

✓

BERECHNUNG KREISZYLINDRISCHER SILOS AUF ELASTISCHER UNTERLAGE

von

KLAUS TOMPERT



Bericht Nr. 74 - 3

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1974



Berichte können durch das Institut für Baustatik der
Universität Stuttgart, 7000 Stuttgart 1, Keplerstr. 11,
Postfach 560, bezogen werden.

Dieser Bericht wurde unter dem Titel "Beitrag zur Berechnung kreiszyklindrischer Silos auf elastischer Unterlage" als Dissertation von Herrn Klaus Tompert dem Fachbereich 11, konstruktiver Ingenieurbau, der Universität Stuttgart am 29.10.1973 vorgelegt. Die mündliche Doktorprüfung fand am 25.2.1974 statt.

Berichter waren:

Professor Dr.-Ing.Dr.-Ing.E.h. Fritz Leonhardt
Professor Dr.-Ing. Friedrich W. Bornscheuer

ZUSAMMENFASSUNG

Der Spannungs- und Verformungszustand kreiszylindrischer Silos wird wesentlich von den Deformationseigenschaften des Baugrunds und von der Art der Aussteifung des oberen Schalenrands beeinflusst. Für eine linear elastische Unterlage - dargestellt durch ein System gekoppelter Federn - wird eine Methode entwickelt, mit deren Hilfe das Gesamtsystem 'Silo + Baugrund' berechnet werden kann.

SUMMARY

Stresses and displacements of circular cylindrical silos are essentially influenced by the deformation response of the foundation and the way of stiffening the upper edge of the shell. For a linear elastic support represented by a system of coupled springs the method has been developed in order to solve the soil-structure-interaction problem.

RÉSUMÉ

Les états de contrainte et de déformation des silos de forme d'un cylindre circulaire sont essentiellement déterminés par les caractéristiques de déformation du sol de fondation et par la manière par laquelle le bord supérieur du voile est renforcée. L'auteur développe une méthode valable pour un modèle de fondation d'une élasticité linéaire - représenté par un système de ressorts accouplés - qui permettra de calculer l'ensemble du système 'silo + fondation'.

INHALTSVERZEICHNIS	Seite
Schrifttumsverzeichnis	5
Bezeichnungen	13
1. Einleitung	17
2. Berechnungsverfahren	25
2.1 Geometrie und Belastung	
2.2 Zur Wahl des Verfahrens	
3. Definition der statisch Überzähligen	33
4. Die Verformungen des Baugrunds	39
4.1 Ansatz für die Verformungen	
4.2 Baugrundmodell (Allgemeines Federmodell)	43
4.3 Modell der Gründungsfläche	47
4.3.1 Geometrie	
4.3.2 Grundbeziehungen für die Ver- schiebungen des Baugrunds im Be- reich der Gründungsfläche	49
4.4 Gleichgewichtsbedingungen	53
4.4.1 Knotenlasten am i - ten Ring- element	
4.4.2 Gleichgewichtsbedingungen am i - ten Ringelement	60
4.5 Verträglichkeitsbedingungen am i - ten Ringelement	61
4.6 Federkräfte und Baugrundverformungen	65
4.7 Berechnung der Federmatrizen bei Betrachtung des Baugrunds als elastisch-isotroper Halb- raum	71
4.7.1 Vertikale Oberflächenverschiebungen des homogenen elastisch-isotropen Halbraums	
4.7.2 Vertikale Oberflächenverschiebungen eines unregelmäßig geschichteten Bau- grunds (Näherungsweise Berechnung)	77
5. Die Verformungen des Überbaus	81
5.1 Äußere Belastung	
5.1.1 Kraftgrößen im statisch bestimmt ge- lagerten Grundsystem	82
5.1.2 Verformungen des Fundamentrings	85
5.2 Einheitslastzustände	87

5.3 Superposition	94
6. Verträglichkeitsbedingungen am Gesamtsystem	96
6.1 Starrkörperverschiebungen	
6.2 Baugrundverschiebungen, die im Überbau Spannungen hervorrufen	99
6.3 Verträglichkeitsbedingungen	102
7. Superposition der Schnittgrößen und Verformungen	105
7.1 Baugrund	
7.2 Überbau	106
8. Zahlenbeispiele	107
8.1 Vorbemerkungen	
8.2 Numerische Untersuchungen zur Festlegung einer praktisch sinnvollen Anordnung der Federelemente	109
8.2.1 Aufteilung der Gründungsfläche in radialer Richtung (Anzahl der Fe- derelemente pro Ringelement)	
8.2.2 Aufteilung der Gründungsfläche in tangentialer Richtung (Anzahl der Ringelemente)	111
8.2.3 Ergebnis der Voruntersuchungen	113
8.3 Sonderfälle der vollständigen Biegetheorie der Kreiszylinderschale	114
8.3.1 Membrantheorie	115
8.3.2 Dehnungslose Verformungen	116
8.4 Ergebnisse und Beurteilung ausgewählter Beispiele	121
8.4.1 Serie I	122
8.4.2 Serie II	127
9. Zusammenfassung	131
Anhang A : Darstellung der Zahlenergebnisse	133

SCHRIFTFUMSVERZEICHNIS

- [1] Borowicka, H.: Druckverteilung unter elastischen Platten.
Ingenieur-Archiv 10 (1939) 2, S.113-125
- [2] Boussinesq, J.: Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.
Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [3] Cheung, Y.K.,
Zienkiewicz, O.C.: Plates and Tanks on Elastic Foundations - an Application of the Finite Element Method.
Int.J.Solids and Structures (1965), S.451-461.
- [4] De Beer, E.,
Graßhoff, H.,
Kany, M.: Die Berechnung elastischer Gründungsplatten auf nachgiebigem Untergrund.
Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr.1515, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1966.
- [5] Deninger, A.: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer und durch Wandscheiben ausgesteifter rechteckiger Gründungsplatten.
Dissertation, TH Karlsruhe, 1964.
- [6] Dimitrov, N.: Der Balken und die Platte als Gründungskörper.
Habilitationsschrift, TH Karlsruhe, 1955.

- [7] Flügge, W.: Stresses in Shells.
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/
New York, 3.Auflage, 1966.
- [8] Girkmann, K.: Flächentragwerke.
Springer-Verlag, Wien, 6.Auflage, 1963.
- [9] Gould, Ph.L.: Differential Settlement of
Hyperbolic Cooling Towers.
Proc. of the ASCE, Journal of the
Structural Division (1972) ST 10,
S.2207-2221.
- [10] Graßhoff, H.: Ein einfaches Näherungsverfahren
zur Berechnung elastisch gebetteter
Balken.
Bautechnik 28 (1951) 7/8, S.160-
163 und S.189-191.
- [11] Graßhoff, H.: Die Sohldruckverteilung unter
zentralsymmetrisch belasteten,
elastischen Kreisplattenfundamenten.
Bautechnik 30 (1953) 12, S.352-358.
- [12] Graßhoff, H.: Die Berechnung einachsiger ausgesteif-
ter Gründungsplatten.
Bautechnik 32 (1955) 12, S.396-397.
- [13] Graßhoff, H.: Berechnung elastischer Flächen-
gründungen.
In: Grundbautaschenbuch, Bd.I,
Verlag W.Ernst und Sohn, Berlin/
München, 2.Auflage, 1966, S.549-
576.

- [14] Graßhoff, H.: Das steife Bauwerk auf nachgiebigem Untergrund.
Ein Näherungsverfahren zur Berechnung elastischer Flächengründungen.
Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin/
München, 1966.
- [15] Grundbau-
taschenbuch Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin/
München, 1966.
- [16] Habel, A.: Die auf dem elastisch-isotropen Halbraum aufruhende zentralsymmetrisch belastete elastische Kreisplatte.
Bauingenieur 18 (1937) 15/16,
S. 188-193.
- [17] Habel, A.: Näherungsberechnung des auf dem elastisch-isotropen Halbraum aufliegenden elastischen Balkens.
Bauingenieur 19 (1938) 5/6,
S. 76-80.
- [18] Hain, H.: Zur Ermittlung der Auflagerkraft-Einflußflächen schiefwinkliger Platten.
Dissertation, TH Hannover, 1963.
Abgedruckt in: Abh. der Braunsch. Wiss. Gesellschaft 15 (1963), S. 80-132.
- [19] Hayaschi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921.
- [20] Hetényi, M.: Beams on Elastic Foundation.
University of Michigan Press,
7. Auflage, 1964.
- [21] Hoppe, H.: Über Erfahrungen mit Kollokationsverfahren bei zweidimensionalen Randwertaufgaben.
ZAMM 47 (1967), T 52/54.

- [22] Kany, M.: Berechnung von Flächengründungen.
Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin, 1959.
- [23] Kerr, A. D.: Elastic and Viscoelastic Foundation
Models.
Transactions of the ASME, Journal
of Applied Mechanics (1964),
S. 491-498.
- [24] Knostman, H. D., Collocation and Eigenfunctions in
Silverman, I. K.: Plane Elastostatics.
Proc. of the ASCE, Journal of the
Engineering Mechanics Division,
(1968) EM 3, S. 797-810.
- [25] Krüger, U.: Beitrag zur Biegetheorie der Kegel-
schale mit linear veränderlicher
Wanddicke.
Dissertation, TH Stuttgart, 1966,
S. 73 ff.
- [26] Luchner, H., Neuartige Bauweise bei der Herstellung
Lindner, H.: eines vorgespannten Klinker-
silos.
Beton- und Stahlbetonbau 67 (1972)
11, S. 241-246.
- [27] Neményi, P.: Tragwerke auf elastisch nachgiebiger
Unterlage.
ZAMM 11 (1931) 6, S. 450-463.
- [28] Netzel, D.: Beitrag zur wirklichkeitsnahen
Berechnung und Bemessung einachsige
ausgesteifter, schlanker Gründungs-
platten.
Dissertation, Universität Stuttgart,
1972.

- [29] Novoshilov, V.V.: Thin Shell Theory.
P.Noordhof, Groningen, The Netherlands, 2.Auflage, 1964.
- [30] Ohde, J.: Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern.
Bauingenieur 23 (1942) 14/16 und 17/18.
- [31] Orlov, G.,
Saxenhofer, H.: Balken auf elastischer Unterlage.
Verlag Leemann, Zürich, 1963.
- [32] Peters, H.L.: Bemessung und Konstruktion der Einzelbauteile. Vortrag innerhalb der Tagung: Naturzugkühltürme, ihre Festigkeitsberechnung und Konstruktion.
Abgedruckt in: Berichte aus dem Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Heft 1, 2.Auflage, Vulkan-Verlag, Essen, S.76-83, 1970.
- [33] Pflanz, E.: Untersuchungen über die Druckverteilung unter belasteten Balken auf nachgiebiger Unterlage.
Ingenieur-Archiv 12 (1941) 4, S.201-221.
- [34] Pieper, K.,
Martens, F.,
Kroll, D.,
Wagner, K.: Silos für Zementklinker.
Beton (1970) 9, S.395-399.
- [35] Prager, W.: Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen.
ZAMM 7 (1927) 5, S.354-360.

- [36] Ramm, E.: Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie. Anwendung der verbesserten Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimum) als Randverfahren. Dissertation, Universität Stuttgart, 1972, S.105 ff.
- [37] Schade, D.: Über das Zusammenwirken zwischen Bauwerk und Baugrund. Straße-Brücke-Tunnel 23 (1971) 10, S.267-271.
- [38] Schleicher, F.: Zur Theorie des Baugrunds. Bauingenieur 7 (1926) 48/49, S.931-935 und S.949-952.
- [39] Schleicher, F.: Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Springer-Verlag, Berlin, 1926.
- [40] Schleicher, F.: Die Verteilung der Bodenpressungen unter starren Gründungskörpern. Bauingenieur 14 (1933) 17/18, S.242-245.
- [41] Sommer, H.: Beitrag zur Berechnung von Gründungsbalken und einseitig ausgesteiften Gründungsplatten unter Einbeziehung der Steifigkeit von rahmenartigen Hochbauten. Dissertation, TH Darmstadt, erschienen in: Fortschritt Berichte, VDI-Zeitschrift, Reihe 4, Nr.3, Juli 1965.

- [42] Stüssi, F.: Baustatik. Bd.1,
Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart,
2.Auflage, 1953.
- [43] Timoshenko, S.,
Woinowsky -
Krieger, S.: Theory of Plates and Shells,
McGraw-Hill, 2.Auflage.
- [44] Tölke, F.: Spannungen und Verformungen im
Baugrund.
Vorlesungen an der Universität
Stuttgart.
- [45] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre. 1.Bd.
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/
Heidelberg, 2.Auflage, 1950.
- [46] Tsai, N.,
Westman, R.A.: Beam on Tensionless Foundation.
Proc. of the ASCE, Journal of the
Engineering Mechanics Division
(1967) EM 5, S.1-12.
- [47] Vlasov, V.Z.,
Leon'tev, U.N.: Beams, Plates and Shells on Elastic
Foundations.
Israel Program for Scientific
Translations, Jerusalem 1966.
- [48] Wieghardt, K.: Über den Balken auf nachgiebiger
Unterlage.
ZAMM 2 (1922) 3, S.165-184.
- [49] Winkler, E.: Die Lehre von der Elastizität und
Festigkeit, Prag, 1867.
- [50] Wunderlich, W.: Differentialsystem und Übertragungs-
matrizen der Biegetheorie allge-
meiner Rotationsschalen.
Dissertation, TH Hannover, 1966.
erschienen in : Schriftenreihe des
Lehrstuhls für Stahlbau der TH Han-
nover, Heft 4.

- [51] Wunderlich, W.: Zur Berechnung von Rotations-
schalen mit Übertragungsmatrizen.
Ingenieur-Archiv 36 (1967),
S.262-279.
- [52] Wunderlich, W.: Zur Biegebeanspruchung von Kühl-
turmschalen bei Fundamentsetzungen.
Berichte aus dem Institut für kon-
struktiven Ingenieurbau, Heft 7,
S.63-71, Vulkan-Verlag, Essen.
- [53] Wunderlich, W.: Der Kühlturm als biegesteife Schale.
(Quelle wie 32 , S.51-64)
- [54] Zimmermann, H.: Die Berechnung des Eisenbahnober-
baus.
Verlag W.Ernst und Sohn, Berlin, 1930.
- [55] Zienkiewicz, O.C.,
Cheung, Y.K.: The Finite Element Method in
Structural and Continuum Mechanics.
McGraw-Hill Publishing Company
Limited, London/New York/ Toronto/
Sydney, 1967.
- [56] Zurmühl, R.: Matrizen. Springer-Verlag, Berlin/
Göttingen/Heidelberg, 3.Auflage, 1961.
- [57] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure
und Physiker.
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/
New York, 4.Auflage, 1963.
- [58] Henke, K.F.: Die Oberflächenverformungen des Halb-
raums unter kreissektorförmiger, biege-
schlaffer Belastung und deren Einfluß
auf die Spannungsverhältnisse in Bogen-
staumauern.
Dissertation, TH Stuttgart, 1959.

BEZEICHNUNGEN

Es werden nur jene Bezeichnungen aufgeführt, die für die gesamte Arbeit gelten. Lokal verwendete Zeichen, die zu Ableitungen von Formeln etc. benötigt werden, sind an den betreffenden Stellen erläutert.

Fußzeiger

G	das Gesamtsystem betreffend	
Ü	den Überbau betreffend	
B	den Baugrund betreffend	
m	Reihenglied der trigonometrischen sinus- und cosinus - Funktionen (Harmonische)	
x ₀	statisch bestimmter Anteil	
x _i	i-te Einheitskraftgröße] statisch unbestimmte Anteile
x	sämtliche Einheitskraftgrößen	
(z, s)	Matrix mit z Zeilen und s Spalten	
st	Starrkörperverschiebungen	

Zur Kennzeichnung von Reihengliedern sind außer den Koordinatenrichtungen im allgemeinen Fall drei Fußzeiger erforderlich (R_{z_1, z_2, z_3}). Um die Übersicht nicht durch eine Häufung von Zeigern zu beeinträchtigen, werden die folgenden Vereinbarungen getroffen:

Fußzeiger	steht für	entfällt, wenn
z_1	G, Ü oder B	aus dem Abschnitt eindeutig hervorgeht, daß nur der Überbau oder nur der Baugrund betrachtet wird.
z_2	m	die Summe aller Harmonischen betrachtet wird
z_3	x ₀ , x _i oder x	die Summe aus statisch bestimmtem und statisch unbestimmtem Anteil betrachtet wird.

Kopfzeiger

- (c) für Amplituden von cosinus - Gliedern
 (s) für Amplituden von sinus - Gliedern

Geometrie (siehe auch Bilder 2.1 und 4.13)

x - y - z	Kartesisches Koordinatensystem im Halbraum
x - r - φ	Zylinderkoordinaten (Ursprung = Schnittpunkt der Zylinderachse mit der Gründungsebene)
x - z - φ	Krummliniges orthogonales Koordinatensystem
t [m]	Schalendicke
ϱ [m]	Schalenlänge
a [m]	Schalenradius
a_F, a_A [m]	Radius der Schwerlinie
b_F, b_A [m]	Breite
h_F, h_A [m]	Höhe
e_F, e_A [m]	Exzentrizität der Schwerlinie des Fundament bzw. Aussteifungsrings bezogen auf die Schalenmittelfläche

Materialkonstanten

E [Mp/m ²]	Elastizitätsmodul des Baustoffes der Schale
E_S [Mp/m ²]	Elastizitätsmodul des Bodens
E_F, E_A [Mp/m ²]	Elastizitätsmodul
G_F, G_A [Mp/m ²]	Schubmodul
μ [1]	Querkontraktionszahl des Baustoffes der Schale
μ_S [1]	Querkontraktionszahl des Bodens

Lastgrößen

p_x, p_φ, p_z [Mp/m]	Strecken- bzw. Flächenlasten
P_x, P_φ, P_z [Mp]	Einzellasten
$N_x, N_{x\varphi}, Q_x, M_x, M_{x\varphi}$ [Mp]	Knotenlasten
\mathbf{P} [Mp]	Lastmatrix, Lastvektor
\mathbf{K} [Mp]	Matrix, Vektor der Knotenlasten

Schnittgrößen

$n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}, n_{\varphi x}$	$\left[\frac{Mp}{m} \right]$	Normal- und Schubkräfte
$m_x, m_\varphi, m_{x\varphi}, m_{\varphi x}$	$\left[\frac{Mpm}{m} \right]$	Biege- und Drillmomente
q_x, q_φ	$\left[\frac{Mp}{m} \right]$	Querkräfte
$t_x, \bar{n}_{x\varphi}, s_x, \bar{q}_x$	$\left[\frac{Mp}{m} \right]$	Ersatzschub- bzw. Ersatzquerkräfte
N, Q_1, Q_2	$\left[\frac{Mp}{m} \right]$	Längskraft, Querkräfte
M_1, M_2, M_T	$\left[\frac{Mpm}{m} \right]$	Biegemomente, Torsionsmoment
S	$\left[\frac{Mp}{m} \right] \left[\frac{Mpm}{m} \right]$	Matrix, Vektor der Schnittgrößen
X	$\left[\frac{Mp}{m} \right] \left[\frac{Mpm}{m} \right]$	Matrix, Vektor der Fourierkoeffizienten von S

Weggrößen

u, v, w	$\left[m \right]$	Verschiebungen
j, ψ	$\left[1 \right]$	Verdrehungen
V	$\left[m \right] \left[1 \right]$	Matrix, Vektor der Verschiebungen und Verdrehungen
Y	$\left[m \right] \left[1 \right]$	Matrix, Vektor der Fourierkoeffizienten von V
$\delta_x, \delta_\varphi, \delta_z$	$\left[m \right]$	Verschiebungen des Baugrunds an diskreten Punkten
S	$\left[m \right]$	Matrix, Vektor der Verschiebungen
c	$\left[\frac{m}{Mp} \right]$	Federkonstante, Element der Federmatrix
C	$\left[\frac{m}{Mp} \right]$	Federmatrix
$v_{v, st'}$	$\left. \begin{array}{l} \left[m \right] \\ \left[m \right] \\ \left[m \right] \\ \left[m \right] \end{array} \right\}$	Starrkörperverschiebungen
$v_{h_1, st'}$		
$v_{h_2, st'}$		
$\beta_{st'}$		
$\gamma_{1, st'}$	$\left[1 \right]$	Starrkörperdrehungen
$\gamma_{2, st'}$		

Spannungen

σ_x, σ_φ	$\left[\frac{Mp}{m^2} \right]$	Normalspannungen
$\tau_x, \tau_{\varphi x}, \tau_{x\varphi}$	$\left[\frac{Mp}{m^2} \right]$	Schubspannungen

Sonstige Bezeichnungen

m	$[1]$	Harmonische der trigonometrischen Reihenentwicklung
n_R	$[1]$	Anzahl der Ringelemente
n_F	$[1]$	Anzahl der Federelemente je Ring- element
$n_{ges} = n_R \cdot n_F$	$[1]$	Gesamtzahl der Federelemente
E	$[1]$	Einheitsmatrix
Z	$[1]$	Nullvektor, Nullmatrix

Abkürzungen

KV	Kraftgrößenverfahren
FV	Formänderungsgrößenverfahren
konst	konstant
ges	gesamt
diag[]	Matrix [], die in der Haupt- diagonalen mit Vektoren, Matrizen oder skalaren Größen besetzt ist

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, mit dem der Spannungs- und Verformungszustand kreiszylindrischer Silos unter Berücksichtigung variabler Baugrunddeformationen berechnet werden kann.

Den Anlaß zu dieser Untersuchung gab ein beträchtlicher Schaden an der Dachkonstruktion eines Großraum - Klinkersilos. Geringe unterschiedliche Setzungen des felsigen Baugrunds in Verbindung mit nicht-rotationssymmetrischer Belastung führten zu großen Deformationen des oberen Schalendrands, denen das Pfettendach nicht folgen konnte.

Als Gründungskörper wird ein in Querrichtung starres, doppelt-symmetrisches Kreisringfundament vorausgesetzt, das mit dem elastischen Baugrund und der anschließenden Kreiszyinderschale kontinuierlich verbunden ist. Wegen des in Umfangsrichtung verwendeten trigonometrischen Ansatzes für Verformungen und Schnittgrößen kann die hier vorgelegte Methode auch direkt auf Systeme angewandt werden, die aus Rotationsschalen beliebiger Meridianform zusammengesetzt sind. Bekanntlich lassen sich deren partielle Differentialgleichungen mit einem Produktansatz, der einer Fourierentwicklung in Breitenkreisrichtung entspricht, in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführen [51], [29]. Im folgenden wird jedoch nur auf Systeme Bezug genommen, die aus Kreiszyinderschalen und Kreisringen zusammengesetzt sind.

Auf die Notwendigkeit, bei der Festigkeitsberechnung von Naturzugkühltürmen unterschiedliche Fundamentsetzungen zu berücksichtigen, wurde verschiedentlich hingewiesen [52], [9], [32], [53]. WUNDERLICH untersucht den Einfluß einer in trigonometrischer Form vorgegebenen Setzungskurve auf die Biegebeanspruchung einer Kühlturmschale [52]. Dabei zeigt sich, daß insbesondere das Reihenglied mit dem Verlauf $\cos 2\varphi$ zu Verformungen und Biegebeanspruchungen im gesamten Schalenbereich führt, weil das Tragwerk in der Art dehnungsloser Verformungen ausweicht.

Es ist bekannt, daß unterschiedliche Setzungen auch bei kreiszylindrischen Silos zu großen Deformationen und Biegebeanspruchungen führen können, wenn der obere Schalenrand nur unzureichend ausgesteift ist [34]. LUCHNER und LINDNER [26] gehen beim Bau eines Klinkersilos von einer vorgegebenen Setzungskurve der Form $u = 0.25 \cdot \cos 2\varphi$ [cm] aus. Die Amplitude wird dabei mit dem Hinweis auf die Steifigkeit des Systems (Aussteifung des oberen Schalenrands mit einer Kegelschale) tendenziell zwar richtig, zahlenmäßig aber ziemlich willkürlich reduziert.

Qualitative Untersuchungen dieser Art können zwar zu guten Ergebnissen führen, wenn die Sohldruckverteilung oder die Fundamentverformungen unter Einbeziehung der Bauwerkssteifigkeit einigermaßen richtig geschätzt werden. Insbesondere weiche Systeme folgen einer Setzungskurve mit dem Verlauf $u = u_2^{(c)} \cos 2\varphi$, ohne daß wesentliche Zwangskräfte entstehen. Wenn man in diesem Fall eine als bekannt vorausgesetzte Verschiebung dem System "aufzwingt" und daraus den Spannungs- und Verformungszustand berechnet, so sind durchaus brauchbare Ergebnisse zu erzielen.

Einen besseren und in vielen Fällen allein zutreffenden Einblick in das Tragverhalten solcher Systeme gewinnt man aber nur, wenn das Zusammenwirken von Schale und anderen Bauelementen mit dem Baugrund rechnerisch berücksichtigt wird. Die Spannungen und Verformungen der Kontaktfläche sind dabei so zu bestimmen, daß Gleichgewicht und Verträglichkeit zwischen Baugrund und Überbau besteht. Diese Aufgabe wird im Schrifttum vielfach als Kontaktproblem bezeichnet.

Bei den vorliegenden Lösungen des Kontaktproblems für Platten, Balken und ebene rahmenartige Tragwerke werden die in der Berührungsfläche wirkenden Schubspannungen stets vernachlässigt; es wird lediglich gefordert, daß die vertikalen Verschiebungen (Setzungen) von Bauwerk und Baugrund übereinstimmen. Unter dieser Voraussetzung wurde das Problem erstmals von WIEGHARDT [48] allgemein für den Fall des Balkens auf elastischer Unterlage formuliert und von PRAGER [35] auf das räumliche Problem elastisch

gelagerter Platten erweitert.

Für Bogenstau Mauern, bei denen aus Gleichgewichtsgründen die Horizontalkräfte (Q_x) und die Biegemomente (M_x) infolge Wasserdruck neben den Vertikalkräften (N_x) die Hauptbelastung darstellen, hat H E N K E [58] den Einfluß der Bodendeformationen auf den Spannungszustand des Schalentragwerks in einem Mittelschnitt untersucht. Es zeigt sich, daß dabei die in der Kontaktfläche infolge Q_x und M_x entstehenden horizontalen Oberflächenverschiebungen sowie die Verdrehungen von bedeutendem Einfluß sind und nicht vernachlässigt werden können.

Die Vielzahl der bisher bekannt gewordenen Berechnungsverfahren läßt sich am leichtesten überblicken, wenn die grundlegenden Beziehungen kurz wiederholt werden.

Der Zusammenhang zwischen Belastung und Verschiebungen der Gründungsfläche wird dargestellt durch eine Integralgleichung. Für den ebenen Fall gilt:

$$u_B(x) = \int K(x, \xi) \cdot p(\xi) \cdot d\xi \quad (1.1)$$

Die Integration erstreckt sich über den belasteten Bereich. Die Einflußfunktion $K(x, \xi)$ beschreibt die Nachgiebigkeit der elastischen Unterlage; sie gibt die Setzung an der Stelle x infolge der Einheitslast an der Stelle ξ an. Der Integrand stellt also den Beitrag dar, den die Last $p(\xi) \cdot d\xi$ zu den Setzungen an der Stelle x leistet. Mit diesem Ansatz wird prinzipiell die Tatsache berücksichtigt, daß wegen der Drucküberschneidung im Baugrund die Setzung an einer bestimmten Stelle nicht nur von dem dort herrschenden Sohldruck abhängig ist. Zu der Integralgleichung (1.1) ist noch die Differentialgleichung des Balkens hinzuzunehmen:

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI} \left[p_0(x) - p(x) \right] \quad (1.2)$$

wobei

$p_0(x)$ die Belastung des Balkens
 $p(x)$ der Sohldruck

ist.

Die rechte Seite beinhaltet bereits die Gleichgewichtsaussage,

daß der auf den Baugrund wirkende Sohldruck den Balken in gleicher Größe von unten belastet. Die Kontinuitätsbedingung

$$u_B(x) = u(x) \tag{1.3}$$

verknüpft die Gleichung (1.1) mit (1.2) und führt auf eine Integrodifferentialgleichung, die den Sohldruck als unbekannte Größe enthält. Bei räumlichen Problemen ist von dem Ansatz

$$u_B(x, y) = \iint K(x, y; \xi, \eta) \cdot p(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{1.4}$$

auszugehen oder auch von der entsprechenden Darstellung in Polarkoordinaten

$$u_B(r, \varphi) = \iint K(r, \varphi; \rho, \gamma) \cdot p(\rho, \gamma) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\gamma \tag{1.4a}$$

Zusammen mit der Plattengleichung läßt sich damit das Problem elastisch gelagerter Platten beschreiben.

Geschlossene Lösungen der oben skizzierten Aufgaben existieren der großen mathematischen Schwierigkeiten wegen nur in einigen Sonderfällen.

Für eine angenommene exponentielle Einflußfunktion

$$K(x, \xi) = c_1 \cdot e^{-k|x-\xi|} \tag{1.5}$$

löste WIEGHARDT [48] das ebene Problem des Balkens auf elastischer Unterlage. Jene zunächst willkürlich erschienene Annahme gewann später dadurch an Bedeutung, daß einige - auf andere Weise entwickelte - Bodenmodelle bei entsprechender Wahl der Konstanten c_1 und k auf dieselbe Einflußfunktion führten [23], [47]. Dazu gehört beispielsweise das verallgemeinerte Federmodell, das aus gekoppelten Vertikal- und Drehfedern besteht (vgl. auch [28]). Bei vollkommen weichen Drehfedern kommt man zu dem von WINKLER [49] und später von ZIMMERMANN [54] verwendeten Ansatz, der die Grundlage des Bettungszahlverfahrens bildet:

$$u_B(x) = \frac{1}{c_B} \cdot p(x) \tag{1.6}$$

$\frac{1}{c_B} \dots$ Bettungszahl

Diese Methode ist also in der allgemeinen Formulierung (1.1) für eine exponentielle Einflußfunktion als Sonderfall ent-

halten. Darauf haben NEMÉNYI [27] und später PFLANZ [33] auf Grund mathematischer Überlegungen hingewiesen. Der grundsätzliche Mangel des Bettungszahlverfahrens ist bekannt: Die voneinander unabhängigen Vertikalfedern lassen Setzungen nur unmittelbar an der Laststelle zu, eine Beeinflussung anderer Punkte ist ausgeschlossen. Der vermeintliche Vorteil liegt in der einfacheren mathematischen Behandlung, so daß eine große Anzahl von Lösungen hierfür vorliegen (z.B. [19] , [20] , [31] , [39]). Den komplizierteren Fall, daß in der Kontaktfläche nur Druckspannungen übertragen werden können, behandeln TSAI und WESTMAN [46] .

Verwendet man als Bodenmodell den unendlichen elastisch-isotropen Halbraum, so ergibt sich mit den Lösungen von BOUSSINESQ [2] die Einflußfunktion für den ebenen Fall zu

$$K(x, \xi) = c_2 \ln|x - \xi| \quad (1.7)$$

und für das räumliche Problem

$$K(x, y; \xi, \eta) = c_3 \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (1.8)$$

Mit dieser Annahme liegen strenge Lösungen für die starre Kreisplatte (vgl. [38]) und den starren, unendlich langen Plattenstreifen vor (vgl. [15]). Weitere Sonderfälle sind in [35] behandelt.

Allgemein wird der elastisch-isotrope Halbraum als das derzeit brauchbarste Bodenmodell bei der Lösung von Kontaktproblemen angesehen. Er dient als Rechenmodell verschiedener Stifeszahlverfahren. Zu diesen Verfahren sind neben den "strengen" Lösungen all jene Methoden zu zählen, die das durch Integrodifferentialgleichungen beschriebene Problem für die Einflußfunktion (1.7) bzw. (1.8) näherungsweise lösen.

Bei allen Näherungsverfahren wird die Integralgleichung (1.1), die den Sohldruck $p(\xi)$ als unbekannte Größe enthält, in eine algebraische Gleichung übergeführt. KANY [22] nimmt statt der Setzungsmulde (1.1) eine empirisch vorgegebene Funktion an, BOROWICKA [1] und DE BEER-LOUSBERG (z.B. [4]) entwickeln $p(\xi)$ in eine Potenzreihe mit unbekanntem Koeffizienten, so daß eine Quadratur von (1.1) möglich ist. Eine andere Näherung besteht darin, den Sohldruck abschnittsweise konstant, jedoch mit unbekannter Ordinate, anzunehmen, so daß die Gleichung (1.1) abschnittsweise integriert werden kann [4] , [11] , [12] , [14] , [28] , [41] . Als weitere Vereinfachung wird statt der abschnittweisen Integration eine Summenbildung vorgenommen, indem die konstanten Sohldrücke im Schwerpunkt jedes Abschnitts zu einer Einzellast zusammengefaßt werden. Wegen der Singularität von (1.7) für $x = \xi$ ist im Bereich der Laststelle selbst immer eine Integration durchzuführen [16] , [17] , [30] , [40] .

Zur Formulierung der Kontinuitätsbedingungen (1.3) werden entweder die Differentialgleichungen des Balkens bzw. der Platte durch Differenzgleichungen ersetzt [5] , [16] , [17] oder es wird als baustatische Methode das Kraftgrößenverfahren angewendet, wobei Baugrund und Überbau als statisch unbestimmte Hauptsysteme aufgefaßt werden (vgl. hierzu auch [37]). Die unbekanntes Sohldrücke ergeben sich aus einem linearen Gleichungssystem. Bei Anwendung des Formänderungsgrößenverfahrens [41] oder darauf basierender Methoden [28] wird unter Beibehaltung der vorher genannten Näherungen die zu (1.1) inverse Beziehung hergestellt: die Ordinaten der Sohldrücke oder die Koeffizienten der Potenzreihe werden in Abhängigkeit von den Verschiebungen angegeben. NETZEL [28] berücksichtigt die wegen der Ribildung veränderliche Biegesteifigkeit von einachsig ausgesteiften Stahlbeton-Gründungsplatten und eliminiert die vom Platteneigengewicht nicht überdrückten Zugspannungen.

Weiter sei noch auf die Methoden mit veränderlicher Bettungszahl hingewiesen [6], [10], [13], die in der Regel eine möglichst gute Annäherung an ein Steifzahlverfahren zum Ziel haben. Der grundsätzliche Mangel des Verfahrens mit konstanter Bettungszahl wird dadurch jedoch nicht behoben. So kann z.B. die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Gebäude oder der Einfluß von Lasten, die außerhalb der Gründungsfläche wirken, mit dieser Methode prinzipiell nicht behandelt werden.

Zu erwähnen ist noch die Möglichkeit, Bauwerk und Baugrund, oder auch einzelne Teile davon, mit der Methode der finiten Elemente zu berechnen, die im Zeitalter der Computer besonders geeignet ist [3], [37], [55]. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierauf jedoch nicht eingegangen.

Das vorliegende Verfahren geht im Sinne der angegebenen Näherungen von einer Summendarstellung der Gleichung (1.4a) aus. Für zunächst allgemeine Einflußfunktionen werden sämtliche Spannungs- und Verschiebungskomponenten in der Kontaktfuge berücksichtigt. Ein den Lösungen für Kreiszyklinderschalen und Kreisringe angepaßter trigonometrischer Ansatz für Kontaktkräfte und entsprechende Verformungen führt auf ein lineares Gleichungssystem. Neben der direkten Belastung eines Silos wird auch der Fall behandelt, daß außerhalb der Gründungsfläche wirkende Lasten wegen der Drucküberschneidung im Baugrund zu Beanspruchungen des Fundamentrings und der aufgehenden Konstruktion führen (z.B. Füllgut, Einfluß benachbarter Silos).

Die Übergangsbedingungen zwischen Baugrund und Bauwerk werden mit den getroffenen Näherungen in Anlehnung an die Kollokationsmethode an einer beliebig festzulegenden Zahl von Punkten exakt erfüllt.

Zur Durchrechnung einiger Zahlenbeispiele wird der elastisch-isotrope Halbraum als Baugrundmodell eingeführt und dabei werden nur die Vertikalverformungen infolge lotrechter Lasten berücksichtigt (s.S.71).

Die dafür vorhandenen Beziehungen werden näherungsweise und mit gewissen Einschränkungen auf einen Baugrund mit unregelmäßigem Verlauf der Bodenschichten erweitert, wobei die Unregelmäßigkeiten in der unterschiedlichen Mächtigkeit und/oder in der Unregelmäßigkeit der Steifigkeitszahl E_s ihren Ursprung haben können.

Anhand dieser Beispiele soll der Einfluß der Überbau- steifigkeit auf die Schldruckverteilung und auf das Setzungs- und Tragverhalten kreiszylindrischer Silos aufgezeigt werden. Von besonderem Interesse ist hierbei die Wirkung von Aussteifungen des oberen Silorands.

Die Berechnung der Zahlenbeispiele (siehe Abschnitt 8) wurde mit einem in ALGOL geschriebenen Programm auf der Rechenanlage CD 6600 der Universität Stuttgart durchgeführt.

2. Berechnungsverfahren

2.1 Geometrie und Belastung

Das Bild 2.1 zeigt das aus Baugrund und Überbau bestehende Gesamtsystem. Der Übersichtlichkeit wegen ist außer dem Fundamenttring und der Zylinderschale nur noch ein Aussteifungsring am oberen Rand des Überbaus dargestellt. Mit dem Rechenprogramm können beliebige, aus Kreisringen und Kreiszylinderschalen zusammengesetzte Überbauten berechnet werden. Auch die Lasten p_x , p_φ und p_z seien nur stellvertretend für die äußere Belastung des Überbaus betrachtet.

2.2 Zur Wahl des Verfahrens

Für die Berechnung der Zylinderschale steht die FLÜGGE'sche Biegetheorie zur Verfügung [7], für den doppelt-symmetrischen Kreisringträger daraus abgeleitete Beziehungen [25]. Die simultanen partiellen Differentialgleichungen für die Verschiebungen u , v , w der Zylinderschale werden mit einem trigonometrischen Ansatz in Kreisumfangsrichtung auf ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zurückgeführt. Mit einem entsprechenden Ansatz läßt sich auch der Kreisringträger berechnen. Stellt man die äußere Belastung ebenfalls durch eine trigonometrische Reihe dar, so kann mit den angegebenen Grundlagen bei festgelegten Randbedingungen der Überbau allein für jedes Reihenglied getrennt berechnet werden.

Im folgenden wird die Last $p_x(\varphi) = \text{konst}$ betrachtet. Der Baugrund sei dabei im Bereich der Gründungsfläche vereinfacht dargestellt als ein System von unendlich vielen vertikalen Federn, deren Kennzahlen ortsabhängig sind ($c = c(r, \varphi)$). Ein in Querrichtung starres, in Umfangsrichtung völlig weiches Koppellement verbinde die einzelnen Federn,

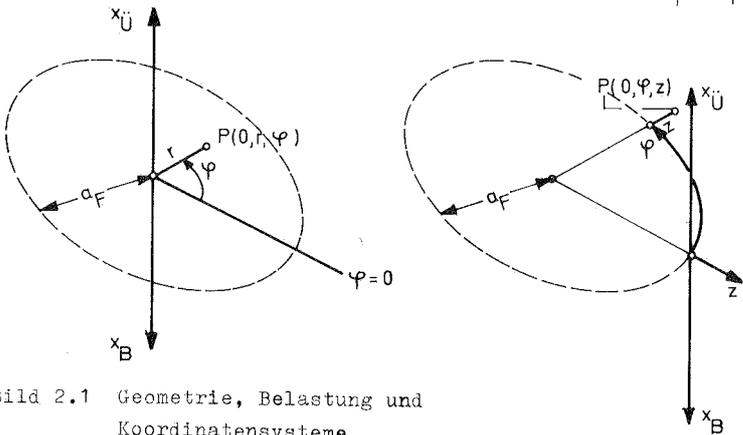
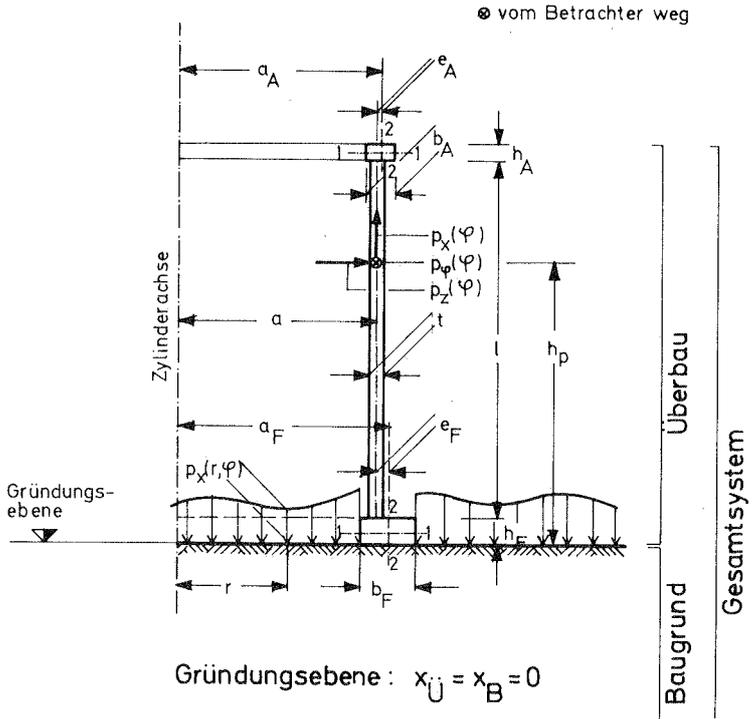


Bild 2.1 Geometrie, Belastung und Koordinatensysteme

so daß der Verformungszustand mit $u(\varphi)$ und $\vartheta(\varphi)$ beschrieben werden kann (Bild 2.2).

