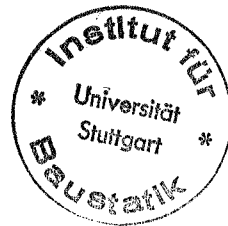


✓

ANWENDUNG DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE AUF DIE BERECHNUNG VON STAHLBETONPLATTEN

von
FUMIO FUJII



Bericht Nr. 78-1
aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Direktor: o. Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer
Stuttgart 1978

Dieser Bericht wurde unter dem Titel "Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten" als Dissertation von Herrn Fumio Fujii dem Fachbereich 11, Konstruktiver Ingenieurbau, der Universität Stuttgart am 26.01.1978 vorgelegt.

Die mündliche Doktorprüfung fand am 22.06.1978 statt.

Berichter waren:

Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr.-Ing. J. Schlaich



Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 7, bezogen werden.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Bericht wird ein Lösungsweg mit Hilfe der Methode der finiten Elemente zur wirklichkeitsnahen Rechnung querbelasteter Stahlbetonplatten im gerissenen Zustand beschrieben. Der numerische Lösungsweg geht davon aus, daß das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetonplatten als eine Folge der Systemveränderung infolge der aufeinanderfolgenden Rißausbildung und des plastischen Verhaltens der Bewehrungsstäbe anzusehen ist.

Dabei wird ein lineares Materialgesetz für den Beton angenommen. Das Druckversagen des Betons ist ausgeschlossen. Es wird zur Beschreibung des Rißquerschnittszustandes ein Gedankenmodell entwickelt. Mit der in Matrizenform dargestellten Rechenmethode lassen sich nicht nur der Verformungs- und Spannungszustand im gerissenen Zustand berechnen, auch Rißbilder können wirklichkeitsnah simuliert werden. Unter Gebrauchslast wird besonders die Schnittkraftumlagerung untersucht. Die Aufklärung der Gewölbewirkung steht dabei im Mittelpunkt. Zur praktischen Rechnung wird das gemischte Schalenmodell von HERRMANN gewählt. Numerische Ergebnisse sind mitgeteilt.

SUMMARY

This researching paper describes a finite element technique for analysis of cracked reinforced concrete slabs under transverse loads. It is assumed that the entire nonlinear behaviour of slabs can be considered to be due to the structural change resulting from cracking of concrete and plasticity of reinforcement.

Moreover, a linear material law is assumed for concrete, and the compressive failure of concrete excluded. A crack model will be developed to describe cracked cross-sections. By means of the numerical method deformations and stresses can be calculated for the cracked state. Crack patterns can be also simulated. The main objective is to investigate stress redistributions caused by cracking under service load. The dome action is a particularly interesting problem. The mixed shell element of HERRMANN will be selected for practical computations. Numerical examples are presented.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Literaturverzeichnis	3
Bezeichnungen und Symbole	20
1. ALLGEMEINES	
1.1 Einführung	25
1.2 Nichtlineare Rechnung ebener Flächentragwerke aus Stahlbeton	26
1.3 Membranwirkung in Stahlbetonplatten	34
1.4 Aufgabenstellung	38
2. MATERIALVERHALTEN VON BETON UND STAHL	
2.1 Beton	40
2.2 Bewehrungsnetz	46
3. LINEARE THEORIE DER GEKOPPELTEN SCHEIBEN- UND PLATTENWIRKUNG	
3.1 Grundlagen der üblichen Scheibentheorie	49
3.2 Grundlagen der üblichen Plattentheorie	54
3.3 Stoffgesetz für den gekoppelten Scheiben- und Plattenzustand	60
3.4 Lineare Theorie der orthotropen Platte	67
4. ZUR WAHL EINES FINITEN ELEMENTES	
4.1 Plastizitätskontrolle	73
4.2 Gemischtes Schalenmodell nach HERRMANN	74
5. IDEALISIERUNG GERISSENER STAHLBETONPLATTEN	
5.1 Voraussetzungen zur Berechnung	92
5.2 Rißquerschnitt	93
6. BERECHNUNGSMETHODE	
6.1 Stoffgesetz für den Rißquerschnitt	97
6.2 Gemischte Methode	106
6.3 Nichtlineare Rechentechnik	111

	Seite
7. NUMERISCHE ERGEBNISSE	
7.1 Gewölbewirkung	122
7.2 Parameterstudie	139
8. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN	166
Anhang: Querschnittswerte für Rißzustände ① bis ⑥ Diskretisierungsnetze D12 und R96	169

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Mallett, R.H., P.V. Marcal: Finite Element Analysis of Non-linear Structures . Proc. of ASCE, Sept. 1968, ST.9, pp. 2081-2105.
- [2] Felippa, C.: Plate Bending Finite Elements: Ph.D.Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1966.
- [3] Pecknold, D.A.W., W.C. Schnobrich: Finite Element Analysis of Skewed Shallow Shells, Civil Eng. Studies, SRS No. 336, Univ. of Illinois, Jan. 1968.
- [4] Herzog, M.: Die Membranwirkung in Stahlbetonplatten nach Versuchen. Beton- und Stahlbetonbau, H. 11, 1976, S. 270-275.
- [5] Kristjansson, R.: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten mit Hilfe finiter Elemente. Dissertation, TH Darmstadt, 1977.
- [6] Harbord, R.: Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen Gemischte Finite Elemente. Bericht Nr. 72-7, Inst. für Statik, TU Braunschweig, 1973.
- [7] Clough, R.W., C.. Felippa: A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending. Proc. of 2nd Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, AFFDL-TR-68-150, 1968.
- [8] Wilson, E.L.: Finite Element Analysis of Two-dimensional Structures, Rept. 63-2, June 1963, Structural Eng. Lab., Univ. of California.
- [9] Prato, C.: Shell Finite Element Method Via Reissner's Principle. Int. J. of Solids and Structures, Vol. 5, 1969, pp. 1119-1133.
- [10] Herrmann, L.R.: Finite Element Bending Analysis for Plates, Proc. of ASCE., Vol. 93, EM 5, 1967, pp. 13-26.

- [11] Herrmann, L.R., D.M. Campbell: A Finite Element Analysis for Thin Shells. J. of AIAA, Vol. 6, 1968, No. 10, pp. 1842-1847.
- [12] Bergan, P.G.: Nonlinear Analysis of Plates considering Geometric and Material Effects. Ph. D. Diss., Univ. of California Berkeley, March 1971.
- [13] Liu, T.C.Y., A.H. Nilson, F.O. Slate: Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete. Proc. of ASCE., ST 5, May 1972, Vol. 98.
- [14] Popovics, S.: A Review of Stress-Strain Relations for Concrete. ACI J., Vol. 67, No. 3, March 1970.
- [15] Kupfer, H., H.K. Hilsdorf, H. Rüsçh: Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. ACI J. 66(1969), Nr. 8, pp. 656-666.
- [16] Kupfer, H.: Das nichtlineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau, 68(1973), S. 269-274.
- [17] Trenks, K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten. Der Bauingenieur 29(1954), S. 372-377.
- [18] Bignell, V.E., V. Smalley, N.P. Roberts: A New Photoelastic Material for Use in Problems Reinforced Concrete. Magazine of Concrete Research, Vol. 15, No. 45, Nov. 1963.
- [19] ACI-Committee 435. Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. ACI J., Vol. 63, No. 6, 1966, pp. 637-673.
- [20] Duchon, N.B.: Analysis of Reinforced Concrete Membrane subject to Tension and Shear. ACI J. 69(1972), pp. 578-583.
- [21] Altman, W., F. Iguti: A Thin Cylindrical Shell Finite Element Based on a Mixed Formulation. Computers and Structures Vol. 6, 1976, pp. 149-155.

- [22] Franz, G.: Konstruktionslehre des Stahlbetons Bd. I, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [23] Flügge, W.: Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. Ing.-Archiv, 1930.
- [24] Krylow, S.M.: Umlagerung der Kräfte in statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen. VEB Berlin, 1966, Handbibliothek Bauwesen, H. 1.
- [25] Branson, D.E.: Instantaneous and Time-dependent Deflection of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams. Alabama Highway Research Report No. 7, Bureau of Public Roads, August 1963.
- [26] Beeby, A.W.: Short-Term Deformations of Reinforced Concrete Members. Cement and Concrete Association, Technical Report No. TRA 408, London, March 1968.
- [27] Aldstedt, E.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames. Rept. No. 75-1, March 1975, Institutt for Statikk Univ. of Trondheim.
- [28] Herzog, M.: Durchbiegung von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung nach Rechnung und Versuch. IVBH-Sym., Madrid 1970, Schlußbericht, S. 337-385.
- [29] Ebbinghaus, P.: Herleitung eines Verfahrens zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter Berücksichtigung der Rißentwicklung. Diss., TH Aachen, Juni 1975.
- [30] Cervenka, V., K.H. Gerstle: Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels. IVBH 31-II(1971), S. 31-45, 32-II(1972), S. 25-39.
- [31] Bell, J.C., D.G. Elms: Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Slabs. Magazine of Concrete Research, Vol. 24, No. 79, June 1972.

- [32] Ngo, D., A.C. Scordelis: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. ACI J., Vol. 64, No. 3, March 1967, S. 152-163.
- [33] Ngo, D., A.C. Scordelis, H.A. Franklin: Finite Element Study of Reinforced Concrete Beams with Diagonal Tension Crack. UC SESM, Rept. No. 70-19, Univ. of California, Berkeley, December 1970.
- [34] Nilson, A.H.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. Ph. D. Diss., Division of Structural Eng. and Structural Mechanics, Univ. of California, Berkeley, March 1967.
- [35] Nilson, A.H.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method. ACI J., Vol. 65, No. 9, Sept. 1968, pp. 757-766.
- [36] Hoshino, M.: Ein Beitrag zur Untersuchung des Spannungszustandes an Arbeitsfugen mit Spanngliedkoppelungen von abschnittsweise in Ortbeton hergestellten Spannbetonbrücken. Diss., TH Darmstadt, 1974.
- [37] Franklin, H.A.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels. Rept. No. SESM 70-5, March 1970, Univ. of California, Berkeley.
- [38] Stauder, W.: Ein Beitrag zur Untersuchung von Stahlbetonscheiben mit Hilfe finiter Elemente unter Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Diss., TH Darmstadt, 1973.
- [39] Cervenka, V.: Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels under In-plane Loads. Thesis Ph. D., Univ. of Colorado, 1970.
- [40] Huffington, N.J.: Theoretical Determination of Rigidity Properties of orthogonally Stiffened Plates. J. Appl. Mech., 23, No. 1 (March 1956) pp. 15-20.

- [41] Giencke, E.: Die Grundgleichung für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. Der Stahlbau 24(1955), H. 6, S. 128-129.
- [42] Klöppel, K., R. Schardt: Systematische Ableitung der Differentialgleichungen für ebene anisotrope Flächentragwerke. Der Stahlbau, Bd. 29(1960), H. 2, S. 33-43.
- [43] Cardenas, A.E., R.J. Lenschow, M.A. Sozen: Stiffness of Reinforced Concrete Plates. Proc. of ASCE., ST 9(1972), pp.2587-2603.
- [44] Mader, F.W.: Die Berücksichtigung der Diskontinuität bei der Berechnung orthotroper Platten. Der Stahlbau, Bd. 26(1957), H. 10.
- [45] Schumann, H.: Zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten unter Berücksichtigung der diskontinuierlichen Anordnung der Rippen. Der Stahlbau, Bd. 29(1960), H. 10.
- [46] Cornelius, W.: Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte. Der Stahlbau, Bd. 21(1952), H.2, H.3, H.4.
- [47] Johansen, K.W.: Yield-Line Formulas for Slabs. C.C.A., 1972.
- [48] Wood, R.H.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates. Thames and Hudwon, London 1961.
- [49] Massonnet, C.E., M.A. Save: Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London 1972.
- [50] Wood, R.H., L.L. Jones: Yield Line Analysis of Slabs. Thames and Hudson, Chatto and Windus, London 1967.
- [51] Hasse, H.: Bruchlinientheorie von Platten. Werner-Verlag, Düsseldorf 1962.

