2 - e) b \sigma = R \quad (\text{A.4.2.33})$$

$$M = 2 \cdot (h/2 - e) e \cdot b \sigma = (R \cdot e) \quad (\text{A.4.2.34})$$

Für Einheitsquerschnitt mit $h = 1$, $b = 1$, und $\sigma = 1$

$$N = 1 - 2e \quad (\text{A.4.2.35})$$

$$M = 1/2 \cdot e - e^2 \quad (\text{A.4.2.36})$$

aufgelöst:

$$e = 1/2 - N/2 \quad (\text{A.4.2.37})$$

$$M = N \cdot e \quad (\text{A.4.2.38})$$

eingesetzt:

$$M = \pm (1/2 N - 1/2 N^2) \quad (\text{A.4.2.39})$$

Anmerkung

Die obige Beziehung ist identisch mit der von Clemente et al. [81] angegebenen Interaktionsbeziehung für N und M . Diese beruht auf einem starr-plastischen Materialgesetz und ist in Abhängigkeit von einer endlichen Druckfestigkeit σ_0 unter Berücksichtigung des Ausnutzungsgrad des Querschnitts (N/N_0) formuliert:

$$M = \pm \frac{b \cdot s^2}{2} \sigma_0 \frac{N}{N_0} \left(1 - \frac{N}{N_0} \right) \quad (\text{A.4.2.40})$$

Werden $N_0 = b \cdot s \cdot \sigma_0$ und die Einheitsgrößen $s = b = 1$ und $\sigma_0 = 1$ eingesetzt, ergibt sich Gleichung A.4.2.39.

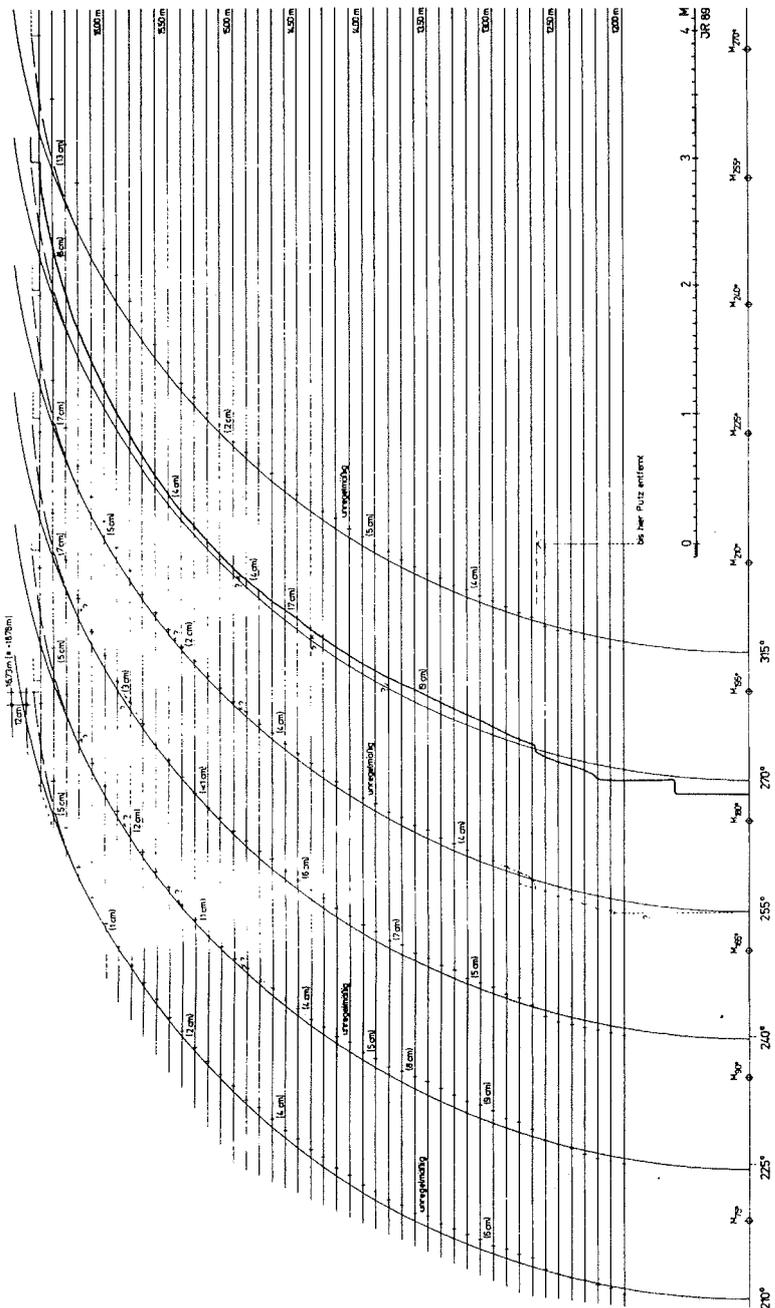


Abb.A.6.3.2: Meridionalaufmaß der Kuppelinnenfläche von Santa Constanza/Rom durch Rasch [245] (Ausschnitt).