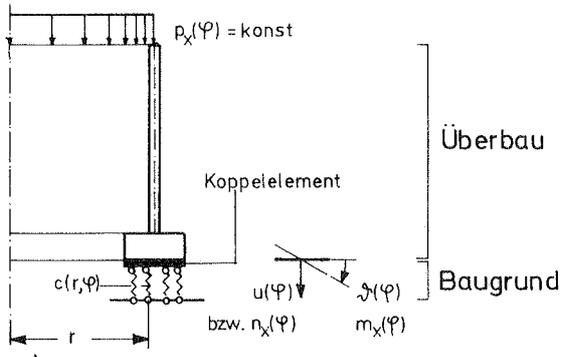


Bild 2.2 System zur Erläuterung des Berechnungsverfahrens

Die Randbedingungen an der Unterseite des Fundamentrings können der elastischen Nachgiebigkeit des Baugrunds wegen zunächst nicht eindeutig festgelegt werden. Das Grundsystem muß deshalb so gewählt werden, daß die Bodenverformungen den Spannungszustand des Überbaus nicht beeinflussen. Es bestehen zwei Möglichkeiten:

- a) Alle Kraftgrößen, die nicht zum äußeren Gleichgewicht notwendig sind, werden ausgeschaltet, so daß der Überbau statisch bestimmt gelagert ist. Die Kraftübertragung läßt sich durch folgendes Gedankenmodell veranschaulichen (Bild 2.3) : Man denke sich zwei kreiszylindrische Wände, zwischen denen sich eine gewichtslose, nicht deformierbare Flüssigkeit befindet; das Volumen der Kammer verändere sich nicht. Der Raum zwischen den Wänden sei oben mit einem reibungsfrei sich bewegenden Ringkolben und daran gelenkig angeschlossenen starren Stäben und unten mit ei-

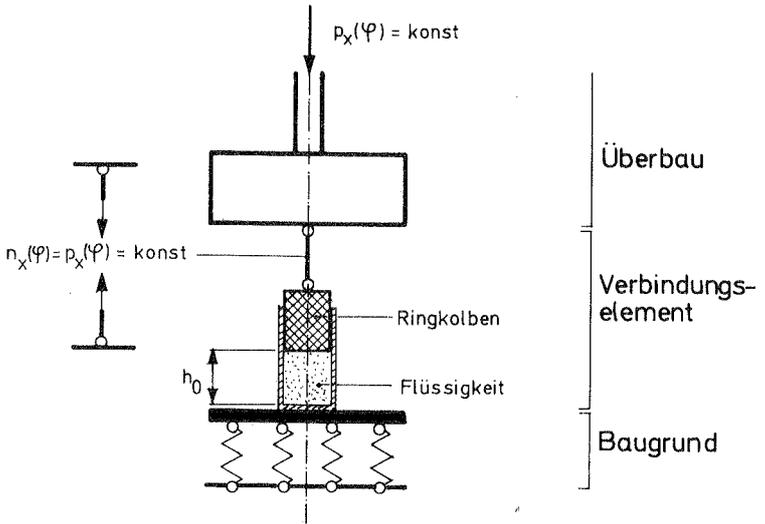


Bild 2.3 Modell zur Kraftübertragung im statisch bestimmten Grundsystem

ner Platte abgeschlossen. Dieses Element stelle die Verbindung zwischen Baugrund und Überbau her. Unter den beschriebenen Bedingungen herrscht in der Flüssigkeitskammer allseitig gleicher Druck, so daß die auf den Baugrund wirkende Last $n_x(\varphi) = p_x(\varphi) = \text{konst}$ ist. Bei Federn mit variablen Kennzahlen sind die Setzungen und Verdrehungen bei konstanter Belastung am Kreisumfang veränderlich. Sie seien in Form einer trigonometrischen Reihe gegeben:

$$U(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^{(c)} \cdot \cos m\varphi + U_m^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.1)$$

$$V(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m^{(c)} \cdot \cos m\varphi + V_m^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.2)$$

Das Reihenglied $u_0^{(c)}$ stellt einen konstanten Anteil dar, um den sich der gesamte Überbau in vertikaler Richtung verschiebt (Bild 2.4).

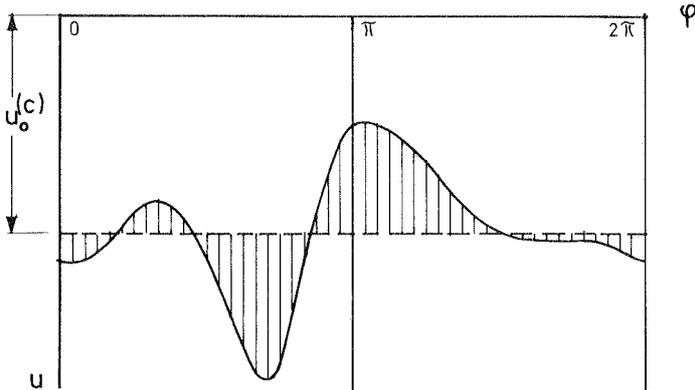


Bild 2.4 Setzungen bei konstanter Belastung $n_x(\varphi)$

Die Höhe h_0 der Flüssigkeitskammer verändert sich durch $u_0^{(c)}$ nicht. Dagegen bewirken alle übrigen Reihenglieder eine Veränderung der Kammerhöhe, ohne daß zusätzliche Verschiebungen des Überbaus entstehen. Die unterschiedlichen Setzungen werden von dem Verbindungselement aufgefangen. Für die Kammerhöhe gilt:

$$h(\varphi) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^{(c)} \cos m\varphi + U_{1m}^{(s)} \sin m\varphi \quad (2.3)$$

Das Volumen der Flüssigkeit bleibt unverändert, da der Reihenausdruck bei Integration über den Kreisumfang verschwindet.

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^{(c)} \cos m\varphi + U_{1m}^{(s)} \sin m\varphi \right) d\varphi = 0 \quad (2.4)$$

Bei dem beschriebenen Modell sind zwar die Gleichgewichts- nicht aber die Kontinuitätsbedingungen erfüllt. Außer dem

konstanten Setzungsanteil entstehen höhere Reihenglieder, die mit den Verformungen des Überbaus nicht übereinstimmen. Zur Herstellung der Kontinuität an der Übergangsstelle müssen zusätzlich Gleichgewichtsgruppen eingeführt werden, so daß unter der Wirkung aller Kräfte Verträglichkeit besteht.

$$\tilde{n}_x(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{n}_{xm}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + \tilde{n}_{xm}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.5)$$

$$\tilde{m}_x(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{m}_{xm}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + \tilde{m}_{xm}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.6)$$

Die unbekanntenen Amplituden berechnen sich aus den Elastizitätsgleichungen (Kraftgrößenverfahren). In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß das Gesamtsystem wegen der oben beschriebenen Koppelung zwischen den einzelnen Harmonischen nicht für jedes Reihenglied einzeln berechnet werden kann.

b) Alle Formänderungsgrößen werden ausgeschaltet, etwa durch Einführung starrer, mit dem Baugrund nicht verbundener Stäbe (Bild 2.5). An der Übergangsstelle sind die

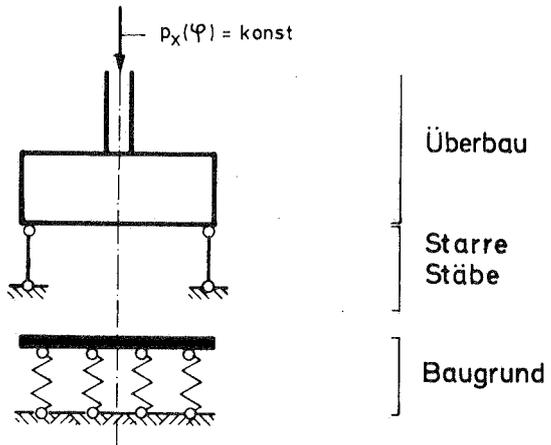


Bild 2.5 Geometrisch bestimmtes Grundsystem

Kontinuitäts- nicht aber die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Es ist dann der Verformungszustand zu finden, der auch dieser Forderung entspricht:

$$\tilde{u}_i(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{u}_m^{(c)} \cdot \cos m\varphi + \tilde{u}_m^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.7)$$

$$\tilde{f}_i^j(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{f}_m^{(c)} \cdot \cos m\varphi + \tilde{f}_m^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.8)$$

Die unbekanntenen Amplituden ergeben sich hierbei nach Abspaltung der Starrkörperverschiebungen aus den Gleichgewichtsbedingungen (Formänderungsgrößenverfahren). Wie bei Anwendung des KV sind auch hier die Harmonischen gekoppelt: eine konstante Setzung ist mit Kräften $n_x(\varphi)$ und Momenten $m_x(\varphi)$ verbunden, die auch höhere Harmonische enthalten.

$$n_x(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} n_{xm}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + n_{xm}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.9)$$

$$m_x(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} m_{xm}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + m_{xm}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \quad (2.10)$$

Beide Methoden sind für das zu berechnende Gesamtsystem als gleichwertig zu betrachten. Dies gilt sowohl für die numerische Stabilität als auch für den Rechenaufwand bei der Bestimmung der unbekanntenen Kraft- und Formänderungsgrößen. Da die Verformungen des Baugrunds in der Regel in Abhängigkeit von den Lasten angegeben werden (siehe Gleichung 1.1), kommt das dieser Darstellung entsprechende KV zur Anwendung. Gegenüber einer Berechnung nach dem FV erspart man sich dabei die Inversion der Federmatrizen.

Zur Berechnung des Überbaus als statisch oder geometrisch unbestimmtes Grundsystem steht außer den beiden genannten Methoden das Übertragungsverfahren zur Verfügung [50].

Dem ALGOL - Programm, mit dem die im Abschnitt 8 angegebenen Beispiele durchgerechnet wurden, liegt das KV zugrunde. Auf eine Darstellung des bekannten Rechengangs, der die Lösung der homogenen und inhomogenen partiellen Differentialgleichungen der Zylinderschale enthält, wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Es sei darauf hingewiesen, daß als Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen für alle Reihenglieder die strenge Partikularlösung und nicht die Membranlösung verwendet wird.

3. Definition der statisch Überzähligen

In der Kontaktfläche zwischen Fundamentring und Baugrund müssen die auf beide Teile wirkenden Kräfte aus Gleichgewichtsgründen einander gleich sein. Die Kontinuität verlangt an der Übergangsstelle gleiche Verformungen von Ring und elastischer Unterlage. Zur Bestimmung der Kräfte und Verformungen nach dem KV werden Überbau und Baugrund als statisch unbestimmte Hauptsysteme aufgefaßt. Es ist zweckmäßig, in die in der Kontaktfuge wirkenden statisch Überzähligen auch die zum äußeren Gleichgewicht notwendigen Anteile einzuschließen; für deren Berechnung stehen die Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen zur Verfügung.

Aus den in der Gründungsfläche entstehenden Spannungen σ_x , $\tau_{x\varphi}$ und τ_{xz} an der Stelle φ ergeben sich durch Integration über die Breite b_F die auf die Länge $ds = 1$ der Ringmittellinie bezogenen Kraftgrößen (Bilder 3.1 und 3.2).

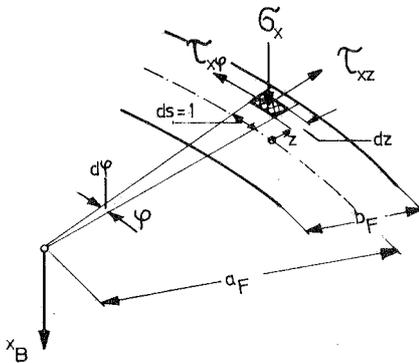


Bild 3.1 Spannungen in der Gründungsfläche

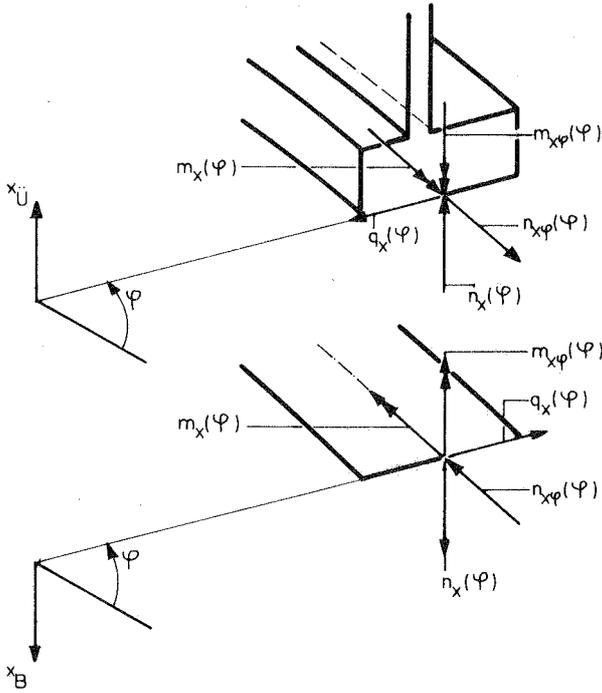


Bild 3.2 Kraftgrößen an der Stelle φ

$$n_x(\varphi) = \int_{-b_F/2}^{+b_F/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a_F}\right) dz \quad (3.1)$$

$$n_{x\varphi}(\varphi) = \int_{-b_F/2}^{+b_F/2} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a_F}\right) dz \quad (3.2)$$

$$q_x(\varphi) = \int_{-b_F/2}^{+b_F/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{a_F}\right) dz \quad (3.3)$$

$$m_x(\varphi) = \int_{-b_F/2}^{+b_F/2} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{a_F}\right) \cdot z \cdot dz \quad (3.4)$$

$$m_{x\varphi}(\varphi) = \int_{-b_F/2}^{+b_F/2} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a_F}\right) \cdot z \cdot dz \quad (3.5)$$

Die Funktionswerte der Kraftgrößen seien an n_R äquidistanten Punkten des Kreisumfangs zu bestimmen. Nach dem Verfahren der harmonischen Analyse läßt sich eine an n_R Stützstellen gegebene oder - wie hier - zu bestimmende periodische Funktion mit den Stützwerten f_i ($i = 1, 2, \dots, n_R$) durch ein trigonometrisches Polynom darstellen, das an den Stützstellen mit der vorgegebenen diskreten Funktion übereinstimmt ("trigonometrische Interpolation" [57]). Bei geradzahligem n_R ist

$$f(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{\frac{n_R}{2}-1} a_m \cdot \cos m\varphi + b_m \cdot \sin m\varphi \right) + a_{\frac{n_R}{2}} \cdot \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.6)$$

Es gilt dann für alle Stellen φ_i (Bild 3.3)

$$f_i = f(\varphi_i) \quad (3.7)$$

Die Ermittlung der n_R Fourierkoeffizienten erfolgt unter der Bedingung, daß die Summe Q aller Fehlerquadrate minimal wird. Im hier vorliegenden Fall der "trigonometrischen Interpolation" gilt exakt $Q = 0$.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n_R} \cdot \sum_{i=1}^{n_R} f_i \\ a_m &= \frac{2}{n_R} \cdot \sum_{i=1}^{n_R} f_i \cdot \cos m\varphi_i \\ a_{\frac{n_R}{2}} &= \frac{1}{n_R} \cdot \sum_{i=1}^{n_R} (-1)^{i-1} \cdot f_i \\ b_m &= \frac{2}{n_R} \cdot \sum_{i=1}^{n_R} f_i \cdot \sin m\varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

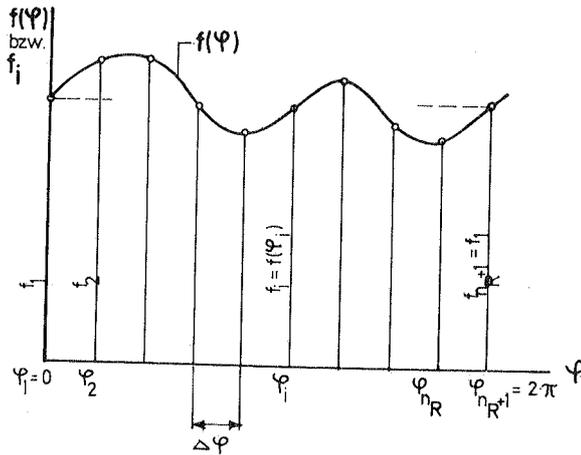


Bild 3.3 Harmonische Analyse einer diskreten Funktion
 $(\Delta\varphi = 2\pi/n_R ; \varphi_i = (i-1)\cdot\Delta\varphi)$

Die Kraftgrößen lassen sich nun in der folgenden Form angeben:

$$n_x(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} n_{x,m}^{(c)} \cos m\varphi + n_{x,m}^{(s)} \sin m\varphi \right) + n_{x, \frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.9)$$

$$n_{x\varphi}(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} n_{x\varphi,m}^{(c)} \cos m\varphi + n_{x\varphi,m}^{(s)} \sin m\varphi \right) + n_{x\varphi, \frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.10)$$

$$q_x(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} q_{x,m}^{(c)} \cos m\varphi + q_{x,m}^{(s)} \sin m\varphi \right) + q_{x, \frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.11)$$

$$m_x(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} m_{x,m}^{(c)} \cos m\varphi + m_{x,m}^{(s)} \sin m\varphi \right) + m_{x, \frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.12)$$

$$m_{x\varphi}(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} m_{x\varphi,m}^{(c)} \cos m\varphi + m_{x\varphi,m}^{(s)} \sin m\varphi \right) + m_{x\varphi, \frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \cdot \varphi \quad (3.13)$$

Damit reduzieren sich die Gleichungen (3.9 bis 3.13) unter Verwendung von (3.17) auf:

$$S_G^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot E_{(5n_R, 5n_R)} \cdot X_G \quad (3.18)$$

Der Vektor X_G enthält die $5 \cdot n_R$ statisch unbestimmten Größen, zu deren Berechnung ebensoviele lineare Gleichungen benötigt werden. Es stehen hierzu die sechs Gleichgewichtsbedingungen des Raums und damit - was später noch zu zeigen ist - $(5n_R - 6)$ Kontinuitätsbedingungen zur Verfügung (vgl. S. 103). Die Multiplikation mit T bewirkt die geforderte Summenbildung. Die Matrix $F^{(\varphi)} \cdot E$ ist nur in der Hauptdiagonalen besetzt und gibt die $5 \cdot n_R$ Wirkungen der Einheitskraftgrößen an. Die Verformungen infolge dieser Einheitslasten sind für Baugrund und Überbau getrennt zu berechnen.

4. Die Verformungen des Baugrunds

4.1 Ansatz für die Verformungen

Die Baugrundverformungen im Bereich des Ringfundaments entstehen durch die Kraftgrößen $S_{\varphi}(\varphi)$ und durch Lasten p_x , die innerhalb oder außerhalb der Ringfläche auf den Boden wirken (vgl. Bild 2.1). Der Punkt A_0 verschiebt sich dabei um $u_0(\varphi)$, $v_0(\varphi)$ und $w_0(\varphi)$ nach A'_0 , der Punkt A_1 um $u_1(\varphi)$, $v_1(\varphi)$ und $w_1(\varphi)$ nach A'_1 (Bild 4.1). Sollen sich Gründungsfläche und Unterseite des in Querrichtung starr angenommenen Kreisringfundaments an allen Berührungstellen gleich verformen, so müssen sich alle Punkte, die vor der Verformung auf der Geraden A_0A_1 liegen, nach der Verformung auf der Geraden $A'_0A'_1$ befinden. Die Entfernung zwischen zwei beliebigen Geradenpunkten bleibt dabei konstant. Damit läßt sich der Verformungszustand an der Stelle φ durch die Verschiebungen des Punktes A_0 und die Verdrehungen der Geraden A_0A_1 angeben. Die einzelnen Verformungsanteile sind in Bild 4.2 getrennt voneinander dargestellt.

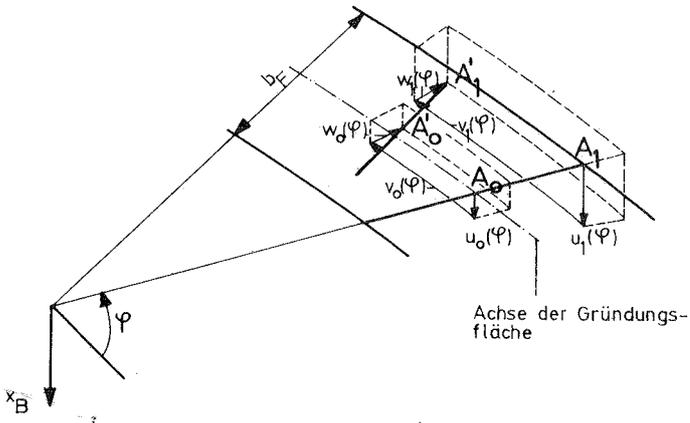


Bild 4.1 Verformungen der Gründungsfläche

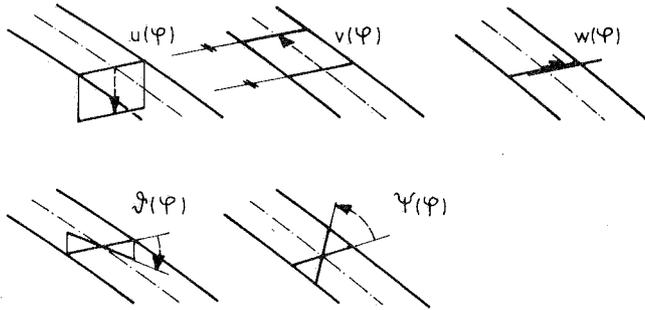


Bild 4.2 Verformungsanteile u, v, w, j, ψ

Entsprechend dem Ansatz für die Kraftgrößen werden die an n_R Stellen des Umfangs zu bestimmenden Verformungen in ein trigonometrisches Polynom entwickelt. Unter der Wirkung von $S_G^{(\varphi)}$ und p_x ist:

$$U(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} U_m^{(c)} \cos m\varphi + U_m^{(s)} \sin m\varphi \right) + U_{\frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \varphi \quad (4.1)$$

$$V(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} V_m^{(c)} \cos m\varphi + V_m^{(s)} \sin m\varphi \right) + V_{\frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \varphi \quad (4.2)$$

$$W(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} W_m^{(c)} \cos m\varphi + W_m^{(s)} \sin m\varphi \right) + W_{\frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \varphi \quad (4.3)$$

$$j(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} j_m^{(c)} \cos m\varphi + j_m^{(s)} \sin m\varphi \right) + j_{\frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \varphi \quad (4.4)$$

$$\psi(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_R/2-1} \psi_m^{(c)} \cos m\varphi + \psi_m^{(s)} \sin m\varphi \right) + \psi_{\frac{n_R}{2}}^{(c)} \cos \frac{n_R}{2} \varphi \quad (4.5)$$

In Matrizenschreibweise gilt analog Gleichung (3.18)

$$V^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot Y \quad (4.6)$$

Auf die formale Multiplikation mit der Einheitsmatrix kann hier verzichtet werden. Im einzelnen bedeuten:

$$V^{(\varphi)} = \begin{bmatrix} U^{(\varphi)} \\ V^{(\varphi)} \\ W^{(\varphi)} \\ J^{(\varphi)} \\ \Psi^{(\varphi)} \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{\alpha} \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \\ \vdots \\ Y_{n_{e|2}} \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

$$Y_m = \begin{bmatrix} U_m^{(c)} \\ V_m^{(c)} \\ W_m^{(c)} \\ J_m^{(c)} \\ \Psi_m^{(s)} \\ U_m^{(s)} \\ V_m^{(c)} \\ W_m^{(s)} \\ J_m^{(s)} \\ \Psi_m^{(c)} \end{bmatrix} \quad (4.6c)$$

Die Matrizen T und $F^{(\varphi)}$ sind durch (3.15) und (3.16) definiert. Der Vektor $V^{(\varphi)}$ enthält schon die superponierten Verformungen. Die einzelnen Anteile entsprechen im formalen Aufbau den Gleichungen (4.1 bis 4.5) und damit auch (4.6). Schreibt man die Superpositionsformel ausführlich und bezeichnet man die Elemente des Vektors X_G mit

x_i ($i = 1, 2, \dots, 5 \cdot n_R$), so ist:

$$V^{(\varphi)} = \underbrace{V_{x_1}^{(\varphi)} \cdot X_1 + \dots + V_{x_i}^{(\varphi)} \cdot X_i + \dots + V_{x_{5n_R}}^{(\varphi)} \cdot X_{5n_R}}_{\text{infolge der überzähligen } S_G^{(\varphi)}} + \underbrace{V_{x_0}^{(\varphi)}}_{\text{infolge Lasten } p_x} \quad (4.7)$$

Der Vektor $V_{x_i}^{(\varphi)}$ gibt die Verformungen infolge $x_1 \cdot \cos m\varphi$ bzw. $x_1 \cdot \sin m\varphi$ für $x_1 = 1$ an. Analog zu (4.6) ist:

$$V_{x_1}^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot Y_{x_1} \quad (4.8)$$

$$V_{x_0}^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot Y_{x_0} \quad (4.9)$$

Führt man diese Beziehungen in (4.7) ein, so wird

$$V^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \left(Y_{x_1} \cdot X_1 + \dots + Y_{x_i} \cdot X_i + \dots + Y_{x_{5n_R}} \cdot X_{5n_R} + Y_{x_0} \right) \quad (4.10)$$

Setzt man für den Klammerausdruck

$$Y_x \cdot X_G + Y_{x_0} \quad (4.11)$$

mit

$$Y_x = \left[Y_{x_1} \quad \dots \quad Y_{x_i} \quad \dots \quad Y_{x_{5n_R}} \right] \quad (4.12)$$

dann ist

$$V^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot \left(Y_x \cdot X_G + Y_{x_0} \right) \quad (4.13)$$

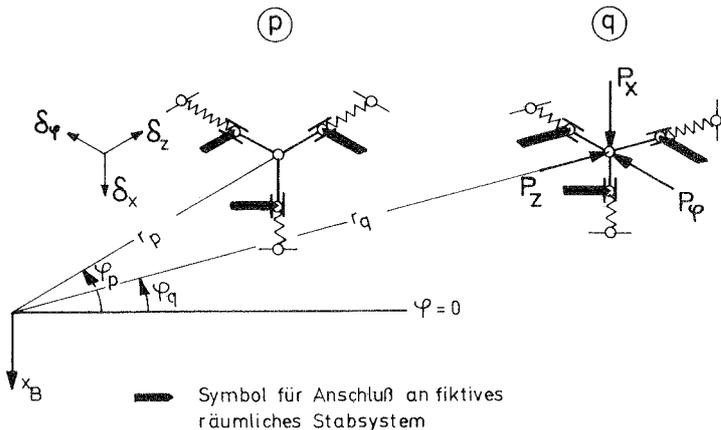
Durch Vergleich mit (4.6) ergibt sich die Beziehung für die Fourierkoeffizienten:

$$Y = Y_x \cdot X_G + Y_{x_0} \quad (4.14)$$

Die obigen Formeln werden später in dieser Form benötigt. Ihre wesentliche Aussage ist, daß im allgemeinen Fall jedes einzelne Reihenglied der Kraftgrößen fünf Verformungen erzeugt (Bild 4.2), von denen jede wiederum in ein trigonometrisches Polynom entwickelt und somit durch n_R Reihenglieder dargestellt wird (Gleichung 4.8). Entsprechendes gilt sinngemäß für Lasten p_x (Gleichung 4.9).

4.2 Baugrundmodell (Allgemeines Federmodell)

Der Baugrund wird durch ein System gekoppelter Federelemente an diskreten Punkten der Gründungsfläche dargestellt (Bild 4.3). Jedes Element bestehe aus drei an einem Punkt gelenkig miteinander verbundenen dehn- und biegestarren Stäben, die in einer Führungsschiene mit einer Feder verbunden sind. Der Punkt p verschiebe sich unter der Wirkung der Lasten P_x , P_φ und P_z an der Stelle q um δ_x , δ_φ und δ_z . Die am Punkt p verbundenen Stäbe bleiben bei dieser Verformung spannungslos. Dieser Verschiebungszustand ist vorstellbar, wenn man sich die Fußpunkte der



Vereinfachte Darstellung des Modells

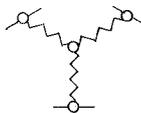


Bild 4.3 Allgemeines Federmodell

Stäbe an den Stellen p und q durch ein räumliches Stabsystem verbunden denkt. Der Zusammenhang zwischen Verformungen an der Stelle p infolge von Lasten an der Stelle q sei gegeben durch den linearen Zusammenhang

$$\delta_{pq} = C_{pq} \cdot P_q \quad (4.15)$$

Dabei ist:

$$\delta_{pq} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.15b)$$

$$P_q = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (4.15c)$$

Die Elemente der Federmatrix C_{pq} geben die Verschiebungen des Punktes p infolge der am Punkt q wirkenden Einheitslasten $P_x = 1$, $P_y = 1$ und $P_z = 1$ an. Der Lastvektor an der Stelle q ist P_q , der Verschiebungsvektor an der Stelle p für Lasten an der Stelle q ist δ_{pq} . Analog zu Gleichung (4.15) gilt für die Verschiebungen des Lastangriffspunktes q:

$$\delta_{qq} = C_{qq} \cdot P_q \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.15) und (4.16) sind im Sinne der im Abschnitt 1 (vgl. Seite 22) beschriebenen Näherungsverfahren eine Summendarstellung der Integralgleichungen (1.4) bzw. (1.4a); gegenüber den dort angegebenen Ansätzen werden jedoch hier sämtliche Last- und Verschiebungsanteile berücksichtigt. Der erwähnte Sonderfall des Bettungszahlverfahrens läßt sich leicht ablesen: die Federmatrizen reduzieren sich hierbei auf das Element c_{xx} . Wegen der fehlenden Beeinflussung benachbarter Punkte gilt:

$$c_{xx} \neq 0 \quad \text{für } p = q$$

$$\text{und } c_{xx} = 0 \quad \text{für } p \neq q$$

Dem Verfahren mit konstanter Bettungszahl entspricht in diskreter Form

$$c_{xx} = \text{konst}$$

Sinngemäß ist bei veränderlicher Bettungszahl

$$c_{xx} = \text{variabel}$$

Für t Lastvektoren \mathbf{P}_q im betrachteten Gebiet ($q = 1, 2, \dots, t$) ergeben sich nach Superposition die Verschiebungsvektoren an s vorgegebenen Stellen ($p = 1, 2, \dots, s$) entsprechend (4.15).

$$\delta_{(st)} = C_{(st)} \cdot P \quad (4.17)$$

Hierin beschreiben die Indices (st) die Gesamtheit der Orte und Ursachen.

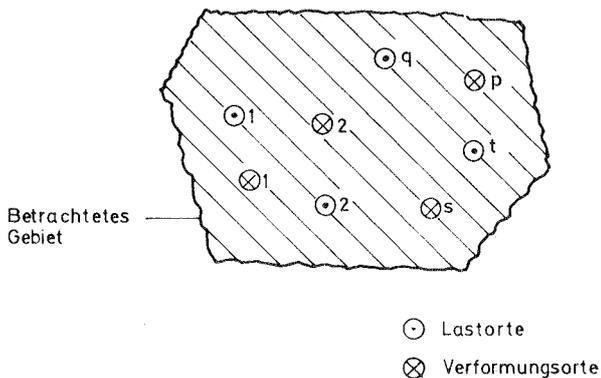


Bild 4.4 Erläuterung zu Gleichung (4.17)

Es bedeuten

$$\delta_{(st)} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_p \\ \vdots \\ \delta_s \end{bmatrix} \quad (4.17a)$$

$$C_{(st)} = \begin{bmatrix} C_{s1} & \dots & C_{sq} & \dots & C_{st} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & \dots & C_{pq} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \dots & C_{sq} & \dots & C_{st} \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_q \\ \vdots \\ p_t \end{bmatrix}$$

$$(4.17c) \cdot \delta_p = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}_p \quad (4.17d)$$

Für die Verschiebungen der Lastangriffspunkte gilt analog

$$\delta_{(tt)} = C_{(tt)} \cdot P \quad (4.18)$$

4.3 Modell der Gründungsfläche

4.3.1 Geometrie

Zur Berechnung der Verformungen im Bereich der Gründungsfläche werden dort in n_R Meridianschnitten jeweils n_P Federelemente nach Bild 4.3 angeordnet (Bild 4.5). Alle Elemente eines Meridianschnitts sollen sich voraussetzungsgemäß so verschieben, daß sie auch nach der Verformung auf einer Geraden liegen (vgl. Bild 4.1). Dies wird erreicht, wenn man sie mit einer starren Koppelstange verbindet. Ein auf diese Weise entstandenes System sei im folgenden mit Ringelement bezeichnet (vgl. Bild 4.5). Die gesamte Gründungsfläche wird aus n_R solchen Elementen gebildet.

Zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Lasten und Verformungen jenes Modells geht man von den Grundbeziehungen (4.17) und (4.18) aus. Hierbei ist die Verbindung der einzelnen Federelemente durch einen starren Stab noch nicht berücksichtigt; erst durch Hinzunehmen der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen für jedes Element läßt sich dessen Verschiebungszustand eindeutig bestimmen. Dies ist selbsterständlich nur dann notwendig, wenn an jedem Ringelement mindestens drei Federelemente vorhanden sind. Bei nur zwei dieser Elemente wäre das System statisch bestimmt und die Auflagerkräfte könnten - unabhängig von der Steifigkeit der Koppelstange - mit den Gleichgewichtsbedingungen allein ermittelt werden. Die Forderung eines in Querrichtung starren Rings ($\hat{=}$ starrer Koppelstange) kann aber erst mit drei oder mehreren Federelementen erfüllt werden. Im folgenden sei deshalb ausschließlich der letzte Fall betrachtet.

Im globalen System beginnt die Indizierung der einzelnen Federelemente und der entsprechenden Last- und Verschiebungsvektoren bei $\varphi = 0$ an der Innenseite und endet bei $\varphi = (n_R - 1) \cdot \Delta\varphi$ an der Außenseite des Rings ($n = 1, 2, \dots, n_{ges}$). Lokal ist am i - ten Ringelement von innen nach außen indiziert ($k = 1, 2, \dots, n_P$). Der

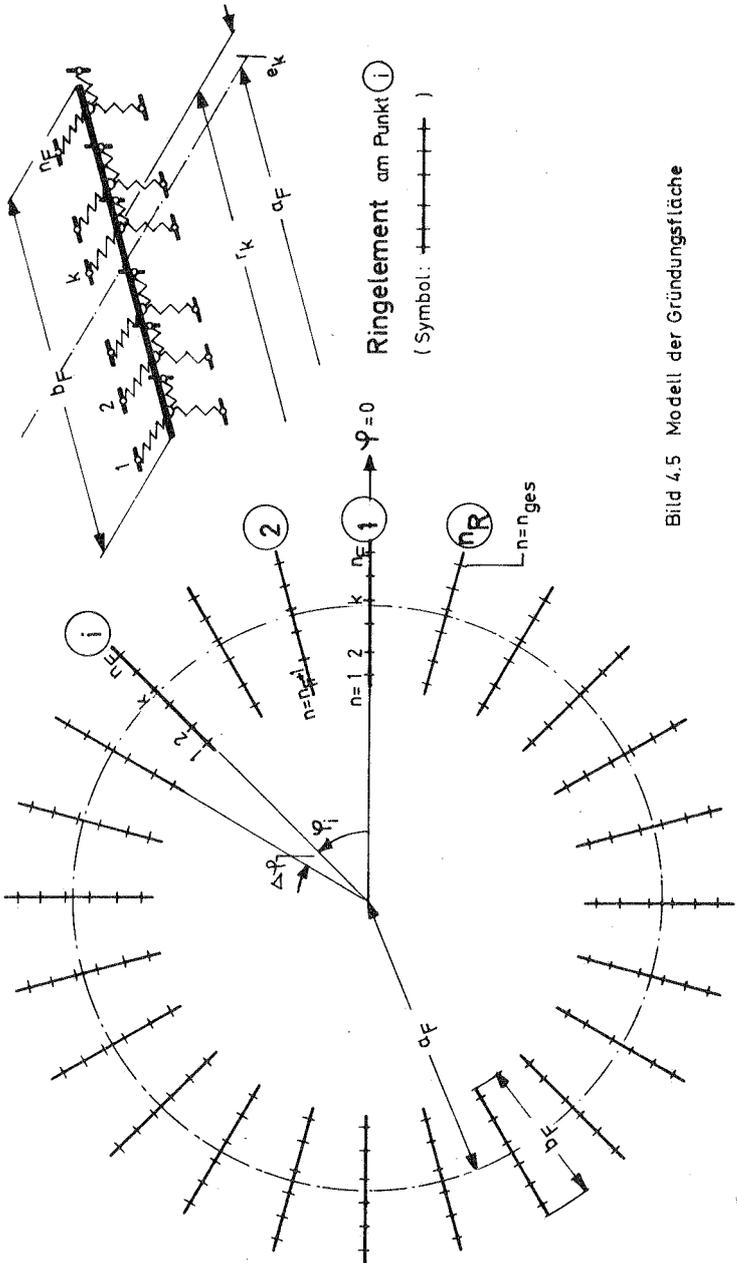


Bild 4.5 Modell der Gründungsfläche

Zusammenhang zwischen n und k ist gegeben mit

$$n = (i-1) \cdot n_F + k \quad (4.19)$$

4.3.2 Grundbeziehungen für die Verschiebungen des Baugrunds im Bereich der Gründungsfläche

Der allgemeine Zusammenhang zwischen den an den einzelnen Federelementen wirkenden Kräften und den daraus resultierenden Verschiebungen ist durch (4.18) gegeben. Bei den Dimensionen der Matrizen und Vektoren ist lediglich die Anzahl der Federelemente zu beachten. Verzichtet man im weiteren auf die Indizierung (tt), so ist

$$\mathbf{S}_{(3n_{ges}, 1)}^* = \mathbf{C}_{(3n_{ges}, 3n_{ges})}^* \cdot \mathbf{P}_{(3n_{ges}, 1)}^* \quad (4.20)$$

Entsprechend ergeben sich die Verschiebungen infolge außerhalb der Ringfläche wirkender Lasten p_x aus (4.17). Faßt man die dort angegebenen t Lastvektoren \mathbf{P}_q im Vektor \mathbf{P}_a^* zusammen, so gilt

$$\mathbf{S}_{q(3n_{ges}, 1)}^* = \mathbf{C}_{a(3n_{ges}, 3t)}^* \cdot \mathbf{P}_a^* \quad (4.21)$$

Die Verschiebungs- und Lastkomponenten sind in den Vektoren der obigen Gleichungen entsprechend der Nummerierung der Federelemente in der Reihenfolge $x - \varphi - z$ angeordnet. Für die weitere Darstellung ist es zweckmäßig, an jedem Ringelement eine Umordnung vorzunehmen. Am i -ten Ringelement sollen die folgenden Transformationen bewirkt werden:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{c} \delta_{x,1} \\ \delta_{\varphi,1} \\ \delta_{z,1} \\ \vdots \\ \delta_{x,k} \\ \delta_{\varphi,k} \\ \delta_{z,k} \\ \vdots \\ \delta_{x,n_F} \\ \delta_{\varphi,n_F} \\ \delta_{z,n_F} \end{array} \right] & \Rightarrow & \left[\begin{array}{c} \delta_{x,1} \\ \vdots \\ \delta_{x,k} \\ \delta_{\varphi,1} \\ \vdots \\ \delta_{\varphi,k} \\ \delta_{z,1} \\ \vdots \\ \delta_{z,k} \\ \delta_{x,n_F} \\ \vdots \\ \delta_{z,n_F} \end{array} \right] \\
 \delta_i^* & \Rightarrow & \delta_i \\
 (4.22) & & (4.22a)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{c} P_{x,1} \\ P_{\varphi,1} \\ P_{z,1} \\ \vdots \\ P_{x,k} \\ P_{\varphi,k} \\ P_{z,k} \\ \vdots \\ P_{x,n_F} \\ P_{\varphi,n_F} \\ P_{z,n_F} \end{array} \right] & \Rightarrow & \left[\begin{array}{c} P_{x,1} \\ \vdots \\ P_{x,k} \\ P_{\varphi,1} \\ \vdots \\ P_{\varphi,k} \\ P_{z,1} \\ \vdots \\ P_{z,k} \\ P_{x,n_F} \\ \vdots \\ P_{z,n_F} \end{array} \right] \\
 P_i^* & \Rightarrow & P_i \\
 (4.23) & & (4.23a)
 \end{array}$$

Entsprechendes gilt für den Vektor $\delta_{a,1}^*$. Eine Umordnung der Elemente von $P_{a,1}^*$ ist nicht erforderlich. Die gewünschte Transformation von δ_i^* erreicht man durch eine Linksmultiplikation mit der Matrix U_i .

$$\delta_i = U_i \cdot \delta_i^* \tag{4.24}$$

Dabei ist

$$U_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ n_F \\ \\ \\ 2n_F \\ \\ \\ 3n_F \end{array} \end{array} \tag{4.24a}$$

Analog gilt für den Zusammenhang zwischen P_i und P_i^*

$$P_i^* = U_i^T \cdot P_i \quad (4.25)$$

Die Erweiterung für alle Ringelemente liefert

$$\delta = U \cdot \delta^* \quad (4.26)$$

$$P^* = U^T \cdot P \quad (4.27)$$

wobei gilt:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_l \\ \vdots \\ \delta_{n_R} \end{bmatrix} \quad \delta^* = \begin{bmatrix} \delta_1^* \\ \vdots \\ \delta_l^* \\ \vdots \\ \delta_{n_R}^* \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_l \\ \vdots \\ P_{n_R} \end{bmatrix} \quad P^* = \begin{bmatrix} P_1^* \\ \vdots \\ P_l^* \\ \vdots \\ P_{n_R}^* \end{bmatrix}$$

(4.26a) (4.26b) (4.27a) (4.27b)

$$U = \text{diag} \left[\underset{1}{U_i} \dots \underset{i}{U_l} \dots \dots \dots \underset{n_R}{U_i} \right] \quad (4.26c)$$

Führt man mit Gleichung (4.20) die durch (4.26) vorgeschriebene Operation durch und setzt dabei (4.27) ein, so erhält man

$$\delta = U \cdot C^* \cdot U^T \cdot P$$

Mit der Definition

$$C = U \cdot C^* \cdot U^T \quad (4.28)$$

ist

$$\delta = C \cdot P \quad (4.29)$$

Die entsprechende Transformation von Gleichung (4.21) führt auf

$$\delta_a = C_a \cdot P_a^* \quad (4.30)$$

mit

$$C_a = U \cdot C_a^* \quad (4.31)$$

Im weiteren werden die Beziehungen (4.29) und (4.30) verwendet.