- [52] Henning, G.: Zur genauen Berechnung konstruktiv orthotroper Platten. Diss., D 17, TH Darmstadt 1970.
- [53] Henning, G.: Zur genauen Berechnung konstruktiv orthogroper Platten. Der Stahlbau, 1972, (H. 3), S. 78-86.
- [54] Giencke, E.: Einfluß der Streifenexzentrizität auf Biegung und Stabilität orthotroper Platten. Beiträge aus Statik und Stahlbau, Köln, Stahlbau-Verlag, 1961.
- [55] Monforton, G.R., L.A. Schmit: Finite Element Analysis of Skew Plates in Bending. J. of AIAA., Vol. 6(1968), H. 6, S. 1150-1152.
- [56] Giencke, E.: Ein einfaches und genaues finites Verfahren zur Berechnung von orthotropen Scheiben und Platten. Der Stahlbau, Bd. 36(1967), H. 9, S. 260-268, H. 10, S. 303-315.
- [57] Knothe, K.: Plattenberechnung nach dem Kraftgrößenverfahren. Der Stahlbau, Bd. 36(1967), H. 7, S. 202-214, H. 8, S. 245-254
- [58] Nishino, F., R. Pama, S. Lee: Orthotropic Plates with Eccentric Stiffners. IVBH Bd. 34-II(1974).
- [59] Rubin, H.: Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie. Diss., TH Karlsruhe, Inst. für Baustatik und Meßtechnik, 1976.
- [60] Geistefeldt, H.: Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand - Berechnung mit Berücksichtigung der rißabhängigen Schubsteifigkeit im Materialgesetz - Bericht Nr. 76-19, Inst. für Statik, TU Braunschweig, 1976.
- [61] Swoboda, G.: Rißuntersuchungen in Stahlbetonbalken und Scheiben mit Hilfe des LST-Elementes. Der Bauingenieur, 50(1975), S. 465-468.

- [62] Herzog, M.: Die Bruchlast ein- und mehrfeldriger Rechteckplatten aus Stahlbeton nach Versuchen. Beton- und Stahlbetonbau, 71(1976), H. 3, S. 69-71.
- [63] Schlaich, J.: Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten. Beton- und Stahlbetonbau, 59(1964), H. 11, S. 250-256, H. 12, S. 280-285.
- [64] Prince, M.R., K.O. Kemp: A New Approach to the Yield Criterion for isotropically Reinforced Concrete Slabs. Magazine of Concrete Research, Vol. 20, No. 62, March 1968, pp. 13-20.
- [65] Morley, C.T.: Experiments on the Distortion of Steel Bars across Cracks in Reinforced Concrete Slabs. Magazine of Concrete Research, Vol. 17, No. 54, March 1966, pp. 25-34.
- [66] Parkhill, D.L.: The flexural Behaviour of Slabs at Ultimate Load. Magazine of Concrete Research, Vol. 18, No. 56, Sept. 1966, pp. 141-146.
- [67] Park, R.: The Lateral Stiffness and Strength required to ensure membrane action at the ultimate load of a reinforced concrete Slab-and-Beam Floor. Magazine of Concrete Research, Vol. 17, No. 50, March 1965, pp. 29-38.
- [68] Hayes, B., R. Taylor: Some Tests on Reinforced Concrete Beam-Slab Panels. Magazine of Concrete Research, Vol. 21, No. 67, June 1969, pp. 113-120.
- [69] Kwiecinski, M.W.: Yield Criterion for Initially Isotropic Reinforced Slabs. Magazine of Concrete Research, Vol. 17, No. 51, June 1965, pp. 97-100.
- [70] Franz, G.: Neue Erkenntnisse über die rand- und punktgestützten Platten und ihre Auswertung durch die Arbeitsgruppe "Platten" des C.E.B. Zement und Beton, Nr. 38(1967).
- [71] Herzog, M.: Durchbiegung kreuzweise bewehrter Stahlbeton-Rechteckplatten vom gerissenen Zustand bis zum Bruch. Die Bau-technik, 9(1971), S. 313-316.

- [72] Sawczuk, A.: On Initiation of the Membrane Action in Rigid-Plastic Plates. *J. de Mechnique*, 3(1964), pp. 15-23.
- [73] Kemp, K.O.: A Lower Bound Solution to the Collapse of an orthotropically Reinforced Concrete Slab on Simple Supports. *Magazine of Concrete Research*, Vol. 14, No. 41, July 1962, pp. 79-84.
- [74] Cusens, A.R., A.F. Abbasi: The Influence of Transverse Prestress on the Strength of Prestressed Concrete Bridge Slabs. *Magazine of Concrete Research*, Vol. 15, No. 44, July 1963, pp. 107-114.
- [75] Knöpfel, H.: Berechnung starr-plastischer Platten mittels finiter Elemente. *Inst. für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 47*, 1973.
- [76] Wallner, E.: Die Tragfähigkeit kreuzweise bewehrter Platten beim Bruch. *Diss., Graz 1950*.
- [77] Schellenberger, R.: Beitrag zur Berechnung von Platten nach der Bruchtheorie. *Diss., TH Karlsruhe 1958*.
- [78] Hallaje, K.: Einfluß der Rißbildung auf den Spannungszustand in Flächentragwerken aus Stahlbeton. *Diss., TU Dresden, 1970*.
- [79] Fujii, F., T. Kajita, M. Naruoka: Ein Berechnungsverfahren zur Grenztragfähigkeits-Untersuchung von Platten mittels der Methode der finiten Elemente. *IVBH, 36-I(1976)*, S. 111-124.
- [80] Griggs, H.: Buckling of Reinforced Concrete Shells. *Proc. of ASCE.*, 97(1971), EM.3, pp. 687-700.
- [81] Hedgren, A.W.: A Numerical and Experimental Study of Translational Shell Roofs. *Ph. D. Thesis, Princeton Univ., New-Jersey, 1965*.
- [82] Morley, C.T., S. Rajendraw: The Strength and Effective Width of RC Flanges. *Proc. ICE, Part 2*, 59(1975), pp. 102-133.

- [83] Gouda, M.: An Experimental and Analytical Investigation of the Stresses in reinforced Concrete Cylindrical Shell Roofs. Univ. of London, Ph.D., Thesis, 1951.
- [84] Kollar, L., E. Dulacska: Schalenbeulung. Theorie und Ergebnisse der Stabilität gekrümmter Flächentragwerke. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1975.
- [85] Bach, C., O. Graf: Versuche mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 30, Berlin, Verlag Ernst, 1915.
- [86] Pflüger, A.: Zum Beulproblem anisotroper Rechteckplatten. Ing.-Archiv, 16(1947), S. 111.
- [87] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung. Bericht Nr. 78(1969), Lehrstuhl für Massivbau, TH München.
- [88] Valliappan, S., T.F. Doolan: Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete. Proc. of ASCE., ST 4(1972), pp. 885-898.
- [89] Giencke, E.: Die Berechnung von Hohlrippenplatten. Der Stahlbau, 29(1960).
- [90] Giencke, E.: Über die Berechnung regelmäßiger Konstruktion als Kontinuum. Der Stahlbau, 33(1964).
- [91] Taylor, R., D.R.H. Maher, B. Hayes: Effect of the Arrangement of Reinforcement on the Behaviour of Reinforced Concrete Slabs. Magazine of Concrete Research, Vol. 98, No. 55, June 1966, pp. 85-94.
- [92] Moy, S.S.J., B. Mayfield: Load Deflection Characteristics of Rectangular Reinforced Concrete Slabs. Magazine of Concrete Research, 24(1972), pp. 209-218.
- [93] Craemer, H.: Versuche an Stahlbetonplatten, ausgewertet nach der Plastizitätstheorie. Beton- und Stahlbetonbau, 50(1955), S. 58-61.

- [94] Morley, C.T.: Optimum Reinforcement of Concrete Slab Elements against Combinations of Moments and Membrane Forces. Magazine of Concrete Research, Vol. 22, No. 72, Sept. 1970, pp. 155-162.
- [95] Scanlon, A.: Time Dependent Deflection of Reinforced Concrete Slabs. Ph. D. Diss., Dept. of Civil Eng., Univ. of Alberta, Edmonton, Dec. 1971.
- [96] Stangenberg, F.: Berechnung von Stahlbetonbauteilen für dynamische Beanspruchungen bis zur Tragfähigkeitsgrenze. Heft 16, Konstruktiver Ingenieurbau, Ruhr-Univ. Bochum, Okt. 1973.
- [97] Ockleston, A.J.: Arching Action in Reinforced Concrete Slabs. The Structural Engineer, XXXVI(1958), No. 6, pp. 197-201.
- [98] Christiansen, K.P.: The Effect of Membrane Stresses on the Ultimate Strength of the Interior Panel in a Reinforced Concrete Slab. The Structural Engineer, Vol. 41 (1963), No. 8, pp. 261-265.
- [99] Schlaich, J.: Die Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten. Diss., TH Stuttgart, 1963.
- [100] Berg, S.: Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates. Inst. for Statikk, Univ. Trondheim, Report No. 73-1, Febr. 1973.
- [101] Peterson, W.S., C.N. Kostem, J.M. Kulicki: The Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs. Report No. 378B.3, PB-244 634, Fritz Eng. Labo., Lehigh Univ., May 1974.
- [102] Hand, F.R., D.A. Pecknold, W.C. Schnobrich: A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells. Tech. Report 72-2011, Univ. of Illinois, Urbana, August 1972, No. 389.
- [103] Hand, F.R.: Nonlinear Analysis of RC Plates and Shells. Proc. of ASCE., 99(1973), ST 7, pp. 1491-1505.

- [104] McNeice, G.M.: Comparison of Finite Element and Unique Limit Analysis Solution for Certain Reinforced Concrete Slabs. Proc. of ICE., Vol. 43, Aug. 1969, pp. 629-640.
- [105] Bäcklund, J.: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs by a Finite Element Method. Proc. Conf. FEM in Civil Eng., McGill Univ., Montreal 1972, pp. 803-840.
- [106] Jofriet, J.C., G.M. McNeice: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs. Proc. of ASCE., J. 97, ST 3, 1971, pp. 785-806.
- [107] Bell, J.C., D.G. Elms: A Finite Element Approach to Post-Elastic Slab Behaviour. ACI Publication, SP-30-15, pp.325-344.
- [108] Cardenas, A.E., R.J. Lenschow, M.A. Sozen: Stiffness of Reinforced Concrete Plates. Proc. of ASCE., Vol. 98, ST 11(1972).
- [109] Houbolt, J.C.: The Effectiveness of Various Arrangements of Reinforcement in Concrete Slabs. M.S. Thesis, Univ. of Illinois, Urbana, Illinois, 1942.
- [110] Lin, C.S.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells. Univ. of California, Department of Civil Eng., Report No. UC SESM 73-7, Berkeley, April 1973.
- [111] Dotreppe, J.C., W.C. Schnobrich, D.A. Pecknold: Layered Finite Element Procedure for Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs. IVBH, 33-II(1973), S. 53-68.
- [112] Ractliffe, A.T.: Hybrid Yield-Line Finite Element Analysis. IVBH. 35-II(1975), S. 169-183.
- [113] Grünberg, J.: Berechnung von ebenen Stahlbetonflächentragwerken im gerissenen Zustand mit der Methode der finiten Elemente. Diss., TU Hannover, 1973.
- [114] Bell, J.C.: A Complete Analysis for Reinforced Concrete Slabs and Shells Thesis Ph. D., Univ. of Canterbury, New Zealand, 1970.

- [115] Bell, J.C., D.G. Elms: Partially Cracked Finite Element. Proc. of ASCE., Vol. 97, ST 7(1971).
- [116] Schäfer, H., J. Link : Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetonplatten mit der Finite-Element-Methode. Beton- und Stahlbetonbau, 70(1975), Heft 11, S. 265-273.
- [117] Ernst, M., J. Link: Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Heft Nr. 6, Forschungsberichte der Arbeitsgruppe Massivbau der TH Darmstadt, 1973.
- [118] Klein, D., R. Kristjansson: Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Heft Nr. 15, Forschungsberichte der Arbeitsgruppe Massivbau der TH Darmstadt, 1974.
- [119] Klein, D., R. Kristjansson: Zur Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Heft Nr. 25, Forschungsberichte aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, 1975.
- [120] Wegner, R.: Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit nicht-linearen Materialgesetzen im gerissenen Zustand, Finite-Element-Methode. Bericht Nr. 74-11, Inst. für Statik, TU Braunschweig, 1974.
- [121] Wegner, R., R. Harbold, H. Duddeck: Flach- und Pilzdecken im ungerissenen und im gerissenen Zustand. Der Bauingenieur, 50(1975), S. 19-26.
- [122] Wegner, R., H. Duddeck: Der gerissene Zustand zweiseitig gelagerter Platten unter Einzellasten - Nichtlineare Berechnung mit finiten Elementen - Beton- und Stahlbetonbau, 70(1975), Heft 11, S. 257-262.
- [123] Hayes, B.: Allowing for Membrane Action in the plastic Analysis of rectangular reinforced concrete slabs. Vol. 20, No. Dec. 1968, pp. 205-212. Magazine of Concrete Research, Cement and concrete association.