Anhang A.10

A.10.1.1 Kettenliniennachweis nach Dorn/Mark [199]

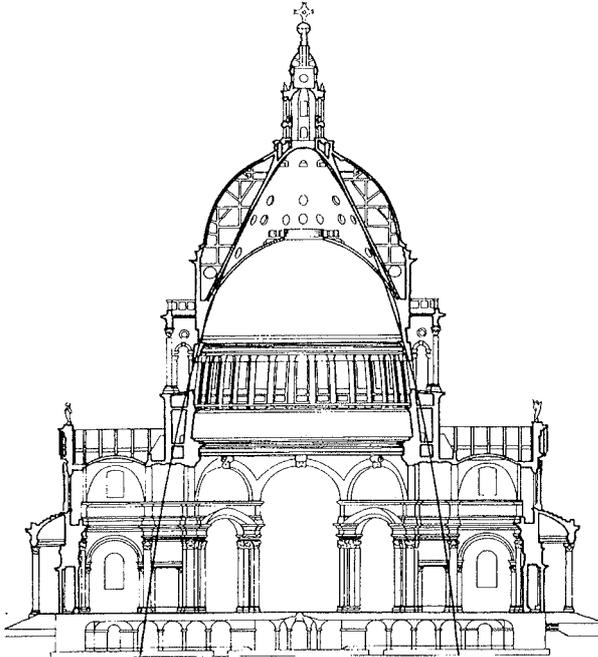


Abb.A.10.1.1: Kettenlinie und Kegelgewölbe der St.Paul's Cathedral im Vergleich nach Dorn/Mark [199].

Beruflicher Werdegang

- 1962 geboren am 22.12 in Pforzheim als fünftes Kind der Eheleute Dipl.-Kfm. Karl Trautz und Dipl.-Übers. Eva Trautz (geb. Schellhorn).
- 1982 Abitur am Reuchlin-Gymnasium in Pforzheim.
- 1982-1983 Wehrdienst als Wehrpflichtiger.
- 1983-1989 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart.
- 1985-1989 Hilfsassistent am Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion.
- 1988 Förderpreis des Deutschen Stahlbaus 1988, 2. Preis.
- 1989 Holzbauförderpreis der Bauingenieure.
- 1989 Diplom am Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion.
- 1990-1991 Mitarbeiter bei Acer-Freeman Fox in Guildford/Surrey, GB.
- 1991 Auszeichnung beim 'Young Engineer Competition' der IABSE - British Group und Tarmac Ltd..
- 1991-1993 Mitarbeiter bei Ove Arup & Partners in der deutschen Niederlassung in Leipzig.
- 1993-1996 Wissenschaftlicher Assistent im Sonderforschungsbereich 230 'Natürliche Konstruktionen', Projekt: 'Geschichte des Konstruierens' am Institut für leichte Flächentragwerke und am Institut für Baustatik an der Universität Stuttgart.
- seit 1997 Mitarbeiter im Ingenieurbüro Bollinger + Grohmann in Frankfurt/M.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 1 (1983) P.Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T.A.Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A.Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A.Burmeister, F.W.Bornscheuer, E.Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H.Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen.
- 6 (1987) A.Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G.Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A.Matzenmiller:
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D.Tao:
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K.Weimar:
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U.Bletzinger:
Formoptimierung von Flächentragwerken.

- 12 (1990) S.Kimmich:
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U.Andelfinger:
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N.Büchter:
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th.J.Hofmann:
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D.Roehl:
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R.Reitinger:
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R.Suanno:
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M.Braun:
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N.Rehle:
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C.Hauser:
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D.Kuhl:
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H.Schmidts:
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H.Wang:
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K.Maute:
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B.Maurer:
Karl Culmann und die graphische Statik.

27 (1998):F.Çirak:

Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von
Flächentragwerken.

28 (1998):M.Trautz:

Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der
Statik.