4.4 Gleichgewichtsbedingungen

4.4.1 Knotenlasten am i - ten Ringelement

Die Einheitskraftgrößen mit trigonometrischem Verlauf werden durch Knotenlasten ersetzt. Dazu denkt man sich die Ringelemente durch statisch bestimmt gelagerte Kreisringträger verbunden (Bild 4.6). Die Knotenlasten ergeben sich dann als Auflagerkräfte bzw. als auf die Unterstützung wirkende Momente der mit den Einheitskraftgrößen belasteten Ringträger (in Analogie zu den von STÜSSI eingeführten Knotenlasten für gerade Träger [42]). Das System ist statisch bestimmt, wenn außer den Auflagerbedingungen, die durch die Knotenlasten festgelegt sind, in der Symmetrieachse eines jeden Trägers nur Biegemomente und Querkräfte übertragen werden können (vgl. Bild 4.7). Abgesehen von $m = 0$ und $m = n_R/2$ sind für jede Harmonische zehn Lastfunktionen zu berücksichtigen. In den angegebenen Sonderfällen entfallen die Sinus-Glieder.

$$n_{x,ii}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{bzw.} \quad n_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad (4.32a)$$

$$n_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{bzw.} \quad n_{x,ii}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad (4.32b)$$

$$q_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{bzw.} \quad q_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad (4.32c)$$

$$m_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{bzw.} \quad m_{x,im}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad (4.32d)$$

$$m_{x,ii}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{bzw.} \quad m_{x,ii}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad (4.32e)$$

Für $n_{x\varphi,m}$, $q_{x,m}$ und $m_{x\varphi,m}$ ergeben sich die Knotenlasten am Ringelement i direkt durch Integration im Bereich $\varphi_1 - \frac{\Delta\varphi}{2} \leq \varphi \leq \varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$. Zu deren Berechnung infolge

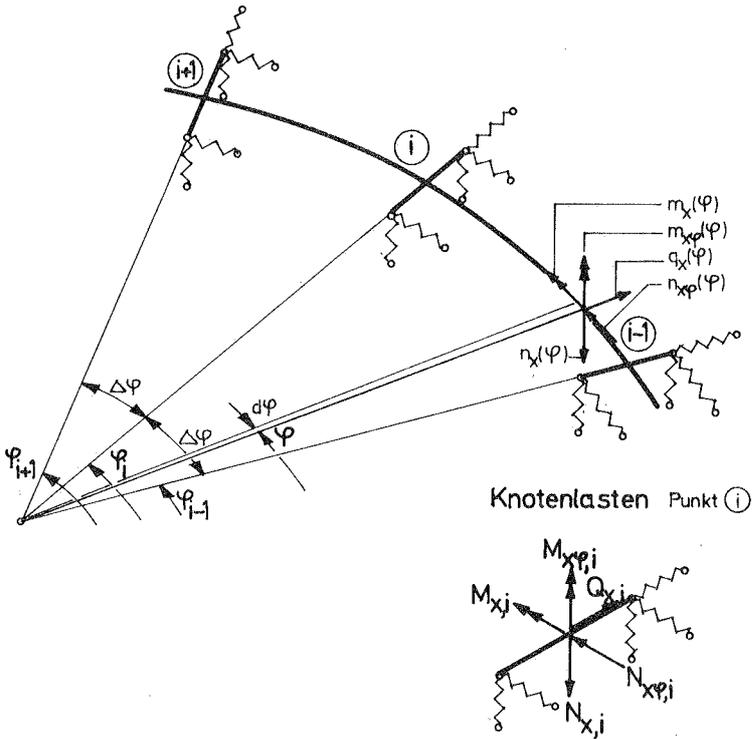


Bild 4.6 Kreisringträger zwischen den Ringelementen

$n_{x,m}$ und $m_{x,m}$ sind zunächst die Querkräfte und Biegemomente (Q, M) in den Symmetrieachsen der Kreisringträger zu bestimmen. Der Einfluß auf den Knoten i erstreckt sich hier von φ_{i-1} bis φ_{i+1} . In einzelnen erhält man folgende Formeln (vgl. hierzu die Bilder 4.7 und 4.8):

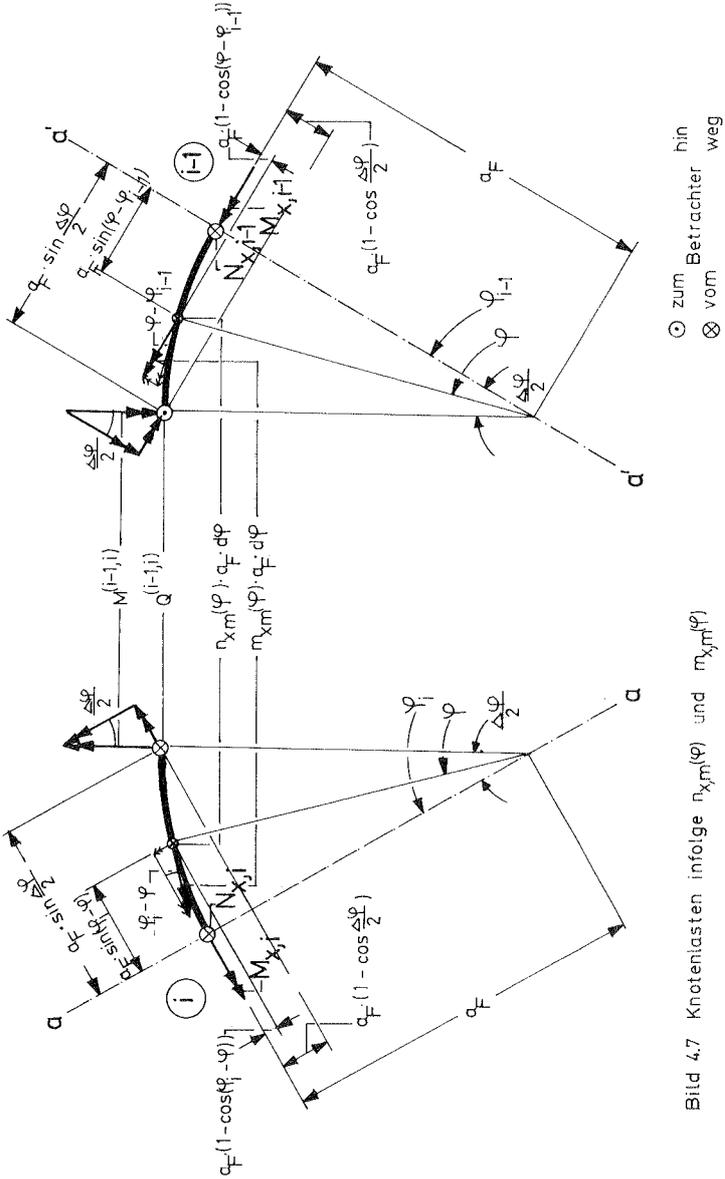


Bild 4.7 Knotenlasten infolge $n_{X_m}(\varphi)$ und $m_{X_m}(\varphi)$

a) $\underline{n_{x,m}}(\varphi) = 1 \cdot f(\varphi)$ (vgl. Bild 4.7)

$f(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi$ bzw. $f(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi$

Mit den Bezeichnungen des Bildes 4.7 ergibt sich aus den Momentenbedingungen für das Feld (i-1, i)

$$\sum M^a = 0: M^{(i-1,i)} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + Q^{(i-1,i)} \alpha_F \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \alpha_F^2 \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi - \varphi_i) d\varphi \quad (4.33)$$

$$\sum M^a = 0: M^{(i-1,i)} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - Q^{(i-1,i)} \alpha_F \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = -\alpha_F^2 \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi - \varphi_{i-1}) d\varphi \quad (4.34)$$

Mit den Abkürzungen

$$A^{(i-1,i)} = \alpha_F^2 \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi - \varphi_i) d\varphi \quad (4.35)$$

$$B^{(i-1,i)} = -\alpha_F^2 \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi - \varphi_{i-1}) d\varphi \quad (4.36)$$

ist

$$M^{(i-1,i)} = \frac{A^{(i-1,i)} + B^{(i-1,i)}}{2 \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (4.37)$$

$$Q^{(i-1,i)} = \frac{A^{(i-1,i)} - B^{(i-1,i)}}{2 \alpha_F \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (4.38)$$

Die Auflagerkräfte infolge der Belastung des betrachteten Feldes sind dann an der Stelle i:

$$N_{x,i}^{(i-1,i)} = Q^{(i-1,i)} + a_F \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i} f(\varphi) d\varphi \quad (4.39)$$

$$M_{x,i}^{(i-1,i)} = -M^{(i-1,i)} \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - Q^{(i-1,i)} \cdot a_F \cdot \left(1 - \cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - a_F^2 \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i} f(\varphi) [1 - \cos(\varphi - \varphi_i)] d\varphi$$

und an der Stelle i-1:

$$(4.40)$$

$$N_{x,i-1}^{(i-1,i)} = -Q^{(i-1,i)} + a_F \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) d\varphi \quad (4.41)$$

$$M_{x,i-1}^{(i-1,i)} = -M^{(i-1,i)} \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + Q^{(i-1,i)} \cdot a_F \cdot \left(1 - \cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - a_F^2 \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) [1 - \cos(\varphi - \varphi_{i-1})] d\varphi \quad (4.42)$$

Die Auflagerkräfte an der Stelle i infolge der Belastung des Feldes (i, i+1) ergeben sich aus (4.41) und (4.42), wenn man dort i-1 durch i und i durch i+1 ersetzt.

$$N_{x,i}^{(i,i+1)} = -Q^{(i,i+1)} + a_F \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) d\varphi \quad (4.43)$$

$$M_{x,i}^{(i,i+1)} = -M^{(i,i+1)} \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + Q^{(i,i+1)} \cdot a_F \cdot \left(1 - \cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - a_F^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) [1 - \cos(\varphi - \varphi_i)] d\varphi \quad (4.44)$$

Die Querkräfte $Q^{(i,i+1)}$ und die Momente $M^{(i,i+1)}$ erhält man durch eine entsprechende Vertauschung der Indizes aus (4.33) und (4.34). Die Knotenlasten sind somit

$$\begin{aligned} N_{x,i} &= N_{x,i}^{i-1,i} + N_{x,i}^{i,i+1} & M_{x,i} &= M_{x,i}^{i-1,i} + M_{x,i}^{i,i+1} \\ N_{x\varphi,i} &= \sigma & M_{x\varphi,i} &= \sigma \\ Q_{x,i} &= \sigma \end{aligned} \quad (4.45)$$

b) $\underline{n_{x\varphi, m}(\varphi)} = 1 \cdot f(\varphi)$ (vgl. Bild 4.8)

$f(\varphi)$... wie unter a)

$$\begin{aligned}
 N_{x,i} &= 0 & M_{x,i} &= 0 \\
 N_{x\varphi,i} &= a_F \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \cos(\varphi_i - \varphi) d\varphi & M_{x\varphi,i} &= a_F^2 \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) [1 - \cos(\varphi_i - \varphi)] d\varphi \\
 Q_{x,i} &= a_F \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi_i - \varphi) d\varphi & & (4.46)
 \end{aligned}$$

c) $\underline{q_{x, m}(\varphi)} = 1 \cdot f(\varphi)$ (vgl. Bild 4.8)

$f(\varphi)$... wie unter a)

$$\begin{aligned}
 N_{x,i} &= 0 & M_{x,i} &= 0 \\
 N_{x\varphi,i} &= -a_F \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \sin(\varphi_i - \varphi) d\varphi & M_{x\varphi,i} &= a_F^2 \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \sin(\varphi_i - \varphi) d\varphi \\
 Q_{x,i} &= a_F \int_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}} f(\varphi) \cdot \cos(\varphi_i - \varphi) d\varphi & & (4.47)
 \end{aligned}$$

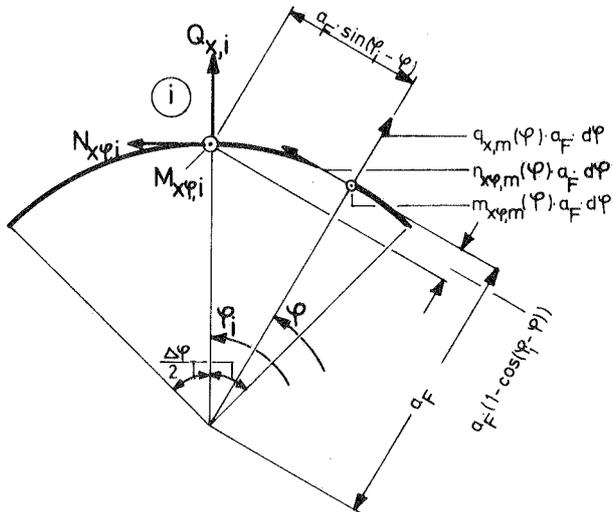


Bild 4.8 Knotenlasten infolge $n_{x\varphi, m}(\varphi)$, $q_{x, m}(\varphi)$ und $m_{x\varphi, m}(\varphi)$

d) $\underline{m_{x,m}(\varphi)} = 1 \cdot f(\varphi)$ (vgl. Bild 4.7)

$f(\varphi)$... wie unter a)

Die Berechnung der Knotenlasten gestaltet sich analog zu a); auf eine Wiedergabe der entsprechenden Formeln wird verzichtet.

e) $\underline{m_{x\psi,m}(\varphi)} = 1 \cdot f(\varphi)$ (vgl. Bild 4.8)

$f(\varphi)$... wie unter a)

$N_{x,i} = N_{x\psi,i} = Q_{x,i} = M_{x,i} = 0$

$$M_{x\psi,i} = a_{\text{TF}} \int_{\varphi_i - \frac{\Delta^4}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta^4}{2}} f(\varphi) \cdot d\varphi \quad (4.48)$$

Sämtliche Knotenlasten infolge der Einheitslastzustände werden in einer Matrix zusammengefaßt. In einer zusätzlichen Spalte sei der Fall p_x außerhalb der Ringfläche vorgesehen. Die Knotenlasten hierfür sind null.

$$K_i = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cccc} \hline & \text{Einheitslastzustände} & & & & p_x \\ \hline 1 & 2 & & & & n_r \\ \hline & \times & & N_{xi} & & \times & 0 \\ & \times & & N_{\psi xi} & & \times & 0 \\ & \times & & Q_{xi} & & \times & 0 \\ & \times & & M_{xi} & & \times & 0 \\ & \times & & M_{\psi xi} & & \times & 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

4.4.2 Gleichgewichtsbedingungen am i - ten Ringelement

Die Federkräfte P_i nach (4.23) stehen mit den Knotenlasten eines Ringelements im Gleichgewicht. Mit den Bezeichnungen des Bildes 4.9 lautet diese Bedingung in Matrizenform

$$K_i = G_i \cdot P_i \quad (4.50)$$

Dabei ist

$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & k & & n_F & 1 & 2 & & k & & n_F & 1 & 2 & & k & & n_F \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ e_1 & e_2 & \dots & e_k & \dots & e_{n_F} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & e_1 & e_2 & \dots & e_k & \dots & e_{n_F} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

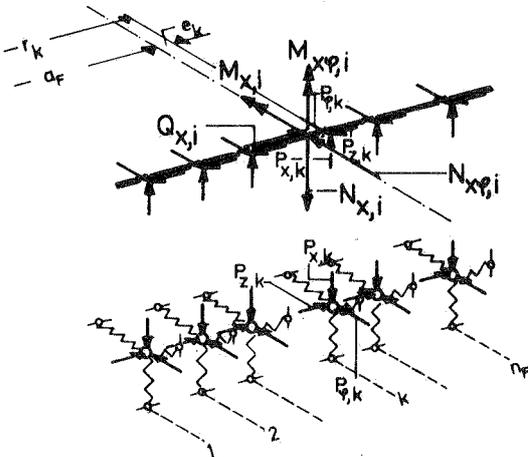


Bild 4.9 Erläuterungen zu den Gleichgewichtsbedingungen

Die Matrix G_i läßt sich nur für $n_F = 2$ invertieren, wenn dabei höchstens eine Feder in radialer Richtung vorhanden ist; allein dann reichen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Federkräfte aus. Da mit zwei Federelementen allein die Forderung eines in Querrichtung starren Rings nicht erfüllt werden kann, wurde dieser Fall von den Betrachtungen ausgeschlossen (vgl. S. 47).

4.5 Verträglichkeitsbedingungen am i - ten Ringelement

Der Ansatz für die Verformungen des Baugrunds verlangt einen linearen bzw. konstanten Verlauf der Verschiebungen. Dies führt zu folgenden Bedingungen (Bild 4.10):

Für die Verschiebungen δ_x gilt

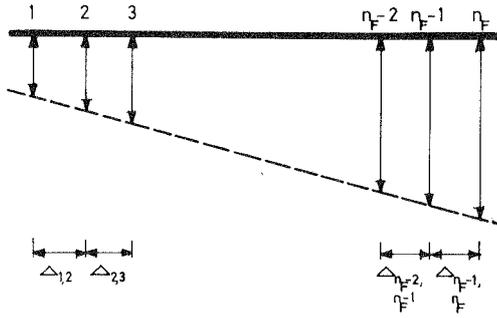
$$\begin{array}{c} \text{infolge } \mathbf{P} \text{ (4.27a)} \\ \hline \frac{\delta_{x,2} - \delta_{x,1}}{\Delta_{1,2}} - \frac{\delta_{x,3} - \delta_{x,2}}{\Delta_{2,3}} + \frac{\overset{(a)}{\delta_{x,2}} - \overset{(a)}{\delta_{x,1}}}{\Delta_{1,2}} - \frac{\overset{(a)}{\delta_{x,3}} - \overset{(a)}{\delta_{x,2}}}{\Delta_{2,3}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta_{x,n_F-1} - \delta_{x,n_F-2}}{\Delta_{n_F-2, n_F-1}} - \frac{\delta_{x,n_F} - \delta_{x,n_F-1}}{\Delta_{n_F-1, n_F}} + \frac{\overset{(a)}{\delta_{x,n_F-1}} - \overset{(a)}{\delta_{x,n_F-2}}}{\Delta_{n_F-2, n_F-1}} - \frac{\overset{(a)}{\delta_{x,n_F}} - \overset{(a)}{\delta_{x,n_F-1}}}{\Delta_{n_F-1, n_F}} = 0 \end{array} \quad (4.51a)$$

Für die Verschiebungen δ_φ gilt der entsprechende Zusammenhang; es ist lediglich x durch φ zu ersetzen.

Aus der Gleichheit aller Radialverschiebungen folgt

$$\begin{array}{c} \delta_{z,2} - \delta_{z,1} + \overset{(a)}{\delta_{z,2}} - \overset{(a)}{\delta_{z,1}} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{z,n_F} - \delta_{z,n_F-1} + \overset{(a)}{\delta_{z,n_F}} - \overset{(a)}{\delta_{z,n_F-1}} = 0 \end{array} \quad (4.51b)$$

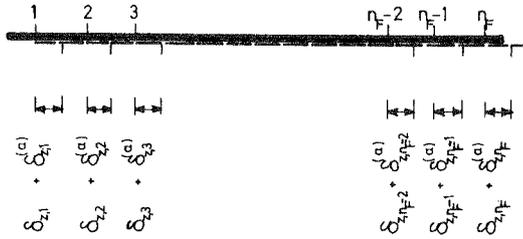
Verformungen δ_x (δ_φ sinngemäß)



$$\begin{aligned} & \delta_{x1}^{(a)} \\ & \delta_{x2}^{(a)} + \delta_{x3}^{(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{x, n-2}^{(a)} + \delta_{x, n-1}^{(a)} \\ & \delta_{x, n-1}^{(a)} + \delta_{x, n}^{(a)} \end{aligned}$$

Verformungen $\delta_z = \text{konst}$



$$\begin{aligned} & \delta_{z1}^{(a)} \\ & \delta_{z2}^{(a)} + \delta_{z3}^{(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{z, n-2}^{(a)} + \delta_{z, n-1}^{(a)} \\ & \delta_{z, n-1}^{(a)} + \delta_{z, n}^{(a)} \end{aligned}$$

Bild 4.10 Erläuterungen zu den Verträglichkeitsbedingungen

Mit obigen Definitionen lauten die Bedingungen (4.51) in Matrixdarstellung

$$\sum_i z_i \delta_i + \sum_i z_i \delta_{a,i} = N \quad (\text{Nullvektor}) \quad (4.53)$$

Der Zusammenhang zwischen Verschiebungs- und Lastvektoren ergibt sich aus (4.29) und (4.30) nach Anwendung auf das i -te Ringelement

$$\delta_i = C_i P \quad (4.54)$$

$$\delta_{a,i} = C_{a,i} P_a^* \quad (4.55)$$

Die Matrizen C_i und $C_{a,i}$ sind Untermatrizen von C bzw. C_a .

$$C = \begin{bmatrix} \vdots & C_1 & \vdots \\ \vdots & C_i & \vdots \\ \vdots & C_{n_R} & \vdots \end{bmatrix} \quad C_a = \begin{bmatrix} \vdots & C_{a,1} & \vdots \\ \vdots & C_{a,i} & \vdots \\ \vdots & C_{a,n_R} & \vdots \end{bmatrix}$$

Führt man (4.54) und (4.55) in (4.53) ein und bringt die Lastglieder auf die rechte Seite, dann lauten die Verträglichkeitsbedingungen

$$\sum_i z_i C_i P = - \sum_i z_i C_{a,i} P_a^* \quad (4.56)$$

4.6 Federkräfte und Baugrundverformungen

Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen sind zunächst für alle Ringelemente anzuschreiben.

Gleichgewichtsbedingungen

$$K = G \cdot P \quad (4.57)$$

Dabei ist

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_{n_R} \end{bmatrix} \quad G = \text{diag} \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_i & \\ & & G_{n_R} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_{n_R} \end{bmatrix}$$

(4.57a) (4.57b) (4.57c)

Verträglichkeitsbedingungen

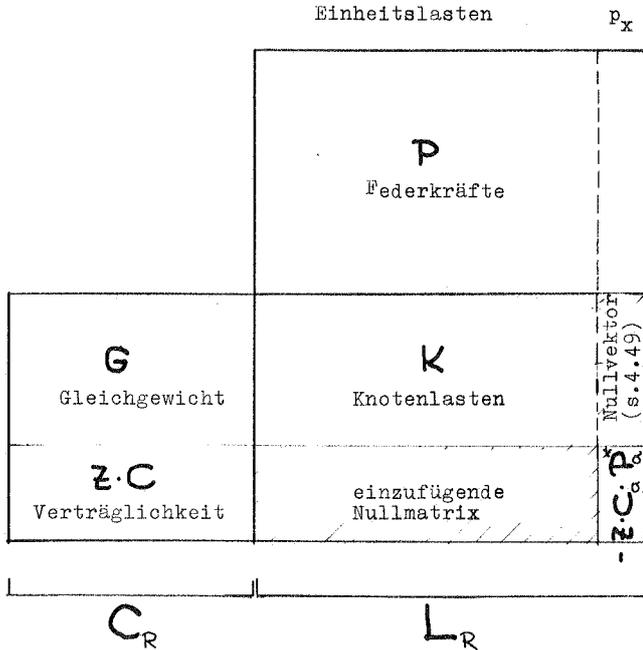
$$Z \cdot C \cdot P = - Z C_a P_a^* \quad (4.58)$$

mit

$$Z = \text{diag} \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & z_i & \\ & & z_{n_R} \end{bmatrix} \quad (4.58a)$$

Somit stehen $5 \cdot n_R$ Gleichgewichtsbedingungen und $(3n_P - 5) \cdot n_R$ Verträglichkeitsbedingungen, also insgesamt $3 \cdot n_R \cdot n_P$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der gleichen Anzahl Federkräfte zur Verfügung.

Das Gleichungssystem läßt sich aus (4.57) und (4.58) folgendermaßen aufbauen:



Mit obigen Definitionen gilt:

$$C_R P = L_R \quad (4.59)$$

Nach Inversion ergeben sich die Federkräfte

$$P = C_R^{-1} L_R \quad (4.60)$$

und daraus mit der Beziehung (4.29) die Verschiebungen

$$S = C C_R^{-1} L_R \quad (4.61)$$

Mit den nun bekannten Verschiebungen kann der Verformungszustand eines jeden Ringelements durch fünf Komponenten angegeben werden (vgl. Bild 4.2). Zieht man zu deren Bestimmung die Verschiebungen der "Nieder"elemente $k = 1$ und $k = n_F$ heran, so gilt (Bild 4.11):

$$U_i = \delta_{x,1} \frac{r_{n_F} - a_F}{r_{n_F} - r_1} + \delta_{x,n_F} \frac{a_F - r_1}{r_{n_F} - r_1} \quad (4.62)$$

$$V_i = \delta_{\varphi,1} \frac{r_{n_F} - a_F}{r_{n_F} - r_1} + \delta_{\varphi,n_F} \frac{a_F - r_1}{r_{n_F} - r_1} \quad (4.63)$$

$$W_i = \delta_{z,1} = (\delta_{z,n_F}) \quad (4.64)$$

$$j_i^? = \delta_{x,1} \left(-\frac{1}{r_{n_F} - r_1} \right) + \delta_{x,n_F} \frac{1}{r_{n_F} - r_1} \quad (4.65)$$

$$\psi_i = \delta_{\varphi,1} \left(-\frac{1}{r_{n_F} - r_1} \right) + \delta_{\varphi,n_F} \frac{1}{r_{n_F} - r_1} \quad (4.66)$$

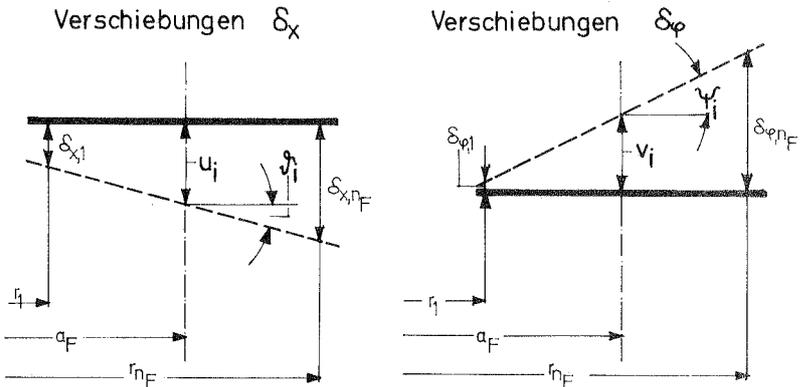


Bild 4.11 Verschiebungskomponenten $u_i, v_i, j_i^?, \psi_i$
 ($w_i = \delta_{z,1} = \text{konst}$)

In Matrizendarstellung lauten die Beziehungen (4.62 bis 4.66)

$$V_i = D_i \cdot \delta_i \quad (4.67)$$

Dabei ist

$$V_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ z_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad D_i = \begin{bmatrix} \frac{r_F - a_F}{r_F - r_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{a_F - r_1}{r_F - r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{r_F - a_F}{r_F - r_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{a_F - r_1}{r_F - r_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_F - r_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r_F - r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{r_F - r_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r_F - r_1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n_F \\ \\ \\ \\ \\ 2n_F \end{matrix}$$

(4.67a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3n_F \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(4.67b)

Die Verschiebungen aller Ringelemente sind dann

$$V = D \cdot \delta \quad (4.68)$$

mit

$$D = \text{diag} \left[\overset{1}{D_1} \dots \overset{i}{D_i} \dots \overset{n_F}{D_i} \right] \quad (4.68a)$$

und mit Gleichung (4.61)

$$V = \underbrace{DCC_R^{-1}}_{\tilde{C}} L_R$$

oder

$$V = \tilde{C} \cdot L_R \quad (4.69)$$

Die Verschiebungen und Verdrehungen aller Ringelemente ergeben sich für die betrachteten Lastfälle spaltenweise aus (4.69).

Stellt man diese diskreten Funktionen durch ein trigonometrisches Polynom dar (s.S. 35), so sind die zu den einzelnen Lastspalten gehörenden Fourierkoeffizienten gerade die Elemente der in den Gleichungen (4.11) bzw. (4.12) eingeführten Vektoren $Y_{x1} \dots Y_{xi} \dots$
 $\dots Y_{xSnR} \cup Y_{x0}$.

Die zur Berechnung der Baugrundverformungen nach Gleichung (4.13) in Verbindung mit (4.12) notwendigen Grundwerte sind somit bekannt. Der Vektor X_G (4.13) ergibt sich aus den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen am Gesamtsystem.

Die Gleichung (4.69) beschreibt einen in Querrichtung starren, in Umfangsrichtung weichen Kreisring auf elastischer Unterlage. Die Matrix \tilde{C} ist die Federmatrix dieses Systems.

Es ist anzumerken, daß die Federkräfte P (Gleichung 4.60) an einem nicht belasteten Element eine Gleich-

4.7 Berechnung der Federmatrizen bei Betrachtung des Baugrunds als elastisch-isotroper Halbraum

Mit dem auf Seite 43 ff. beschriebenen Federmodell kann ein beliebiger linearer Zusammenhang zwischen Last und Verformung berücksichtigt werden. Bei nichtlinearem Verhalten ist die Berechnung der Baugrundverformungen prinzipiell in gleicher Weise möglich. Im allgemeinen ist eine Lösung jedoch nur iterativ zu finden, weil das Superpositionsgesetz nicht mehr gültig ist. Eine Berechnungsmethode, die unter diesen Voraussetzungen zu numerischen Ergebnissen führt, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht entwickelt.

Für die Berechnung der im Abschnitt 8 angegebenen Zahlenbeispiele wird der Baugrund in herkömmlicher Weise als elastisch-isotroper Halbraum aufgefaßt. Vereinfachend werden nur die Vertikalverformungen (Setzungen) infolge lotrechter Lasten berücksichtigt und alle übrigen Verformungsanteile vernachlässigt.

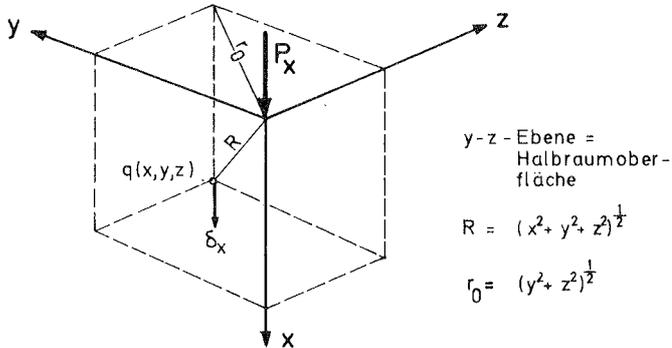
Die Horizontalverschiebungen infolge auftretender Momente sind wegen der in der Gründungsebene vorausgesetzten Scheibe (s.S.107) klein von höherer Ordnung.

Eine kritische Analyse dieses Modells im Hinblick auf die Berechnung elastischer Gründungsplatten ist in [28] dargestellt.

4.7.1 Vertikale Oberflächenverschiebungen des homogenen elastisch-isotropen Halbraums

Grundlage für die Ermittlung der Verformungen sind die von BOUSSINESQ [2] angegebenen Formeln zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustands des Halbraums unter der Wirkung einer lotrechten Einzellast P_x an dessen Oberfläche. Mit den Bezeichnungen des Bildes 4.13 ist die Vertikalverformung d_x an der Stelle (x, y, z) (vgl. z.B. [44]):

$$\delta_x(x, y, z) = \frac{P_x}{2\pi} \frac{1 + \mu_s}{E_s} \left[\frac{x^2}{(x^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(1 - \mu_s)}{(x^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.70)$$



- Bild 4.13 Bezeichnungen im Halbraum

Die kreisringförmige Gründungsfläche wird in eine endliche Anzahl von Teilflächen zerlegt. Der Bereich $\varphi_1 - \frac{\Delta\varphi}{2}$ bis $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$ sei in n_F Flächen aufgeteilt (Bild 4.14); deren Schwerpunktlagen seien gegeben mit $r_1 \dots r_k \dots r_{n_F}$. Setzt man

$$\lambda_k = \frac{r_{1k}}{r_{a,k}} \quad (4.71)$$

dann ist

$$F_k = \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot r_{a,k}^2 (1 - \lambda_k^2) \quad (4.72)$$

$$r_k = \frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \cdot r_{a,k} \frac{(1 - \lambda_k^3)}{(1 - \lambda_k^2)} \quad (4.73)$$

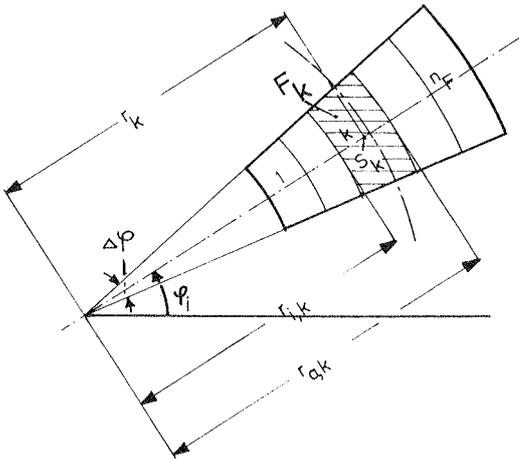


Bild 4.14 Zur Aufteilung der Kreisringfläche

Denkt man sich die Federn des Ringelements i in den Schwerpunkten der Teilflächen F_k angebracht und ersetzt die dort wirkenden Kräfte $P_{x,k}$ durch eine gleichförmig verteilte Flächenlast $p_{x,k} = P_{x,k}/F_k$, so ergeben sich die Elemente der Federmatrizen als Verschiebungen der Baugrundoberfläche infolge $\bar{p}_{x,k} = 1/r_k$ an allen betrachteten Punkten. Da nur die Vertikalverschiebungen für lotrechte Lasten berücksichtigt werden, reduziert sich die Federmatrix $C_{p,q}$ (vgl. 4.15b) auf das Element c_{xx} .

Die Verschiebungen infolge einer Gleichlast $\bar{p}_{x,k}$ im Bereich F_k erhält man aus der Grundbeziehung (4.70), wenn man die im differentiellen Flächenelement $\bar{r} \cdot d\bar{r} \cdot d\bar{\varphi}$ wirkende Gleichlast durch eine Einzellast $\bar{p}_{x,k} \cdot \bar{r} \cdot d\bar{r} \cdot d\bar{\varphi}$ ersetzt (Bild 4.15).