- [124] Taylor, R.: A note on a possible basis for a new method of ultimate load design of reinforced concrete slabs. Magazine of concrete research, Vol. 17, No. 53, Dec. 1965, pp. 183-186.
- [125] Kemp, K.O.: Yield of a square reinforced concrete slab on simple supports, allowing for membrane forces. The Structural Engineer, Vol. 45, No. 7, 1967, pp. 235-240.
- [126] Metz, Gene Alan: Flexural Failure Tests of Reinforced Concrete Slabs. ACI Journal, Jan. 1965.
- [127] Ebner, F.: Über den Einfluß der Richtungsabweichung der Bewehrung von der Hauptspannungsrichtung auf das Tragverhalten von Stahlbetonplatten. Diss., TH Karlsruhe 1963.
- [128] Pecknold, D.A.: Slab Effective Width for equivalent Frame Analysis. J. of ACI., 1975, Nr. 4, S. 135-137.
- [129] Koepcke, W., G. Denecke: Die mitwirkende Breite der Gurte von Plattenbalken. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 192, 1967.
- [130] Graf, O., H. Deutschmann: Die Versuchsberichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton. Inhaltsübersicht der Hefte 1 bis 230. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 231, 1973.
- [131] Brendel, G.: Die mitwirkende Plattenbreite nach Theorie und Versuch. Beton- und Stahlbetonbau, 1960, Heft 8, S. 177-185.
- [132] Nowak, B.: Behandlung von Flächentragwerken unter dynamischer Belastung mit Berücksichtigung des Werkstoffverhaltens von Stahlbeton. Habil.-Diss., Inst. für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Univ. Bochum, 1975.
- [133] Mader, F.W.: Berechnung orthotroper Platten unter Flächenlasten, Randmomenten und Randedurchbiegungen. Der Stahlbau, 26 (1957).

- [134] Jungwirth, D.: Elektronische Berechnung des in einem Stahlbetonbalken im gerissenen Zustand auftretenden Kräftezustandes unter besonderer Berücksichtigung des Querkraftbereiches. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 211, 1970.
- [135] Stroeven, P.: Some Aspects of the Micromechanics of Concrete. Stevin Laboratory, Technological Univ. of Delft.
- [136] Hopkins, D.C.: Effects of Membrane Action on the Ultimate Strength of Reinforced Concrete Slabs. Ph. D. Thesis, Univ. of Canterbury, New Zealand 1969.
- [137] Park, R.: The Ultimate Strength of Uniformly loaded laterally Restrained Rectangular Two-way Slabs. Ph. D. Thesis, Univ. of Bristol, 1964.
- [138] Park, R.: Tensile Membrane Behavior of uniformly loaded Rectangular Reinforced Concrete Slabs with fully Restrained Edges. Magazine of Concrete Research, Vol. 16, No. 46, March 1964, S. 39-44.
- [139] Winter, G.: The Role of Microcracking in Inelasticity and Fracture of Concrete. Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, Festschrift Rüsck, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1969, S. 47-59.
- [140] Park, A.G., J.C. Scrivener: Prestressed Cylindrical Shells after Cracking. Proc. of ASCE., ST 9(1977), pp. 1757-1770.
- [141] Tong, P.Y., B.V. Batchelor: Compressive Membrane Enhancement in two-way Bridge Slabs. ACI Publication SP-30, S. 271-286.
- [142] Park, R.: Ultimate Strength of Rectangular Concrete Slabs under short Term Uniform Loading with Edges restrained against lateral Movement. Proc. of ICE., Vol. 28, Juni 1964, S. 125-150.
- [143] Brotchie, J.F., M.J. Holley: Membrane Action in Slabs. ACI Publication SP-30, S. 345-377.

- [144] Brotchie, J.F.: A refined Theory for reinforced concrete slabs. J.Inst. of Eng. Australia, Vol. 35(1963).
- [145] Brotchie, J.F., A. Jacobson, S. Okubo: Effect of Membrane Action on Slab Behavior. Research Rept., R65-25, Department of Civil Eng. MIT. 1965.
- [146] Jacobson, A.: Membrane Flexural Failure Modes of Restrained Slabs. Proc. of ASCE., Vol. 93, ST 5, Oct. 1967, S. 85-112.
- [147] Liebenberg, A.C.: Arch Action in Concrete Slabs. Research Rept., No. 234, Council for Scientific and Industrial Research, National Building Research Institute, Pretoria, S.A. 1966.
- [148] Dörr, K., K. Hoshino, G. Mehlhorn: Berechnung von Stahlbetonscheiben im Zustand II. TH Darmstadt, Forschungsbericht Nr. 16(1974).
- [149] Zienkiewicz, O.C.: Stress Analysis of Rock as a "No Tension" Material. Geotechnique 18(1968), S. 56-66.
- [150] Swoboda, G.: Finite-Element-Ansätze zur Berechnung gerissener Verbundwerkstoffe. Diss., Univ. Innsbruck, 1974.
- [151] Dilger, W., R. Walther, F. Leonhardt: Versuche zur Momentenumlagerung an durchlaufenden Platten. Beton- und Stahlbetonbau, 63(1968), S. 110-114.
- [152] Riehle, W.: Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente. Bericht Nr. 74-4, Inst. für Baustatik, Univ. Stuttgart, 1974.
- [153] Swartz, S.E., V.H. Rosenbraugh: Buckling of Reinforced Concrete Plates. Proc. of ASCE., 100(1974), ST 1, S. 195-208.
- [154] Palotás, L.: Stahlbetonplattenversuche und die Bruchtheorie. Zement und Beton, Nr. 22, Sept. 1961, S. 1-16.

- [155] Palotás, L.: Versuche mit Stahlbetonplatten und Pilzdecken und ihre Auswertung auf Grund der Bruchtheorie. Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen, Cottbus 5, 1962, S. 235-253.
- [156] Dilger, W.: Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. DAFStb., H. 179(1966), Ernst und Sohn, Berlin.
- [157] Marti, P., B. Thürlimann: Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1(1977), S. 7-12.
- [158] Sawczuk, A., L. Winnicki: Plastic Behavior of Simply Supported Reinforced Concrete Plates at moderately large Deflexions. Int. J. of Solids and Structures, Vol. 1, 1965, pp. 97-111.
- [159] Kemp, K.O.: Yield of a Square Reinforced Concrete Slab on Simple Supports, allowing for Membrane Forces. The Structural Engineer, Vol. 45, No. 7, 1967, pp. 235-240.
- [160] Scordelis, A.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. Proc. of the Specialty Conference on Finite Element Methode in Civil Engineering, Montral, Canada June 1972.
- [161] Chen, A.C.T., W.F. Chen: Constitutive Relations for Concrete Proc. of ASCE., Vol. 101, EM4, Aug. 1975, S. 465-481.
- [162] Hassan, K.: Beitrag zur Berechnung von orthotropen Platten mit veränderlichen Steifigkeiten. Diss., TH Stuttgart, 1960.
- [163] Vogel, U.: Der Biege- und Membranspannungszustand der rechteckigen orthotropen Platte mit großer Durchbiegung unter gleichmäßig verteilter Vollast bei Navierschen Randbedingungen, näherungsweise behandelt mit Hilfe der Energie-Methode. Diss., TH Stuttgart, 1961.

- [164] Pelz, J.: Über die Berechnung orthogonal anisotroper Platten mit exzentrisch angeordneten Rippen mit Hilfe der Singularitätsmethode. Diss., TH Wien, Inst. für Stahlbau, 1971.
- [165] Wöhrle, E.: Die Berechnung der frei aufliegenden orthotropen Rechteckplatte unter Querlast und konstanter Längskraft als Kontinuum nach der linearisierten Theorie II. Ordnung. Diss., TH Stuttgart, 1965.

BEZEICHNUNGEN UND SYMBOLE

Koordinaten

- (x, y, z) : Globales Koordinatensystem
(I, II, z) : Rißkoordinatensystem
(n, s, z)_i : Koordinaten für Querschnittselement i
 φ_0 : Rißrichtung
 φ_i : Winkel zwischen x-Achse und n_i-Achse

Materialkennwerte

- E : Elastizitätsmodul
ν : Querdehnungszahl
G : Schubmodul
E_b : Elastizitätsmodul von Beton
ν_b : Querdehnungszahl von Beton
E_s : Elastizitätsmodul von Stahl
λ_{ij} : Spannzahlen
μ_{ij} : Verformungszahlen
β_p : Prismendruckfestigkeit von Beton
β_z : Betonzugfestigkeit
β_{bz} : Betonbiegezugfestigkeit
σ_f : Fließspannung von Stahl

Verschiebungen

- u, v : Membranverschiebungen in x- und y-Richtung
w : Plattenausbiegung in z-Richtung

Lastparameter

- P : Gesamtlast
q : Flächenlast

Funktionen

- $F(x,y)$: Spannungsfunktion
 $f(x,y)$: Verschiebungsfunktion
 $w(x,y)$: Biegefläche
 $W(x,y)$: Momentenfunktion

Symbole

- \odot : Aus Bildebene heraus
 \otimes : In Bildebene hinein
 B_{iso} :
 B_I : Querschnittselemente
 B_{II} :
 B_O :
① bis ⑥ : Ribzustände

Sonstiges

- α_i : Ansatzparameter
 Δ : Elementfläche
 $^s \pi$: Funktionalausdruck für das Gesamtsystem
 $^e \pi$: Funktionalausdruck für den Elementbereich
 e_i : Exzentrizität von der Bezugsfläche
 h : Dicke der Stahlbetonplatte
 f_{ni} :
 f_{si} :
] Bewehrungsflächen
 ϑ_i : Seitenwinkel ($i = 4,5,6$)
 a_i : Seitenlänge ($i = 4,5,6$)

Matrizen

- $[Z_{ns}]_i$: Schnittkräfte im Bewehrungsnetz i
- $[E_{ns}]_i$: Stoffgesetz für das Bewehrungsnetz i
- $[\epsilon_{ns}]_i$: Verzerrungen im Bewehrungsnetz i
- N_{xy} : Scheibenkräfte im (x,y)-System
- E_{xy} : Scheibenverzerrungen im (x,y)-System
- N_{ns} : Scheibenkräfte im (n,s)-System
- E_{ns} : Scheibenverzerrungen im (n,s)-System
- $[T_\sigma]_\varphi$: Transformationsmatrix für Schnittkräfte
- $[T_\epsilon]_\varphi$: Transformationsmatrix für Verzerrungen
- $-\Phi_{xy}$: Plattenkrümmungen im (x,y)-System
- M_{xy} : Momente im (x,y)-System
- $-\Phi_{ns}$: Plattenkrümmungen im (n,s)-System
- M_{ns} : Momente im (n,s)-System
- M_t : Drillmomente an den Elementkanten
- E_{mm} : $\left. \begin{array}{l} : \\ E_{mb} : \\ E_{bm} : \\ E_{bb} : \end{array} \right\} \text{Stoffsteifigkeitsmatrizen}$
- e_i : $\left. \begin{array}{l} : \\ e_b : \end{array} \right\} \text{Exzentrizitätsmatrizen}$

D_{mm}	:] Stoffmatrizen im gemischten Stoffgesetz
D_{mb}	:	
D_{bm}	:	
D_{bb}	:	
D_F	:] Operatormatrizen
D_{uv}	:	
D_w	:	
u^e	:] Freiheitsgrade des gemischten finiten Modells fürs (x,y)-System
v^e	:	
M_n^e	:	
w^e	:	
S	:	
C	:] Transformationsmatrizen für Momente
Q°	:	Querbelastung
P°	:	Membranbelastung
M_{12}	:	Momente im Rißkoordinatensystem
N_{12}	:	Membrankräfte im Rißkoordinatensystem
$\bar{\Phi}_{12}$:	Krümmungen im Rißkoordinatensystem
E_{12}	:	Membranverzerrungen im Rißkoordinatensystem
N_{12}°	:] Anfangsspannungen
M_{12}°	:	
$[T]$:	Transformationsmatrix für diskretisierte Knotenparameter
u_{12}^e	:] Membranverschiebungen im Rißkoordinatensystem
v_{12}^e	:	

- P_{12}° : Membranbelastung im (I,II)-System
- $[Z_{ns}]_i^{\circ}$: Fließspannungen im Bewehrungsnetz i
- B : Verknüpfungsmatrix zwischen Scheibenknotenverschiebungen und -verzerrungen
- O : Nullmatrix
- W_n° : Vorgeschriebene Kantenneigungen
- V_n° : Ersatzquerkräfte
- K_{mm} : Membransteifigkeitsmatrix

Weitere Bezeichnungen sind im Text erklärt.

1. ALLGEMEINES

1.1 Einführung

Bei Massivbauten werden die Schnittgrößen nach der klassischen linearen Elastostatik berechnet, die einen homogenen Zustand voraussetzt; die Querschnittsbemessung erfolgt hingegen bei Vernachlässigung der Betonfläche im Zugbereich. Der Beton hat gegenüber der Druckfestigkeit eine verhältnismäßig geringe Zugfestigkeit, und meistens befinden sich Stahlbetontragwerke schon unter Gebrauchslast im gerissenen Zustand (Zustand II). Mikroskopisch gesehen setzt das Abreißen von Betonfasern in der Zugzone aufgespeicherte Zugspannungen frei, was einen großen Kraftsprung zur Folge hat.