Dann ist die differentielle Verschiebung des Punktes q in der Tiefe x

$$d\delta_x(x, r_q, \varphi_q) = \frac{\bar{p}_{x,k} \cdot \bar{r}}{2\pi \cdot E_s} \cdot \frac{1+\mu_s}{E_s} \cdot \left[\frac{x^2}{(x^2+r_q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(1-\mu_s)}{(x^2+r_q^2)^{\frac{3}{2}}} \right] d\bar{\varphi} \cdot d\bar{r} \quad (4.74)$$

Mit dem Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie ergibt sich

$$r_0^2 = r_q^2 + \bar{r}^2 - 2 \cdot r_q \cdot \bar{r} \cdot \cos\left(\varphi_i - \frac{\alpha}{2} + \varphi_q + \bar{\varphi}\right) \quad (4.75)$$

Die Gesamtverschiebung erhält man durch Integration über die Fläche F_k zu

$$\delta_x(x, r_q, \varphi_q) = \frac{\bar{p}_{x,k}(1+\mu_s)}{2\pi \cdot E_s} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \int_{\bar{r}=r_{i,k}}^{\bar{r}=r_{a,k}} \left[\frac{x^2}{[x^2+r_q^2+\bar{r}^2-2r_q\bar{r}\cos(\alpha+\bar{\varphi})]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(1-\mu_s)}{[x^2+r_q^2+\bar{r}^2-2r_q\bar{r}\cos(\alpha+\bar{\varphi})]^{\frac{3}{2}}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\varphi} \quad (4.76)$$

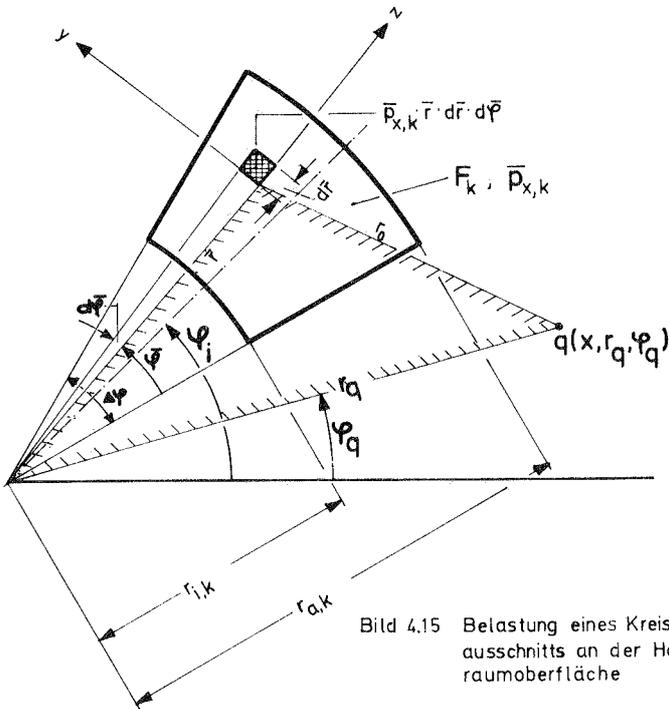


Bild 4.15 Belastung eines Kreisring-ausschnitts an der Halb-raumoberfläche

Die Integration nach \bar{r} ist mit Hilfe von [45] durchführbar, die dann verbleibende Funktion ist dagegen nur noch teilweise geschlossen integrierbar. Auf eine Wiedergabe der einzelnen Rechenschritte wird hier verzichtet. Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt sich mit der Abkürzung

$$t = \alpha + \bar{\psi} \quad (4.77)$$

$$\delta_x(x, r_q, \varphi_q) \cdot \frac{2\pi \cdot E_s}{p_{x,k}(1+\mu_s)} = \quad (4.78)$$

$$\left[\int_{\varphi=0}^{\Delta\varphi} \left\{ -x^2 \cdot \frac{x^2 + r_q^2 - r_q \cdot r_{a,k} \cdot \cos t}{(x^2 + r_q^2 \cdot \sin^2 t) \left[r_{a,k}^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_{a,k} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2 \right]} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x^2 + r_q^2 - r_q \cdot r_{i,k} \cdot \cos t}{(x^2 + r_q^2 \cdot \sin^2 t) \left[r_{i,k}^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_{i,k} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2 \right]} \right]$$

$$+ 2(1-\mu_s) \cdot \left[\sqrt{r_{a,k}^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_{a,k} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2} \right. \\ \left. - \sqrt{r_{i,k}^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_{i,k} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2} \right]$$

$$\frac{r_q^2 \sin^2 t (x^2 + r_q^2 - r_q \cdot r_{a,k} \cdot \cos t)}{(x^2 + r_q^2 \cdot \sin^2 t) \left[r_{a,k}^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_{a,k} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2 \right]} +$$

Fortsetzung von (4.78) s.nächste Seite

Fortsetzung von (4.78)

$$\left. \frac{+ \frac{r_q^2 \sin t (x^2 + r_q^2 - r_q \cdot r_{ik} \cdot \cos t)}{(x^2 + r_q^2 \sin^2 t) \sqrt{r_{ik}^2 - 2 r_q \cdot r_{ik} \cdot \cos t + x^2 + r_q^2}} \right\} d\bar{\varphi}$$

$$+ 2(1-\mu_s) \cdot r_q \cdot \sin(\alpha + \Delta\varphi) \cdot$$

$$\cdot \ln \left| \frac{r_{\alpha k} - r_q \cdot \cos(\alpha + \Delta\varphi) + \sqrt{r_{\alpha k}^2 + r_q^2 - 2 r_q \cdot r_{\alpha k} \cdot \cos(\alpha + \Delta\varphi) + x^2}}{r_{ik} - r_q \cdot \cos(\alpha + \Delta\varphi) + \sqrt{r_{ik}^2 + r_q^2 - 2 r_q \cdot r_{ik} \cdot \cos(\alpha + \Delta\varphi) + x^2}} \right|$$

$$- 2(1-\mu_s) \cdot r_q \cdot \sin \alpha \cdot$$

$$\cdot \ln \left| \frac{r_{\alpha k} - r_q \cdot \cos \alpha + \sqrt{r_{\alpha k}^2 + r_q^2 - 2 r_q \cdot r_{\alpha k} \cdot \cos \alpha + x^2}}{r_{ik} - r_q \cdot \cos \alpha + \sqrt{r_{ik}^2 + r_q^2 - 2 r_q \cdot r_{ik} \cdot \cos \alpha + x^2}} \right|$$

Bei festen Werten r_q und φ_q wird für (4.78) die abgekürzte Schreibweise eingeführt

$$\delta_x(x) = \frac{\bar{P}_{\alpha k} \cdot (1 + \mu_s)}{2 \cdot \pi \cdot E_s} \cdot \varphi(x, \mu_s) \quad (4.78a)$$

Die Verschiebungen an der Oberfläche des Halbraums ergeben sich für $x = 0$.

Das verbleibende Integral in (4.78) muß bei der praktischen Berechnung numerisch gelöst werden. Da diese Rechenoperation bei feiner Aufteilung der Ringfläche sehr häufig auszuführen ist, erfordert die elektronische Berechnung sehr viel Rechenzeit. Nach dem Prinzip von DE SAINT-VENANT ändert sich der Spannungs- und Formänderungszustand mit wachsender Entfernung von der Laststelle nur geringfügig, wenn man die gleichmäßig

verteilte Belastung durch eine Einzellast im Schwerpunkt der Teilfläche F_k ersetzt. Unter dieser Voraussetzung kann die viel einfachere Ausgangsbeziehung (4.70) der praktischen Berechnung zugrunde gelegt werden. Der Singularität an der Laststelle wegen ist dort nur die Berechnung nach Gleichung (4.78) möglich.

4.7.2 Vertikale Oberflächenverschiebungen eines unregelmäßig geschichteten Baugrunds (Näherungsweise Berechnung)

In der Regel kann man in dem Gebiet, das für die Verformungen der Gründungsfläche betrachtet wird, nicht von einer homogenen Bodenbeschaffenheit bis in sehr große Tiefen ausgehen. Es werden vielmehr einzelne Schichten mit unterschiedlichen Materialkennwerten übereinanderliegen. Meist sind die Schichtdicken veränderlich. Die Grenzflächen zwischen den einzelnen Schichten sind auf Grund bodenmechanischer Untersuchungen nur an diskreten Punkten des Gründungsbereichs bestimmbar. Für praktische Berechnungen wird man also von einer Interpolation zwischen den untersuchten Punkten ausgehen müssen. Ein so beschaffener Baugrund führt mechanisch gesehen auf ein Mehrschichtenproblem mit beliebiger Form der Grenzflächen. Eine "genaue" Lösung ist unter diesen Voraussetzungen nur mit Hilfe der Methode der finiten Elemente möglich.

In der vorliegenden Arbeit wird auch bei unregelmäßigem Schichtverlauf näherungsweise die Spannungsverteilung des elastisch-isotropen Halbraums zugrunde gelegt (vgl. [6]). Man denkt sich diesen durch beliebige Flächen in mehrere Bereiche unterteilt und setzt voraus, daß die Spannungsübertragung an den Grenzflächen in gleicher Weise wie innerhalb der Bereiche möglich sei. Dann ergibt sich die Vertikalverschiebung

$$\begin{aligned}
 \delta_x(0) \approx \frac{\bar{p}_{x,k}}{2\pi} & \left[\frac{1+\mu_{s,1}}{E_{s,1}} \left[\varphi(0, \mu_{s,1}) - \varphi(x_1, \mu_{s,1}) \right] + \right. \\
 & + \frac{1+\mu_{s,2}}{E_{s,2}} \left[\varphi(x_1, \mu_{s,2}) - \varphi(x_2, \mu_{s,2}) \right] + \dots \\
 & \dots + \frac{1+\mu_{s,n}}{E_{s,n}} \left[\varphi(x_{n-1}, \mu_{s,n}) - \varphi(x_n, \mu_{s,n}) \right] + \\
 & \left. + \frac{1+\mu_{s,n+1}}{E_{s,n+1}} \left[\varphi(x_n, \mu_{s,n+1}) \right] \right] \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Hierin bedeuten:

$E_{s,n}$ Elastizitätsmodul des Bodens im Bereich n

$\mu_{s,n}$ Querdehnzahl des Bodens im Bereich n

Diese Näherung ist umso besser, je weniger die Materialkonstanten $E_{s,n}$ und $\mu_{s,n}$ der einzelnen Schichten differieren. Im Grenzfall $E_{s,n} = E_s = \text{konst}$, $\mu_{s,n} = \mu_s = \text{konst}$ für alle Bereiche ist die Oberflächenverschiebung nach (4.80) identisch mit der nach Gleichung (4.78) berechneten. Im Fall einer unendlich steifen Schicht an der Oberfläche führt (4.80) zu unbrauchbaren Ergebnissen, weil sich dann die Setzungsanteile der unter dieser Schicht liegenden Bereiche nicht in der angenommenen Weise an die Oberfläche fortpflanzen können.

Bei der Auswertung der Zahlenbeispiele wird nur von einer zusammendrückbaren Schicht an der Oberfläche ausgegangen, die auf nicht deformierbarer Unterlage ruht.

Bei allen bisher bekannt gewordenen Methoden zur Lösung des Kontaktproblems, die als Bodenmodell den

Halbraum mit begrenzter Dicke der zusammendrückbaren Schicht verwenden, wurde die oben angegebene Näherung gewählt.

5. Die Verformungen des Überbaus

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß der Überbau als statisch unbestimmtes Hauptsystem z.B. mit den Grundlagen [7] und [25] berechnet werden kann (vgl. Abschnitt 2.2, S. 25 und 32). Im folgenden wird von den bekannten Lösungen Gebrauch gemacht, ohne die zur praktischen Durchführung notwendigen Rechenoperationen einzeln darzustellen.

Die Verformungen der Fundamentring - Unterseite sind dann positiv (Bild 5.1), wenn sie mit der Wirkungsrichtung der zugehörigen Kraftgrößen übereinstimmen (vgl. Bild 3.2).

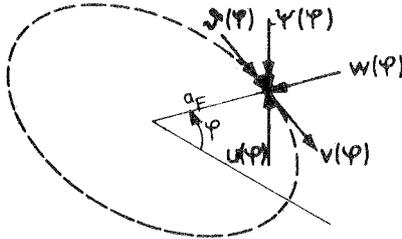


Bild 5.1 Vorzeichendefinition für die Verformungen der Fundamentring - Unterseite

5.1 Äußere Belastung

Stellvertretend für die äußere Belastung werden die in Bild 2.1 dargestellten Linienlasten p_x , p_y und p_z betrachtet. Sie seien wie Verformungen und Kraftgrößen durch ein trigonometrisches Polynom dargestellt.

$$p_x(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_{gl}-1} p_{x,m}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + p_{x,m}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \right) + p_{x,\frac{n_{gl}}{2}}^{(c)} \cdot \cos \frac{n_{gl}}{2} \varphi \quad (5.1a)$$

$$p_y(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_{gl}-1} p_{y,m}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + p_{y,m}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \right) + p_{y,\frac{n_{gl}}{2}}^{(c)} \cdot \cos \frac{n_{gl}}{2} \varphi \quad (5.1b)$$

$$p_z(\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n_{gl}-1} p_{z,m}^{(c)} \cdot \cos m\varphi + p_{z,m}^{(s)} \cdot \sin m\varphi \right) + p_{z,\frac{n_{gl}}{2}}^{(c)} \cdot \cos \frac{n_{gl}}{2} \varphi \quad (5.1c)$$

5.1.1 Kraftgrößen im statisch bestimmt gelagerten Grundsystem

Für $m \geq 2$ stellt jedes Reihenglied der Belastung eine Gleichgewichtsgruppe dar. Auflagerkräfte entstehen nur aus den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Baugrund und Überbau. Dagegen enthalten die Glieder $m = 0$ und $m = 1$ resultierende äußere Kraftwirkungen, die aus Gleichgewichtsgründen auf den Boden übertragen werden müssen. Ein äußerlich statisch bestimmt gelagertes System erhält man, wenn die Meridian- und Tangentialverschiebungen ($u(\varphi)$ und $v(\varphi)$) ausgeschaltet werden. Die dann auf den Baugrund wirkenden Kräfte $n_x(\varphi)$ und $n_{x\varphi}(\varphi)$ ergeben sich aus den sechs Gleichgewichtsbedingungen für den Überbau. Die Resultierenden der äußeren Lasten, sowie die gleichwertigen kontinuierlich verteilten Auflagerkräfte n_x und $n_{x\varphi}$ sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt (vgl. auch Bild 5.2).

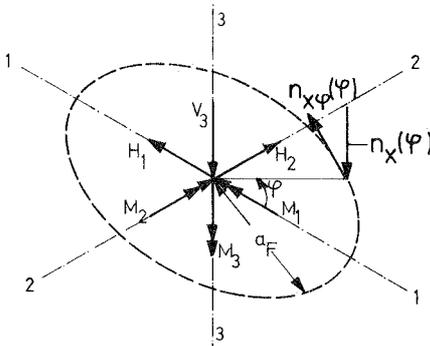


Bild 5.2
Erläuterung zu
Tabelle 5.1
(Gleichgewichts-
bedingungen)

Belastung	H_1	H_2	M_1	M_2	V_3	M_3	$n_x(\varphi) =$	$n_{x\varphi}(\varphi) =$
$p_{x10}^{(c)}$	-	-	-	-	$-2\pi \cdot a \cdot p_{x10}^{(c)}$	-	$-\varepsilon \cdot p_{x10}^{(c)}$	-
$p_{x1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	-	-	-	$\pi \cdot a \cdot p_{x1}^{(c)}$	-	-	$-\varepsilon^2 \cdot p_{x1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	-
$p_{x1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	-	-	$\pi \cdot a \cdot p_{x1}^{(c)}$	-	-	-	$-\varepsilon^2 \cdot p_{x1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	-
$p_{y10}^{(c)}$	-	-	-	-	-	$-2\pi \cdot a \cdot p_{y10}^{(c)}$	-	$\varepsilon^2 \cdot p_{y10}^{(c)}$
$p_{y1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	-	$\pi \cdot a \cdot p_{y1}^{(c)}$	$\pi \cdot a \cdot h_p \cdot p_{y1}^{(c)}$	-	-	-	$\varepsilon \cdot \frac{h_p}{a} \cdot p_{y1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	$\varepsilon \cdot p_{y1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$
$p_{y1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	$\pi \cdot a \cdot p_{y1}^{(c)}$	-	-	$\pi \cdot a \cdot h_p \cdot p_{y1}^{(c)}$	-	-	$-\varepsilon \cdot \frac{h_p}{a} \cdot p_{y1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	$\varepsilon \cdot p_{y1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$
$p_{z1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	-	-	-	$\pi \cdot a \cdot h_p \cdot p_{z1}^{(c)}$	-	-	$\varepsilon \cdot \frac{h_p}{a} \cdot p_{z1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$	$-\varepsilon \cdot p_{z1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$
$p_{z1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	-	$\pi \cdot a \cdot p_{z1}^{(c)}$	$\pi \cdot a \cdot h_p \cdot p_{z1}^{(c)}$	-	-	-	$\varepsilon \cdot \frac{h_p}{a} \cdot p_{z1}^{(c)} \cdot \sin\varphi$	$\varepsilon \cdot p_{z1}^{(c)} \cdot \cos\varphi$

Tabelle 5.1 Auflagerkräfte infolge äußerer Lasten
 ($\varepsilon = a/a_F$; a , a_F , h_p nach Bild 2.1)

In Matrixschreibweise lassen sich die statisch bestimmten Anteile der Kontaktkräfte analog zu Gleichung (3.18) anschreiben

$$S_{G,x_0}^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot E \cdot X_{G,x_0} \quad (5.2)$$

Dabei ist

$$S_{G,x_0}^{(\varphi)} \begin{bmatrix} n_x(\varphi) \\ n_{xy}(\varphi) \\ q_x(\varphi) \\ m_x(\varphi) \\ m_{xy}(\varphi) \end{bmatrix}_{x_0} \quad X_{G,x_0} = \begin{bmatrix} X_{G,0,x_0} \\ X_{G,1,x_0} \\ \vdots \\ X_{G,m,x_0} \\ \vdots \\ X_{G,\frac{n_R}{2},x_0} \end{bmatrix} \quad (5.2a) \quad (5.2b)$$

Die Untervektoren von X_{G,x_0} erhält man mit Hilfe von Tabelle 5.1. Für $m = n_R/2$ ist wieder zu beachten, daß der entsprechende Vektor nur fünf Elemente enthält.

$$X_{G,0,x_0} = \begin{bmatrix} -E \cdot p_{x,0}^{(c)} \\ E \cdot p_{y,0}^{(c)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_{G,1,x_0} = \begin{bmatrix} -E^2 p_{x,1}^{(c)} - E \frac{h_P}{a_F} (p_{\varphi,1}^{(s)} - p_{\varepsilon,1}^{(c)}) \\ E (p_{\varphi,1}^{(s)} - p_{\varepsilon,1}^{(c)}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_{G,m,x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2c) \quad (5.2d) \quad (5.2e)$$

Da in (3.18) die statisch bestimmten Anteile enthalten sind, ergibt sich der statisch unbestimmte Anteil aus der Differenz

$$S_{G,x}^{(\varphi)} = S_G^{(\varphi)} - S_{G,x_0}^{(\varphi)} \quad (5.3)$$

und mit (3.18) und (5.2)

$$S_{G,x}^{(\varphi)} = T \cdot F^{(\varphi)} \cdot E \cdot X_{G,x} \quad (5.4)$$

wobei

$$X_{G,x} = X_G - X_{G,x_0} \quad (5.4a)$$

gesetzt wird.

Der Vektor $S_{G,x}^{(\varphi)}$ enthält nun ausschließlich Gleichgewichtsgruppen, mit deren Wirkung die Kontinuität zwischen Baugrund und Überbau im Sinne des KV hergestellt wird.

5.1.2 Verformungen des Fundamentrings

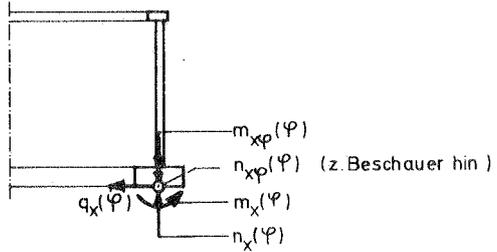
Die Verformungen des Fundamentrings infolge der äußeren Belastung lassen sich in ähnlicher Weise wie die des Baugrunds darstellen (vgl. Gleichung 4.6).

$$V_{x_0}^{(\varphi)} = \tilde{T} \cdot \tilde{F}^{(\varphi)} \cdot Y_{x_0} \quad (5.5)$$

Da für $m = 0$ und $m = 1$ keine Meridian- und Tangentialverschiebungen (u, v) auftreten, fehlen in den Untermatrizen und Untervektoren dieser Harmonischen die entsprechenden Zeilen und/oder Spalten. Im einzelnen ist:

5.2 Einheitslastzustände

Der Vektor $S_{G_{i,x}}(\varphi)$, der nur noch Gleichgewichtsgruppen enthält, ist nun näher zu betrachten (vgl. 5.4). In Tabelle 5.2 sind die Kraftgrößen für $m = 0$ und $m = 1$ zusammengestellt. Es ist leicht zu erkennen, daß nur die mit (Gl) gekennzeichneten Kräfte und Momente für sich allein im Gleichgewicht sind. Die anderen Kraftgrößen können nur dann auftreten, wenn sie paarweise Gleichgewichtsgruppen bilden. Aus der Forderung, daß die auf die Achsen 1 bis 3 bezogenen Kräfte und Momente verschwinden, ergeben sich die folgenden Abhängigkeiten zwischen den Fourierkoeffizienten (Bild 5.3):



	$m = 0$	$m = 1$	
$n_x(\varphi) =$	$n_{x,o}^{(c)} = 0$	$n_{x,1}^{(c)} \cdot \cos \varphi$	bzw. $n_{x,1}^{(s)} \cdot \sin \varphi$
$n_{xp}(\varphi) =$	$n_{xp,o}^{(c)}$	$n_{xp,1}^{(s)} \cdot \sin \varphi$	bzw. $n_{xp,1}^{(c)} \cdot \cos \varphi$
$q_x(\varphi) =$	$q_{x,o}^{(c)}$ (Gl)	$q_{x,1}^{(c)} \cdot \cos \varphi$	bzw. $q_{x,1}^{(s)} \cdot \sin \varphi$
$m_x(\varphi) =$	$m_{x,o}^{(c)}$ (Gl)	$m_{x,1}^{(c)} \cdot \cos \varphi$	bzw. $m_{x,1}^{(s)} \cdot \sin \varphi$
$m_{xp}(\varphi) =$	$m_{xp,o}^{(c)}$	$m_{xp,1}^{(s)} \cdot \sin \varphi$ (Gl)	bzw. $m_{xp,1}^{(c)} \cdot \cos \varphi$ (Gl)

Tabelle 5.2 Gleichgewichtsgruppen für $m = 0$ und $m = 1$

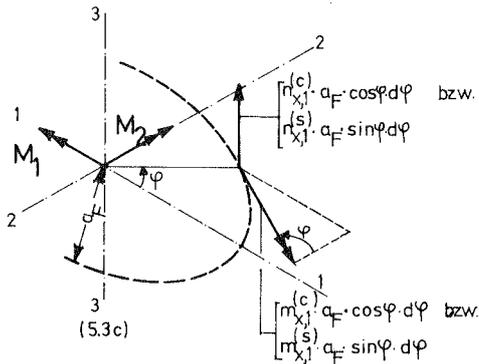
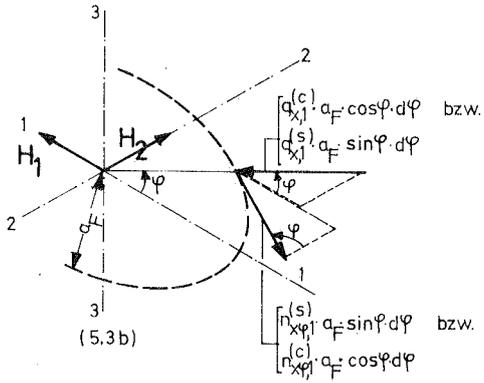
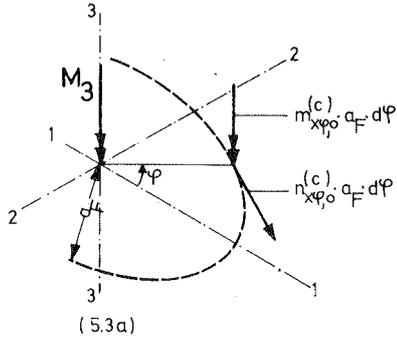


Bild 5.3 Erläuterungen zu Gleichung (5.6 a - e)

$$M_3 = n_{x\varphi_0}^{(c)} \cdot a_F^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\psi + m_{x\varphi_0}^{(c)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} d\psi = 0$$

$$\longrightarrow n_{x\varphi_0}^{(c)} = -\frac{1}{a_F} \cdot m_{x\varphi_0}^{(c)} \quad (5.6a)$$

$$H_1 = q_{x,1}^{(c)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi - n_{x\varphi_1}^{(s)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = 0$$

$$\longrightarrow n_{x\varphi_1}^{(s)} = q_{x,1}^{(c)} \quad (5.6b)$$

$$H_2 = -q_{x,1}^{(s)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi - m_{x\varphi_1}^{(c)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 0$$

$$\longrightarrow n_{x\varphi_1}^{(c)} = -q_{x,1}^{(s)} \quad (5.6c)$$

$$M_1 = -n_{x,1}^{(s)} \cdot a_F^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi - m_{x,1}^{(s)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = 0$$

$$\longrightarrow n_{x,1}^{(s)} = -\frac{1}{a_F} \cdot m_{x,1}^{(s)} \quad (5.6d)$$

$$M_2 = -n_{x,1}^{(c)} \cdot a_F^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi - m_{x,1}^{(c)} \cdot a_F \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 0$$

$$\longrightarrow n_{x,1}^{(c)} = -\frac{1}{a_F} \cdot m_{x,1}^{(c)} \quad (5.6e)$$

Der Koeffizient $n_{x,0}^{(c)}$ errechnet sich allein aus den Gleichgewichtsbedingungen, so daß der hier behandelte statisch unbestimmte Anteil verschwindet.

Von den Kraftgrößen der höheren Harmonischen ($m \geq 2$) stellt jedes Reihenglied eine Gleichgewichtsgruppe dar, so daß keine weiteren Abhängigkeiten zwischen Fourierkoeffizienten bestehen.

$$Y^x = \text{diag} [Y_{0,x} \quad Y_{1,x} \quad \dots \quad Y_{m,x} \quad \dots] \quad (5.9)$$

$$Y_{0,x} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_0^{(s)} & y_0^{(s)} & \gamma_0^{(s)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_{0x}^{(s)} \\ q_{0x}^{(s)} \\ l_{0x}^{(s)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(5.9a)

$$Y_{1,x} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1^{(s)} & y_1^{(s)} & \gamma_1^{(s)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_{1x}^{(s)} \\ q_{1x}^{(s)} \\ l_{1x}^{(s)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(5.9b)

$$Y^x = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_0^{(s)} & y_0^{(s)} & \gamma_0^{(s)} & w_1^{(s)} & y_1^{(s)} & \gamma_1^{(s)} & \dots & w_m^{(s)} & y_m^{(s)} & \gamma_m^{(s)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_{0x}^{(s)} \\ q_{0x}^{(s)} \\ l_{0x}^{(s)} \\ m_{1x}^{(s)} \\ q_{1x}^{(s)} \\ l_{1x}^{(s)} \\ \dots \\ m_{mx}^{(s)} \\ q_{mx}^{(s)} \\ l_{mx}^{(s)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ \dots & \dots \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ \dots & \dots \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \dots & x & x & x \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(5.9c)

Aufbau der Matrix Y^x
(schematische Darstellung)

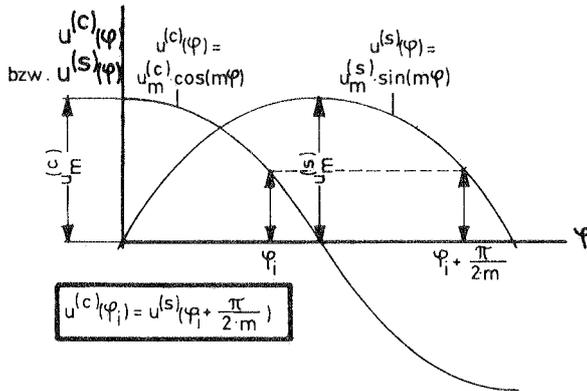


Bild 5.4 Zusammenhang zwischen den Verschiebungen mit dem Verlauf $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$.

$$\pi_{x,m}^{(c)}(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi \quad \text{Verformung: } U^{(c)}(\varphi) = u_m^{(c)} \cos m\varphi$$

$$\pi_{x,m}^{(s)}(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi \quad \text{Verformung: } U^{(s)}(\varphi) = u_m^{(s)} \sin m\varphi$$

Die Amplituden der Verschiebungen sind deshalb in beiden Fällen gleich groß

$$u_m^{(c)} = u_m^{(s)} \quad (5.10)$$

d.h. die Untermatrizen U_{T} und U_{I} einer bestimmten Harmonischen sind identisch, so daß die Verformungen in der praktischen Durchführung nur für jeweils eine Gruppe berechnet werden müssen.

Analog zu (5.5) ergibt sich nun mit (5.8) und (5.9) der statisch unbestimmte Deformationsanteil:

$$V_{X(\varphi)} = \tilde{T} \cdot \tilde{F}(\varphi) Y_X \tilde{X}_{G,X} \quad (5.11)$$

5.3 Superposition

Die Überlagerung von (5.11) und (5.5) liefert die Überbauverformungen.

$$V_{\tilde{U}(\varphi)} = \tilde{T} \tilde{F}(\varphi) \left[Y_{\tilde{U}_X} \tilde{X}_{G,X} + Y_{\tilde{U}_{X_0}} \right] \quad 1) \quad (5.12)$$

Starrkörperverschiebungen sind hier nicht enthalten; sie wurden mit der Forderung $u = v = 0$ für $m = 0$ und $m = 1$ ausgeschaltet.

Es ist anzumerken, daß für die Verdrehung der Ring- bzw. Schalennormalen $\psi_{\tilde{U}}$ keine unabhängige Lösungsfunktion existiert; sie errechnet sich aus den Radial- und Tangentialverschiebungen. Mit Bild 5.5 und den Vorzeichendefinitionen von Bild 5.1 ist:

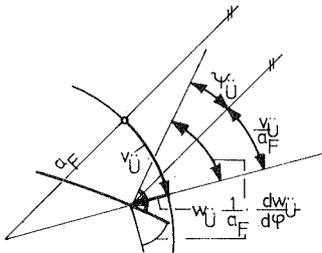


Bild 5.5 Berechnung der Verdrehung $\psi_{\tilde{U}}$

1) \tilde{U} (für Überbau) sei an dieser Stelle eingeführt, weil bei der Formulierung der Verträglichkeitsbedingungen (Abschnitt 6.3) darauf Bezug genommen wird.

$$\psi_0 = \frac{1}{a_r} \left[- \frac{dw_0}{d\varphi} + v_0 \right] \quad (5.13)$$

Wegen der dadurch bedingten linearen Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten von ψ_0 einerseits und denen von w_0 und v_0 andererseits ist die Matrix $Y_{\bar{U},x}$ mehrfach singulär. Dies ist eine Folge der Normalenhypothese, die der angewendeten klassischen Theorie der Kreis-zylinderschale bzw. der des Kreisrings zugrunde liegt. Im allgemeinen Fall bestehen solche Abhängigkeiten bei der entsprechenden Matrix des Baugrunds und damit bei der Summe beider Matrizen nicht, so daß die Koeffizientenmatrix des Gesamtsystems nichtsingulär ist.

Vernachlässigt man allerdings die Radial- und Tangentialverschiebungen des Baugrunds, so bleibt auch die Gesamtmatrix singulär, weil die betreffenden Zeilen nur die Verformungsanteile des Überbaus enthalten. In diesem Fall muß die Wirkung des "Drillmoments" $m_{x\varphi}$ der Schubkraft $n_{x\varphi}$ und der Querkraft q_x hinzugefügt werden (Ersatzschubkraft, Ersatzquerkraft). Es entfallen dann die entsprechenden Zeilen und Spalten des Gleichungssystems. Die Forderung gleicher Verdrehungen ψ von Baugrund und Überbau läßt sich dann nicht mehr erfüllen.

6. Verträglichkeitsbedingungen am Gesamtsystem

6.1 Starrkörperverschiebungen

Die Baugrundverformungen lassen sich mit Gleichung (4.13) berechnen. Der dort eingeführte Vektor X_G enthält sowohl die zum Gleichgewicht als auch die zur Verträglichkeit notwendigen Anteile. Benützt man zur Aufspaltung die Beziehung (5.4a) und führt statt $X_{G,x}$ den Vektor $X_{G,x}^*$ ein (vgl.(5.7)), der nur die unabhängigen Koeffizienten enthält, so wird:

$$V_B(\varphi) = T \cdot F(\varphi) \left[\underbrace{Y_{B,x} \cdot X_{G,x}^*}_{\substack{\text{statisch un-} \\ \text{bestimmter An-} \\ \text{teil}}} + \underbrace{Y_{B,x} \cdot X_{G,x0}}_{\substack{\text{Belastung} \\ \text{des Über-} \\ \text{baus}}} + \underbrace{Y_{B,x0}}_{\substack{\text{Belastung} \\ \text{des Bau-} \\ \text{grunds (} p_x \text{)}}} \right] \quad (6.1)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\substack{\text{statisch bestimmter} \\ \text{Anteil (äußere Be-} \\ \text{lastung)}}}$

Faßt man die Koeffizienten der äußeren Belastung im Vektor $Y_{B,x0}^*$ zusammen, so gilt

$$V_B(\varphi) = T \cdot F(\varphi) \left[Y_{B,x} \cdot X_{G,x}^* + Y_{B,x0}^* \right] \quad (6.2)$$

wobei

$$Y_{B,x0}^* = Y_{B,x} \cdot X_{G,x0} + Y_{B,x0} \quad (6.2a)$$

ist.

In den Deformationen (6.2) sind auch Anteile enthalten, denen der Überbau als starrer Körper folgt, ohne dabei

beansprucht zu werden. Bevor die Verträglichkeitsbedingungen formuliert werden können, sind diese Anteile von den Verformungen zu trennen, die im Überbau Spannungen erzeugen. Man betrachte hierzu die Untervektoren von

$$F(\varphi) \cdot [Y_{B,x} X_{G,x}^* + Y_{B,x0}^*] \text{ für } m = 0 \text{ und } m = 1:$$

$m = 0$

$$\begin{bmatrix} W_0^{(c)} \\ V_0^{(c)} \\ W_0^{(cc)} \\ \gamma_0^{(cc)} \\ \psi_0^{(c)} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$m = 1$

$$\begin{bmatrix} W_1^{(c)} \cos \varphi \\ V_1^{(c)} \sin \varphi \\ W_1^{(c)} \cos \varphi \\ \gamma_1^{(c)} \cos \varphi \\ \psi_1^{(s)} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.4a)$$

$$\begin{bmatrix} W_1^{(s)} \sin \varphi \\ V_1^{(s)} \cos \varphi \\ W_1^{(s)} \sin \varphi \\ \gamma_1^{(s)} \sin \varphi \\ \psi_1^{(c)} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6.4b)$$

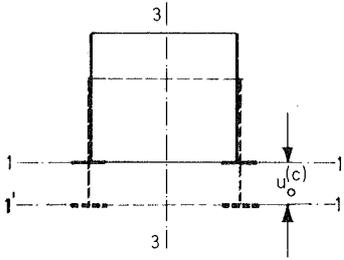
Die Starrkörperverschiebungen ergeben sich aus den Bodenverformungen, die bei der Berechnung des statisch bestimmt gelagerten Überbaus zunächst ausgeschaltet worden waren (vgl. Abschnitt 5.1), also aus den beiden ersten Zeilen von Gleichung (6.3) bzw. (6.4). Die einzelnen Verschiebungs- und Verdrehungsanteile können dem Bild 5.6 entnommen werden. Man erhält drei Translations- und drei Drehbewegungen((a,e,f) bzw. (b,c,d)). Die rechnerische Ermittlung führt auf

$$V_{St} = T_{St} \cdot [Y_{B,x} X_{G,x}^* + Y_{B,x0}^*] \quad (6.5)$$

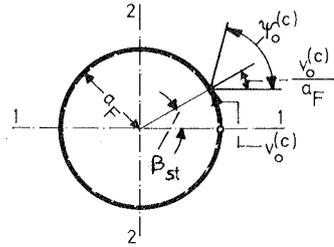
Dabei ist:

$$V_{St} = \begin{bmatrix} V_{1,St} \\ \beta_{St} \\ \gamma_{1,St} \\ V_{n1,St} \\ V_{2,St} \\ V_{n2,St} \end{bmatrix} \begin{matrix} a) \\ b) \\ c) \\ d) \\ e) \\ f) \end{matrix} \quad T_{St} = [T_{St,0} \quad T_{St,1} \quad \dots \quad T_{St,m} \quad \dots \quad T_{St,\frac{n_g}{2}}] \quad (6.5b)$$

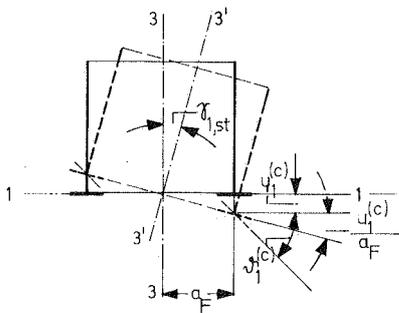
(6.5a)



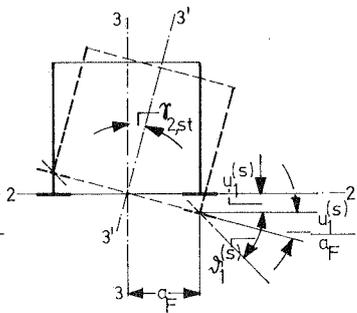
a) Verschiebung $v_{V,st} = u_o^{(c)}$



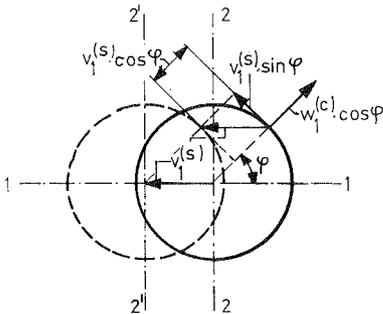
b) Drehung $\beta_{st} = \frac{v_o^{(c)}}{a_F}$



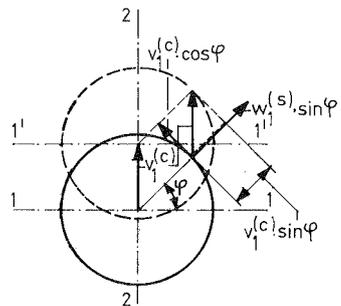
c) Drehung $\gamma_{1,st} = \frac{u_1^{(c)}}{a_F}$



d) Drehung $\gamma_{2,st} = \frac{u_1^{(s)}}{a_F}$



e) Verschiebung $v_{h_1,st} = v_1^{(s)}$



f) Verschiebung $v_{h_2,st} = v_1^{(c)}$

Bild 5.6 Starrkörperverschiebungen

Im weiteren müssen die abhängigen Koeffizienten von $X_{G,x}^*$ ausgeschaltet werden. Die von ihnen erzeugten Baugrundverformungen sind in der Matrix $T_{C \cdot Y_{B,x}}$ denen der zugehörigen unabhängigen Einheitslasten hinzuzufügen (vgl. schematische Darstellung auf S.101). Im gleichen Rechenschritt sollen die dort mit *) bezeichneten Spalten eliminiert werden. Die erläuterten Operationen lassen sich unter Beachtung von Gleichung (5.8) wie folgt zusammenfassen:

$$\tilde{Y}_B = T_{C \cdot Y_{B,x}}^T T_{C \cdot X_{G,x}}^T \tilde{X}_{G,x} + T_{C \cdot Y_{B,x_0}}^* Y_{B,x_0}^* \quad (6.8)$$

Setzt man

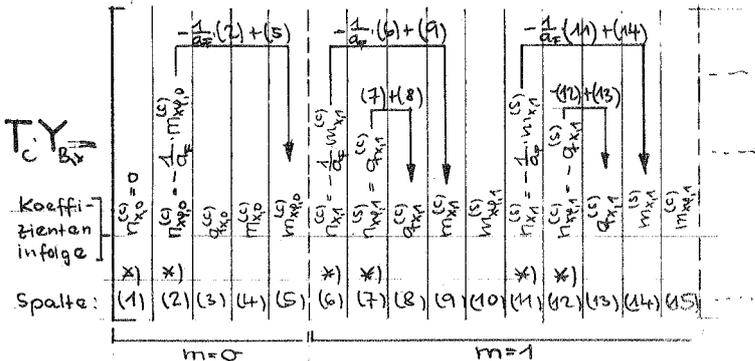
$$\tilde{Y}_{B,x} = T_{C \cdot Y_{B,x}}^T T_{C \cdot X_{G,x}}^T \quad (6.9a)$$

$$\tilde{Y}_{B,x_0} = T_{C \cdot Y_{B,x_0}}^* Y_{B,x_0}^* \quad (6.9b)$$

so ergeben sich die Baugrundverformungen, die im Überbau Spannungen erzeugen, in ähnlicher Form wie die entsprechenden Deformationen des Überbaus (vgl. (5.12)).

$$\tilde{V}_B(\varphi) = \tilde{T} \cdot \tilde{F}(\varphi) \left[\tilde{Y}_{B,x} \tilde{X}_{G,x} + \tilde{Y}_{B,x_0} \right] \quad (6.10)$$

Schema zur Addition und Elimination von Spalten der Matrix $T_{C \cdot Y_{B,x}}$



6.3 Verträglichkeitsbedingungen

Die Kontinuität verlangt Gleichheit von Baugrund- und Überbauverformungen an den Kontaktstellen beider Elemente. Im Abschnitt 6.1 sind die Starrkörperverschiebungen bereits so berechnet, daß sie diese Bedingung erfüllen; der Vergleich erstreckt sich also nur auf die mit Spannungen verbundenen Verformungen. Bei Beachtung der Vorzeichen gilt:

$$V_U(\varphi) = -\tilde{V}_B(\varphi) \quad (6.11)$$

oder

$$V_U(\varphi) + \tilde{V}_B(\varphi) = N \quad (6.11a)$$

und mit den Gleichungen (5.12) und (6.10)

$$\tilde{T} \cdot \tilde{F}(\varphi) \left[(Y_{U,x} + \tilde{Y}_{B,x}) \cdot \tilde{X}_{G,x} + (Y_{U,x_0} + \tilde{Y}_{B,x_0}) \right] = N \quad (6.12)$$

Setzt man

$$\tilde{Y}_{G,x} = Y_{U,x} + \tilde{Y}_{B,x} \quad (6.13a)$$

$$\tilde{Y}_{G,x_0} = Y_{U,x_0} + \tilde{Y}_{B,x_0} \quad (6.13b)$$

so wird aus Gleichung (6.12)

$$\tilde{T} \cdot \tilde{F}(\varphi) \left[\tilde{Y}_{G,x} \cdot \tilde{X}_{G,x} + \tilde{Y}_{G,x_0} \right] = N \quad (6.14)$$

Dieser Koeffizientenvergleich für die Amplituden der trigonometrischen Funktionen $\tilde{F}(\varphi)$ führt auf das lineare inhomogene Gleichungssystem zur Berechnung von $\tilde{X}_{G,x}$.

$$\tilde{Y}_{G,x} \cdot \tilde{X}_{G,x} + \tilde{Y}_{G,x_0} = N \quad (6.15)$$

mit der Lösung

$$\tilde{X}_{G,x} = -\tilde{Y}_{G,x}^{-1} \cdot \tilde{Y}_{G,x_0} \quad (6.16)$$

Da sich der Koeffizient $n_{x,0}^{(o)}$ allein aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Überbau ergibt, und da zwischen fünf Kraftgrößen lineare Abhängigkeit besteht, beträgt die Anzahl der Unbekannten

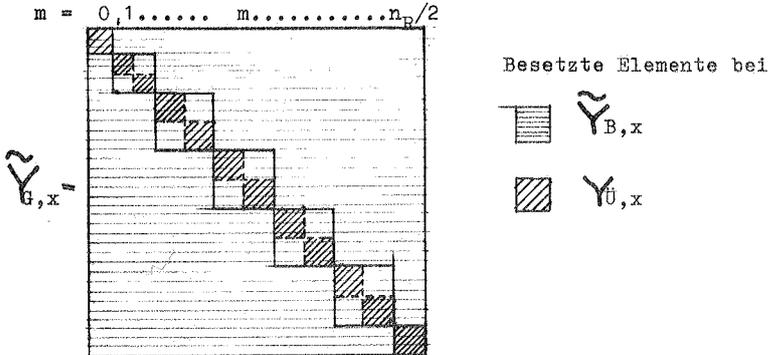
$$n = 5 \cdot n_R - (1+5) = 5 \cdot n_R - 6 \quad (6.17)$$

Zu deren Berechnung stehen ebensoviele lineare Gleichungen zur Verfügung. Fügt man diesen $5n_R - 6$ Kontinuitätsbedingungen die sechs Gleichgewichtsbedingungen hinzu, so stehen insgesamt

$$\bar{n} = 5 \cdot n_R \quad (6.18)$$

Bedingungen zur Verfügung, um an n_R diskreten Stellen des Umfangs für jeweils fünf Verformungen Verträglichkeit zwischen Baugrund und Überbau herzustellen.