Wegen der reduzierten Querschnittsflächen verändert sich die Steifigkeitsverteilung bereichsweise. Die Schnittkräfte lagern sich je nach dem tatsächlich vorhandenen Steifigkeitsverhältnis um. Nach der Umlagerung der Schnittkräfte weicht der wirkliche Beanspruchungszustand von der elastizitätstheoretischen Lösung für den homogenen Zustand mehr oder weniger ab.

Dabei erkennt man die anpassungsfähige Tragwirkung statisch unbestimmter Stahlbetonkonstruktionen. Sie können die Schnittkräfte von stark beanspruchten Querschnitten in weniger beanspruchte verlagern und besitzen daher große Tragreserven bis zum Bruch..

Um diese Tragreserven günstig auszunutzen und damit zu einer Verringerung des Materialaufwandes zu kommen, sowie um die Gebrauchs- und Tragsicherheit richtig beurteilen zu können, besitzt die wirklichkeitsnahe Berechnung des Tragwerkes im nichthomogenen Zustand für die Praxis entscheidende Bedeutung.

Da das Verbundsystem im Zustand II nicht nur von Querschnitt zu Querschnitt unterschiedliche Werkstoffeigenschaften, sondern auch von dem jeweiligen Lastniveau abhängig nichtlineare Stoffgesetze hat, erfordert es einen sehr großen Rechenaufwand, die Zustandsgrößen des gerissenen Tragsystems zu erfassen.

Mit herkömmlichen Rechenmitteln war die Bearbeitung des Problems praktisch kaum durchführbar. In den letzten Jahren haben jedoch die großen Fortschritte der Entwicklung von elektronischen Großrechenanlagen zusammen mit numerischen Rechenverfahren eine weiterführende Untersuchung bis zum Eintritt des Systemversagens ermöglicht. Die Behandlung des nichtlinearen Tragverhaltens mit Hilfe computerunterstützter Berechnungsmethoden bereitet durch schrittweise lineares Vorgehen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Dabei bedient man sich heute fast ausschließlich der Methode der finiten Elemente, die örtlich unterschiedliche Querschnittszustände durch eine Beschränkung auf diskrete Bereiche gleicher Eigenschaften berücksichtigen kann.

Im Mittelpunkt der Forschung auf diesem Sektor stehen insbesondere die in der Praxis in starkem Maße verwendeten biegebeanspruchten Stahlbetonflächentragwerke, die hochgradig statisch unbestimmte Systeme darstellen.

1.2 Nichtlineare Rechnung ebener Flächentragwerke aus Stahlbeton

Es wird eine Übersicht über den Stand der bisherigen Arbeiten gegeben, die sich mit der nichtlinearen Rechnung ebener Flächentragwerke aus Stahlbeton befassen. Wenn nichts anderes vermerkt ist, wird zur Rechnung die Methode der finiten Elemente herangezogen.

Die sukzessive Rißbildung ist wohl der wichtigste Einfluß auf das nichtlineare Tragverhalten, und bei jeder wirklichkeitsnahen Rechnung wird besonders großer Wert darauf gelegt, wie die Risse im Tragsystem im Rechengang dargestellt werden. Denn die Art der Rißdarstellung beeinträchtigt unmittelbar die Qualität und Güte der Rechenergebnisse.

Stahlbetonbalken

Stahlbetonträger werden bei der zweidimensionalen Betrachtung als Scheiben berechnet. Das Materialverhalten von Beton und Stahl kann dabei mit ausreichender Genauigkeit berücksichtigt werden. An Balken und Wänden wurden verhältnismäßig zahlreiche Versuchsreihen durchgeführt, die zur Untermauerung numerischer Untersuchungen herangezogen wurden. Aus der Mehrzahl der bisher entwickelten Vorgehensweisen werden einige exemplarische Methoden kurz vorgestellt.

D.NGO/A.C.SCORDELIS [32, 33] und A.H.NILSON [34, 35] gehen davon aus, daß man das Aufklaffen eines Betonrisses am besten in der Weise beschreiben kann, daß die Knotenverbindungen der Nachbarelemente am Rißufer gelöst werden. Die Rißbildung wird nur an den Elementgrenzen erlaubt, die Netzstruktur der Elementaufteilung verändert sich mit der Rißentwicklung (Bild 1.1). Diese Rißbeschreibung simuliert am besten das diskontinuierliche Verschiebungs- und Spannungsfeld, aber die so hergestellte Rißfigur ist allerdings auch von dem Elementmaschennetz abhängig. Damit wird eine sehr feine Diskretisierung erforderlich.

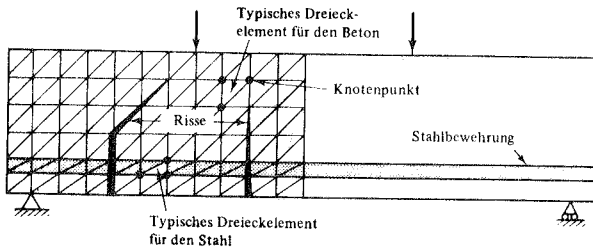
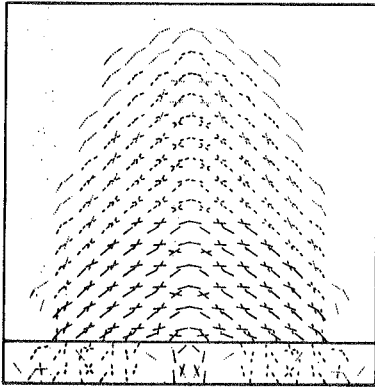


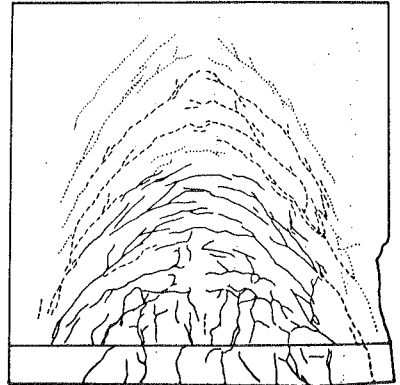
Bild 1.1 Rißdarstellung in [32]

Werden die Risse innerhalb der Elementbereiche zugelassen, ergibt sich so ein Rißbild wie in Bild 1.2. dargestellt. Derartige Risse werden durch von Element zu Element veränderliche Stoffgesetze beschrieben.

Für die Entwicklung der rechnerischen Materialmodelle stehen verschiedene empirische Näherungsformeln zur Verfügung.



Theoretisch



Im Versuch

Bild 1.2 Rißdarstellung mit veränderlichen Stoffgesetzen aus [36]

Einzelne Stahleinlagen im Mehrstoffsystem können mit stab- [88, 36, 37] und flächenförmigen [29, 33, 34] Bewehrungselementen idealisiert werden. Falls die Scheibe eine flächig verteilte Bewehrung hat, benützt man zweckmäßig das von P. EBBINGHAUS [29] entwickelte Stahlflächenelement, das hinter den Betonelementen deckungsgleich angeordnet wird.

Zur Berücksichtigung des Verbundverhaltens zwischen Beton und Bewehrung können Federelemente mit aus Versuchen abgeleiteten Verbundgesetzen [33, 34, 37] eingeführt werden, so daß Relativverschiebungen zwischen Beton- und Stahlelementen möglich werden. Der vollkommene Verbund ist damit gleichbedeutend, daß die Beton- und die Bewehrungselemente mit denselben Knoten versehen werden und sich in den Knoten gleich verschieben können.

Es liegen viele numerische Untersuchungen für Stahlbetonbalken vor, die nur zum Teil im Literaturverzeichnis aufgenommen werden konnten, z.B. [29, 30] [32 bis 39] [61, 88, 148]. In ihren Berechnungsabläufen unterscheiden sie sich nur unwesentlich.

Stahlbetonplatten

Im Gegensatz zur Berechnung von Stahlbetonscheiben, für die sowohl im Zustand I und II stets eine zweidimensionale Scheibenrechnung genügt, bereitet die wirklichkeitsnahe Erfassung des Rißzustandes von gerissenen Stahlbetonplatten Schwierigkeiten.

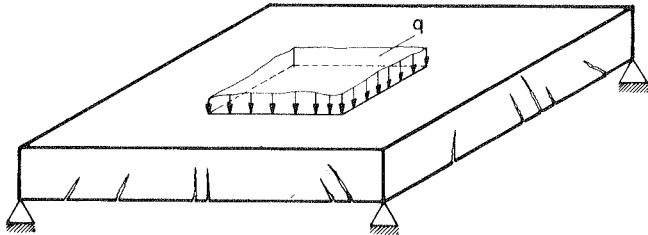


Bild 1.3 Gerissene Stahlbetonplatte, Zustand II

Wie man in Bild 1.3 sieht, handelt es sich um einen dreidimensional veränderlichen Systemzustand. Da eine räumliche Rechnung stets einen großen Rechenaufwand erfordert und nur bei Dämmen und Kernreaktorbehältern, also dicken und voluminösen Körpern gerechtfertigt ist, bietet die Literatur je nachdem, wie man die räumliche Plattenaufgabe auf eine ebene Aufgabe reduziert, andere Lösungswege an. Dies sind:

Schichtenmodell (Layered Element) (Bild 1.4)

A. SCANLON [95], W.S. PETERSON/C.N. KOSTEM/J.M. KULICKI [101],
F.R. HAND/D.A. PECKNOLD/W.C. SCHNOBRICH [102, 103, 111],
C.S. LIN [110], J. GRÜNBERG [113], Darmstädter Arbeitsgruppe
[5, 116 bis 119].

Nichtlineare Momenten-Krümmungs-Beziehungen

R. WEGNER [120 bis 122], J.C. JOFRIET/G.M. McNEICE [106],
J.C. BELL [31, 107, 114, 115], B. NOWAK [132].

System mit veränderlicher Gliederung

F.FUJII [79], G.M.MCNEICE/K.O.KEMP [104],
J.BÄCKLUND [105].

Andere Vorgehensweisen

K.HALLAJE [78], St.BERG [100].

Schichtenmodell (Bild 1.4)

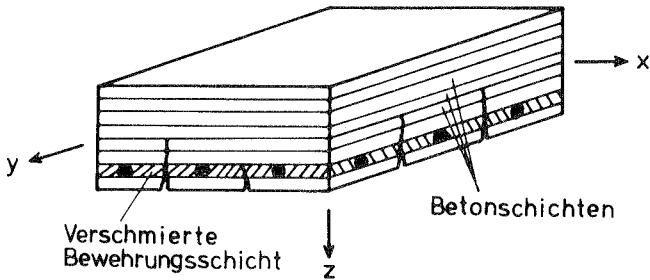


Bild 1.4 Geschichtetes Modell zur Risddarstellung

Hierbei wird das finite Element zur Risdschreibung über die Plattendicke in mehrere übereinander liegende Schichten diskretisiert. Die in den Plattenquerschnitt hineinreichenden Risse können durch Zerlegen der Plattendicke schichtenweise gut erfaßt werden. In jeder Schicht wird ein Scheibenzustand vorausgesetzt. Die Werkstoffkennwerte in jeder Schicht werden vom Risdzustand abhängig verändert. Das nichtlineare Materialverhalten des Gesamtelementes wird dann mit der Integration der aus den einzelnen Schichten resultierenden Spannungen zu den Biegemomenten und Normalkräften ermittelt. Eine Bezugsfläche ist dabei frei wählbar.

Das geschichtete Modell findet besonders bei Schalen einen erfolgreichen Einsatz. In Schalen, die gleichzeitig durch Momente und Normalkräfte beansprucht werden, ändern sich die Hauptspannungsrichtungen über die Schalendicke deutlich. Die schichtenweise ver-

änderlichen Rißrichtungen können ohne weiteres berücksichtigt werden. Mit einem geschichteten Schalenelement kann der gekoppelte Platten- und Scheibenzustand formuliert werden.

Dieses Verfahren ist aber für praktische Anwendungen viel zu aufwendig, denn die Diskretisierung erfolgt nicht nur in der Plattenebene, sondern auch über die Plattendicke.

F.R.HAND/D.A.PECKNOLD/W.C.SCHNOBRICH [102] legen dar, daß die Kopplung des Biege- und Membranzustandes in gerissenen Stahlbetonplatten nicht vernachlässigt werden darf. Zur Kontrolle der Rißbildung wird die Mittelfläche jeder Schicht betrachtet, deren Verzerungen durch die integrierten Durchschnittswerte der Krümmungen und Dehnungen der Plattenmittelfläche ausgedrückt werden.