Im Gegensatz zur Matrix $Y_{\bar{U},x}$ besteht bei $\tilde{Y}_{B,x}$ im allgemeinen Fall keine Koppelung zwischen den einzelnen Harmonischen. Somit ist $\tilde{Y}_{G,x}$ nach folgendem Schema aufgebaut:



Um also an einer bestimmten Anzahl von Punkten zwischen Baugrund und Überbau Kontinuität herzustellen, müssen alle Reihenglieder gleichzeitig betrachtet werden. Eine aufeinanderfolgende Berechnung für die einzelnen Harmonischen ist nur dann möglich, wenn bei jedem betrachteten Reihenglied Affinität zwischen Baugrund- und Überbauverformungen besteht. Für die praktische Rechnung bedeutet die Koppelung zwischen den Harmonischen, daß vor Beginn des Rechenprozesses entschieden werden muß, an wieviel Stellen des Umfangs Kontinuität hergestellt werden soll, da sich danach die Zahl der mitzunehmenden Reihenglieder richtet.

Unter diesem Gesichtspunkt kann die vorliegende Methode auch als Kollokationsverfahren bezeichnet werden: Man geht von einem Funktionssystem aus, das die Differentialgleichungen der Kreiszyinderschale bzw. des Kreisrings exakt erfüllt und nimmt so viele Reihenglieder und damit Freiwerte mit, daß die Übergangsbedingungen an einer gleich großen Zahl von Punkten exakt erfüllt werden können. (vgl. [18], [21], [24], [36]). Der Nachteil dieser "einfachen" Kollokation besteht oft darin, daß die Randbedingungen zwar an den vorgegebenen Stellen exakt erfüllt werden, daß die Lösungskurve aber zwischen den Kollokationspunkten stark oszilliert. Diese Erfahrung wurde bei der vorliegenden Anwendung nicht gemacht. Es sei hierzu auf den Abschnitt 8 hingewiesen, der einige numerische Untersuchungen zu dieser Frage enthält.

7. Superposition der Schnittgrößen und Verformungen

7.1 Baugrund

Aus dem Lösungsvektor $\tilde{X}_{G,x}$ ergibt sich $X_{G,x}^*$ (Gleichung 5.7c) durch Multiplikation mit T_C^T (vgl. 6.7b).

$$X_{G,x}^* = T_C^T \cdot \tilde{X}_{G,x} \quad (7.1)$$

Zusammen mit dem statisch bestimmten Anteil X_{G,x_0} (5.2b) ist

$$X_G = X_{G,x_0} + X_{G,x}^* \quad (7.2)$$

Damit lassen sich die zwischen Baugrund und Überbau wirkenden Kraftgrößen mit (3.18) berechnen.

$$S_{G,(P)} = T \cdot F_{(P)} \cdot X_G \quad (7.3)$$

Zür Bestimmung der Federkräfte P nach (4.60) ist aus der Lastmatrix L_R ein Vektor zu bilden, der alle betrachteten Wirkungen enthält. Es gilt

$$P = C_R^{-1} \cdot L_R \cdot S_R \quad (7.4)$$

mit

$$S_R = \begin{bmatrix} X_G \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.4a)$$

Analog dazu ergeben sich die Verschiebungen der Federelemente mit Gleichung (4.61)

$$\delta = C \cdot C_R^{-1} \cdot L_R \cdot S_R \quad (7.5)$$

und mit (4.69) die daraus berechneten Verschiebungskomponenten der Ringelemente.

$$V_B = \tilde{C} \cdot L_R \cdot S_R \quad (7.6)$$

Für die n_R vorgegebenen Punkte sind die Gleichungen (7.5) und (7.6) identisch mit der Reihendarstellung. Das Ergebnis hierfür ist mit (6.1) und (6.2) bereits wiedergegeben.

7.2 Überbau

Aus den Starrkörperverschiebungen und den Spannung erzeugenden Verformungen, die für die Ringunterseite mit Gleichung (5.12) gegeben sind, setzt sich der Verschiebungszustand des Überbaus zusammen. Für alle anderen Stellen ist der formale Aufbau des zuletzt genannten Anteils gleich. Lediglich die Matrix $Y_{Ü,x}$ und der Vektor $Y_{Ü,x_0}$ sind für die betrachteten Punkte neu zu bestimmen. An einem beliebigen Punkt P ist dann:

$$V_{Ü}^P(\varphi) = \tilde{T} \cdot \tilde{F}(\varphi) \left[Y_{Ü,x}^P \cdot \tilde{X}_{G,x} + Y_{Ü,x_0}^P \right] \quad (7.7)$$

Die Schnittgrößen lassen sich in gleicher Weise berechnen, wenn man die Matrizen und Vektoren entsprechend der Anzahl der zu berechnenden Größen verändert. Für ihre Gesamtheit gilt am Punkt P:

$$S_{Ü}^P(\varphi) = \tilde{T}_S \cdot \tilde{F}_S(\varphi) \left[S_{Ü,x}^P \cdot \tilde{X}_{G,x} + S_{Ü,x_0}^P \right] \quad (7.8)$$

8. Zahlenbeispiele

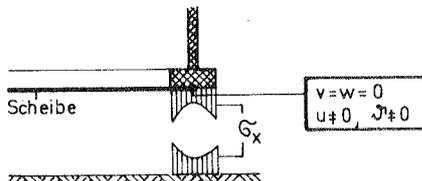
8.1 Vorbemerkungen

Die numerischen Untersuchungen erstrecken sich auf Systeme, die - bezogen auf $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ - in Geometrie und Belastung symmetrisch sind. Dann treten bei allen Reihenentwicklungen nur geradzahlige cosinus- bzw. sinus - Glieder auf ($m = 0, 2, \dots \dots \dots \dots, n_R/2$). Bei den Diagrammen der Zustandsgrößen ist deshalb nur der Bereich $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ dargestellt.

Wie im Abschnitt 4.7 bereits erwähnt, werden ausschließ- lich die Vertikalverformungen des Baugrunds infolge lot- rechter Lasten berücksichtigt (vgl. S.71). Eine Erweiterung auf alle Last- und Verschiebungskomponenten ist für den unendlichen elastisch-isotropen Halbraum möglich; es können dazu die von CERUTTI angegebenen Verschiebungen für eine horizontale Einzellast an der Halbraumoberfläche herangezogen werden (z.B. [44]). Vernachlässigt man die Radial- und Tangentialverschiebungen des Baugrunds, so lassen sich in der Kontaktfuge nur vier Kraftgrößen als Unbekannte einführen, da sonst die Matrix $\Upsilon_{G,x}$ (s. S.103) mehrfach singulär wird (vgl. hierzu die Ausführungen auf S.94 f.). Die Kräfte $n_{x\varphi}$ und q_x sind dann als Ersatzschub- bzw. als Ersatzquerkraft aufzufassen ($\overline{n}_{x\varphi}$, \overline{q}_x), die die Wirkung des Moments $m_{x\varphi}$ näherungsweise beinhalten.

Voraussetzung für die Berechnungen ist, daß der untere Rand des Fundamentrings durch eine dehnstarre und biegeschlaffe Kreis- oder Kreisringscheibe ausgesteift ist, so daß bei dem doppeltsymmetrischen System nur Normalspannungen σ_x auf den Baugrund wirken können (Bild 8.1).

Bild 8.1 Randbedingungen in der Kontaktfuge



Die Ersatzschub- und Ersatzquerkräfte bilden Gleichgewichtsgruppen ($m = 0, 2, \dots$), die dann von der Scheibe aufzunehmen sind.

Legt man diese Randbedingungen zugrunde, so dürfen die Radial- und Tangentialverformungen des Baugrunds vernachlässigt werden; verzichtet man auf eine aussteifende Scheibe, so müssen - insbesondere bei weichem Baugrund - alle Last- und Verschiebungskomponenten des Bodens in die Rechnung mit einbezogen werden. Um aber eine möglichst günstige Tragwirkung des Überbaus zu erreichen, sind - vor allem bei nicht-rotationssymmetrischer Belastung - die oben erwähnten Deformationen des Überbaus durch die genannten konstruktiven Maßnahmen in der Gründungsfläche auszuschalten. Dadurch läßt sich ein Teil der dehnungslosen Verformungen eliminieren (vgl. hierzu Abschnitt 8.2).

Die Berechnungen, deren Ergebnisse im Anhang A dargestellt sind, sollen vor allem das unterschiedliche Trag- und Deformationsverhalten verschiedener Überbausysteme aufzeigen. Die angegebenen Absolutwerte der Verformungen, die sich für eine angenommene Einheitsbelastung errechnen, erfüllen teilweise nicht die Voraussetzung der hier verwendeten geometrisch linearen Schalentheorie (kleine Verformungen gegenüber der Schalendicke). Um deren Anwendungsgrenzen nicht zu überschreiten, müßte die wirkliche Belastung entsprechend reduziert werden. Die angestrebte vergleichende Betrachtung verschiedener Systeme wird davon jedoch nicht berührt.

Bei allen Untersuchungen einzelner Lastzustände wird vorausgesetzt, daß in der Bodenfuge auch Zugspannungen übertragen werden können. Diese Annahme ist berechtigt, solange sich bei Superposition aller Lastfälle nur Druckspannungen ergeben.

8.2 Numerische Untersuchungen zur Festlegung einer praktisch sinnvollen Anordnung der Federelemente

Mit der beschriebenen Methode werden die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen zwischen Baugrund und Überbau an diskreten Punkten des Kreisumfangs erfüllt. Dabei ist vorausgesetzt, daß bei einer Aufteilung der Kreisringfläche in Teilflächen F_k mit bereichsweise konstanten Normalspannungen σ_x gerechnet werden kann. Über die Genauigkeit der Ergebnisse können keine allgemein gültigen Aussagen gemacht werden. Geschlossene Lösungen oder andere Berechnungsmethoden, die einen Vergleich ermöglichen würden, liegen nicht vor.

An ein brauchbares diskretisiertes Berechnungsverfahren muß die Forderung gestellt werden, daß sich die Ergebnisse mit wachsender Verfeinerung der Intervallteilung nur noch unwesentlich ändern. Inwieweit diese Konvergenz-Forderung erfüllt wird, läßt sich nur anhand numerischer Erfahrungen beurteilen. Die folgenden exemplarischen Untersuchungen sollen Aufschluß hierüber geben.

8.2.1 Aufteilung der Gründungsfläche in radialer Richtung (Anzahl der Federelemente pro Ringelement)

Es wird der in Querrichtung starre, in Umfangsrichtung vollkommen weiche Kreisring betrachtet (s.S. 69), der eine Meridiankraft n_x bzw. ein Krepelmoment m_x auf den Baugrund überträgt (Bild A 1). Die Zahl der Ringelemente beträgt in dieser Untersuchung $n_R = 360$. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß auch bei einer geringeren Anzahl ausreichend genaue Ergebnisse erzielt werden können.

Die Verschiebungen u und die Verdrehungen φ sind im Bild A 1 in Abhängigkeit von der Zahl der Federelemente n_P dargestellt. Der zwei Meter breite Ring wurde zunächst in Streifen gleicher Breite unterteilt ($n_P = 3$ bis 20). Es

ist zu ersehen, daß insbesondere die Verdrehungen ϑ infolge m_x bei einer Verfeinerung von 3 auf 11 Streifen noch deutlich abnehmen, daß sie sich aber bei einer weiteren Unterteilung auf $n_p = 20$ nur noch unwesentlich verändern. Entsprechendes gilt tendenziell auch für die übrigen Verformungen. Die geringen Unterschiede in den gegenseitigen Verformungen (u infolge m_x , ϑ infolge n_x) sind von n_p weitgehend unabhängig; sie werden in erster Linie von der Anzahl der Ringelemente beeinflusst. Dies wird deutlich, wenn man sich im Extremfall nur ein Ringelement angeordnet denkt. Dann liegen die Schwerpunkte aller n_p Ringflächen im Kreismittelpunkt und eine Ermittlung der Knotenlasten ist für dieses "entartete" System nicht mehr möglich.

Es ist anzumerken, daß die gegenseitigen Verformungen erwartungsgemäß mit wachsendem Radius kleiner werden. Für $a_p \rightarrow \infty$ liegt der Fall des unendlich langen, in Querrichtung starren Gründungsbalkens vor, bei dem die gegenseitigen Verformungen aus Symmetriegründen verschwinden müssen.

Die Sohldruckspannungen σ_x sind in A 2 für $a_p = 21$ m dargestellt. Für die anderen Radien weicht deren Verlauf nur geringfügig davon ab. Bei sehr feiner Aufteilung in 20 Intervalle ist die gerechnete Treppenlinie durch eine stetige Kurve ersetzt. Qualitativ erhält man die für den unendlich langen, in Querrichtung starren Balken bekannte Spannungsverteilung (z.B. [15]) mit ausgeprägten Spitzen an den Fundamenträndern. Als Folge der Krümmung sind die Ordinaten an der Innenseite des Rings größer als an seiner Außenseite.

Es ist nun naheliegend, statt einer sehr feinen äquidistanten Aufteilung in Querrichtung Teilflächen F_k mit unterschiedlicher Breite der Berechnung zugrunde zu legen. Der mittlere Bereich mit geringen Spannungsänderungen kann da-

bei sehr groß gewählt werden, in den außen- bzw. innen-
liegenden Zonen ist wegen der Spannungsspitzen eine feine-
re Unterteilung erforderlich. Vergleichende Berechnungen
ergaben, daß sich mit $n_F = 5$ bei einer Aufteilung im Ver-
hältnis 1:2:7:2:1 nahezu die gleichen Verformungen ergeben
wie für $n_F = 20$ bei äquidistanter Teilung (s. Bild A 1
bei $n_F = 5$). Auch die zugehörigen Spannungen σ_x ge-
ben ein gutes Bild von dem genauer berechneten Verlauf.

Für die weiteren Untersuchungen erschien es ausreichend,
mit $n_F = 5$ bei der angegebenen Teilung zu rechnen. Gegenüber
 $n_F = 20$ wird durch diese Vereinfachung die Zahl der unbe-
kannten Sohlrücke auf ein Viertel reduziert (vgl. Gleich-
ung (4.60)), ohne daß wesentliche Einbußen in der Genauig-
keit der Bodenverformungen in Kauf genommen werden müssen.

8.2.2 Aufteilung der Gründungsfläche in tangentialer Richtung (Anzahl der Ringelemente)

Um die Zahl der notwendigen Ringelemente festlegen zu
können, wurden zwei Gesamtsysteme mit unterschiedlicher Stei-
figkeit berechnet:

- ein hoher Zylinder, dessen oberer Rand mit einer dehn-
starrten, biegeschlaffen Scheibe ausgesteift ist
("steifes" System, Bilder A 3a und A 3b).
- ein niedriger Zylinder mit nicht ausgesteiftem oberem
Rand ("weiches" System, Bilder A 4a und A 4b).

Beide Systeme sind an ihrem oberen Rand mit $p_x = 100 \text{ Mp/m}$
belastet. Ein nicht-rotationssymmetrischer Spannungszustand
entsteht durch die angenommene Bodenschichtung: Bei $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$
beträgt die Dicke der zusammendrückbaren Schicht 20 m, bei
 $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$ dagegen nur einen Meter. Die Begrenzungslinie
der nicht deformierbaren Schicht in Vertikalschnitten parallel
zu $\varphi = 0^\circ$ ist eine quadratische Parabel.

Unter diesen extremen Bedingungen, die gewissermaßen als Testfall dienen sollen, sind beim weichen System große unterschiedliche Setzungen und beim steifen System eine besonders starke Lastkonzentration bei $\varphi = 90^\circ$ zu erwarten.

Als Maßstab für die erreichte Genauigkeit können die in der Kontaktfläche wirkenden Kraftgrößen bzw. die in die Bodenplatte einzuleitenden Ersatzschub- und Ersatzquerkräfte angesehen werden; die Beurteilung wird ergänzt auf Grund der ebenfalls angegebenen Verformungen u und δ . Es ist jedoch zu beachten, daß vor allem beim steifen System schon geringe, in den Abbildungen nicht mehr darstellbare Abweichungen von den angegebenen Verformungen, zu erheblichen Veränderungen der Kraftgrößen führen. Die Deformationen allein würden also nur unzureichende Folgerungen auf die erreichte Genauigkeit zulassen.

Dargestellt sind die Ergebnisse für $n_R = 40, 80$ und 112 . Die höchste mitgenommene Harmonische ist jeweils $m^* = n_R/2$ ($m^* = 20, 40$ und 56). Für $n_R = 40$ ist der Verlauf der Kraftgrößen noch teilweise völlig unbrauchbar oder stark oszillierend. Erhöht man die Zahl der Ringelemente auf $n_R = 80$, so ist diese Erscheinung - auch zwischen den angegebenen Punkten - nicht mehr zu beobachten. Eine weitere Verfeinerung der Intervallteilung auf $n_R = 96$ (gerechnet, aber hier nicht dargestellt) und $n_R = 112$ bringt nur noch unbedeutende Veränderungen im Verlauf der Kraftgrößen. Dies gilt für das weiche und das steife System. Betrachtet man ergänzend hierzu die Verformungen u und δ , so ist in der Tendenz dasselbe Verhalten zu erkennen.

Um schon an dieser Stelle zu zeigen, wie stark das Setzungsverhalten des Überbaus von dessen Steifigkeit beeinflusst wird, sind für die gerechneten Intervallteilungen die Ver-

schiebungen u und die Verdrehungen ϑ für einen schlaff angenommenen Überbau angegeben. Die Setzungsdifferenz zwischen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ beträgt in diesem Fall ca. 13 cm. Der steife Überbau gleicht die unterschiedlichen Setzungen nahezu vollständig aus (A 3a). Damit verbunden ist eine starke Konzentration von n_x bei $\varphi = 90^\circ$. Aber auch das weiche System folgt den Setzungsdifferenzen nur teilweise (A 4a, $\Delta u \approx 9$ cm).

8.2.3 Ergebnis der Voruntersuchungen

Die Untersuchungen hinsichtlich der Konvergenz des Berechnungsverfahrens ergaben, daß die Gründungsfläche wie folgt aufgeteilt werden kann:

Ringelemente	$n_R = 112$	
Federelemente je Ringelement	$n_F = 5$	(Aufteilung der Ringbreite im Verhältnis 1:2:7:2:1)

Alle weiteren Beispiele wurden mit dieser Intervallteilung berechnet. Ein Oszillieren der Lösungsfunktionen zwischen den Ringelementen war in keinem Fall festzustellen (vgl. S. 104).

8.3 Sonderfälle der vollständigen Biegetheorie der Kreiszyklinderschale

Die Berechnung des Überbaus erfolgt nach der Biegetheorie der Kreiszyklinderschale [7]. Zur Abtragung äußerer Flächenlasten wird die Partikularlösung verwendet. Mit diesen Grundlagen ergibt sich im Rahmen der linearen Schalentheorie ein vollständiges Bild vom Spannungs- und Verformungszustand der Zylinderschale. Vorzeichendefinitionen für Verformungen und Schnittkräfte können dem Bild 8.2 entnommen werden.

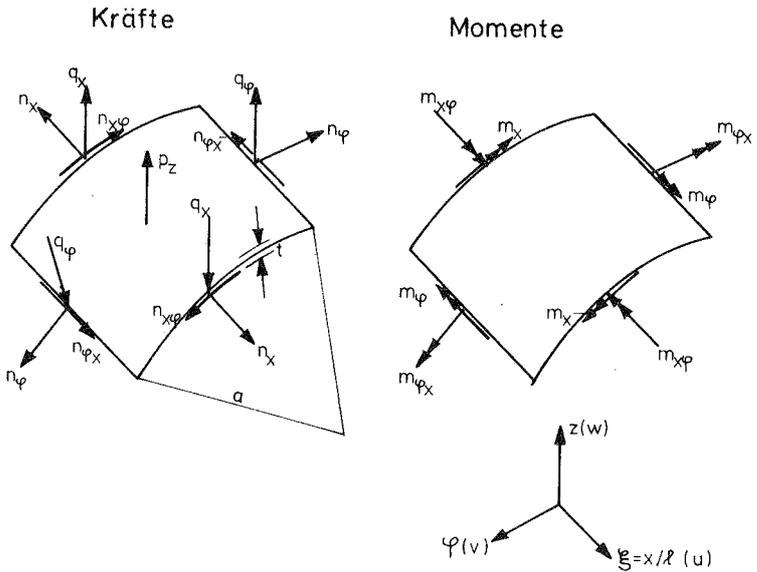


Bild 8.2 Vorzeichendefinitionen für die Zylinderschale

Zur qualitativen und quantitativen Beurteilung der Ergebnisse ist es zweckmäßig, Vergleiche mit vereinfachten

Betrachtungen anzustellen. Solche Vereinfachungen, bei denen verschiedene Wirkungen vernachlässigt werden, führen zu den drei Sonderfällen:

1. Membrantheorie
2. Dehnungslose Verformungen
3. Randstörungenrechnung

Die beiden ersten Fälle sollen kurz behandelt werden, weil sie - im Gegensatz zu den stark abklingenden Randstörungen - das Tragverhalten in weiten Schalenbereichen beeinflussen können.

8.3.1 Membrantheorie

Bei der Membrantheorie werden die Verkrümmungen gegenüber den Verzerrungen und damit die Biegespannungen gegenüber den Dehnspannungen vernachlässigt. Die Membrankräfte n_x , n_y und n_{xy} ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Für die Zylinderschale mit freiem oberem Rand unter harmonischer Belastung $p_z = p_{z,m} \cos m\varphi$ gilt (z.B. [8]):

$$\left. \begin{aligned} n_x\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= - p_{z,m} \cdot \frac{m^2 \cdot l^2}{2 \cdot a} (1 - \frac{r}{a})^2 \cdot \cos m\varphi \\ n_y\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= p_{z,m} \cdot a \cdot \cos m\varphi \\ n_{xy}\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= p_{z,m} \cdot m \cdot l \cdot \left(\frac{r}{a} - 1\right) \cdot \sin m\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Die zugehörigen Verformungen sind

$$\left. \begin{aligned} u\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= \frac{p_{z,m} \cdot a^2}{E \cdot t} \cdot \left[\frac{m^2 \cdot l^2}{2 \cdot a^3} \left(-\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} - \frac{r^3}{a^3} \right) - \frac{\mu \cdot l \cdot r}{a} \right] \cdot \cos m\varphi \\ v\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= \frac{p_{z,m} \cdot a^2}{E \cdot t} \cdot \left[\frac{m^3}{24} \cdot \frac{l^4}{a^4} \left(-6 \cdot \frac{r}{a} + 4 \cdot \frac{r^2}{a^2} - \frac{r^3}{a^3} \right) + \frac{m^2}{2} \cdot \frac{l^2}{a^2} \left[(2 + \mu) \cdot \frac{r^2}{a^2} - 4(1 + \mu) \cdot \frac{r}{a} \right] \right] \cdot \sin m\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Fortsetzung von (8.2) s. 8.116

$$W(\xi, \varphi) = \frac{p_{\text{ext}} \cdot a^2}{E \cdot t} \cdot \left[\left[1 + \frac{\mu^4}{24} \frac{l^4}{a^4} \left(6 \cdot \frac{\xi^2}{a^2} - 4 \frac{\xi^3}{a^3} + \frac{\xi^4}{a^4} \right) + \right. \right. \quad (8.2)$$

$$\left. \left. + \frac{\mu^2}{2} \frac{l^2}{a^2} \left[-2 \cdot \frac{\xi^2}{a^2} + 2(2+\mu) \frac{\xi}{a} + \mu \right] \right] \cdot \cos m\varphi \right]$$

Für $\xi = 0$ ist somit

$$u = v = 0 ; \quad w, \frac{\partial w}{\partial \xi} \neq 0$$

Bei nicht stark veränderlichen Oberflächenlasten kann die Membranlösung statt der strengen Partikularlösung verwendet werden. Wenn dehnungslose Verformungen ausgeschaltet sind (vgl. 8.3.2), lassen sich die mit der Membrantheorie nicht erfüllbaren Randbedingungen durch die Randstörungsrechnung korrigieren.

8.3.2 Dehnungslose Verformungen

Vernachlässigt man die Verzerrungen der Schalenmittelfläche gegenüber den Verkrümmungen und damit die Dehnspannungen gegenüber den Biegespannungen, so ergibt sich bei bestimmten Randbedingungen ein eindeutiger Verformungszustand.

Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen der Schalenmittelfläche ist gegeben durch (vgl.z.B. [7]):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ a \cdot \epsilon_\varphi &= \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \\ a \cdot \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right] \quad (8.3)$$

Setzt man definitionsgemäß die linken Seiten von (8.3)

Die Teillösung I charakterisiert eine unterschiedliche Setzung mit dem Verlauf $u_2^{(0)} \cdot \cos 2\varphi$. Für $\xi = \xi_0$ ist $v_I = w_I = 0$, so daß die Kreisform an dieser Stelle erhalten bleibt. Mit wachsendem oder abnehmendem ξ tritt eine linear zunehmende Ovalisierung des Kreisquerschnitts auf (Bild 8.3). Mit der Teillösung II überlagert sich ein über die Schalenlänge konstantes Oval ohne Meridianverschiebungen u .

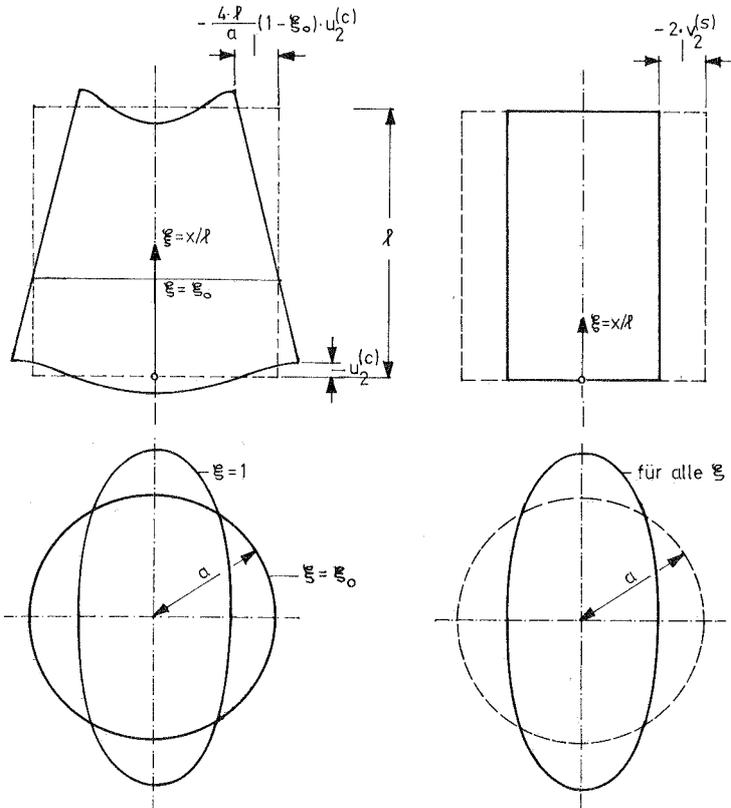


Bild 8.3 Dehnungslose Verformungen der Zylinderschale

Die angegebenen Verformungsfiguren führen zu einer reinen Biegebeanspruchung der Schale, die wegen der damit verbundenen großen Deformationen sehr unerwünscht ist. Verhindert man unterschiedliche Meridianverschiebungen ($u_2^{(c)} = 0$), so läßt sich die Lösung I ausschalten. Bei elastischer Nachgiebigkeit des Baugrunds ist dies jedoch im allgemeinen nur mit aufwendigen konstruktiven Maßnahmen zu erreichen (z.B. sehr dicke, biegesteife Gründungsplatte). Viel wirksamer ist es, die Radial- oder Tangentialverschiebungen an zwei Stellen $\xi = \xi_1, \xi_2$ zu eliminieren, weil damit auch die Teillösung II ausgeschaltet werden kann. Benützt man hierzu beispielsweise $v(\xi, \varphi)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \overline{m_0} = \overline{m_1}: \quad \frac{2 \cdot l}{a} (\overline{m_1} - \overline{m_0}) \cdot u_2^{(c)} + v_2^{(s)} &= 0 \\ \overline{m_0} = \overline{m_2}: \quad \frac{2 \cdot l}{a} (\overline{m_2} - \overline{m_0}) \cdot u_2^{(c)} + v_2^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem besitzt die Lösungen $u_2^{(c)} = v_2^{(s)} = 0$, da für $\xi_1 \neq \xi_2$ die Nennerdeterminante $N \neq 0$ ist.

$$N = \frac{2 \cdot l}{a} (\overline{m_1} - \overline{m_2}) \quad (8.8)$$

Der Spannungszustand wird umso günstiger sein, je weiter die Aussteifungen voneinander entfernt sind, weil die Nennerdeterminante linear mit der Differenz $|\overline{m_1} - \overline{m_2}|$ anwächst.

Um dehnungslose Verformungen vollständig zu vermeiden, ist es deshalb zweckmäßig, am unteren und oberen Rand eines Silos keine Radial- und/oder Tangentialverformungen zuzulassen, etwa durch den Einbau einer Kreis- oder Kreisringscheibe, die in ihrer Ebene als starr angesehen werden kann. Diese Forderung läßt sich in der Gründungsebene leicht verwirklichen, wenn der Fundamentring durch eine als Scheibe wirkende Bodenplatte zusätzlich ausgesteift wird. Eine Verformungsfigur nach Bild 8.3 (Teillösung II) ist dann ausgeschlossen.

Bei Silos mit großen Durchmessern ist der Einbau einer Scheibe am oberen Rand aus wirtschaftlichen und betrieblichen Gründen oft nicht zu realisieren. Um den Zustand dehnungsloser Verformungen, die von unterschiedlichen Setzungen herrühren (Teillösung I), wenigstens partiell zu eliminieren, müssen die Verformungen des oberen Rands elastisch behindert werden (z.B. Kreisring und/oder Kegelstumpfschale).

8.4 Ergebnisse und Beurteilung ausgewählter Beispiele

Die im folgenden behandelten Gesamtsysteme sind durch einen nicht-rotationssymmetrischen Spannungs- und Verformungszustand gekennzeichnet. Um das Tragverhalten verschiedener Überbauten miteinander vergleichen zu können, wurden die Länge l der Schale bei sonst beibehaltener Geometrie und unveränderten Materialkonstanten sowie die Ausbildung des oberen Schalenrands verändert (Tabelle auf A 5). Außer den so entstehenden sechs Systemen (① bis ⑥) wird auch der Fall eines vollkommen schlaffen Überbaus betrachtet (System ⑦). Bei der Auswahl der Systeme wurde nur eine geringe Anzahl der möglichen Parameter variiert; die Ergebnisse können deshalb lediglich Tendenzen im Tragverhalten aufzeigen. Im Hinblick auf die große Rechenzeit zur Durchrechnung eines einzigen Systems erschien es weder sinnvoll noch möglich, alle Einflußgrößen systematisch zu variieren, zumal die quantitativen Aussagen auch dann nur in den wenigsten Fällen auf ein praktisch vorliegendes Problem übertragen werden könnten. Die geringe Verbesserung der qualitativen Beurteilung würde aber in keinem vertretbaren Verhältnis zu dem rapide anwachsenden Rechenaufwand bei Hinzunahme weiterer Parameter stehen.

Die Serie I zeigt Beispiele für rotationssymmetrisch belastete Silos auf einer an der Oberfläche anstehenden deformierbaren Bodenschicht mit veränderlicher Dicke (Bilder A 5 ff.). Jene ruht - durch einer quadratische Parabel abgegrenzt - auf nicht zusammendrückbarem Untergrund ($E_g = \infty$).

Die Serie II behandelt nicht-rotationssymmetrisch belastete Überbauten auf dem unendlichen elastisch-isotropen Halbraum (Bilder A 21 ff.). Die bereits erwähnten Silovarianten (① bis ⑥) sind für drei verschiedene Bodensteifigkeiten berechnet (a, b, c).

8.4.1 Serie I (Überbau rotationssymmetrisch belastet, Baugrund mit variabler Dicke der zusammendrückbaren Schicht)

Das Bild A 6 zeigt die Kräfteumlagerung Δn_x sowie die korrespondierenden unterschiedlichen Vertikalverformungen (Setzungen) Δu für die verschiedenen Systeme. Der Wert $u_{0, \text{schlaff}}^{(c)} = 6.27$ cm stellt einen am Umfang konstanten Setzungsanteil des schlaff gedachten Überbaus dar. Gezeichnet sind nur die hiervon abweichenden Deformationen. Die Rechnung ergab, daß sich die Starrkörperverschiebungen der Systeme ① bis ⑥ nur geringfügig von diesem Bezugswert unterscheiden. Die konstante Vertikalverschiebung $u_0^{(c)}$ des Überbaus ist also von dessen Steifigkeit praktisch unabhängig.

Dagegen bestehen zwischen den einzelnen Systemen erhebliche Unterschiede in den Setzungsdifferenzen. Die kurze, am oberen Rand nicht ausgesteifte Schale ① folgt der Linie ② am weitesten (ca. 70 %). Die Systeme ③ und ⑥ (starre Scheibe am oberen Rand) zeigen nur noch geringe Setzungsunterschiede. Der Einfluß der Schalenlänge ist aus dem Vergleich von ① mit ④ zu erkennen: Δu wird im vorliegenden Fall bei der vierfachen Silohöhe etwa halbiert. Die elastische Randaussteifung (Ring) ist für die lange Schale relativ wirksamer als für die kurze; hier reduziert sich die Setzungsdifferenz - gemessen am unausgesteiften System - nur unerheblich.

Mit abnehmendem Δu wachsen die Kräfte Δn_x an. Bei Vernachlässigung der Bauwerkssteifigkeit ist $n_x = p_x = 100$ Mp/m und somit $\Delta n_x = 0$. Der Größtwert von Δn_x wird bei den Systemen ③ und ⑥ für $\varphi = 90^\circ$ erreicht. Damit verbunden ist eine Abnahme an den nachgiebigeren Stellen des Umfangs ($\varphi = 0^\circ$).

Der Verlauf der nicht-rotationssymmetrischen Anteile ist im wesentlichen durch die Harmonische $m = 2$ bestimmt. Alle

übrigen Reihenglieder liefern nur noch geringe Korrekturbeiträge. Dies gilt auch für die im folgenden diskutierten Schnittkräfte und Verformungen. Höhere Harmonische haben umso größeren Einfluß, je mehr die unterschiedlichen Setzungen für das System (3) solche Anteile enthalten.

Die auf den Baugrund übertragenen Momente m_x sowie die Verdrehungen ψ können dem Bild A 7 entnommen werden; m_x ergibt sich allein aus den Verträglichkeitsbedingungen und enthält neben den unsymmetrischen Anteilen einen am Umfang konstanten Beitrag ($m = 0$). Die Systeme (3) und (6) sind so verformungssteif, daß auch die Verdrehungen des Fundamentrings nahezu verschwinden.

Von der Bodenplatte sind die Ersatzschub- und Ersatzquerkraft $\bar{n}_{x\varphi}$ bzw. \bar{q}_x aufzunehmen (A 8). Die Größenordnung der angegebenen Kräfte macht insbesondere bei den Überbauten (1) und (2) deutlich, daß ohne eine aussteifende Bodenplatte die Radial- und Tangentialverschiebungen des Baugrunds nicht mehr vernachlässigt werden können.

Die wichtigsten Schnittkräfte des Fundamentrings sind auf den Bildern A 9 und A 10 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die Ringbeanspruchungen - ebenso wie die unterschiedlichen Setzungen Δu (vgl. A 6) - mit wachsender Steifigkeit des Überbaus abnehmen. Betrachtet man beispielsweise die lange Schale, die in ihren Abmessungen etwa den heute gebauten Großraum-Klinkersilos entspricht, so bewirkt die elastische Aussteifung des oberen Rands eine Abnahme der Schnittkräfte des Fundamentrings um etwa 40 bis 50 % ((4), (5)). Noch sehr viel geringer sind die Beanspruchungen, wenn am oberen Rand eine starre Scheibe eingebaut wird ((6)).

Die folgenden Darstellungen zeigen die Verformungen der Zylinderschale (A 11, A 12) in den Meridianschnitten $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ (u, w) bzw. $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 135^\circ$ (v).

Die Verschiebungen $u_1^{(c)}$ der Systeme ③ und ⑥ sind im Vergleich zu denen der anderen Überbauten gering, ihre Tangential- und Radialverschiebungen sind im gewählten Maßstab schon nicht mehr darstellbar.

Der Deformationszustand der nicht oder nur elastisch aus-
gesteiften Systeme ist durch dehnungslose Verformungen ge-
kennzeichnet. Setzt man in der Teillösung I der Gleichung (8.6)
näherungsweise $\xi_0 = 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} u_2\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= u_2^{(c)} \cdot \cos 2\varphi \\ v_2\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= \frac{2 \cdot l}{a} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)} \cdot \sin 2\varphi \\ w_2\left(\frac{r}{a}, \varphi\right) &= -\frac{4 \cdot l}{a} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)} \cdot \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (8.9)$$

Mit den gewählten Abmessungen ist bei $\varphi = 0^\circ$ bzw. 45° für

$l = 10 \text{ m}$	$l = 40 \text{ m}$
$u_2\left(\frac{r}{a}\right) = u_2^{(c)}$	$u_2\left(\frac{r}{a}\right) = u_2^{(c)}$
$v_2\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{4}{3} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)}$	$v_2\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{16}{3} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)}$
$w_2\left(\frac{r}{a}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)}$	$w_2\left(\frac{r}{a}\right) = -\frac{32}{3} \cdot \xi \cdot u_2^{(c)}$

(8.10)

Durch Vertauschen der Vorzeichen erhält man die Verschiebungen bei $\varphi = 90^\circ$ bzw. 135° .

Bei vorgegebenem $u_2^{(c)}$ läßt sich der zu erwartende Ver-
formungszustand mit den obigen Gleichungen leicht abschätzen.
Entnimmt man der Berechnung des Gesamtsystems die Zahlen-
werte für die Amplitude $u_2^{(c)}$, so ergeben sich die in A 11

1) Die angegebene Meridianverschiebung u beinhaltet nur die
unsymmetrischen Anteile; Starrkörperverschiebungen sind im
betrachteten Zusammenhang von untergeordnetem Interesse.

und A 12 gestrichelt eingezeichneten Verformungsfiguren.¹⁾ Sie stimmen mit den nach der strengen Biegetheorie gerechneten Deformationen sehr gut überein. Allerdings ist zu bemerken, daß $u_2^{(c)}$ in der Regel erst nach einer Berechnung des Gesamtsystems vorliegt und - wie die Untersuchungen zeigen - sehr stark von der Steifigkeit des Überbaus abhängt. Näherungsbetrachtungen besitzen deshalb nur einen eng begrenzten Aussagewert. Immerhin zeigen beispielsweise die Formeln (8.10) für $l = 40$ m, daß der Wert $u_2^{(c)}$ mit dem Faktor $32/3$ in Radialverschiebungen des oberen Rands ($\xi = 1$) "übersetzt" wird. Deshalb können schon sehr geringe unterschiedliche Setzungen, die bei anderen Bauwerken als unerheblich angesehen werden, zu großen Deformationen des oberen Schalenrands führen. Für die berechneten Systeme ist die Ovalisierung bei $\xi = 1$ in A 12 angegeben. Durch den Einbau eines Rings werden die Verschiebungen des Überbaus auf etwa die Hälfte reduziert (⑤). Dagegen ist dessen Wirkung bei der kurzen Schale nur sehr gering.