J.GRÜNBERG stellt in [113] fest, daß sich im gerissenen Zustand die mitwirkende Plattenbreite der Gurtplatten von Plattenbalken schon unter Gebrauchslast verringert. Es werden drei verschiedene Brucharten des Betons behandelt. Er merkt an, welche Verschiebungsansätze und welche Struktur des Elementnetzes zur wirklichkeitsnahen Erfassung des Rißbildes brauchbar sind.

Die Darmstädter Forschungsgruppe [116 bis 119] führte umfangreiche Versuche durch, um die Materialkennwerte im gerissenen Zustand zu erforschen. Parallel dazu wurden EDV-Programme für Scheiben- und Plattenprobleme entwickelt, wobei ein dreieckiges Schalenmodell mit 33 Freiheitsgraden eingesetzt wurde.

Nichtlineare Momenten-Krümmungs-Beziehungen

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung ist ein bereits über die Plattendicke integriertes Stoffgesetz für den Plattenquerschnitt und kann durch äquivalente Versuche experimentell ermittelt werden. Versuchswerte werden mit analytischen Kurven interpoliert. Zur Beschreibung der Momenten-Krümmungs-Zusammenhänge wird in diesem Lösungsweg einer der bisher vorgeschlagenen mathematischen Näherungsansätze der materiell nichtlinearen Rechnung zugrunde gelegt. Der

Vorteil dieser Methode besteht darin, daß schwierig zu erfassende Parameter (z.B. Verbundverhalten) schon im Ansatz eingerechnet sind. Der Rechenvorgang ist wie bei der Scheibenrechnung und leicht zu programmieren. Die zur Plattenmittelfläche unsymmetrische Steifigkeitsverteilung kann durch einen solchen Ansatz nicht dargestellt werden. Die Kopplung des Membranzustandes mit dem Biegezustand ist auf diese Weise nicht zu repräsentieren. In den meisten Aufsätzen wird deshalb eine reine Plattenrechnung getrennt vom Scheibenzustand mit Plattenelementen durchgeführt.

R. WEGNER befaßt sich in seinen Veröffentlichungen [120,121,122] vor allem mit dem Momentenverlauf in gerissenen Stahlbetonplatten, während seine Vorgänger sich nur damit begnügten, den Verformungszustand zu untersuchen. Er weist darauf hin, daß in durch Einzellasten belasteten bzw. wie Flachdecken punktgestützten Stahlbetonplatten die Momentenspitzen bei Berücksichtigung der Ribbildung maximal um 25% kleiner werden als die nach der Elastizitätslösung. Für Gurt- und Feldstreifen von Flachdecken macht er einen Bemessungsvorschlag zur Verteilung der Momente. Zur Berechnung wird ein gemischtes Viereckelement mit bilinearen Ansatzfunktionen [6] verwendet. Der Versatz zwischen der rechnerischen Plattenmittelfläche und dehnungslosen Mittelachsen der jeweiligen gerissenen Querschnitte wird vernachlässigt.

System mit veränderlicher Gliederung

Diese Beschreibungsmethode des Systemzustandes ist eine Erweiterung der Idee von D.NGO [32, 33] und A.H.NILSON [34, 35] für Scheiben auf Platten. Es wird angestrebt, das Systemverhalten in einer makroskopischen Betrachtungsweise bis zum Bruch zu verfolgen. Der Plattenquerschnitt wird als ideal elastisch — ideal plastisch vorausgesetzt. Die Scharen von Rissen werden zu groben Bruchlinien zusammengefaßt, die sich entlang der Elementkanten [79, 105] oder in den Knotenpunkten [104] einstellen. Der Einbau der Bruchlinien erfolgt durch die Einführung neuer zusätzlicher Unbekannte in das Gleichungssystem. Das bedeutet, daß sich das Gleichungssystem immer weiter vergrößert, wenn man ein immer weicher werdendes Tragsystem nach dem

Verschiebungsgrößenverfahren [79, 104] berechnet. In der gemischten Methode [105] werden die erreichten Bruchmomente als bekannte Parameter eingearbeitet. Die Anzahl der unbekannt Parameter wird also geringer. Die Rechnung wird so lange fortgeführt, bis ein kinematisches Kettensystem erreicht wird. Die Bildung eines Bruchmechanismus macht sich bemerkbar, wenn entweder das Gleichungssystem singulär wird oder die errechneten Verschiebungen über alle Maßen groß (quasi-singulär) werden.

Andere Vorgehensweisen

K.HALLAJE [78] untersucht mit Hilfe der Übertragungsmatrizenmethode Einflüsse der Rißbildung auf den Spannungszustand in Platten. S.BERG [100] berücksichtigt nicht nur veränderliche Materialeigenschaften in den Integrationspunkten, sondern auch endliche Durchbiegungen.

Zur numerischen Traglastuntersuchung von Platten gehören nachstehende Arbeiten.

Die Methode der linearen Programmierung bei Anwendung der finiten Elemente wird von H.KNÖPFEL [75] verfolgt, um die Tragfähigkeit starr-plastischer Platten unter Beachtung der Plastizitätsbedingungen aus der Extremalbedingung zu bestimmen.

Eine Lösung der Aufgabe des kerntechnischen Ingenieurbaus, die Tragfähigkeit kurzfristig dynamisch beanspruchter Stahlbetonplatten über den Zustand I hinaus nachzuweisen, erstellt F.STANGENBERG [96], wobei die Bewegungsgleichungen über finite Differenzen numerisch integriert werden.

Stahlbetonschalen

Die numerische Behandlung gerissener Stahlbetonschalen findet man größtenteils in nichtdeutscher Literatur. Die Spezialliteratur zu der Thematik ist gering [78, 80, 83, 84, 102, 110, 114, 140]. Die Zylinderschale aus [81] wird auch von [110, 114] behandelt. Die in [110] berechnete HP-Schale verhält sich fast linear bis zum spröden Bruch. In der Schale tritt dank der Druckmembranwirkung keine spür-

bar große Kraftumlagerung auf. Die Einflüsse der Rißbildung bleiben örtlich.

In [102, 110, 114] wird die Folgerung gezogen, daß zur Stabilitätsuntersuchung von Stahlbetonschalen außer der Rißbildung auch noch große Verformungen berücksichtigt werden müssen. die Forschung auf diesem Gebiet ist noch verstärkt fortzusetzen.

1.3 Membranwirkung in Stahlbetonplatten

Im Unterschied zu Stahlplatten sind bei Stahlbetonplatten zwei Membranzustände möglich. Ein Druckgewölbe stellt sich bei bestimmten Bedingungen schon unter Gebrauchslast ein. Bei großen Durchbiegungen ist eine Zugmembranwirkung zu erwarten. Eine Stahlbetonplatte kann wegen unterschiedlicher Querschnittsteifigkeiten schon im ungerissenen Zustand ein orthotropes System sein und Membranspannungen aufweisen. Bei Rißausbildung werden die Nulllinien weiter versetzt, wobei die Verzerrungen der Plattenmittelfläche vergrößert werden. Die Materialeigenschaften sind über die Plattendicke nicht symmetrisch.

Bild 1.5 zeigt gerissene Plattenquerschnitte und veranschaulicht eine Analogie zur konstruktiv orthotropen Platte mit exzentrischen Rippen. Die Analogie besteht darin, daß die Schwerlinien der Querschnitte nicht mehr miteinander zusammenfallen, so daß sich für beide Richtungen der Plattensysteme keine neutrale Ebene mehr findet. Das veränderte Steifigkeitsverhältnis (orthotrop) und die Verlagerung der Nulllinien (exzentrisch versteift) bewirken so ein statisch ähnliches Tragverhalten der beiden dargestellten Plattensysteme.

Um den Spannungszustand genau zu erfassen, muß bei gerissenen Stahlbetonplatten, ob sie membrangelagert sind oder nicht, der Biegung noch der Normalkraftanteil überlagert werden. Die Darmstädter Arbeitsgruppe zeigt in [116] am Beispiel einer Rechteckplatte, die allseitig einfach aufliegt, wie sich zunächst eine Druckgewölbewirkung aufbaut und wie diese bei weiterer Belastung wieder abgebaut wird, um schließlich in eine Zugmembranwirkung überzugehen. Hier ist zu betonen, daß im gerissenen Zustand immer eine gewisse Membranwirkung erzeugt wird, auch wenn die Platte nicht membrangelagert ist.

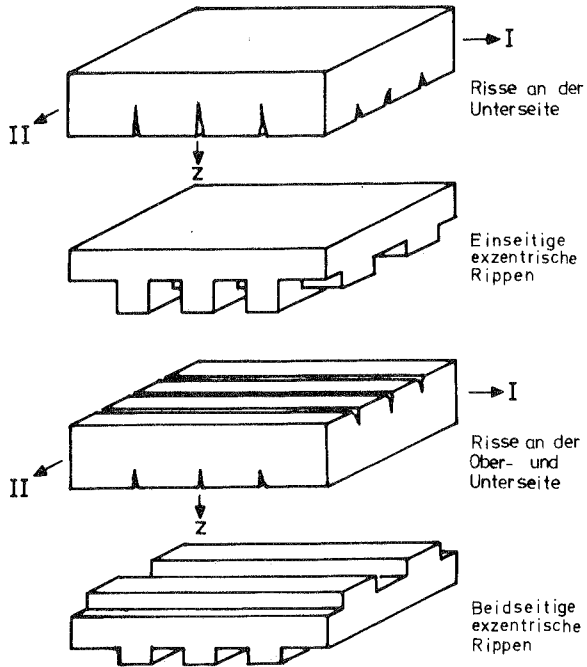


Bild 1.5 Analogie zwischen gerissenen Stahlbetonplatten und konstruktiv orthotropen Platten

Für die Praxis nutzbar große Gewölbekräfte bilden sich im Gebrauchszustand dann aus, wenn am Plattenrand die Horizontalverschiebungen der Endquerschnitte durch umgebende Nachbarelemente bzw. elastische Widerlager behindert werden (s. Bild 1.6). Daß die Längsdruckkräfte Tragreserven dadurch beachtlich erhöhen, daß sie Risse überdrücken und Lasten wie flache Bögen tragen, war schon immer in der Baupraxis bekannt.

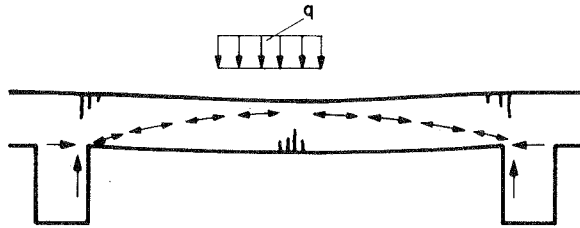


Bild 1.6 Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten

A.J.OCKLESTON [97] führt in Versuchsserien gemessene unerwartet höhere Bruchlasten auf das Entstehen der Bogenwirkung zurück und schlägt zur Abschätzung der von den Druckkräften getragenen Querkraft eine Faustformel vor. K.P.CHRISTIANSEN [98] leitet verfeinerte Formeln für einachsige gespannte Stahlbetonplatten her.

J.SCHLAICH [99] stellt sich die Aufgabe, das sich in Platten-Balken-Systemen ausbildende Druckgewölbe theoretisch und experimentell aufzuklären. Die Berechnung wird unter Zugrundelegung einer Modellvorstellung mit Hilfe der Energiemethode durchgeführt. Es wird nur der linearisierte Zustand des Ersatzsystems untersucht, nicht aber der Weg, auf dem dieses mit steigender Belastung erreicht wird. Sein Versuch wird später in Kapitel 7 nachgerechnet.

Der Übergang vom Druck- zum Zugmembranzustand ist recht interessant. Bild 1.7 wird aus [138] entnommen und zeigt das Last-Ver-schiebungsverhalten einer Rechteckplatte unter Gleichflächenlast mit eingespannter und unverschieblicher Lagerung. Die Platte weist kurz nach der Rißlast einen Druckmembranzustand auf. Bei Überlagerung mit Druckspannungsverläufen aus der Gewölbewirkung findet in diesem Zustand ziemlich schnell eine Stabilisierung der Rißbildung statt und der Systemzustand bleibt fast unverändert. Für jede kleine Laststeigerung sind die linear zusammenhängenden Zuwächse der

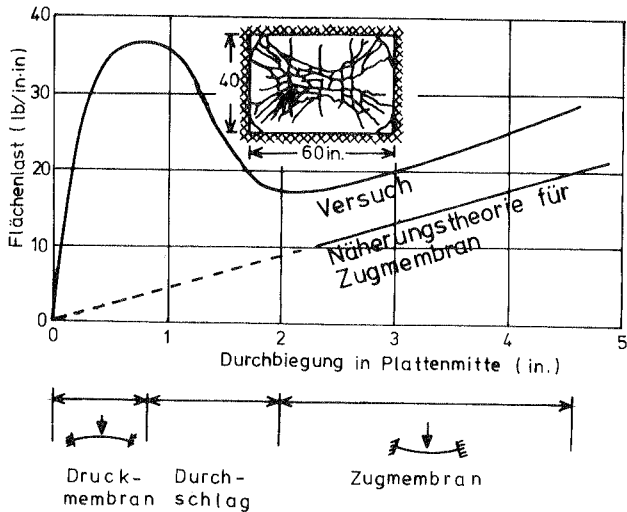


Bild 1.7 Übergang vom Druck- zum Zugmembranzustand (aus [138])

Zustandsgrößen zu erkennen. Bei weiterer Belastung klaffen die Rißquerschnitte auf. Im Mittelbereich der Platte reichen die Risse tief in die Druckzone hinein. Die wirksame Betonfläche im Querschnitt geht also langsam verloren, und die Biegetragfähigkeit wird ebenfalls erschöpft. Die gemessene höchste Traglast ist in der Tat viel größer als die nach der Bruchlinientheorie berechnete Lösung. In diesem Zustand herrscht schon in Plattenmitte ein Zugmembranzustand. Dieser Zugmembranzustand dehnt sich mit einer plötzlichen Systemveränderung aus. Die Platte schlägt durch.

Nach dem großen Zuwachs der Durchsenkungen kann wieder eine Tragreservensteigerung beobachtet werden. Die Stahlstäbe wirken hierbei als Seilnetze. Zur Bestimmung der wirklichen Traglast muß grundsätzlich die Theorie II. Ordnung angewendet werden. In der Literatur sind zur Untersuchung des Zugmembranzustandes verschie-

dene Wege begehbar [72, 112, 123, 124, 138, 142, 158, 159].

Mit der vereinfachenden Annahme, daß die Querlasten lediglich über plastische Zugmembrannetze abgetragen werden, löst R.PARK [138] die Differentialgleichung für plastische Membrane.

R.TAYLOR [124] versucht, der Bemessung charakteristische Last-Verformungskurven und die vorgeschriebene Begrenzung der Durchbiegungen zugrunde zu legen, um die erhöhte Tragfähigkeit auszunutzen.

A.SAWCZUK [72, 158] untersucht das Tragverhalten starrplastischer Platten im Geschwindigkeitsfeld. Für Rechteckplatten entwickelt B.HAYES in [123] eine praktisch anwendbare Gleichgewichtsmethode, die es erlaubt, den Zugmembranzustand im kinematischen Ketten-system zu beschreiben. Vergleiche mit den anderen Lösungen nach A.SAWCZUK [158] und K.O.KEMP [159] sowie Versuchsergebnisse zeigen gute Übereinstimmung.

1.4 Aufgabenstellung

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, mit der Methode der finiten Elemente eine Variante der Lösungsmöglichkeit zur Untersuchung von Stahlbetonplatten im gerissenen Zustand zu entwickeln. Unter der Voraussetzung, daß das nichtlineare Tragverhalten von Mehrstoffsystemen auf die makrostrukturelle Veränderung des Tragsystems infolge Ribentwicklung und plastischer Effekteder Stahleinlagen zurückgeführt werden darf, sind die nichtkonstanten Materialkennwerte für das Systemverhalten von untergeordneter, ja verschwindender Bedeutung. Es wird damit ein linear elastisches Plattensystem mit veränderlichen Gliederungen wiederholt berechnet.

Im Mittelpunkt der Rechnung steht hier der Druckmembranzustand unterhalb der Gebrauchslast, dessen Ausnutzung für die Praxis sinnvoll ist.

Kapitel 2 befaßt sich mit dem Materialverhalten von Beton und Stahl. In Kapitel 3 werden kurze Wiederholungen aus der üblichen Scheiben- und Plattenstatik gebracht. In den letzten zwei Abschnitten des Kapitels wird eine verallgemeinerte lineare Theorie zum gekoppelten Scheiben--und-Platten-Zustand dargestellt. Kapitel 4 weist darauf hin, daß im Zusammenhang mit der Rißdarstellung und der Plastizitätskontrolle eine für das Problem geeignete Elementwahl getroffen werden muß. Das gemischte Schalenmodell mit 12 Freiheitsparametern nach HERRMANN erweist sich dabei als vorteilhaft. Die Grundmatrizengleichungen dieses Modells werden angegeben. Die Voraussetzungen und Näherungen der zu entwickelnden Berechnungsmethode sind in Kapitel 5 zusammengestellt. In Kapitel 6 werden zuerst die konstitutiven Gleichungen für den Rißquerschnitt hergeleitet und die nichtlineare Rechentechnik erläutert. Die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Berechnungsmethode wird in Kapitel 7 an numerischen Beispielen gezeigt. Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung in Kapitel 8.

2. MATERIALVERHALTEN VON BETON UND STAHL

2.1 Beton

Bei einem elastoplastischen Werkstoff sind folgende Gruppen der Materialgleichungen zu unterscheiden: Stoffgesetze unterhalb der elastischen Grenze, Fließbedingungen und Verfestigungshypothesen nach dem Fließen. Die Werkstoffgesetze für elastisches Materialverhalten, - sei es linear oder nichtlinear elastisch -, beschreiben, wie die Spannungen und Dehnungen zusammenhängen, soweit kein Fließen eintritt. Aus dem Bedürfnis, das Materialverhalten über die elastische Grenze hinaus zu erfassen, entstand die Plastizitätstheorie, zu der die Hypothesen für das Auftreten plastischer Verzerrungen und für den Verfestigungsbereich gehören. Im Gegensatz zu zähen Metallen handelt es sich beim spröden Werkstoff Beton um die Bruchhypothesen und die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen unterhalb der Bruchfestigkeit, da es im Sinne der zähen Metalle keine Fließgrenze für Beton gibt. Veröffentlichungen berichten in der Mehrzahl über die Festigkeitslehre des Betons und im beschränkten Umfang über die Verformungslehre [13, 14, 15, 16, 157].

Das nichtlineare Materialverhalten von Beton erklärt sich aus zwei verschiedenartigen Rißbildungen: Mikro- und Makrorißbildung.

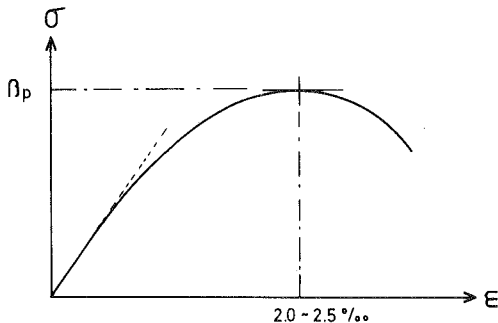


Bild 2.1a Einachsige σ - ϵ -Kurve für Beton

Mikrorisse [135, 139], deren Dimensionen von gleicher Größenordnung wie die der Zuschlagskörner sind, können infolge von Volumenänderung während des Abbindens und Erhärtens bereits im unbelasteten Zustand vorhanden sein. Der Haftverbund zwischen Zuschlagskörnern und Zementmörtel ist dann durch diese ursprünglichen Mikrorisse teilweise aufgehoben. Die Mikrorißbildung, die das Tragverhalten von Beton im Druckbereich im wesentlichen bestimmt, wird anhand einer charakteristischen einachsigen Spannungs-Dehnungslinie (Bild 2.1a) erläutert. Bis etwa ein Drittel der Druckfestigkeit β_p ist keine wahrnehmbare Veränderung im Mikrobereich zu beobachten. Der Beton verhält sich also isotrop, homogen und linear elastisch. Die Spannung und Dehnung nehmen fast proportional zu. Bei weiterer Beanspruchungssteigerung wachsen die Mikrorisse in ihrer Länge, Breite und Anzahl an. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve weicht allmählich vom linearen Verlauf ab. Die Mikrorißbildung schreitet weiter wegen der Querdehnungswirkung hauptsächlich in der Hauptdruckrichtung fort und krümmt den Kurvenverlauf stark bis zum Spannungsgipfel hin. Etwa oberhalb $0,8 \beta_p$ wird die Mikrostruktur im Beton zerstört. In diesem Laststadium wird der Beton zum Diskontinuum. Die gemessenen Bruchdehnungen schwanken unabhängig von der Druckfestigkeit meistens zwischen 2.0 und 2.5 o/oo. Jenseits des Scheitelpunktes kann ein abfallender Ast der Kurve beobachtet werden. Die ertragbare Spannung nimmt also wieder ab.

Zur mathematischen Beschreibung des aus Versuchen ermittelten Betonverhaltens muß man eine Funktion finden, mit der der erläuterte Kurvenverlauf befriedigend genau approximiert werden kann. Mehrere Näherungsformeln mit verschiedenen Parametern wurden vorgeschlagen. Eine gute Formelsammlung findet sich z.B. in [14, 120].

Makrorisse treten im Zugspannungsbereich auf und sind mit bloßen Augen sichtbar. Diese Makrorißbildung wird in der vorliegenden Arbeit behandelt. Eine ähnliche, aber drastischere Spannungsabnahme kann auch im Zugversuch an einem Stahlbetonprisma festgestellt werden (Bild 2.1b).

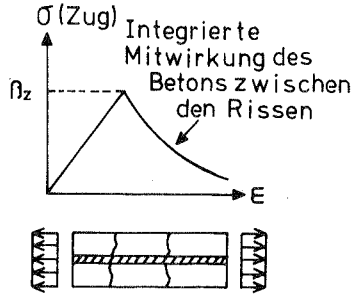
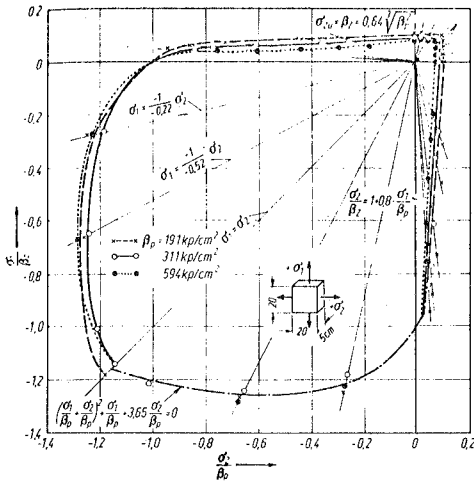


Bild 2.1b Beton im Zugspannungsbereich

Beim Reisseneines Querschnitts springen die bisher vom Beton getragenen Zugspannungen auf den Stahlstab über und im Rißquerschnitt wird die Zugkraft allein vom Betonstahl übertragen. Der Beton zwischen den Rissen ist aber in der Lage, wegen des Verbundes die Zugspannungen noch teilweise aufzunehmen. Auf diese Weise besitzt der Beton noch geringe Zugsteifigkeiten auch nach der Rißbildung, wenn man Risse innerhalb einer bestimmten Länge in verschmierter Form betrachtet. Diese Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen auf Zug wird seit Jahren oft diskutiert. Die Zugsteifigkeit (Tension Stiffening Effect) wurden erstmals von A.SCANLON [95] durch den schrittweise abnehmenden E-Modul und ferner von C.S.LIN [110] durch einen polynomischen Ansatz angenähert. Bei weiterer Dehnung des Stahlbetonprismas werden die Betonzugspannungen abgebaut, bis sie schließlich völlig verschwinden.

Der Beton in Stahlbetonplatten ist einem zweiachsigen Spannungszustand unterworfen, so daß das Verformungs- und Bruchverhalten für eine zweiachiale Beanspruchung untersucht werden müssen.

H. KUPFER gibt in [16] die derzeit wohl meist zur Verwendung kommende Näherungskurve für die Betondruckfestigkeit an. Für den Bruchspannungszustand in der rechten Hälfte in Bild 2.2 gelten folgende Gleichungen:



Druck-Druck-Bereich: $\left(\frac{\sigma_1}{\beta_p} + \frac{\sigma_2}{\beta_p}\right)^2 + \frac{\sigma_1}{\beta_p} + 3,65 \frac{\sigma_2}{\beta_p} = 0,$

Druck-Zug-Bereich: $\frac{\sigma_2}{\beta_z} = 1 + 0,8 \frac{\sigma_1}{\beta_p},$

Zug-Zug-Bereich: $\sigma_2 = \beta_z = 0,64 \cdot \sqrt{\beta_p^3} = \text{const.}$

σ_1 und σ_2 sind die Hauptspannungen.

β_p : Frismendruckfestigkeit des Betons

β_z : Zugfestigkeit des Betons

Bild 2.2 Approximationskurve für den Bruchzustand des Betons nach KUPFER [16]

Gegenüber dem einachsigen Druckspannungszustand ergibt sich im Druck-Druck-Bereich eine erhebliche Steigerung der Betondruckfestigkeit, deren Größtwert bei dem Spannungsverhältnis ca. 1/2 erreichen wird. Das Vorhandensein der zweiten Druckspannungskomponente behindert die Mikrorißbildung im Betonkörper und wirkt so festigkeitssteigernd. Die Bruchart ist der Gleitbruch, der durch parallel zur Beanspruchungsebene entstehende Mikrorisse eingeleitet wird. Die Gleitflächen, in denen der Beton abschert, entwickeln sich unter einem bestimmten Winkel zu den Spannungsrichtungen. Wird der Prüfkörper beidseitig auf Zug beansprucht, so wird unabhängig von den Spannungsverhältnissen beinahe die einachsige Zugfestigkeit β_z erreicht.