Auf den Bildern A 13 bis A 17 sind die Schnittkräfte der Schale dargestellt. Die durch Umlagerung erzeugten Meridiankräfte Δn_x (A 13) entsprechen für $\xi = 0$ in etwa den zugehörigen Bodenreaktionen (vgl. A 6). Die geringen Differenzkräfte werden vom Fundamentring aufgenommen. Der Verlauf in Meridianrichtung hat nicht den Charakter einer gedämpften Schwingung, sondern nimmt - von Störungen in den Randzonen abgesehen - linear zum oberen Rand hin ab.

Bei den Biegemomenten m_x und den Ringkräften n_φ sind der Einfluß der Randstörungen an der Einspannstelle ins Fundament, sowie das unterschiedliche Abklingverhalten von kurzer und langer Schale deutlich zu sehen. Der Verlauf der Ringmomente m_φ ist im wesentlichen von den dehnungslosen Verformungen bestimmt (vgl. A 11, A 12).

Der Anhang S. 149 ff enthält verschiedene Schnittkraftverläufe in Umfangsrichtung für $\xi = 0$ bzw. $\xi = 1$.

1) Der Übersichtlichkeit wegen sind nur die Systeme ① und ④ dargestellt.

Die Schubkräfte $n_{x\varphi}$ ¹⁾ der einzelnen Systeme unterscheiden sich sehr deutlich voneinander (A 17). Mit wachsender Steifigkeit bleibt ihr Wert in weiten Schalenbereichen konstant. Je weicher das System ist, umso größer werden die Drillmomente $m_{x\varphi}$ ²⁾.

Der Spannungszustand der sehr steifen Systeme (③ und ⑥) ist im wesentlichen durch Dehnkräfte mit nur geringen Biegemomenten in den Randzonen der Schale gekennzeichnet. Je weicher der Überbau ist, umso größer wird der Einfluß der Biegebeanspruchung. Insbesondere die Momente m_φ und $m_{x\varphi}$ führen zu den vorher beschriebenen großen Deformationen.

Die Wirkungsweise der Randaussteifungen geht aus A 18 hervor. Entsprechend dem Verlauf von $n_{x\varphi}$ bei $\xi = 1$ verhalten sich die auf die Scheibe bzw. die auf den Ring übertragenen Ersatzschubkräfte t_x . Die unsymmetrischen, radial gerichteten Kräfte s_x^* sind teilweise von völlig anderer Größenordnung als t_x . Dies geht aus der angefügten Tabelle hervor, auf der die Größtwerte beider Kräfte einander gegenübergestellt sind. (A 18). Der rotationssymmetrische Anteil von s_x ($m = 0$) wurde bei diesem Vergleich eliminiert, weil er ausschließlich aus der behinderten Querdehnung des oberen Schalenrands herrührt. Der verbleibende Wert s_x^* beschreibt somit die Wirkung, die von der unterschiedlichen Deformierbarkeit des Baugrunds verursacht wird. Der günstige Einfluß der Randaussteifung ist vor allem auf die Schubkräfte t_x zurückzuführen. Bei den Systemen ② und ⑤ beträgt der Größtwert von s_x^* nur ca. 12 bis 13 % von t_x , bei starr ausgesteiftem oberem Rand liegen die entsprechenden Zahlenwerte noch weit unter 1 % (③ und ⑥).

1) Nach der Biegetheorie der Kreiszyinderschale ist $n_{x\varphi} \neq n_{\varphi x}$ und auch $m_{x\varphi} \neq m_{\varphi x}$. Die zahlenmäßigen Unterschiede sind jedoch so gering, daß die Darstellung der angegebenen Größen ausreichend erscheint.

2) Die Rechnung liefert auch Drillmomente an den freien Rändern. Dies ist im Rahmen der verwendeten Schalentheorie nicht zu umgehen (Normalenhypothese).

Die Biegemomente M_2 des Aussteifungsringes unterscheiden sich für die Überbauten ② und ⑤ nur geringfügig (A 19), die Werte M_1^{*1} sind von untergeordneter Bedeutung. Normalkräfte N^{*1} und Torsionsmomente M_T zeigt Bild A 20. Vor allem bei M_T bestehen große Unterschiede zwischen der langen und der kurzen Schale. Die Wirksamkeit des Rings beruht in erster Linie auf seiner Biegesteifigkeit EI_2 ; bei kurzen Schalen gewinnt auch die Torsionssteifigkeit an Bedeutung.

8.4.2 Serie II (Überbau nicht-rotationssymmetrisch belastet, Baugrund: unendlicher elastisch-isotroper Halbraum)

Die auf Bild A 21 gezeigte radial gerichtete Belastung mit dem Verlauf $\cos 2\varphi$ erzeugt Schnittgrößen und Verformungen, die wegen der vollständigen Symmetrie des Baugrunds nur das Reihenglied $m = 2$ enthalten. In den folgenden Darstellungen ist deshalb immer nur die Amplitude der betreffenden Größe angegeben. Abgesehen von den Schnittgrößen und Verformungen der Schale, die auch in Meridianrichtung veränderlich sind, wurden die errechneten Werte auf A 22 tabellarisch zusammengefaßt. Die Betrachtungen seien im folgenden hauptsächlich auf die lange Schale gerichtet (④, ⑤, ⑥), weil hier die Tendenzen am deutlichsten sichtbar werden. In abgeschwächter Form sind die dort beobachteten Erscheinungen auch bei der kurzen Schale zu erkennen.

Die auf den Baugrund übertragenen Kräfte n_x nehmen mit wachsender Bauwerkssteifigkeit ab und mit wachsender Bodensteifigkeit zu. Vergleicht man beispielsweise die drei Überbauten für $E_s = 15\ 000\ \text{kp/cm}^2$ (③, entspricht festem Untergrund), so beträgt n_x bei einem Silo mit starrer Scheibe nur ca. 14 % des Wertes bei freiem oberem Rand. Die elastische Aussteifung bringt nur eine geringe Reduzierung

1) Auch hier wurde nur der unsymmetrische Anteil dargestellt und die Harmonische $m = 0$ eliminiert.

von 203.9 Mp/m auf 185.4 Mp/m. Schon im Hinblick auf die zulässigen Bodenpressungen, vor allem aber wegen der vorhandenen gleich großen abhebenden Kräfte, kann eine starre Aussteifung des oberen Schalenrands erforderlich werden. Auch die weiteren Kraftgrößen (m_x , $\bar{n}_{x\varphi}$, \bar{q}_x) und insbesondere die Verformungen des Baugrunds (u , δ) nehmen mit wachsender Bauwerkssteifigkeit ab. Lediglich die Ersatzschubkraft $\bar{n}_{x\varphi}$ bleibt im Fall (c) bei den drei Systemen ungefähr konstant. Bei weichem Baugrund (a) werden die unterschiedlichen Setzungen u durch den Aussteifungsring auf etwa die Hälfte reduziert. Der Einbau einer starren Scheibe verhindert Setzungsdifferenzen nahezu vollständig und zwar im wesentlichen unabhängig von der Bodensteifigkeit (6 - a, b, c).

Für die Schnittkräfte des Fundamentrings ist der Einfluß der oberen Randaussteifung besonders deutlich. Bei der angenommenen Belastung und weichem Baugrund (a) werden sie erst durch eine starre Scheibe am oberen Rand auf ein von der Bemessung her zu bewältigendes Maß reduziert.

Bemerkenswert ist das Verhältnis von t_x zu s_x im Fall (a) bei (5) und (6) : Bei weichem Baugrund überwiegt die auf den Ring übertragene Querkraft s_x die zugehörige Schubkraft ($s_x = 29$ Mp/m, $t_x = 15.8$ Mp/m), bei starrer Scheibe tritt aber s_x gegenüber t_x deutlich zurück ($s_x = 0.9$ Mp/m, $t_x = 38.6$ Mp/m).

Erwartungsgemäß ist beim Aussteifungsring eine Abnahme der Beanspruchung mit wachsender Bodensteifigkeit zu verzeichnen. Wie in der Serie I sind es hauptsächlich Biegemomente M_2 , die - zusammen mit den Normalkräften - die Lastabtragung bewerkstelligen. Es zeigt sich, daß bei einem weichen Baugrund (a) schon die geringe Lastamplitude $p_{z,2} = 0.1$ Mp/m² zu beträchtlichen Beanspruchungen im Aussteifungsring führt ($N = \pm 17.2$ Mp, $M_2 = \pm 80.79$ Mpm).

Die folgenden Darstellungen zeigen die Deformationen und Schnittkräfte der Zylinderschale für jeweils drei verschiedene Steifeziffern (A 23 bis A 31). Für einen felsigen Baugrund, der dem Fall (c) entspricht, ist die Membranlösung nach (8.1) und (8.2) für (4) gestrichelt eingezeichnet. Nicht berücksichtigt sind dabei die stark abklingenden Biegestörungen am unteren Rand. Betrachtet man zunächst die Membrankräfte n_x , n_φ und $n_{x\varphi}$ (A 26 ff.), so zeigt sich - von den Randzonen abgesehen - eine gute Übereinstimmung zwischen der Membranlösung und den Dehnkräften der strengen Biegetheorie. Dagegen sind die Abweichungen in den Verformungen beträchtlich. Die Unterschiede sind auf den Einfluß der Bodendeformationen zurückzuführen, weil im Widerspruch zu den Randbedingungen der Membranlösung die Meridianverschiebung u am unteren Rand nicht verschwindet. Es überlagert sich deshalb auch hier ein Zustand dehnungsloser Verformungen (Teillösung II, s.S.104), so daß beispielsweise beim System (4) die anteiligen Radialverschiebungen des oberen Schalenrands für $\varphi = 0$ die folgenden Werte annehmen (A 25 , (c)):

aus Membranlösung ¹⁾	w = 3.48 cm
aus dehnungslosen Verformungen	w = 1.85 cm
<hr/>	
Gesamtverformung	w = 5.33 cm

Der Anteil der dehnungslosen Verformungen an der Gesamtdeformation beträgt hier also ca. 35 %, bezogen auf die Membranlösung sogar über 50 %. Das heißt, daß auch bei felsigem Baugrund unterschiedliche Setzungen und die damit verbundenen Verschiebungen gegenüber den anderen Einflüssen nicht vernachlässigt werden dürfen. Dies ist beispielsweise dann zu berücksichtigen, wenn ein Silo durch ein schubweiches, kegelstumpfförmiges Pfettendach geschlossen

1) Die Membranlösung entspricht für $m = 2$ sehr genau der strengen Partikularlösung, wenn dort für $\frac{\sigma}{E} = 0,1$ dieselben Randbedingungen eingeführt werden.

wird. Ein derartiges "weiches" System muß am oberen Rand so konstruiert sein, daß sich die möglichen Schalenverformungen unbehindert einstellen können.

Besser erscheint es, einen Aussteifungsring vorzusehen, der auch die Biegebeanspruchungen der Schale reduziert. Wie die Berechnungen zeigen, bringt der hier zugrundegelegte Ring bei felsigem Untergrund noch keine wesentliche Versteifung des oberen Rands (⑥). Bei der betrachteten Belastung empfiehlt es sich deshalb, die Dachkonstruktion schubsteif, beispielsweise in Form einer Kegelstumpfschale mit einem Übergangsring, an die Zylinderschale anzuschließen.

Je weicher der Baugrund ist, umso wichtiger wird eine wirksame Aussteifung des oberen Schalenrands, weil sonst der Anteil der dehnungslosen Verformungen und der damit verbundenen Momente gegenüber den Membrankräften stark anwächst. Sehr deutlich ist zu erkennen, daß mit abnehmender Steifigkeit die Wirksamkeit des Aussteifungsringes zunimmt (z.B. A 25, Vergleich von ④ und ⑤). Behindert man die Radial- und vor allem die Tangentialverschiebungen bei $\xi = 1$ vollständig (⑥), so wird die nicht-rotationssymmetrische Belastung nahezu ausschließlich über Membrankräfte abgetragen und zwar unabhängig von der Steifigkeit des Baugrunds.

Bei entsprechender Aussteifung des oberen Silorands ist es also durchaus möglich, auch bei weichem Baugrund und unsymmetrischer Belastung mit dem angegebenen Verlauf in der Schale weitgehend Dehnkräfte mit geringen Verformungen zu erzwingen.

9. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit sind kreiszylindrische Silos auf elastischem Baugrund mit veränderlicher Nachgiebigkeit behandelt. Das angegebene Berechnungsverfahren kann auch auf kontinuierlich gestützte Rotationsschalen beliebiger Meridianform angewandt werden. Der Baugrund wird durch ein System von gekoppelten Federn an vorgegebenen Punkten des Gründungsbereichs dargestellt. Mit Hilfe der harmonischen Analyse werden die in diskreter Form berechneten Boden-deformationen in ein trigonometrisches Polynom entwickelt; die Differentialgleichungen von Kreisringen und Zylinder-schalen lassen sich auf diese Weise exakt, die Übergangsbedingungen zwischen Baugrund und Überbau punktweise erfüllen. Zur praktischen Berechnung der Bodenverformungen wird auch bei unregelmäßig geschichtetem Baugrund die Spannungsverteilung des unendlichen elastisch-isotropen Halbraums zugrundegelegt und nur die Vertikalverformungen infolge lot-rechter Lasten berücksichtigt. Für eine an der Oberfläche anstehende deformierbare Schicht werden nur deren Beiträge zu den Verschiebungen der Gründungsfläche berücksichtigt.

Die Zahlenbeispiele zeigen das Tragverhalten unterschiedlich ausgesteifter Silos. Wenn der obere Schalenrand mit einer starren Scheibe ausgesteift ist, führen sowohl veränderliche Deformierbarkeit des Baugrunds als auch unsymmetrische Lasten mit dem Verlauf $\cos(2\varphi)$ im wesentlichen zu Membrankräften mit geringen Biegemomenten. Bei abnehmender Steifigkeit des Randglieds stellt sich ein Zustand dehnungsloser Verformungen ein, der durch große Verschiebungen und Biegemomente gekennzeichnet ist. Bei nicht-rotationssymmetrischen Lasten kann der Einfluß der Bodendeformationen auch bei felsigem Baugrund nicht vernachlässigt werden. Ein weicher Boden erfordert unter diesen Bedingungen immer eine wirksame Aussteifung des oberen Schalenrands, mit der sich auch die Beanspruchungen des Fundamentrings äußerst günstig beeinflussen lassen.

Die der Theorie zugrundeliegenden, vereinfachenden Annahmen bei der Berechnung der Bodenverformungen müssen bei der praktischen Anwendung stets im Auge behalten werden. Es dürfte fast immer erforderlich sein, durch Variation der maßgebenden Parameter ein vorliegendes Problem sinnvoll einzugrenzen. Die dargestellten Beispiele sollen ein Hilfsmittel zur qualitativen Beurteilung sein.

A N H A N G A

Darstellung der Zahlenergebnisse

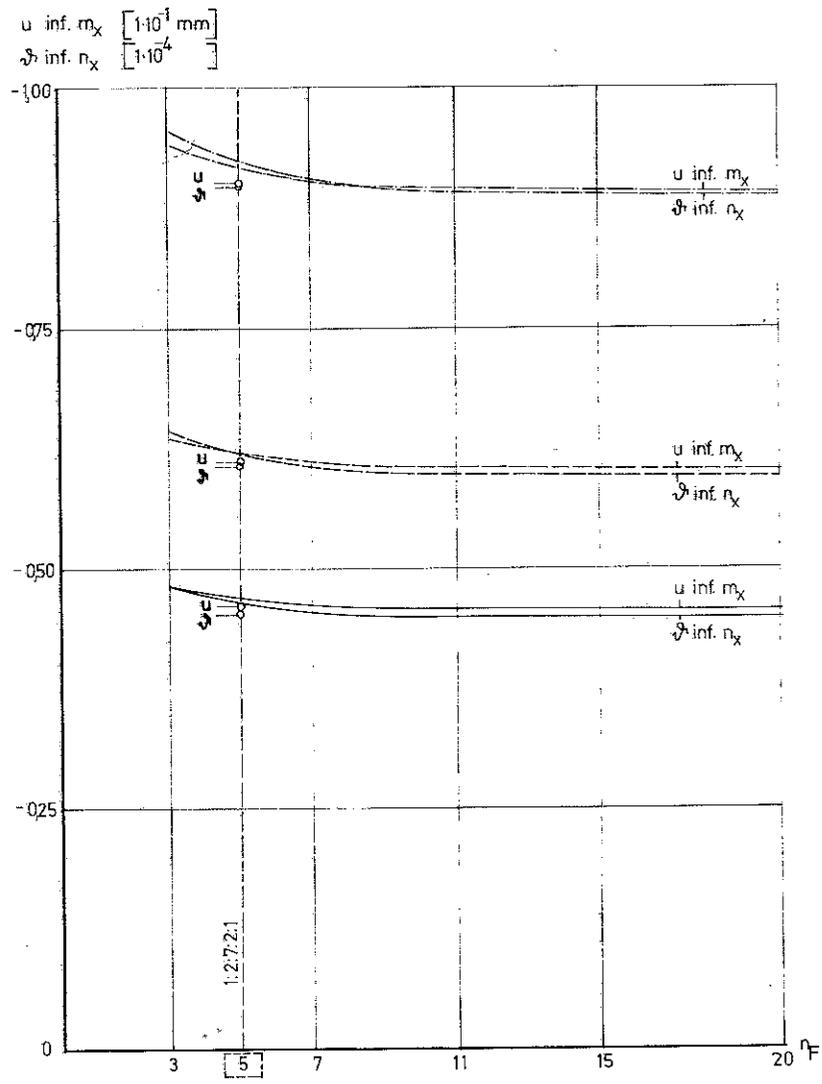
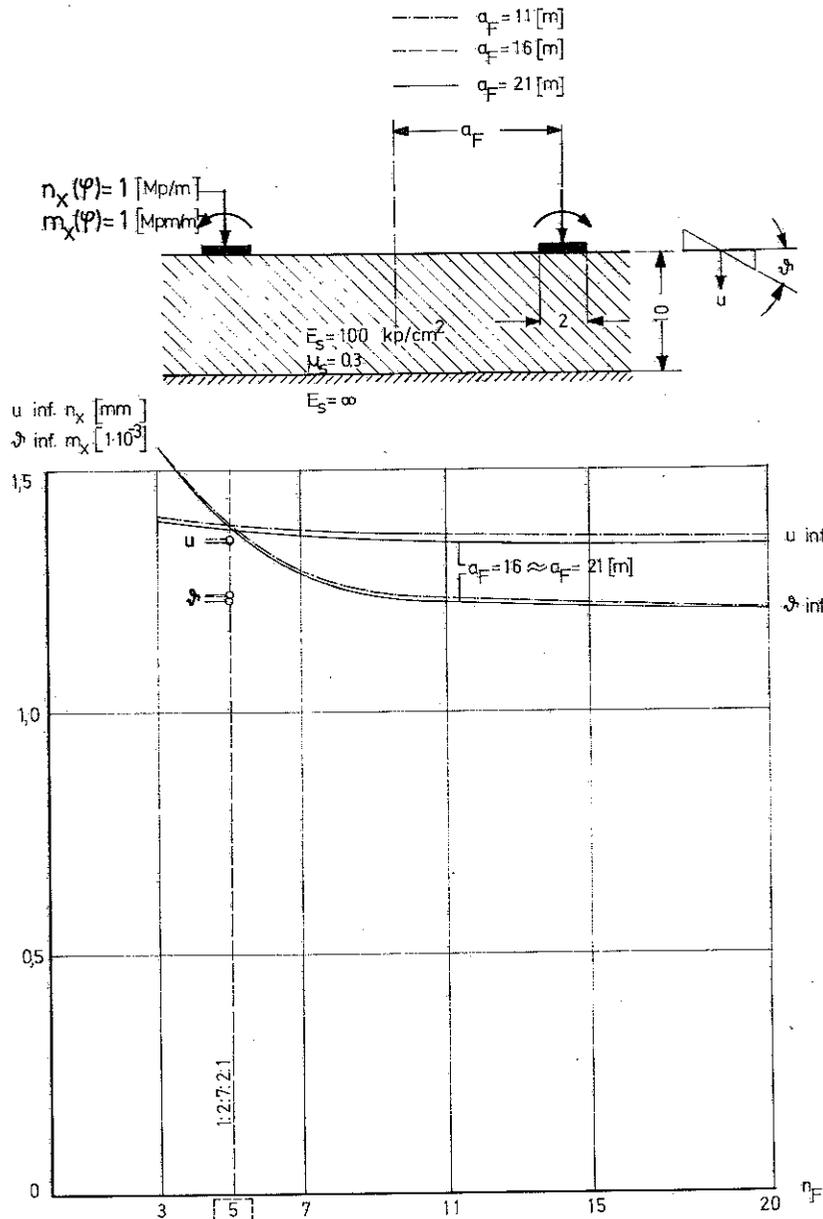


Bild A1: Variation der Federelemente in Ringquerrichtung
Einfluß auf u und ϕ ($n_R = 360$)

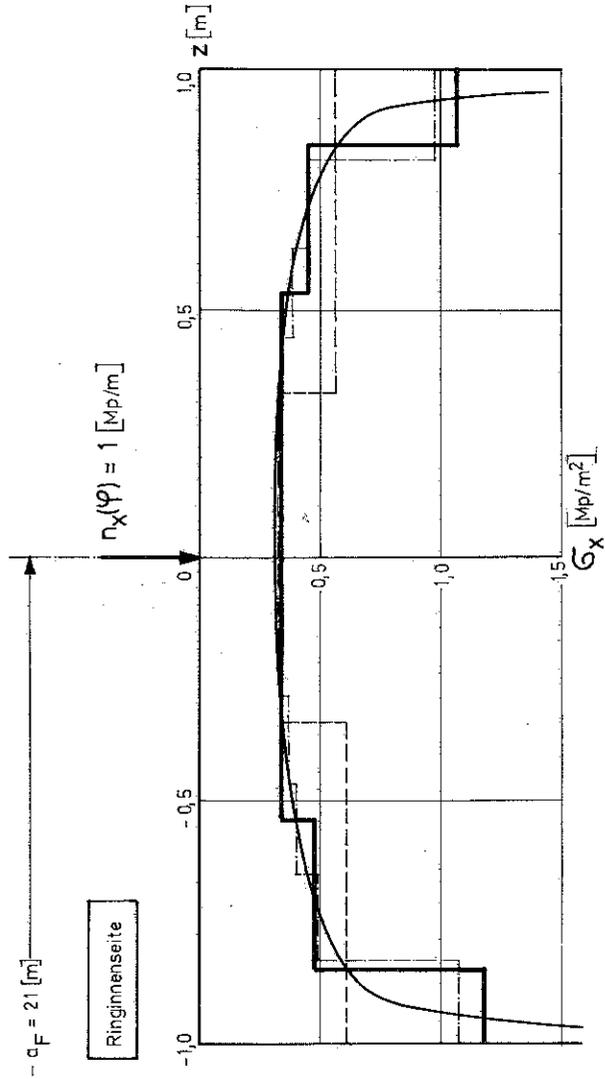
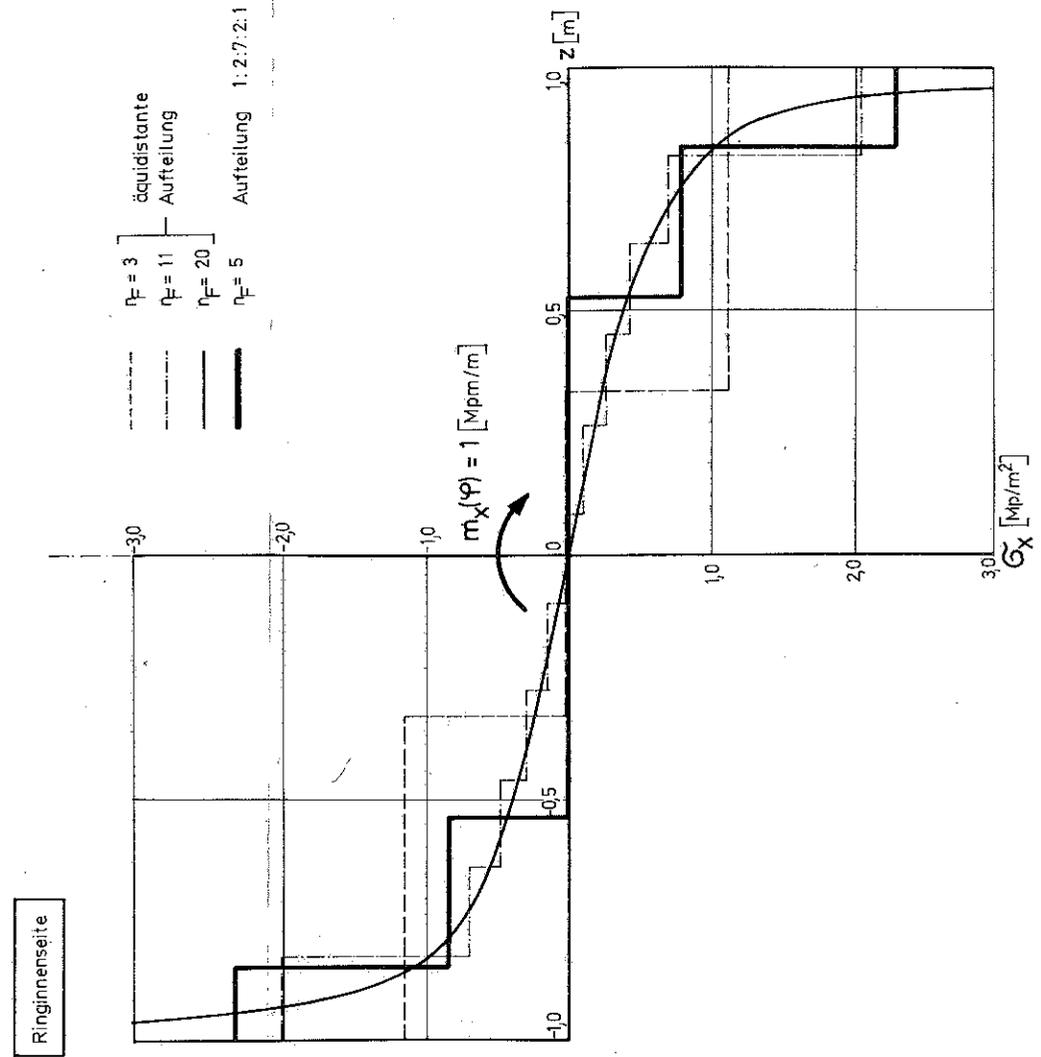


Bild A 2: Spannungen σ_x ($a_F = 21 \text{ m}$)
(System s.S. 134)



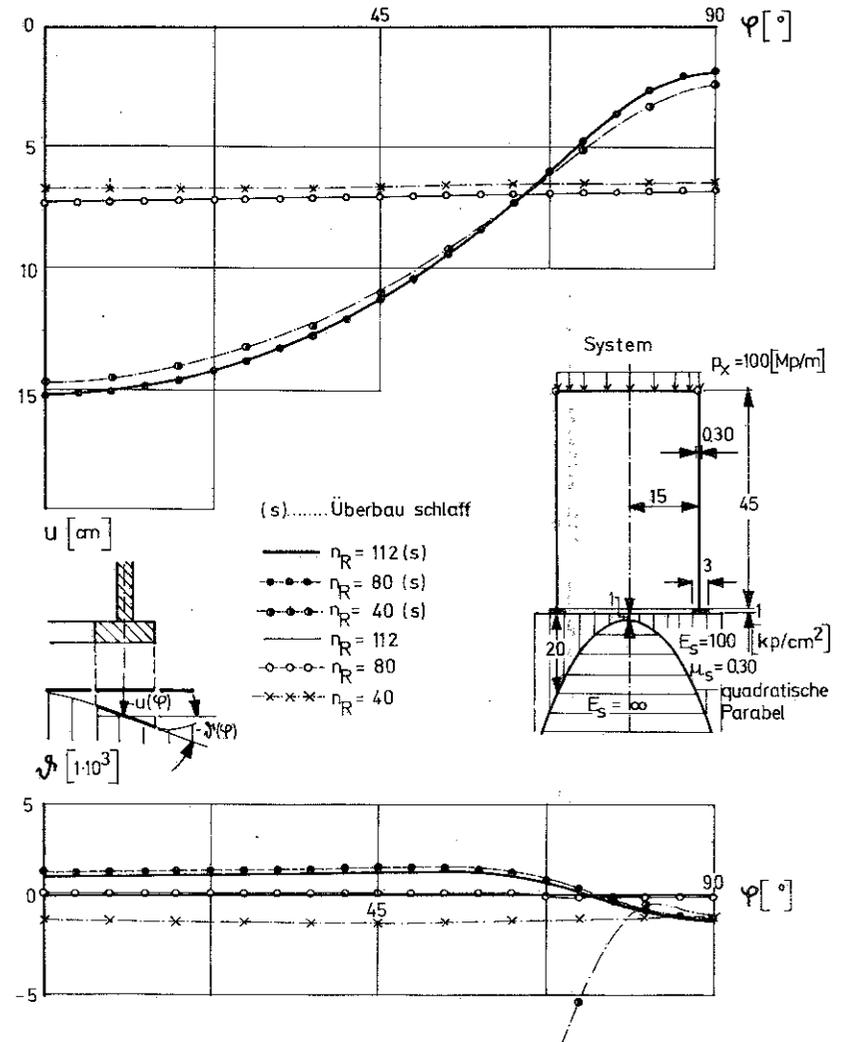
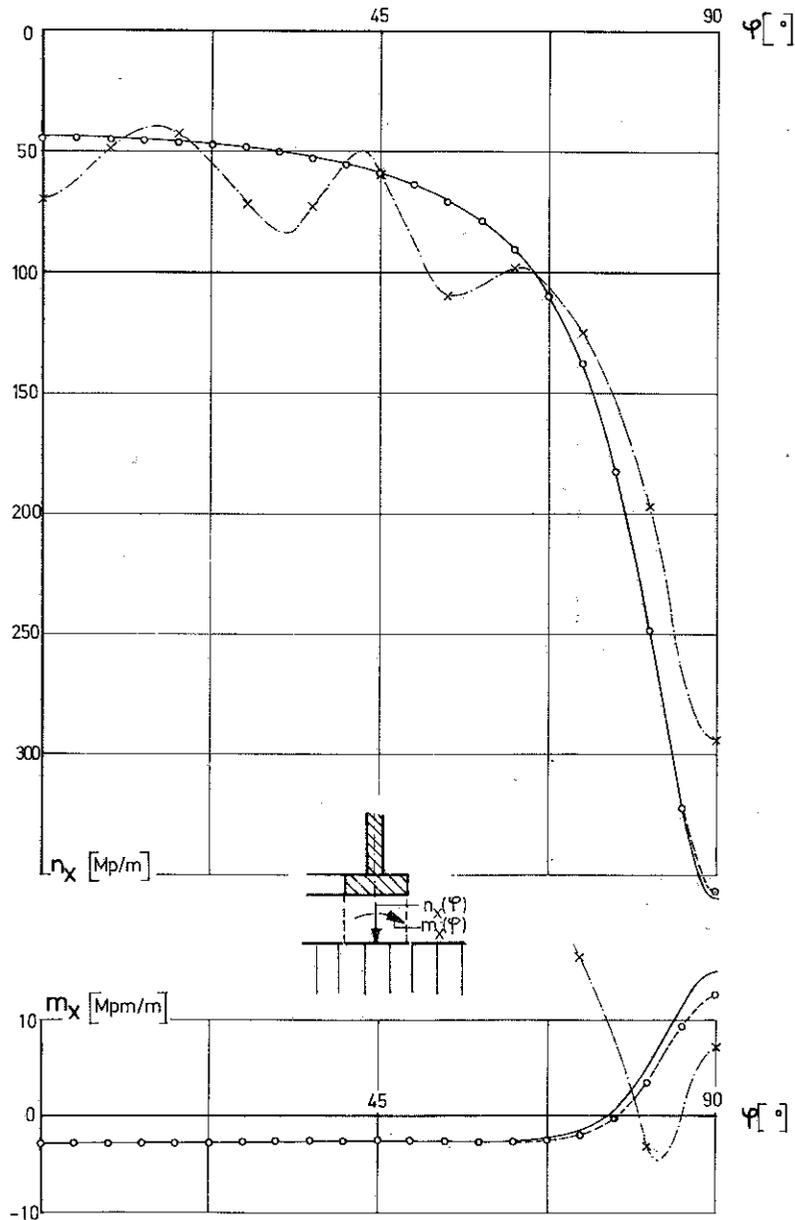
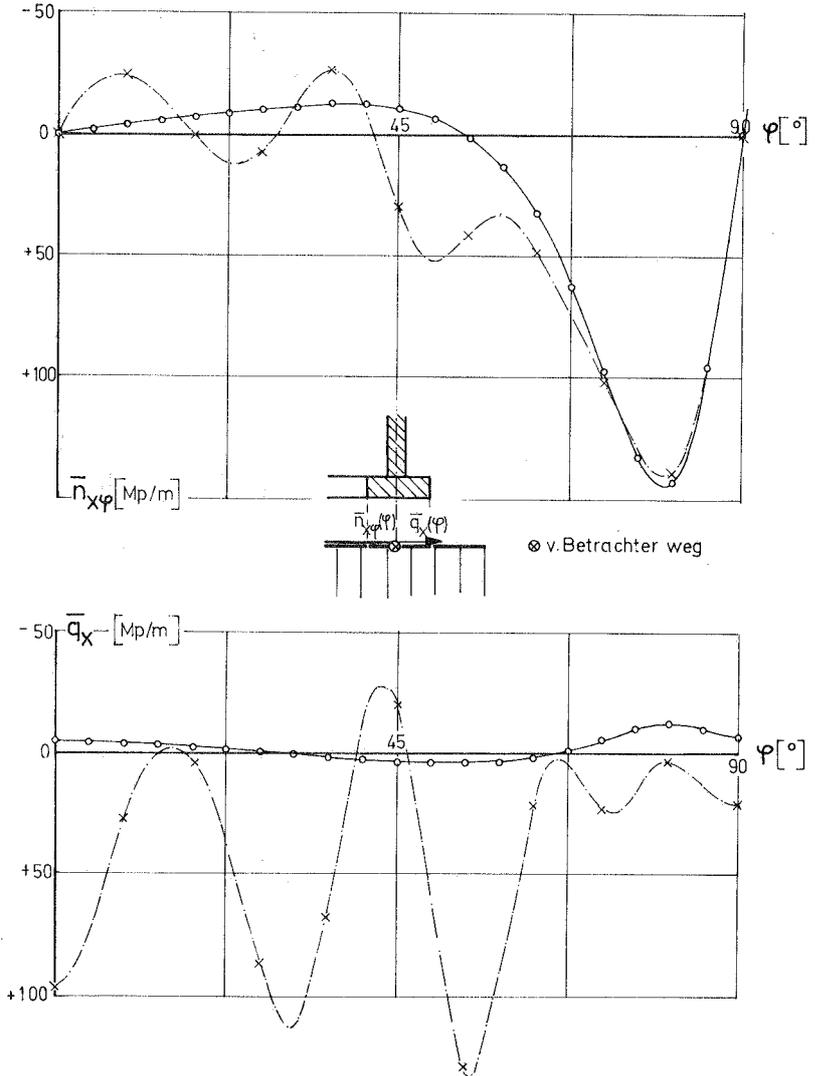
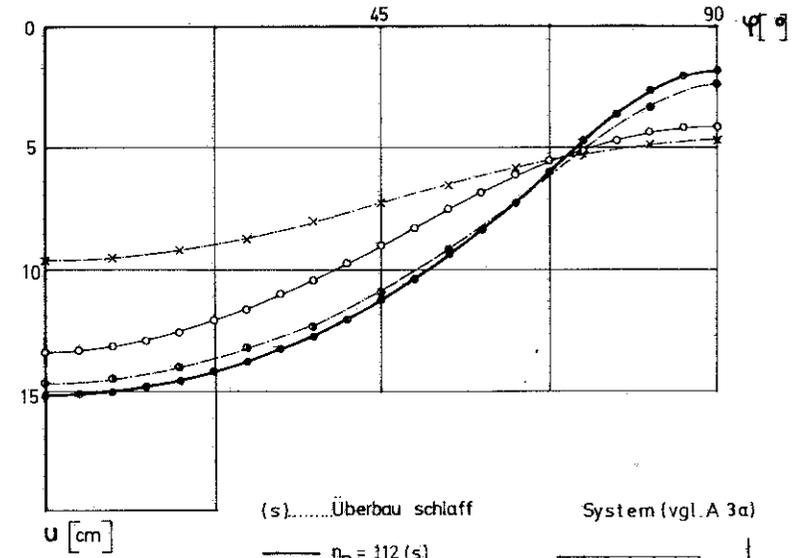
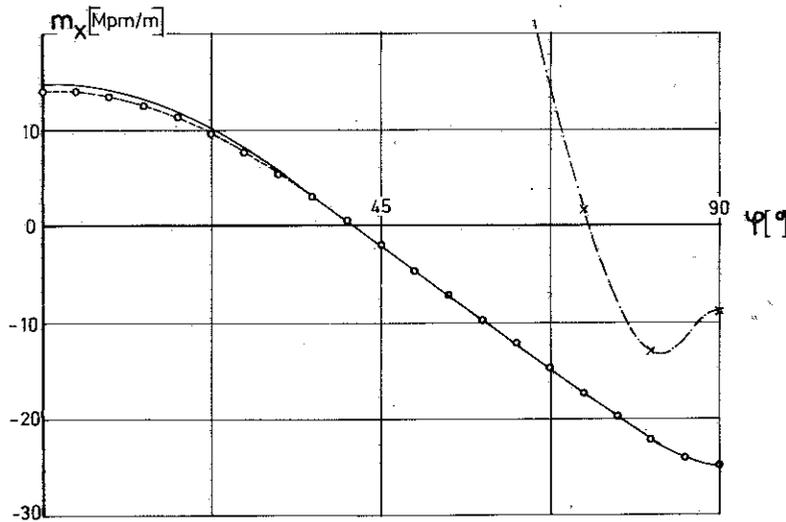
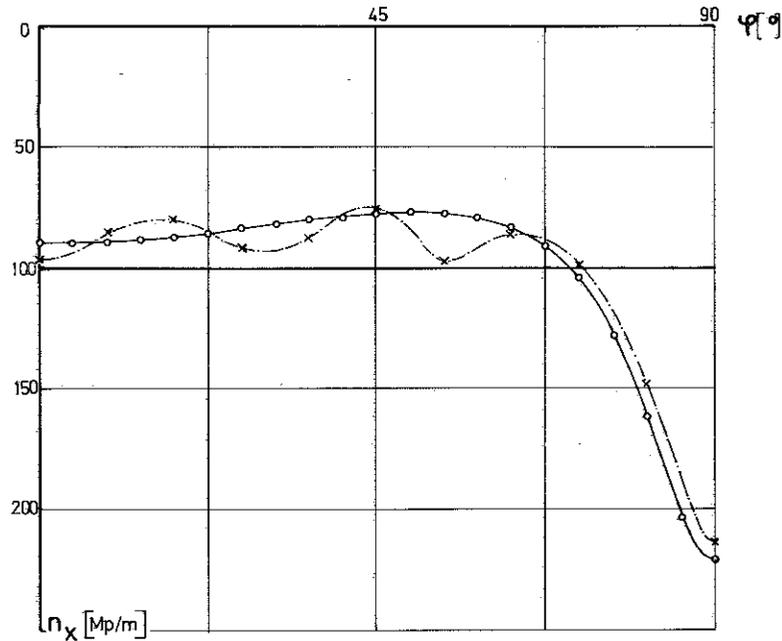


Bild A 3a: Variation der Zahl der Ringelemente am "steifen" System. Einfluß auf Kraft - größen und Verformungen.

Bild A 3b: Fortsetzung von A 3a ($\bar{n}_{x\varphi}$ und \bar{q}_x)





(s).....Überbau schlaff

System (vgl. A 3a)

- $\eta_R = 112$ (s)
- $\eta_R = 80$ (s)
- $\eta_R = 40$ (s)
- $\eta_R = 112$
- $\eta_R = 80$
- ××× $\eta_R = 40$

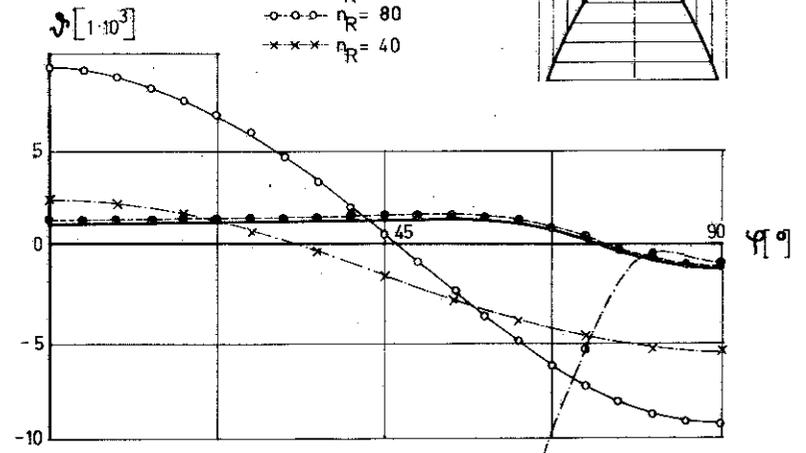
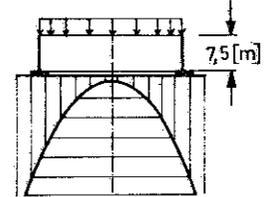


Bild A 4a: Variation der Zahl von Ringelementen am "weichen" System. Einfluß auf Kraftgrößen und Verformungen.

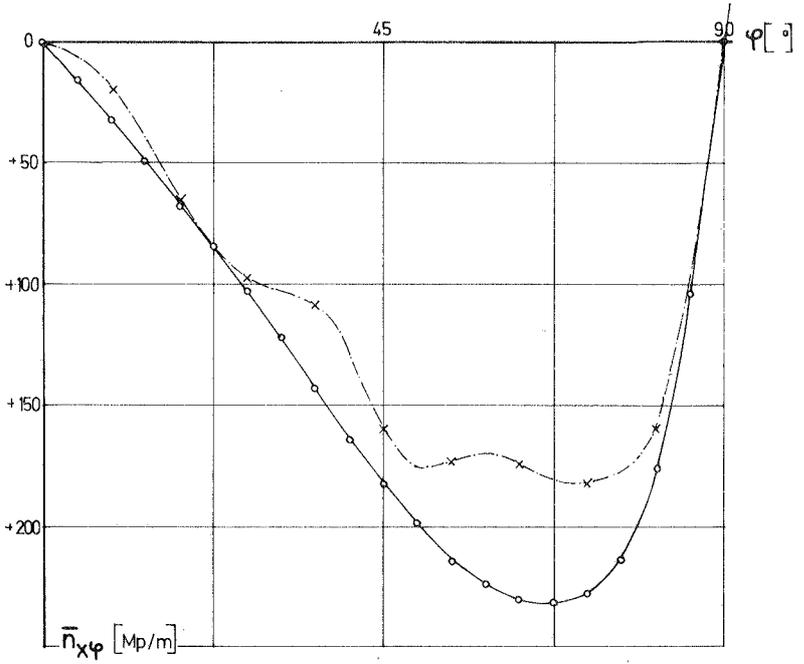
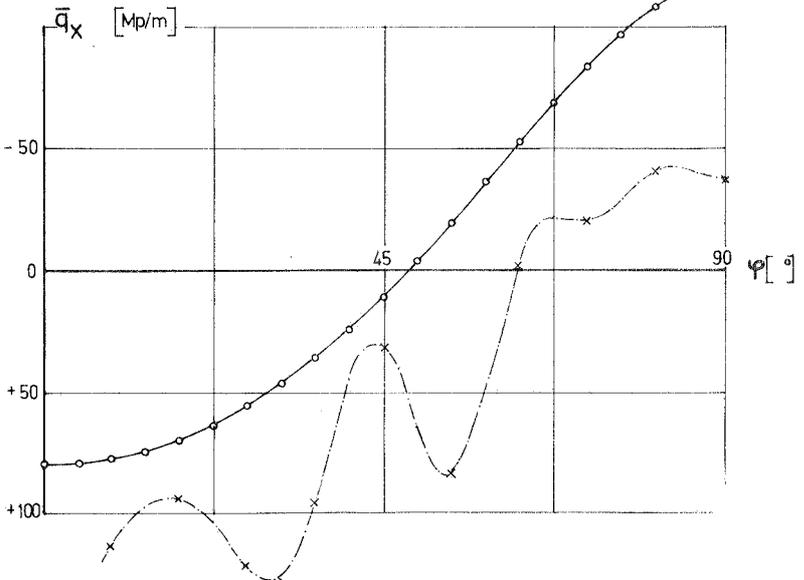
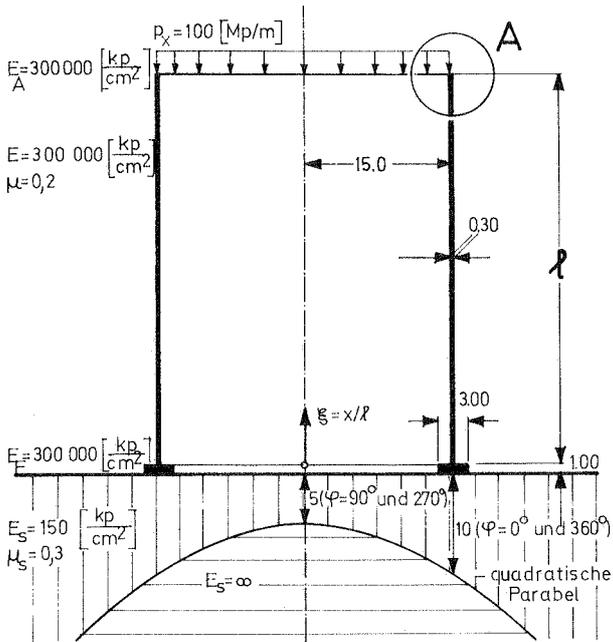


Bild A 4b: Fortsetzung von A 4a ($\bar{n}_{x\varphi}$ und \bar{q}_x)

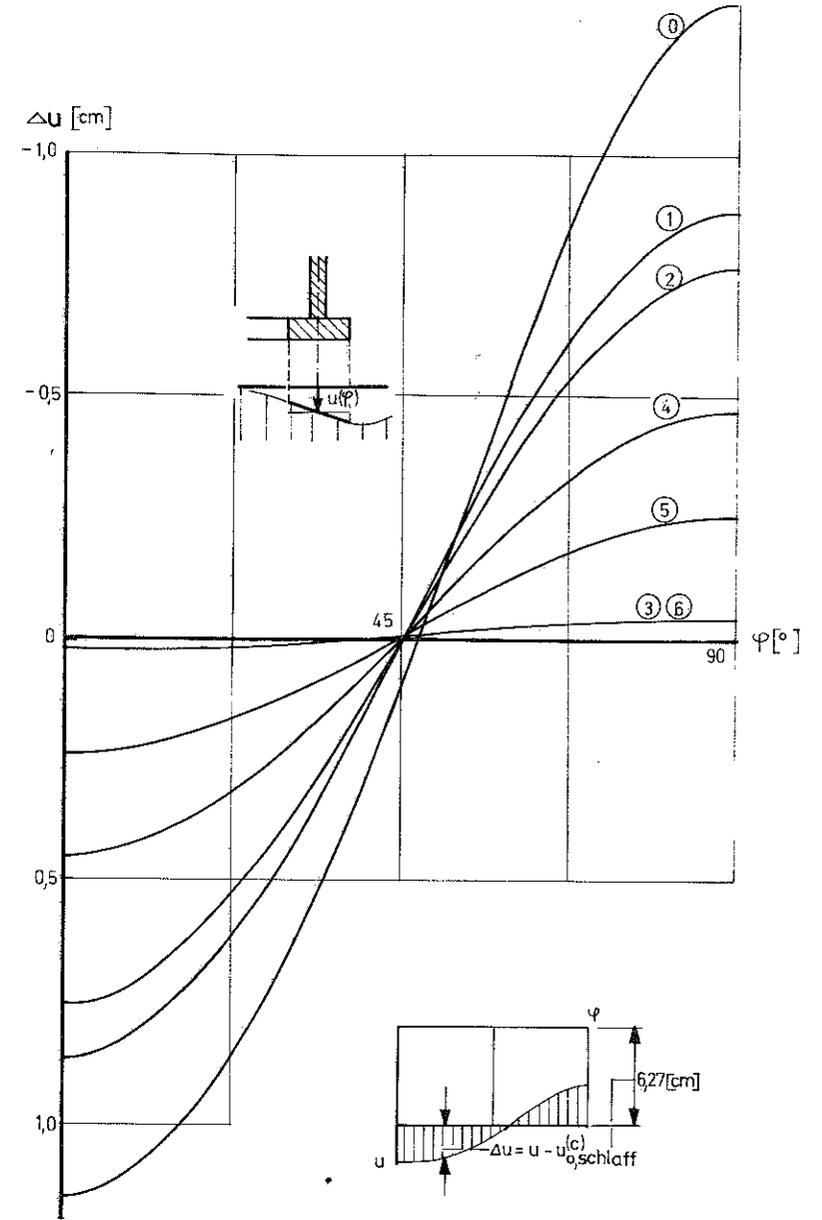
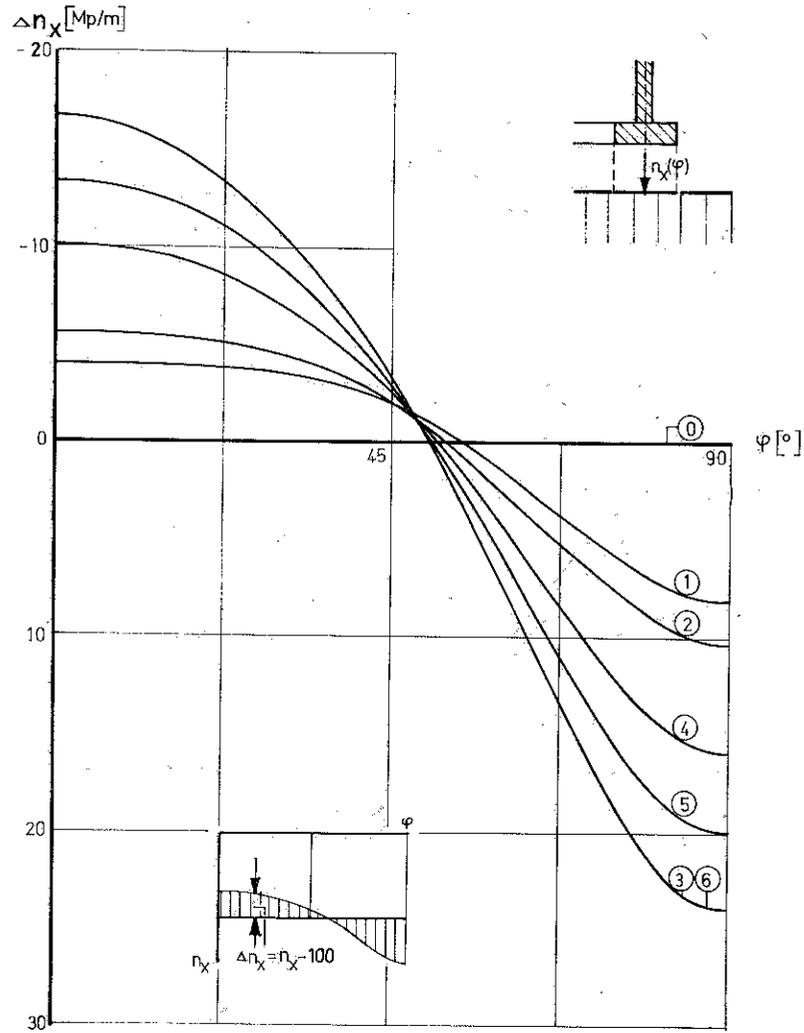




System	l [m]	Punkt A	Bemerkungen
0	—	—	Überbau voll-kommen schlaff
1	10		freier Rand
2			Ring $b_A/h_A = 1,20/0,50$
3			Scheibe, dehn-starr, biegeschlaff
4	40		wie 1
5			wie 2
6			wie 3

Bild A 5: Geometrie und Belastung der Serie I

Bild A 6: Baugrund: Umlagerungskräfte Δn_x und Setzungsunterschiede Δu



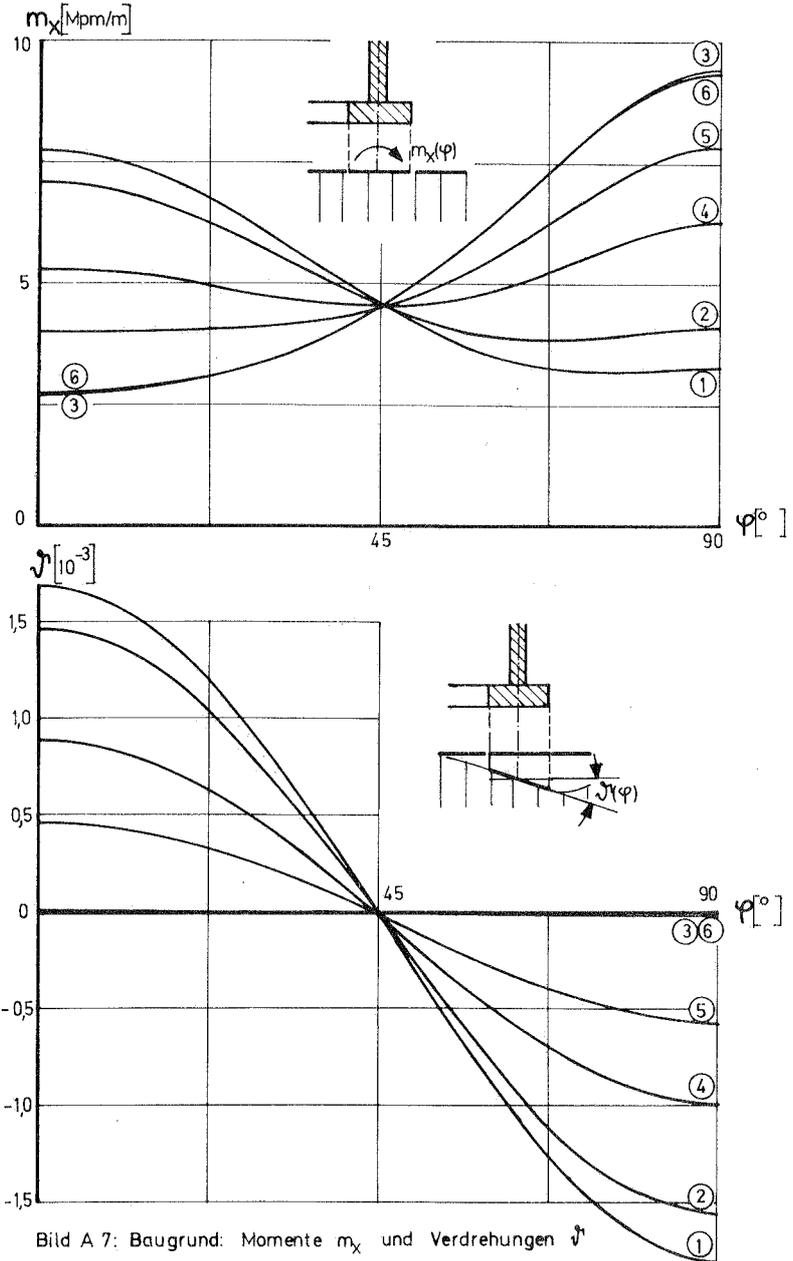
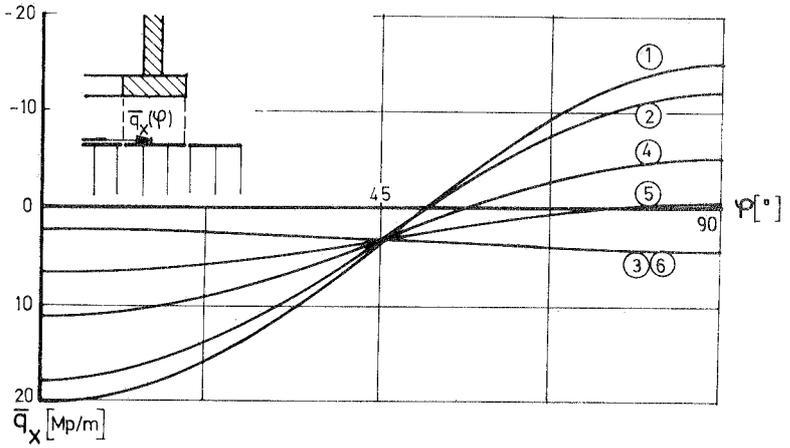
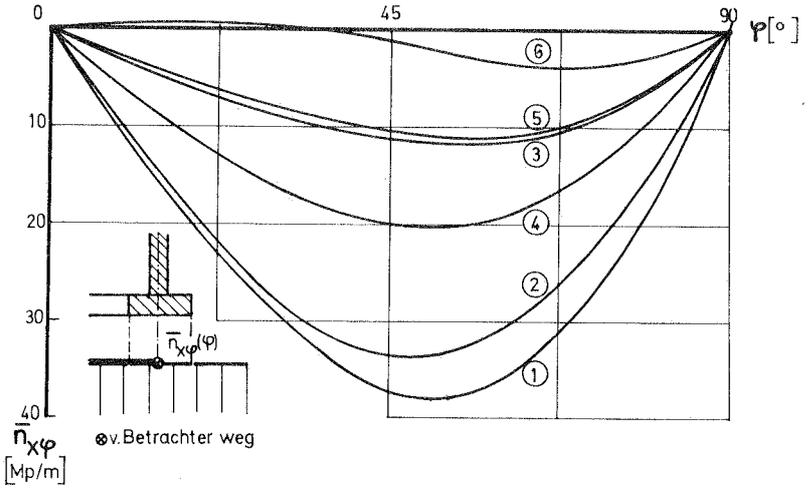


Bild A 7: Baugrund: Momente m_x und Verdrehungen j

Bild A 8: Ersatzschubkräfte $\bar{n}_{x\varphi}$ und Ersatzquerkräfte \bar{q}_x



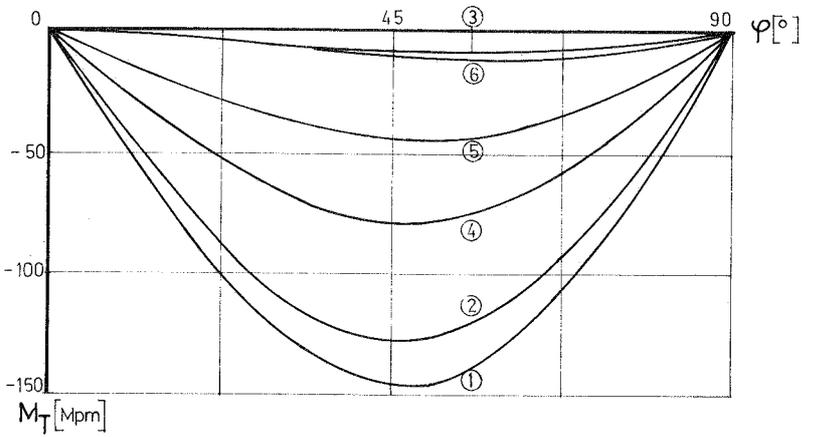
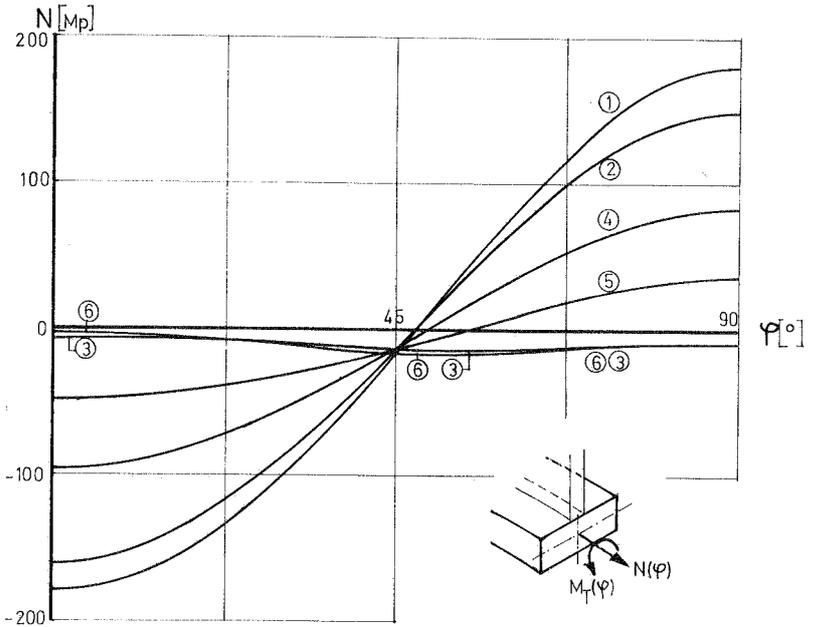


Bild A 9: Fundamentring: Normalkräfte N und Torsionsmomente M_T

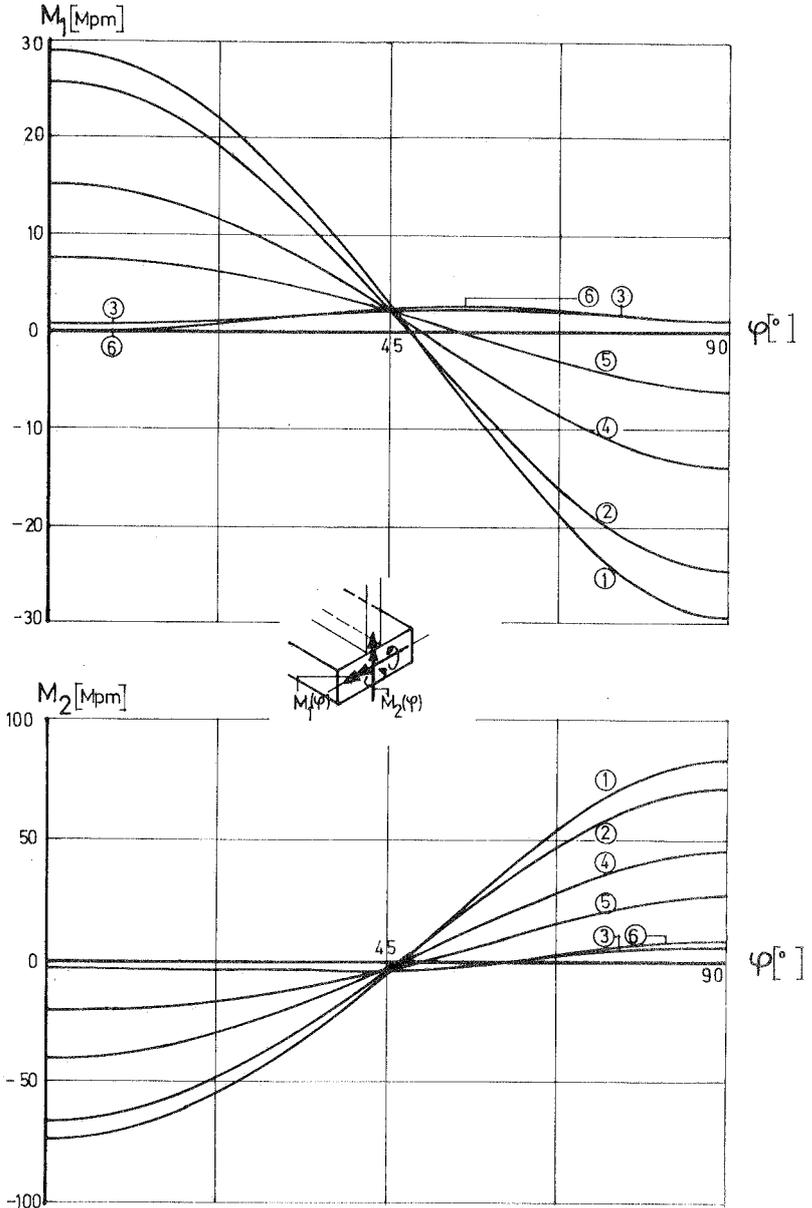


Bild A 10; Fundamentring; Biegemomente M_1 und M_2

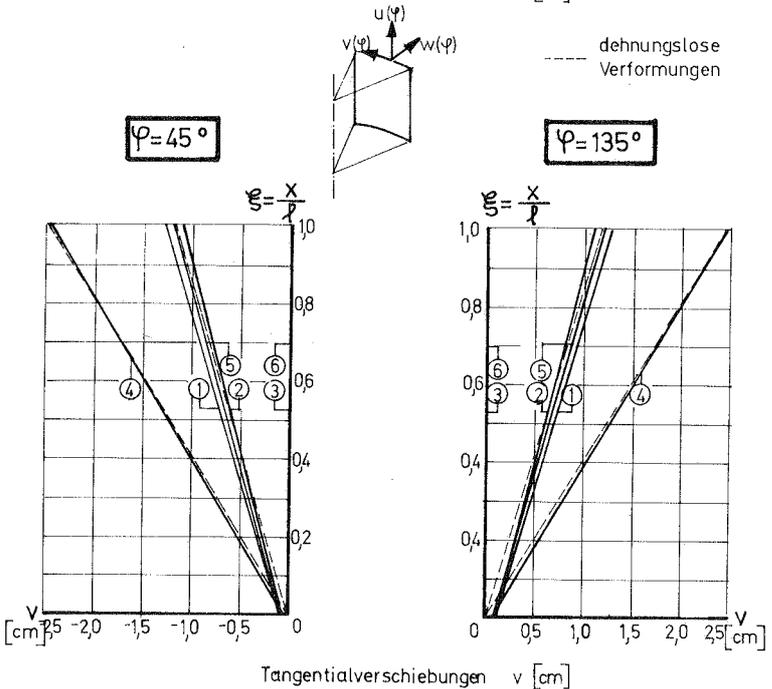
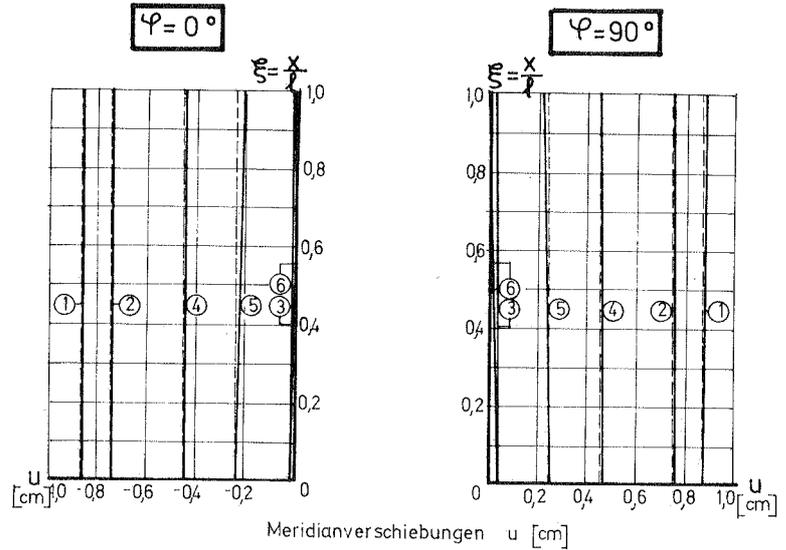


Bild A 11: Schale: Meridian - und Tangentialverschiebungen (u und v)

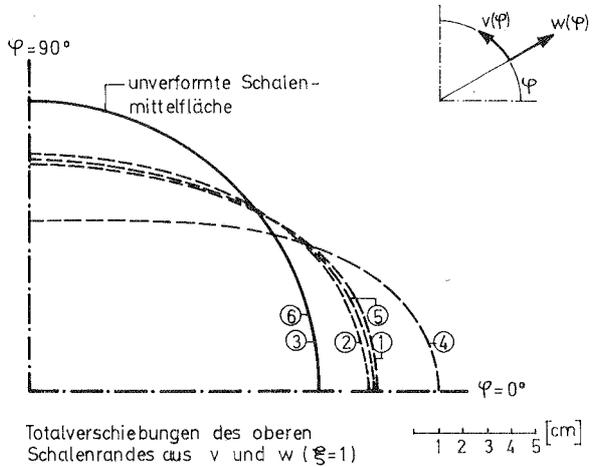
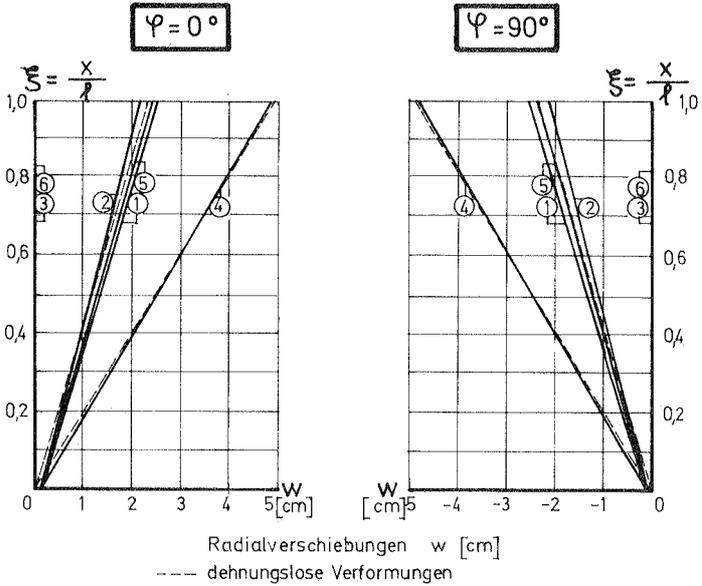


Bild A 12: Schale: Radialverschiebungen w und Totalverschiebungen des oberen Schalenrandes

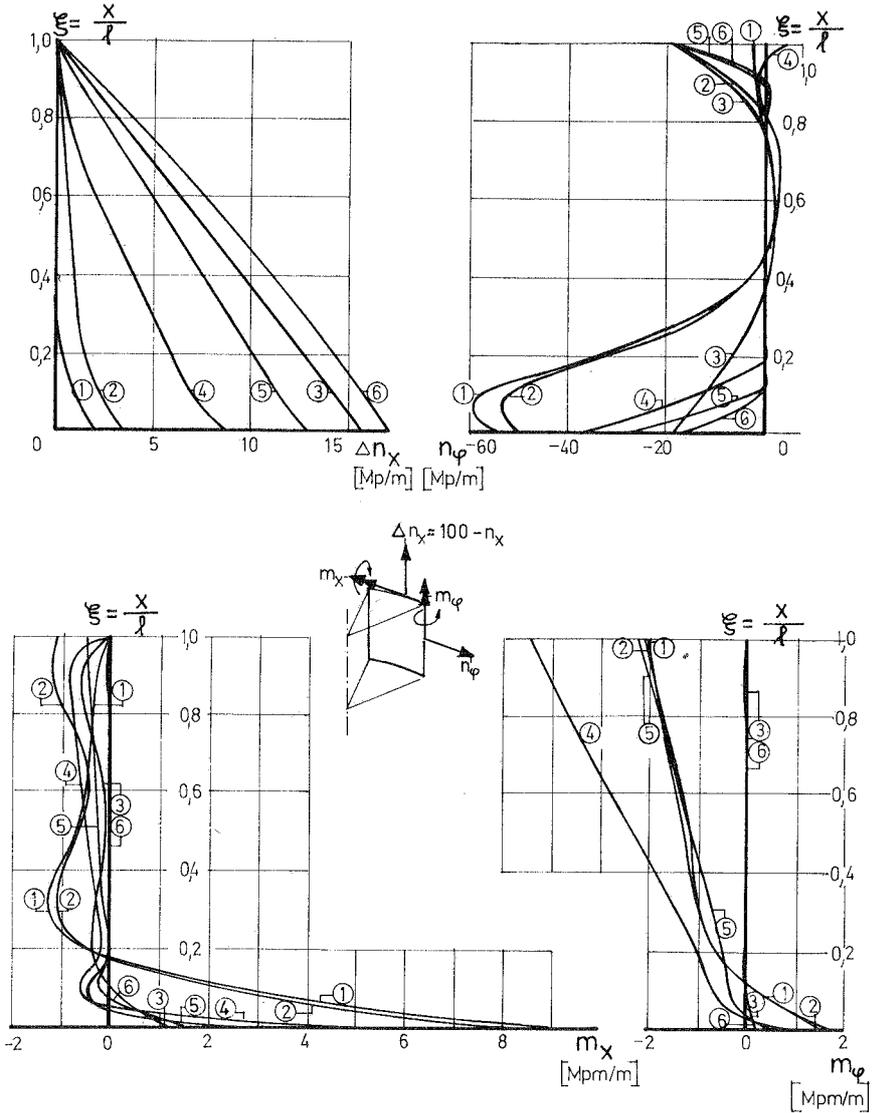


Bild A 13 : Schale: Meridiankräfte Δn_x , Ringkräfte n_ϕ
Biegemomente m_x und m_ϕ

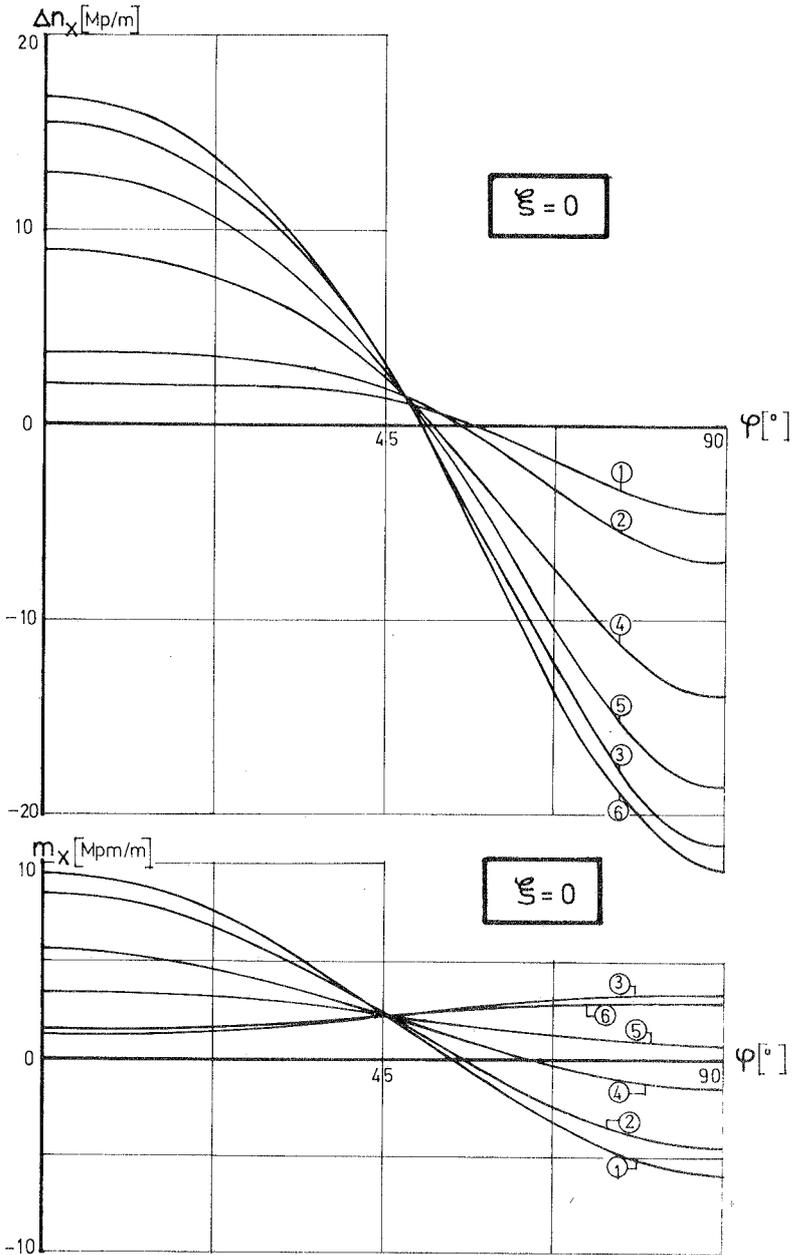


Bild A 14: Schale: Meridiankräfte Δn_x und Biegemomente m_x für $\xi = 0$

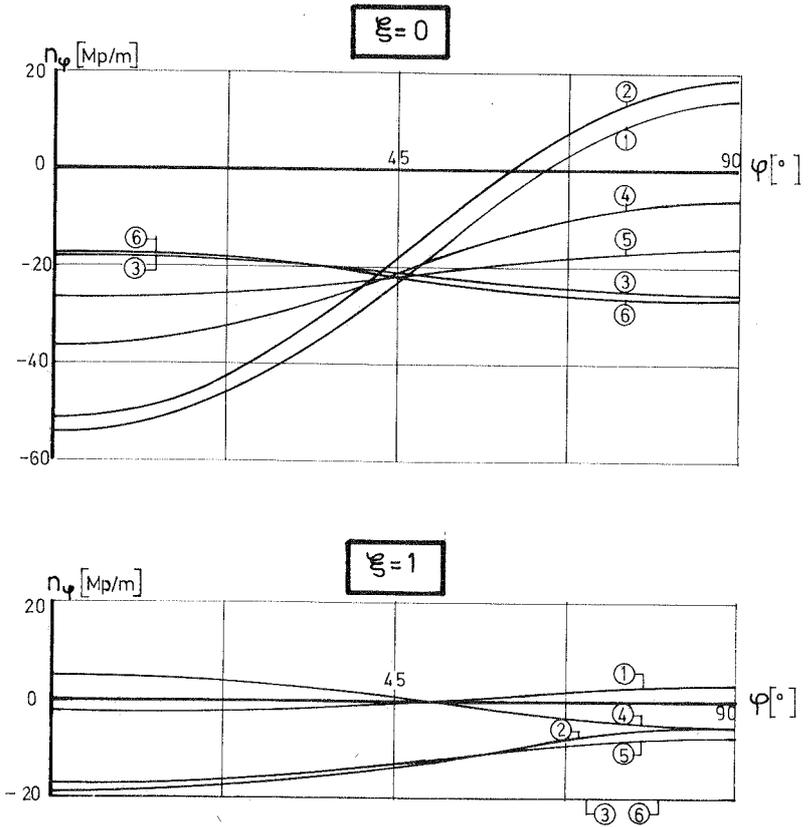
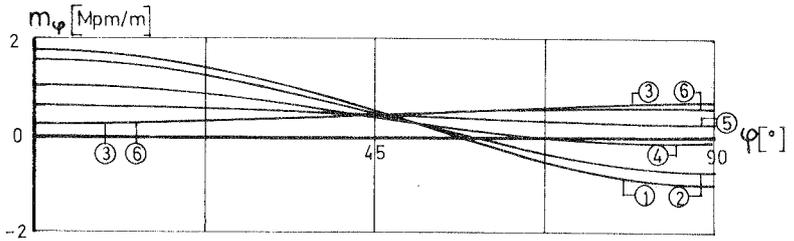


Bild A 15; Schale: Ringkräfte n_φ für $\xi=0$ und $\xi=1$

$\xi = 0$



$\xi = 1$

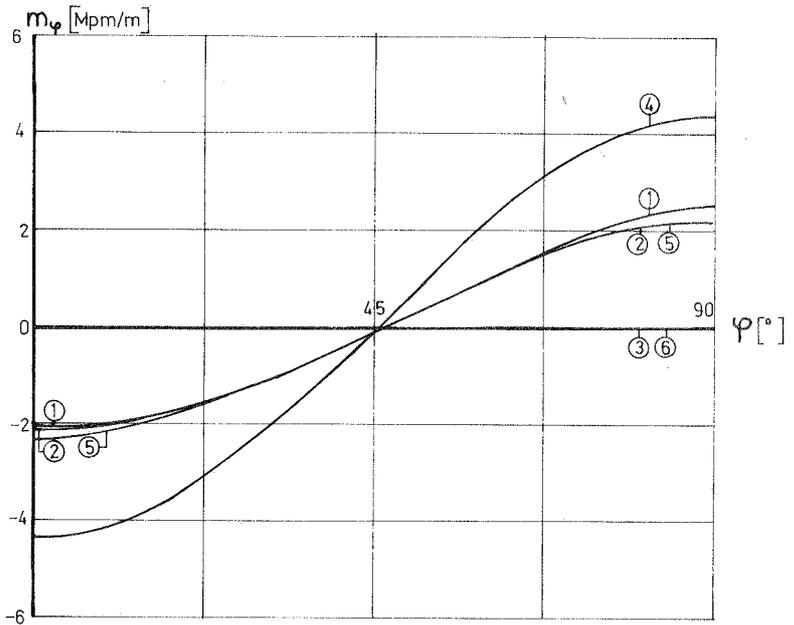
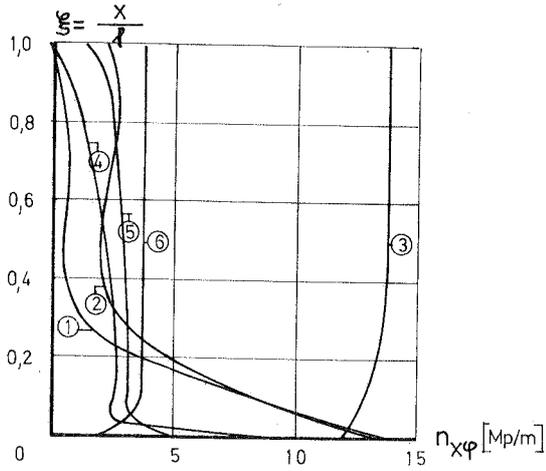