Im Zugspannungszustand wird der Trennbruch vor allem durch Makrorisse hervorgerufen. Die Rißrichtungen hängen von den Hauptspannungsrichtungen ab. Im Zug-Druck-Bereich begünstigt die Querkzugspannung die Mikrorißbildung, wodurch eine verminderte Festigkeit entsteht.

Wenn hier von einem Versuchswert des Betons gesprochen wird, so ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß es sich jeweils nur um einen speziellen Materialwert eines bestimmten Spannungszustandes (Hauptspannungsverhältnis) handelt, wobei noch zu bedenken ist, daß auch die Abmessungen und die Form des Prüfkörpers (Scheibe, Würfel, Prisma oder Zylinder) die Versuchsergebnisse stark beeinflussen. Dazu müssen noch die Reihenfolge und die Art der Lastaufbringung, Herstellungs- und Lagerbedingungen usw. als versuchsbedingte und betontechnologische Parameter beachtet werden.

Die Makrorißbildung ist wohl der wichtigste nichtlineare Effekt für das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken. Der gerissene Beton unterscheidet sich von homogenen Metallen im plastischen Zustand durch die Richtungsabhängigkeit der Rißausbildung, die rißbedingte Anisotropie und die Diskontinuität.

Von F.EBNER [127] wird durch Versuche nachgewiesen, daß in schwachbewehrten Stahlbetonplatten die Risse zu Beginn der Rißbildung unabhängig von den Bewehrungsrichtungen stets senkrecht zu den Hauptmomentenrichtungen auftreten. Die Rißbilder und die Hauptmomententrajektorien ähneln sich in ihrem Aussehen. Die Richtungsabhängigkeit der Rißausbildung ist eine wichtige Aussage für die Vorgehensweise bei der Rißuntersuchung. Tritt ein Riß auf, verläßt man das kartesische Koordinatensystem, in dem der homogene Zustand beschrieben wurde, und definiert die rißbegleitenden neuen Koordinaten. Ein rißbedingtes anisotropes Materialgesetz kann bezüglich dieses Rißkoordinatensystems angenommen werden.

Betonrisse sind Diskontinuitäten in Stahlbetonkonstruktionen. Durch Aufreißen der Betonfasern ändert sich die Topologie der Sy-

stemstruktur, so daß das Tragsystem eine mit der Lasterhöhung veränderliche Gliederung besitzt. Abgesehen von den Scherspannungen parallel zum Rißufer wird das Rißufer spannungsfrei. Die Verschiebungs- und Spannungsfelder zeigen damit Sprünge über den Rissen. Es ist grundsätzlich ein Widerspruch, ein solches Diskontinuum mit der Methode der finiten Elemente zu untersuchen, der die Kontinuumsmechanik zugrundeliegt. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, wird mit dem Begriff "Verschmieren" versucht, das Materialverhalten eines gewissermaßen großen Rißbereichs (z.B. Rißquerschnitt oder kleine Elementbereiche) in integrierter Form zu erfassen. Das durch die Rißbildung veränderte Integralgebiet kann beim Integrieren berücksichtigt werden. Im so ermittelten Stoffgesetz können die physikalische und topologische Änderung nicht mehr unterschieden werden, obwohl in den Materialkennwerten keine große Änderung auftritt.

Bezüglich des Materialverhaltens des Betons liegt der vorliegenden Arbeit die folgende Grundüberlegung zugrunde:

Der Stahlbeton ist ein Mehrstoffsystem, das sich aus Zement, Stahl, Zuschlagstoffen usw. zusammensetzt. Die Betongüte ist von mehreren Parametern abhängig. Die Auswirkung der meisten von ihnen sind noch nicht geklärt. Eine werkstoffphysikalische Theorie, die den Verformungs- und Bruchvorgang in Beton hinreichend genau beschreibt, ist wahrscheinlich nie erreichbar [60]. Das spröde Gebilde verhält sich nur makro-phänomenologisch wie die Metalle. Die Anwendung der Plastizitätstheorie auf Beton [110, 39] ist aber nicht gerechtfertigt. Selbst Versuchsergebnisse streuen breit. Vielmehr spielt die Zufälligkeit zusätzlich eine wichtige Rolle. Auch wenn man alle Parameter berücksichtigen könnte, würde die Genauigkeit der Rechnung unter dieser nicht-deterministischen Eigenschaft leiden. Es lohnt sich nicht, für eine statische Rechnung das Mehrstoffsystem allzusehr mikroskopisch zu erfassen. Um einen aufwendigen Lösungsweg zu vermeiden, werden die Stahlbetonplatten unter der Voraussetzung berechnet, daß das nichtlineare Tragverhalten des Stahlbetons lediglich auf die sukzessive Rißentwicklung zurückgeführt werden kann. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß die Mikro-

rißbildung für das integrierte Stoffverhalten im Vergleich zum veränderlichen Integralgebiet von untergeordneter, ja verschwindender Bedeutung ist.

2.2 Bewehrungsnetz

Die Bewehrung von Flächentragwerken aus Stahlbeton erfolgt in der Regel netzartig. Das Bewehrungsnetz kann z.B. aus Stahlmatten, Drahtgitter oder Drahtnetz bestehen. Um die Bewehrung richtig zu führen, muß über den Verlauf der Schnittgrößen Klarheit bestehen. Ein Tragwerk würde dann am besten bewehrt, wenn die Bewehrungsrichtungen den Trajektorien der Hauptspannungsrichtungen folgten und die Stahlstäbe rechtwinklig die Risse so kreuzten, daß die Zugkräfte von der Bewehrung unmittelbar übernommen werden können. Diese Forderung wird jedoch aus konstruktiven Gründen nicht immer erfüllt, weil die Hauptspannungsrichtungen sich in Abhängigkeit vom Lastfall beispielsweise bei Platten und Schalen von Punkt zu Punkt und über die Dicke ändern. Mit geraden Stäben ist eine Trajektorienbewehrung nicht möglich. Große Richtungsabweichungen der Bewehrung von den Hauptspannungsrichtungen müssen daher durch ein Netz von zwei- oder mehrbahnigen Bewehrungsscharen abgedeckt werden.

Über Einflüsse verschiedener Bewehrungsanordnungen auf das Tragverhalten, die Rißrichtungen, die Rißabstände und die Brucharten wird von R.TAYLOR [91] und F.EBNER [127] berichtet.

Der Betonstahl ist mit guter Näherung idealisierbar. Jedes stabförmige Bewehrungselement wird einachsig beansprucht. Die gebräuchlichen Betonstähle besitzen im Zug- und Druckversuch in ihren Spannungs-Dehnungs-Linien ein bis kurz vor Erreichen der Fließspannung linear elastisches und oberhalb der Fließspannung verfestigend plastisches Verhalten. Der Elastizitätsmodul E_s kann einheitlich zu $E_s = 21\ 000\ \text{kN/cm}^2$ angenommen werden. In dieser Arbeit wird der Bewehrungsstahl als linear elastisch und ideal

plastisch idealisiert (Bild 2.3). Weiter wird idealer Verbund zwischen Beton und Stahl vorausgesetzt.

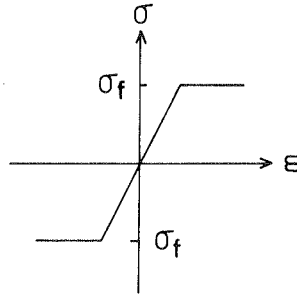


Bild 2.3 Stoffgesetz für Stahl

Für die spätere Matrizenformulierung sind im folgenden die zur Rechnung der Tragwirkung der Bewehrungsscharen nötigen Matrizen zusammengestellt. Es wird ein orthogonales Bewehrungsnetz i betrachtet, dessen Stabachsen mit (n_i, s_i) -Richtungen gemäß Bild 2.4 übereinstimmen.

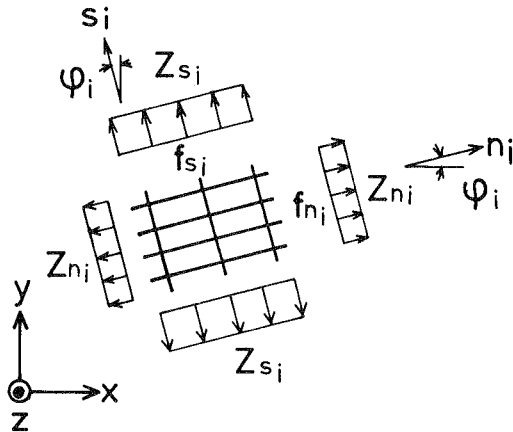


Bild 2.4 Bewehrungsscharen im $(n, s)_i$ -System

Bewehrungsquerschnitte

f_{ni} in n_i -Richtung

f_{si} in s_i -Richtung

Bewehrungsrichtung

φ_i Richtungsabweichung der Achse n_i
von der Achse x

Kräfte in den Bewehrungsscharen

$$\begin{bmatrix} Z_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Z_n \\ Z_s \\ 0 \end{bmatrix}_i \quad \begin{array}{l} \text{Zug (+)} \\ \text{Druck (-)} \\ \text{Keine Schubkräfte} \end{array}$$

Verzerrungen im (n_i, s_i) -System

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_s \\ \epsilon_{ns} \end{bmatrix}_i$$

Materialgesetz

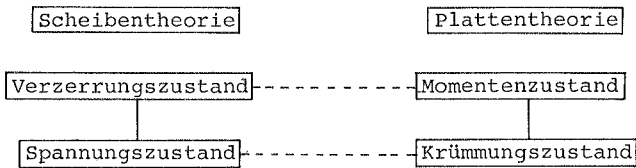
$$\begin{bmatrix} Z_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \end{bmatrix}_i \quad (2.2-1)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} E_s \cdot f_{ni} & \cdot & \cdot \\ \cdot & E_s \cdot f_{si} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.2-2)$$

3. LINEARE THEORIE DER GEKOPPELTEN SCHEIBEN- UND PLATTENWIRKUNG

Gerissene Stahlbetonplatten werden in dieser Arbeit mit den Kenntnissen der üblichen Scheiben- und Plattenstatik berechnet. Der Vollständigkeit halber werden in diesem Kapitel die Grundlagen der Scheiben- und Plattentheorie ohne Herleitung angegeben. Die beiden Theorien werden zuerst in getrennter Form dargestellt und später über das Werkstoffgesetz gekoppelt. Es wird angenommen, daß der Werkstoff homogen und isotrop ist und dem HOOCKESchen Gesetz gehorcht. Besonders zu erkennen ist eine zwischen den Grundgleichungen bestehende Dualität [42].



Jedes Dualpaar erfüllt formell dieselben Gleichungen. Um Schreibarbeit zu erleichtern, werden folgende Abkürzungen für die Differentiation eingeführt, z.B.

$$\begin{aligned} ()' &= \partial () / \partial x & , & ()'' = \partial^2 () / \partial x^2 \\ ()^* &= \partial () / \partial y & , & ()^{**} = \partial^2 () / \partial y^2 \end{aligned}$$

3.1 Grundlagen der üblichen Scheibentheorie

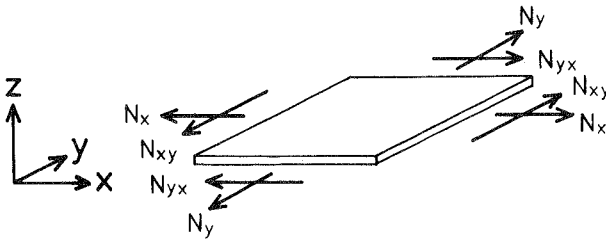


Bild 3.1 Festlegung der positiven Scheibenkräfte

Untersucht wird ein allgemeiner Scheibenzustand im (x,y,z) -Koordinatensystem. Als Bezugsfläche wird eine Fläche gewählt, die mit der (x,y) -Ebene zusammenfällt. Unter dem Scheibenzustand versteht man nicht den Spannungszustand $\mathbf{N}_{xy}^T = (N_x, N_y, N_{xy})$, sondern den Verzerrungszustand $\mathbf{\epsilon}_{xy} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy})$ der Bezugsfläche. Solange der Scheibenzustand durch den Verzerrungszustand definiert wird, müssen die Wirkungslinien der Scheibenkräfte nicht in der Bezugsfläche liegen. Die statischen und konstitutiven Gleichungen gelten, auch wenn \mathbf{N}_{xy} von der Bezugsebene abweichend wirken. Die Verträglichkeitsbedingungen beziehen sich jedoch immer auf die gemeinsame Bezugsfläche.