Bild A 16: Schale: Ringbiegemoment m_φ für $\xi=0$ und $\xi=1$

$\varphi = 45^\circ$



$\varphi = 45^\circ$

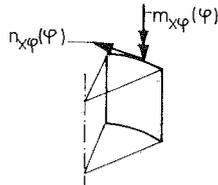
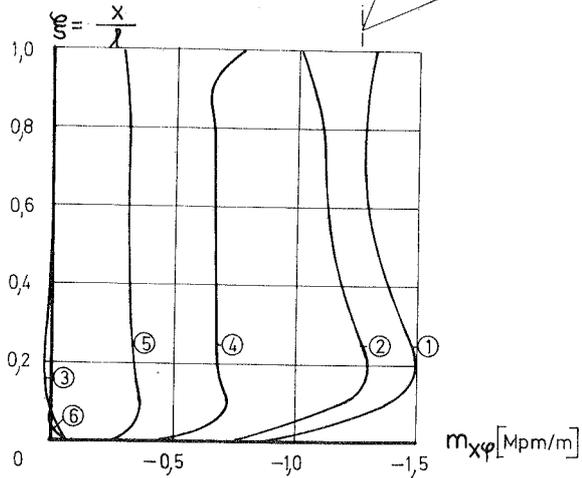
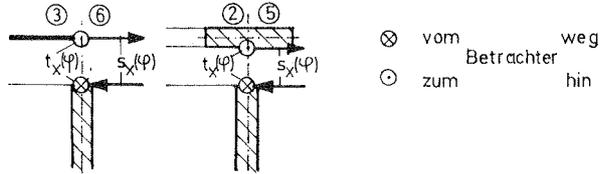


Bild A 17: Schale: Schubkräfte $n_{x\varphi}$ und Drillmomente $m_{x\varphi}$ für $\varphi = 45^\circ$



⊗ vom Betrachter weg
 ⊙ zum Betrachter hin

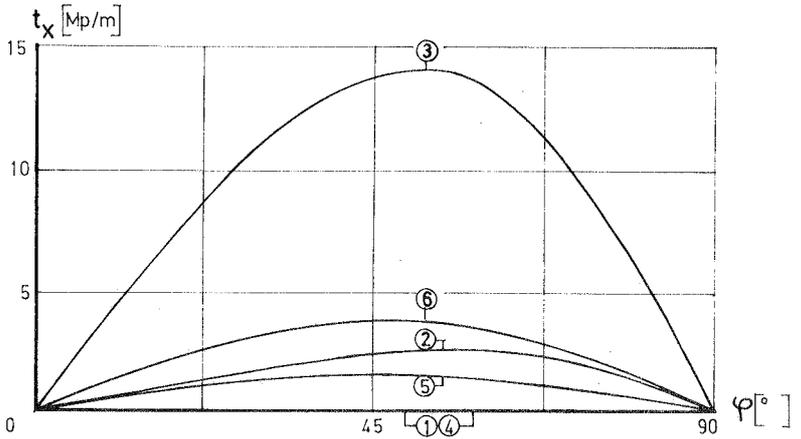


Tabelle: Verhältnis s_x^*/t_x (Dimensionen: Mp/m)

System	max. s_x^*	max. t_x	$100 \cdot s_x^*/t_x$
②	0.307	2.505	12.26
③	0.008	13.898	0.06
⑤	0.190	1.429	13.30
⑥	0.006	3.647	0.16

Bild A 18: Zur Randaussteifung der Schale: Ersatzschubkraft t_x und Ersatzquerkraft s_x

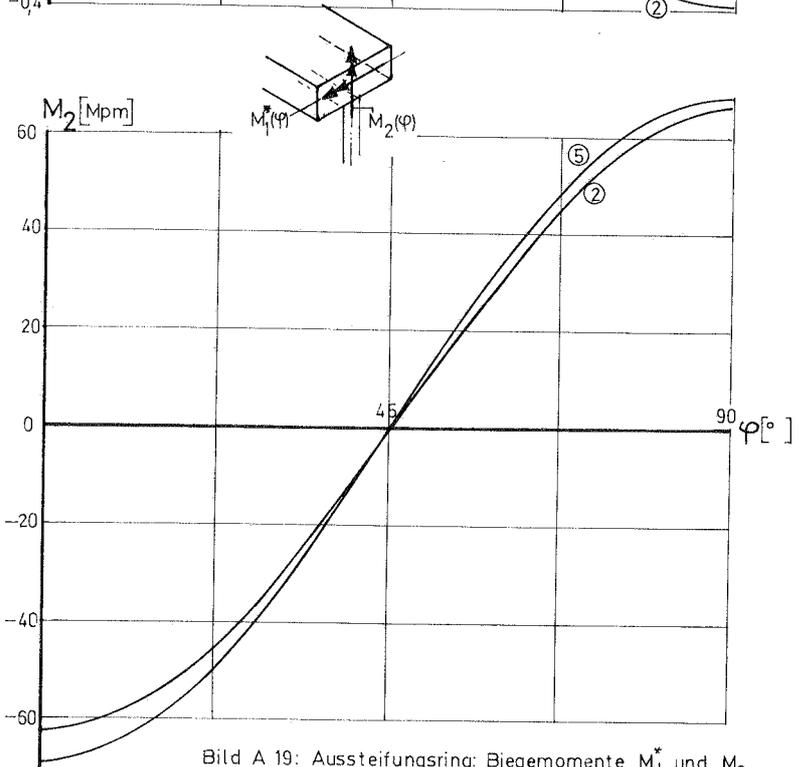
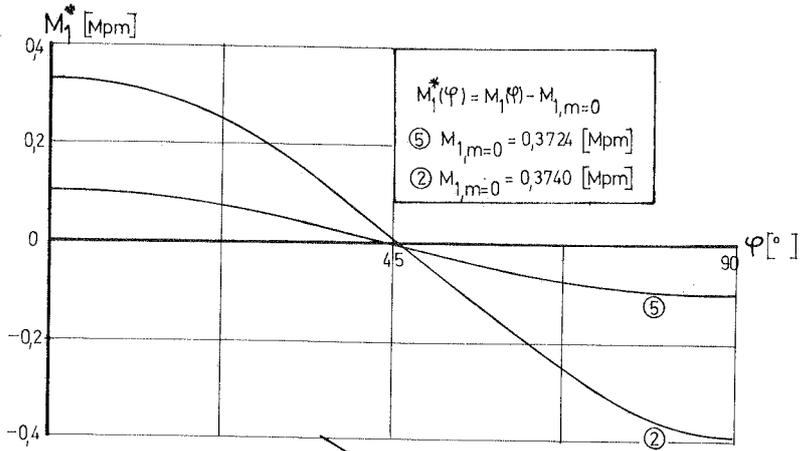


Bild A 19: Aussteifungsring: Biegemomente M_1^* und M_2

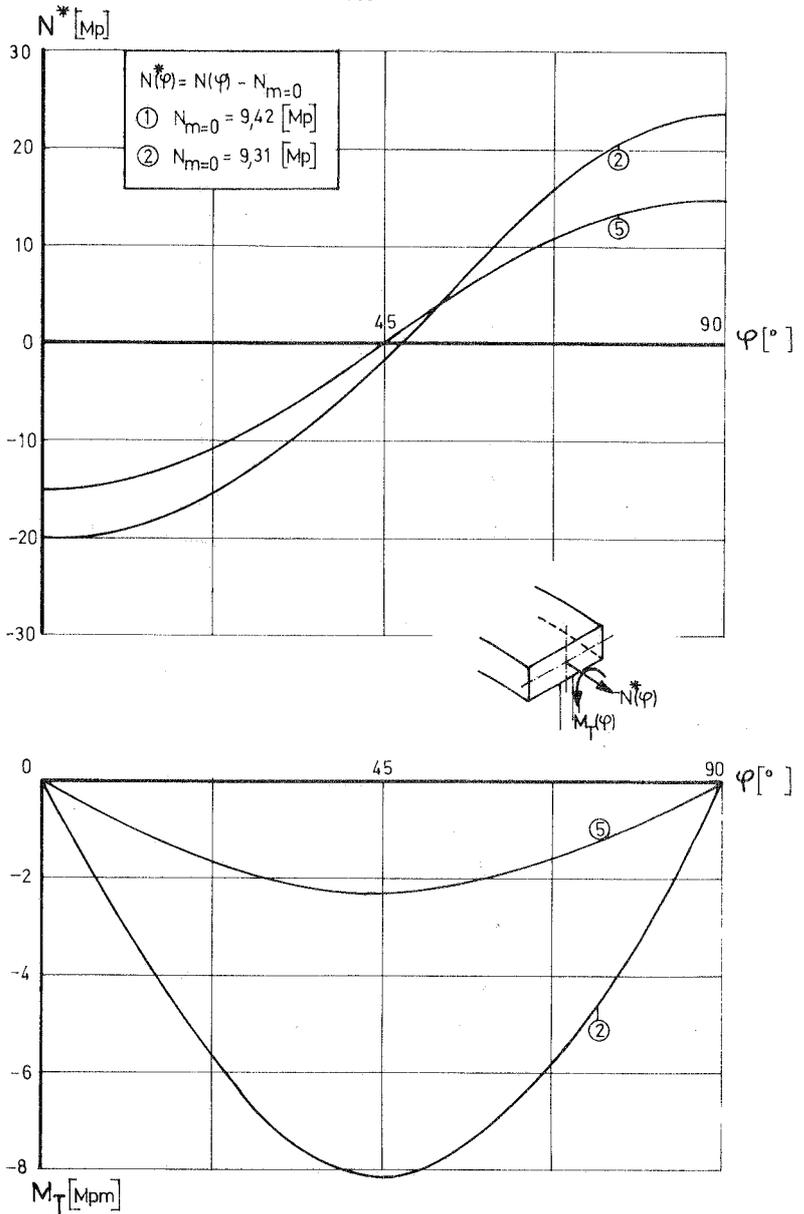


Bild A 20: Aussteifungsring: Normalkraft N^* und Torsionsmoment M_T

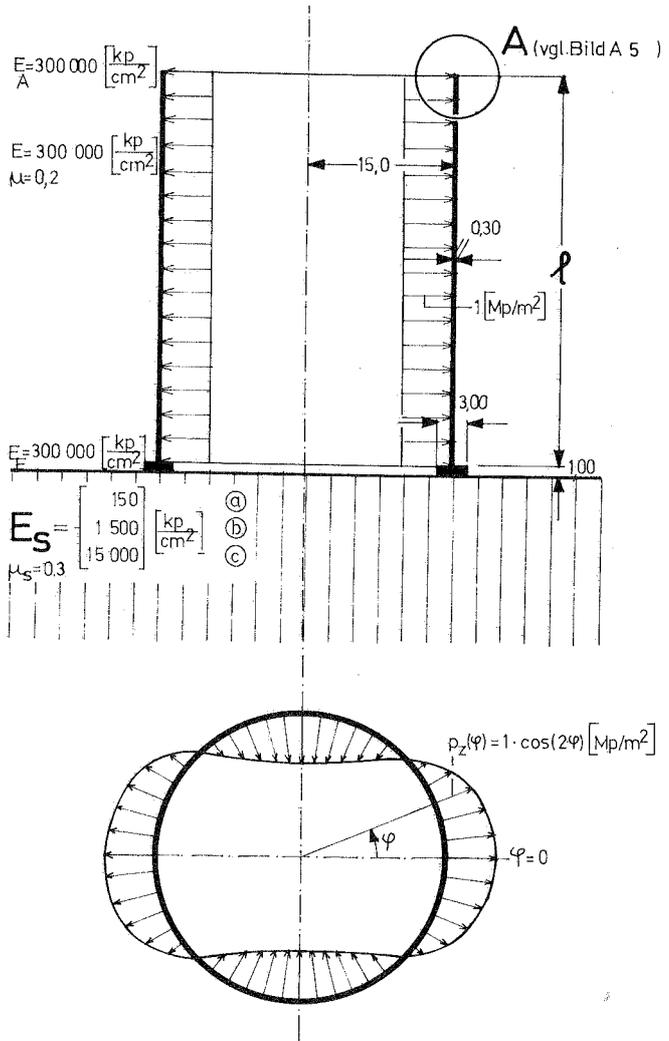


Bild A 21: Geometrie und Belastung der Serie II

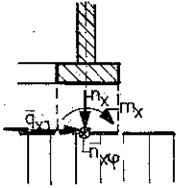
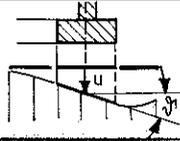
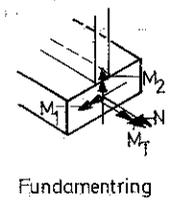
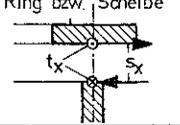
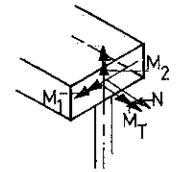
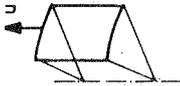
Größe	Verlauf	Dimension	Erläuterung	1			2			3			4			5			6		
				a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
n_x	$\cos 2\varphi$	Mp/m		93	135	145	77	130	144	00	02	06	589	1607	2039	276	1186	1854	08	71	285
m_x	$\cos 2\varphi$	Mpm/m		-56	70	53	47	68	53	02	12	29	346	703	342	164	523	315	07	47	85
$\bar{n}_{x\varphi}$	$\sin 2\varphi$	Mp/m		205	75	-139	152	-76	-139	-92	-83	-70	2054	663	-336	748	388	-338	-362	-335	-350
\bar{q}_x	$\cos 2\varphi$	Mp/m		⊗ vom Betrachter weg	190	61	30	158	59	30	00	06	15	1204	672	219	563	497	201	14	34
u	$\cos 2\varphi$	cm		0,8460	0,1253	0,0135	0,7158	0,1212	0,0134	0,0018	0,0014	0,0005	5,4666	14,977	0,1916	2,5593	1,1047	0,1742	0,0772	0,0653	0,0267
δ	$\cos 2\varphi$	$1 \cdot 10^{-2}$		0,1749	0,0213	0,0015	0,1459	0,0207	0,0015	0,0061	0,0042	0,0010	1,0734	0,2054	0,0062	0,5073	0,1513	0,0058	0,0239	0,0149	0,0022
N	$\cos 2\varphi$	Mp	 <p>Fundamentring</p>	-171,7	-37,0	-6,4	-139,3	-35,4	-6,4	16,6	11,4	2,7	-11 853	-5882	-134,7	-5408	-4290	-12,2	93	-7,9	-14,8
M_T	$\sin 2\varphi$	Mpm		-1483	-163	-07	-124,1	-160	-07	-7,5	-5,2	-1,3	-8964	-1334	8,3	-4257	-100,5	7,3	-23,7	-13,3	-0,6
M_1	$\cos 2\varphi$	Mpm		27,7	6,1	1,1	22,5	5,8	1,1	-2,8	-1,9	-0,5	1922	970	22,4	87,6	70,7	20,3	-1,7	1,3	2,5
M_2	$\cos 2\varphi$	Mpm		-787	-96	-07	-657	-93	-07	-27	-19	-0,5	-4830	-924	-28	-2283	-68,9	-2,6	-10,8	-6,7	-1,0
t_x	$\sin 2\varphi$	Mp/m	 <p>Ring bzw. Scheibe</p>	—	—	—	12	-0,6	-1,0	9,0	8,7	8,2	—	—	—	158	72	18	386	37,3	33,3
s_x	$\cos 2\varphi$	Mp/m		—	—	—	02	05	05	09	09	09	—	—	—	29	17	09	09	09	09
N	$\cos 2\varphi$	Mp	 <p>Aussteifungsring</p>	—	—	—	-13,4	4,0	7,1	—	—	—	—	—	—	-1720	-807	-22,6	—	—	—
M_T	$\sin 2\varphi$	Mpm		—	—	—	-7,1	-0,8	0,3	—	—	—	—	—	—	-263	-128	-4,1	—	—	—
M_1	$\cos 2\varphi$	Mpm		—	—	—	0,6	0,3	0,2	—	—	—	—	—	—	1,4	0,8	0,4	—	—	—
M_2	$\cos 2\varphi$	Mpm		—	—	—	-62,7	-12,2	-3,1	—	—	—	—	—	—	-807,9	-3980	-136,9	—	—	—

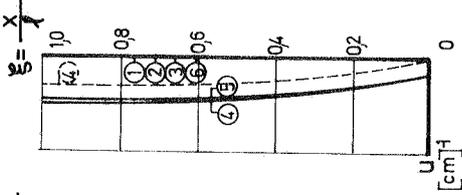
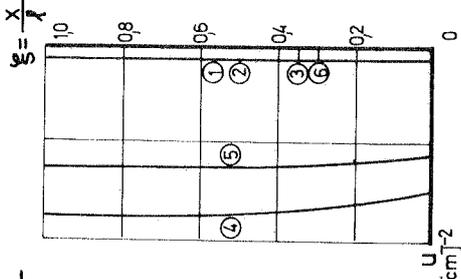
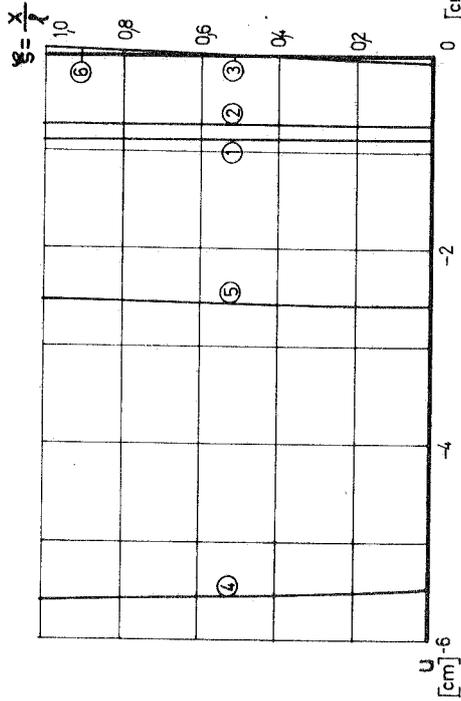
Bild A 22: Tabellarische Zusammenstellung verschiedener Schnittgrößen und Verformungen



Ⓐ $E_s = 150 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$

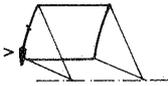
Ⓑ $E_s = 1500 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$

Ⓒ $E_s = 15000 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$

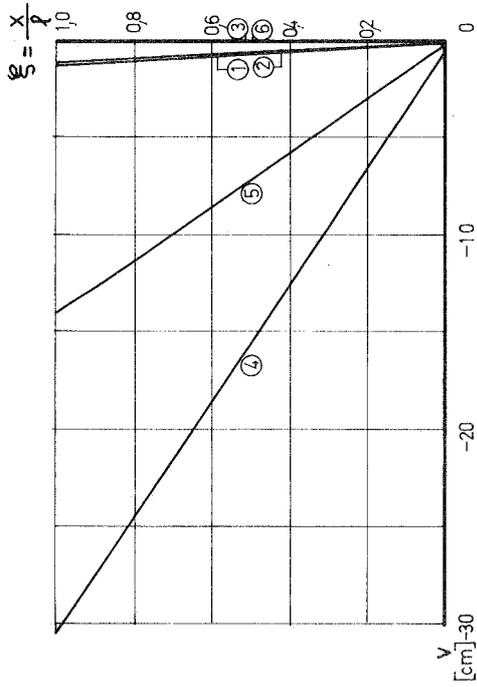


--- Membranlösung

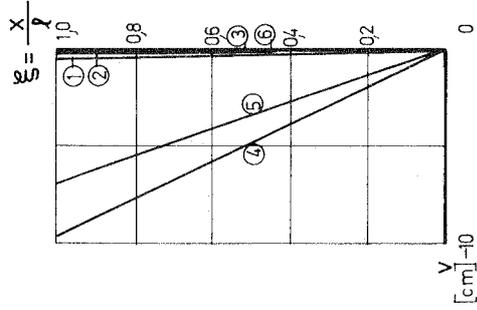
Bild A 23: Schale: Meridianverschiebungen u



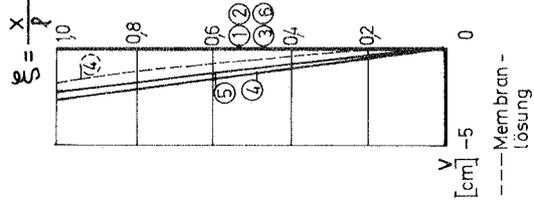
Ⓐ $E_S = 150 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



Ⓑ $E_S = 1500 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$

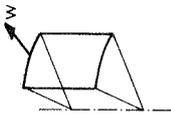


Ⓒ $E_S = 15000 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$

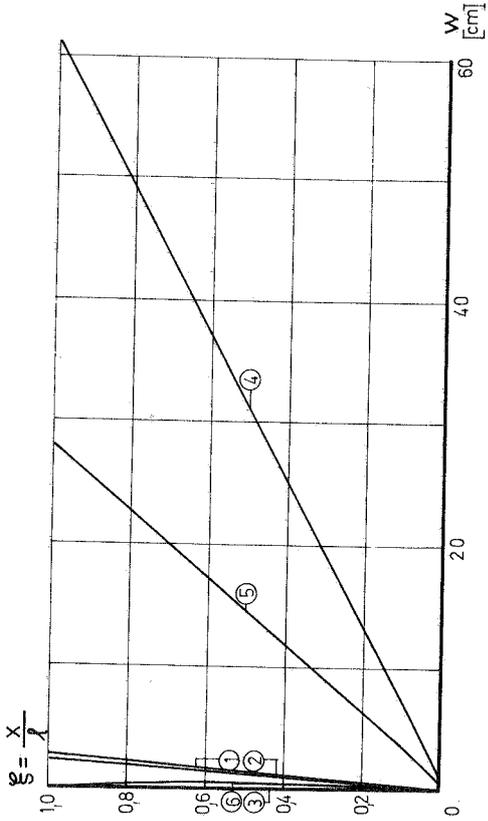


--- Membran -
lösung

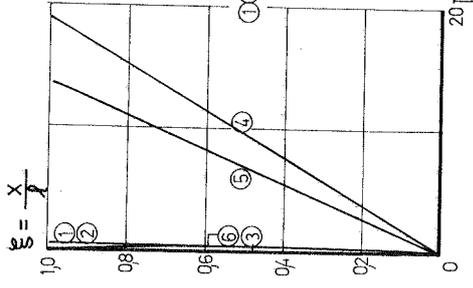
Bild A 24: Schale: Tangentialverschiebungen v



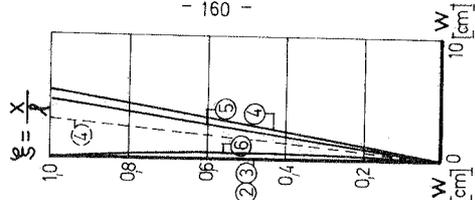
Ⓐ $E_S = 150 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



Ⓑ $E_S = 1500 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



Ⓒ $E_S = 15000 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



- 160 -

Bild A 25: Schale: Radialverschiebungen w

--- Membran-
lösung

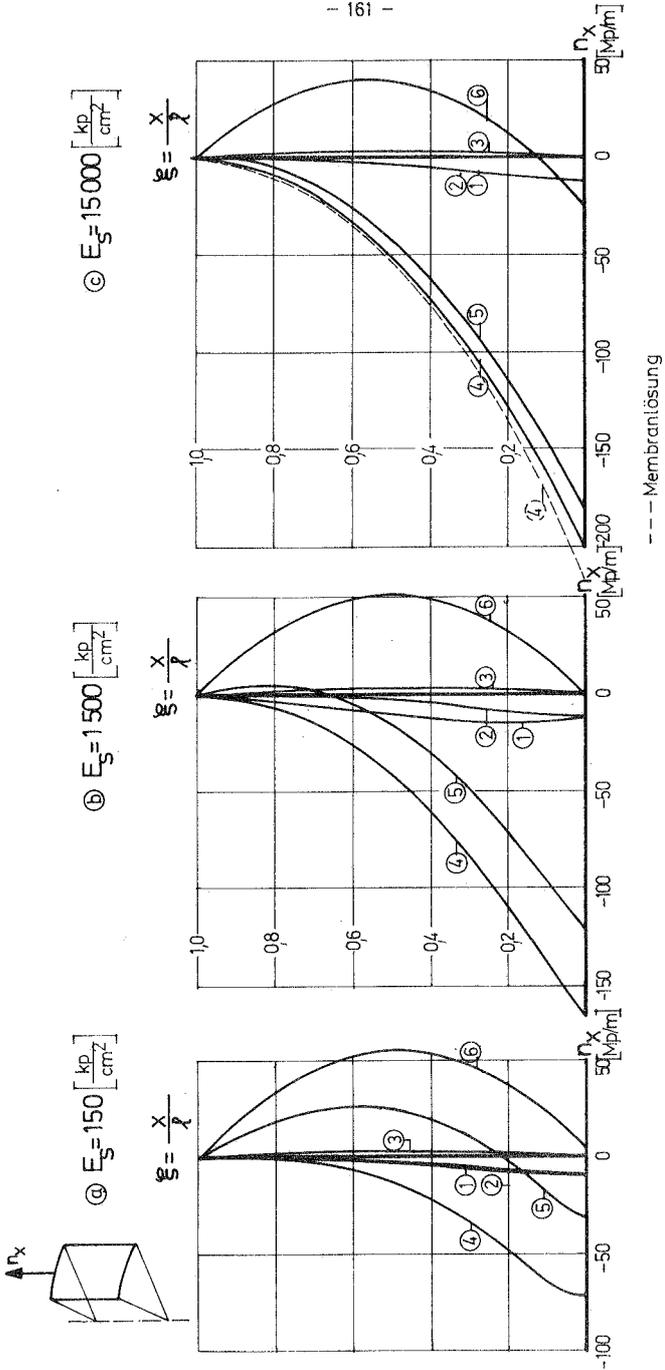
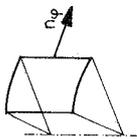
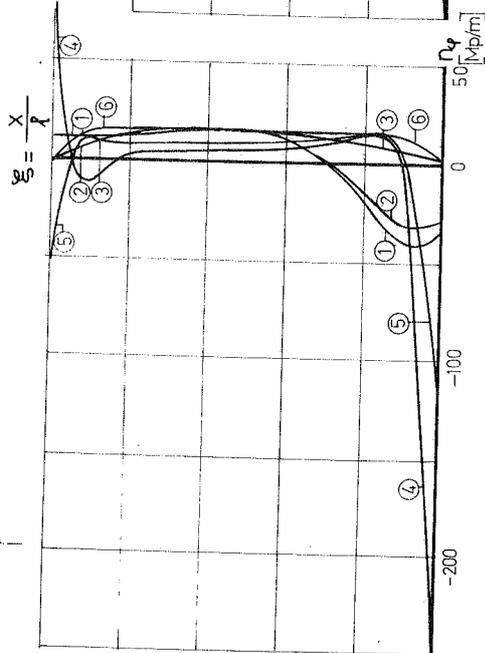


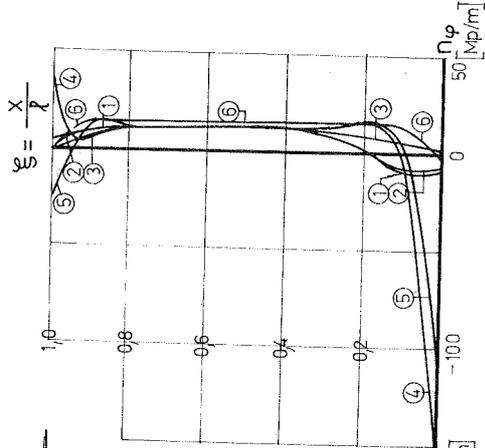
Bild A 26: Schale: Meridiankräfte σ_x



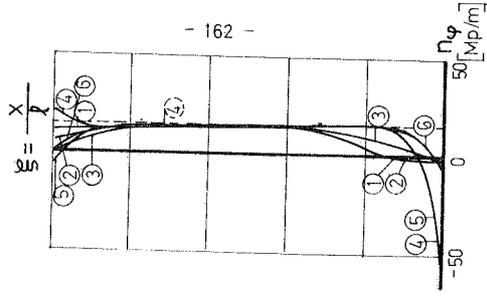
Ⓐ $E_S = 150 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



Ⓑ $E_S = 1500 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



Ⓒ $E_S = 15000 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$



--- Membran-
lösung

Bild A 27: Schale: Ringkräfte η_φ

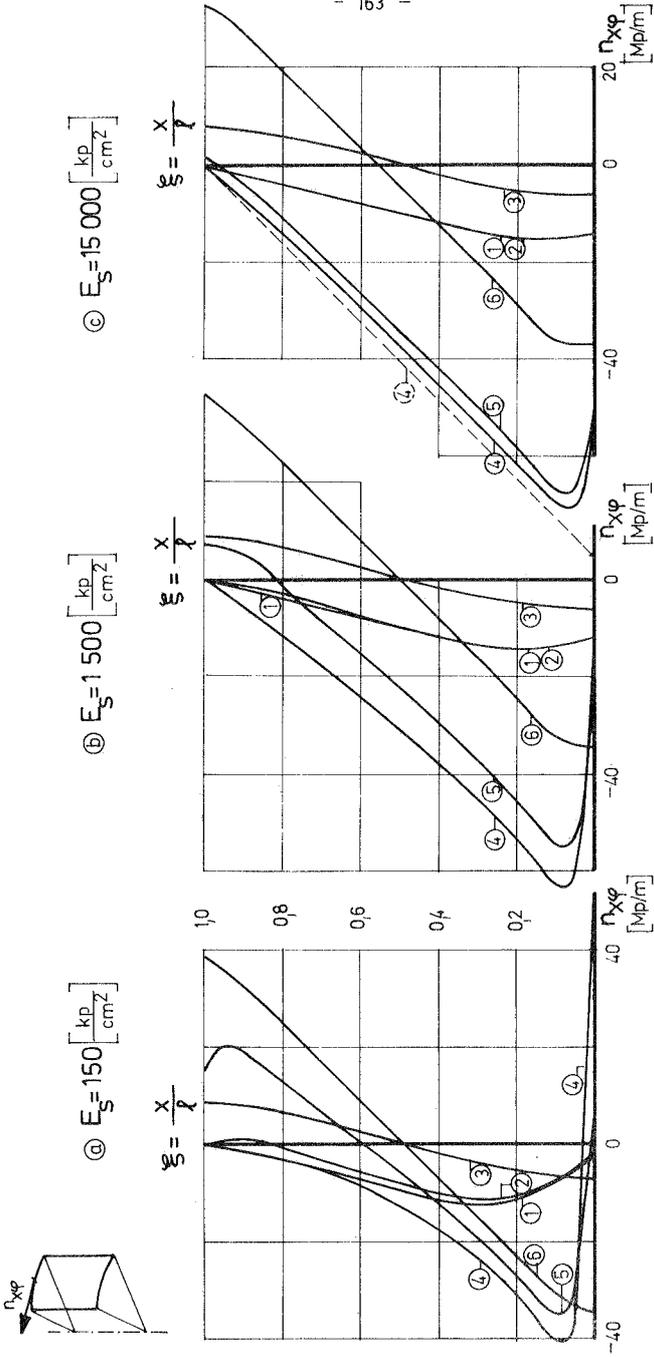


Bild A 28: Schale: Schubkräfte η_{xp}

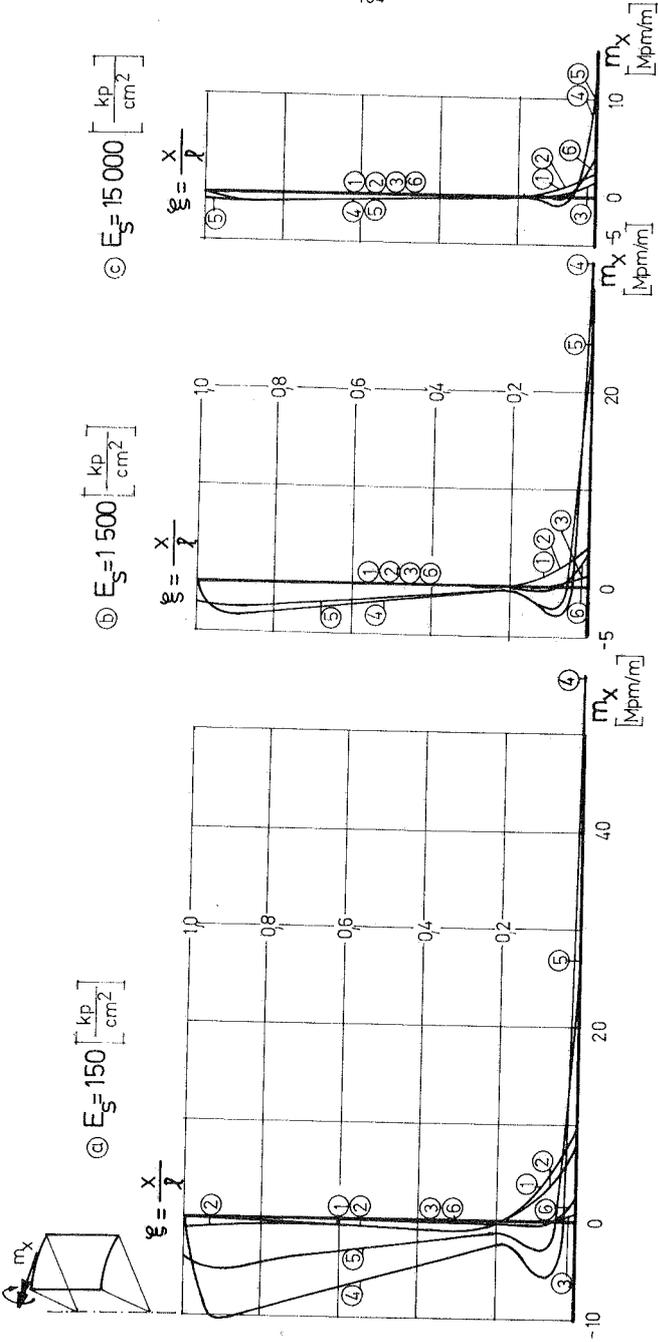


Bild A 29: Schale: Biegemomente m_x

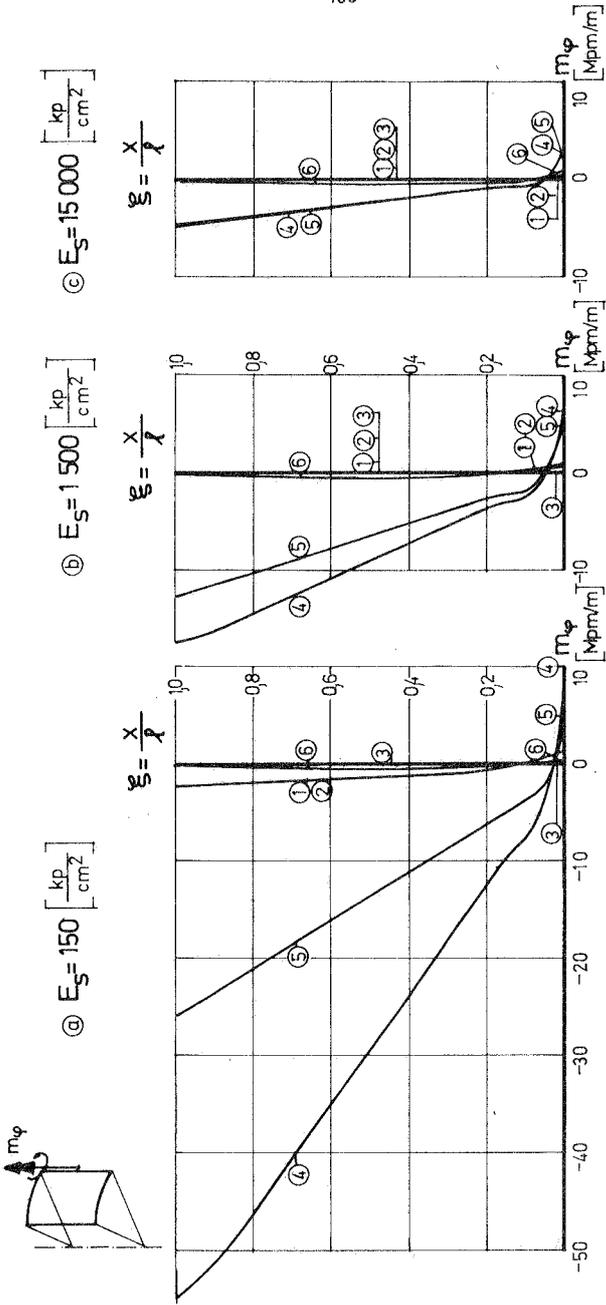


Bild A 30: Schale: Biegemomente m_φ

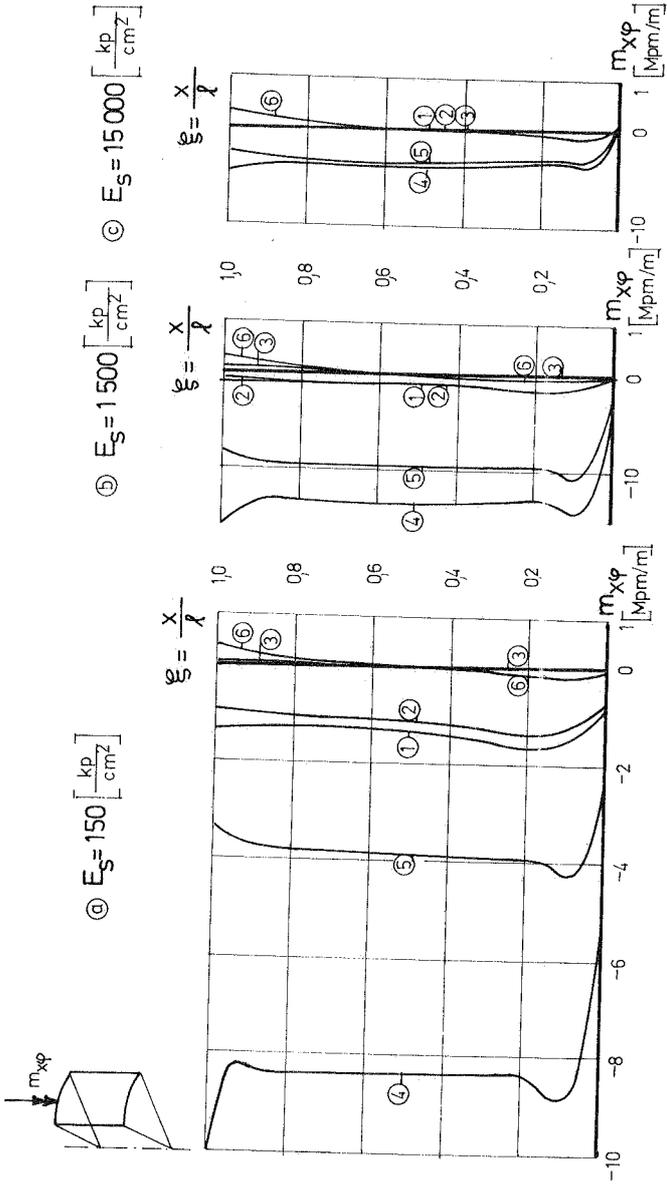


Bild A 31: Schale: Drillmomente $m_{x\varphi}$

Folgende Berichte sind bereits erschienen :

- 74/1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lehndorff,
K. Papailiou, J. Sättele
Kontaktkurs EDV im Konstruktiven Ingenieurbau
- 74/2 G. Werner
Experimentelle und theoretische Untersuchungen
zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und
verdrehungsbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt
- 74/3 K. Tompert
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf
elastischer Unterlage