Spannungszustand $\mathbf{N}_{xy}^T = (N_x, N_y, N_{xy})$

Aus der Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen um die z-Achse

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (3.1-1)$$

Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} N_x^I + N_{yx}^{\bullet} + X &= 0 & (3.1-2a) \\ N_{xy} + N_y^{\bullet} + Y &= 0 & (3.1-2b) \end{aligned} \right\} (3.1-2)$$

$X(x,y)$ und $Y(x,y)$ sind die auf die Flächeneinheit bezogenen Volumenkräfte bzw. in x- und y-Richtung. Wenn keine Volumenkräfte vorhanden sind,

$$\left. \begin{aligned} N_x^I + N_{yx}^{\bullet} &= 0 & (3.1-3a) \\ N_{xy}^I + N_y^{\bullet} &= 0 & (3.1-3b) \end{aligned} \right\} (3.1-3)$$

Man bildet aus (3.1-3a)

$$N_x^{II} + N_{yx}^{\bullet\bullet} = 0 \quad (3.1-4a)$$

und aus (3.1-3b)

$$N_{xy}^{\bullet\bullet} + N_y^{\bullet\bullet} = 0 \quad (3.1-4b)$$

So erhält man wegen (3.1-1)

$$N_x'' - N_y'' = 0 \quad (3.1-5)$$

und

$$N_x'' + 2N_{xy}' + N_y'' = 0 \quad (3.1-6)$$

AIRYSche Spannungsfunktion $F(x,y)$

$N_x = F''$ (3.1-7a) $N_y = F''$ (3.1-7b) $-N_{xy} = F''$ (3.1-7c)
 $F(x,y)$ ist eine skalare Funktion mit der Dimension $[N \cdot cm]$,
 und erfüllt die zwei Gleichgewichtsbedingungen (3.1-3) identisch.

Verschiebungsfeld $u(x,y)$ und $v(x,y)$

Verzerrungszustand $\epsilon_{xy}^T = (\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_{xy})$

$$\epsilon_x = u' \quad (3.1-8a) \quad \epsilon_y = v' \quad (3.1-8b) \quad \epsilon_{xy} = u' + v' \quad (3.1-8c)$$

Verträglichkeitsbedingung

Differenziert man (3.1-8a) zweimal nach y , (3.1-8b) zweimal nach x und (3.1-8c) einmal nach x und einmal nach y , so erhält man

$$\epsilon_x'' = u'' \quad (3.1-9a) \quad \epsilon_y'' = v'' \quad (3.1-9b) \quad \epsilon_{xy}' = u'' + v'' \quad (3.1-9c)$$

woraus sich die Verträglichkeitsbedingung ergibt.

$$\epsilon_x'' - \epsilon_{xy}' + \epsilon_y'' = 0 \quad (3.1-10)$$

vgl. (3.1-6)

Elastizitätsgesetz

Allgemein schreibt man

$$[\epsilon_{xy}] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{bmatrix} [N_{xy}] \quad (3.1-11)$$

oder durch Umformen

$$[N_{xy}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} [\epsilon_{xy}] \quad (3.1-12)$$

Differentialgleichungen des Verschiebungsfeldes

Das Verschiebungsfeld erfüllt identisch die Verträglichkeitsbedingung (3.1-10). Drückt man in (3.1-3) über das Stoffgesetz (3.1-12) und die geometrischen Beziehungen (3.1-8) alle Unbekannte durch u und v aus, so ergibt sich aus (3.1-3a)

$$\lambda_{11} u'' + \lambda_{33} u'' + 2 \lambda_{13} u' + (\lambda_{12} + \lambda_{33}) v' + \lambda_{23} v'' + \lambda_{13} v'' = 0 \quad (3.1-13a)$$

und aus (3.1-3b)

$$\lambda_{13} u'' + \lambda_{23} u'' + (\lambda_{12} + \lambda_{33}) u' + 2 \lambda_{23} v' + \lambda_{22} v'' + \lambda_{33} v'' = 0 \quad (3.1-13b)$$

(3.1-13)

Diese zwei homogenen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung in u und v stellen Gleichgewichtsaussage dar.

Hilfsfunktion f(x,y)

Wenn f(x,y) so eingeführt wird, daß

$$u = f' \quad (3.1-14a) \quad v = f'' \quad (3.1-14b)$$

d.h.

$$\epsilon_x = f'' \quad (3.1-15a) \quad \epsilon_y = f'' \quad (3.1-15b) \quad \epsilon_{xy} = 2 f'' \quad (3.1-15c)$$

kann die Hilfsfunktion zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes zugelassen werden, weil (3.1-10) befriedigt wird.

Aus (3.1-15a) und (3.1-15b) folgt auch analog zu (3.1-5)

$$\epsilon_x'' = \epsilon_y'' \quad (3.1-16)$$

Mit f(x,y) lassen sich (3.1-13a) und (3.1-13b) ausdrücken.

$$\lambda_{11} f''' + (2 \lambda_{33} + \lambda_{12}) f''' + 3 \lambda_{13} f'' + \lambda_{23} f''' = 0 \quad (3.1-17a)$$

und

$$\lambda_{13} f''' + 3 \lambda_{23} f''' + (\lambda_{12} + 2 \lambda_{33}) f'' + \lambda_{22} f''' = 0 \quad (3.1-17b)$$

Scheibengleichung

Die sogenannte Scheibengleichung ergibt sich, wenn man die Verträglichkeitsbedingung (3.1-10) unter Beachtung von (3.1-7) und (3.1-11) durch F ausdrückt.

$$\mu_{11} F'''' - 2 \mu_{13} F'''' + (2 \mu_{12} + \mu_{33}) F'''' - 2 \mu_{23} F''' + \mu_{22} F''' = 0 \quad (3.1-18)$$

Transformationsformeln für die Scheibenkräfte

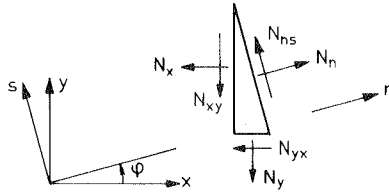


Bild 3.2 Gleichgewicht am Scheibenelement

Die Transformationsformeln für die Scheibenkräfte erhält man, wenn man an einem Scheibenelement (Bild 3.2) das Gleichgewicht in x- und y-Richtung betrachtet. Die Scheibenkräfte N_{xy} im (x,y)-System werden wie folgt transformiert

$$[N_{ns}] = [T_{\sigma}]_{\varphi} \cdot [N_{xy}] \quad (3.1-19)$$

wobei $N_{ns}^T = (N_n, N_s, N_{ns})$: Scheibenkräfte im (n,s)-System und

$$[T_{\sigma}]_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin\varphi \cdot \cos\varphi & \sin\varphi \cdot \cos\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (3.1-20)$$

Es gelten

$$[T_{\sigma}]_{\varphi}^{-1} = [T_{\sigma}]_{-\varphi} \quad [T_{\sigma}]_{\alpha+\beta} = [T_{\sigma}]_{\alpha} \cdot [T_{\sigma}]_{\beta}$$

Transformationsformeln für die Verzerrungen

Die Transformationsformeln für die Scheibenverzerrungen lassen sich z.B. aus der Differentialrechnung ermitteln.

$$[E_{ns}] = [T_{\epsilon}]_{\varphi} \cdot [E_{xy}] \quad (3.1-21)$$

mit $E_{ns}^T = (E_n, E_s, E_{ns})$: Verzerrungen im (n,s)-System

und

$$[\mathbf{T}\epsilon]_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (3.1-22)$$

Es gelten hier auch

$$[\mathbf{T}\epsilon]_{\varphi}^{-1} = [\mathbf{T}\epsilon]_{-\varphi} \quad [\mathbf{T}\epsilon]_{\alpha+\beta} = [\mathbf{T}\epsilon]_{\alpha} \cdot [\mathbf{T}\epsilon]_{\beta}$$

und im Zusammenhang mit $[\mathbf{T}\sigma]_{\varphi}$

$$[\mathbf{T}\sigma]_{\varphi}^{-1} = [\mathbf{T}\epsilon]_{\varphi}^T \quad [\mathbf{T}\epsilon]_{\varphi}^{-1} = [\mathbf{T}\sigma]_{\varphi}^T \quad [\mathbf{T}\sigma]_{-\varphi} = [\mathbf{T}\epsilon]_{\varphi}^T \quad [\mathbf{T}\epsilon]_{-\varphi} = [\mathbf{T}\sigma]_{\varphi}^T$$

Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen

Aus N_{xy} errechnen sich die Hauptspannungen mit

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \left[\left(\frac{N_x - N_y}{2} \right)^2 + N_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad N_1 \geq N_2 \quad (3.1-23)$$

und die Hauptspannungsrichtungen mit

$$\tan \varphi_0 = \frac{2 N_{xy}}{(N_x - N_y) + [(N_x - N_y)^2 + 4 N_{xy}^2]^{1/2}} \quad (3.1-24)$$

Der Winkel φ_0 ist der Hauptspannung N_1 zugeordnet.

3.2 Grundlagen der üblichen Plattentheorie

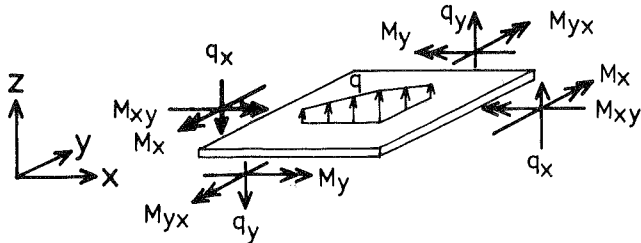


Bild 3.3

Plattenschnittgrößen

Der darzustellenden technischen Biegetheorie der dünnen und schubstarren Platte liegt die KIRCHHOFFSche Plattentheorie zugrunde. Es wird ein Biegezustand der Bezugsfläche betrachtet. Als Biegezustand definiert man den Beanspruchungszustand, in dem die vier Momentenkomponenten M_x , M_y , M_{xy} und M_{yx} vorhanden sind. Diese Momente sind auf die Bezugsfläche bezogen und allgemein gilt $M_{xy} \neq M_{yx}$. Während der Scheibenzustand durch den Verzerrungszustand definiert ist, wird der Plattenzustand durch den Momentenzustand ersetzt. Wie man in der Scheibentheorie die Winkeländerungen u' und v' nicht mehr unterscheiden kann und zu einer Verzerrung ϵ_{xy} zusammenfassen muß, führt man auch in der Plattentheorie entsprechend ein Drillmoment

$$\langle M_{xy} \rangle = \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx})$$

ein, damit eine eindeutige Zuordnung ermöglicht wird.

Biegefläche $w(x, y)$

Die Biegefunktion $w(x, y)$ ist in der Bezugsfläche eine skalare Funktion mit der Dimension $[cm]$.

Geometrische Beziehungen

Die Krümmungen sind die zweiten Ableitungen der Biegefläche nach den Koordinaten mit Minusvorzeichen und den Momenten zugeordnet.

$$-\bar{\Phi}_x = -w'' \quad (3.2-1a) \quad -\bar{\Phi}_y = -w'' \quad (3.2-1b) \quad -\bar{\Phi}_{xy} = -w'' \quad (3.2-1c)$$

$$\bar{\Phi}_{xy}^T = (\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, 2\bar{\Phi}_{xy}) \quad (3.2-2)$$

Wie (3.1-1)

$$\bar{\Phi}_{xy} = \bar{\Phi}_{yx} \quad (3.2-3)$$

Verträglichkeitsbedingungen der Biegefläche

$$\Phi_x'''' = \Phi_y'''' \quad (3.2-4) \text{ wie } (3.1-5)$$

$$\Phi_x'''' - 2\Phi_{xy}'' + \Phi_y'''' = 0 \quad (3.2-5) \text{ wie } (3.1-6)$$

Die Biegefunktion $w(x,y)$ erfüllt diese Bedingungen identisch.
Man kann natürlich statt (3.2-4) und (3.2-5) analog zu (3.1-4)

$$\Phi_x'''' = \Phi_{yx}'''' \quad (3.2-6a)$$

$$\Phi_y'''' = \Phi_{xy}'''' \quad (3.2-6b)$$

} (3.2-6)

schreiben.

Äußere Querlast

$q(x,y)$ bezogen auf die Flächeneinheit
positiv in z-Richtung

Querkräfte

$q_x(x,y)$ im x-Querschnitt

$q_y(x,y)$ im y-Querschnitt

Momente

$$\mathbf{M}_{xy}^T = (M_x, M_y, \langle M_{xy} \rangle) \quad (3.2-7)$$

Gleichgewichtsbedingungen

Querkräfte - Querlast

$$q_x' + q_y' + q = 0 \quad (3.2-8)$$

Ohne Querlast (z.B. Randbelastung):

$$q_x' + q_y' = 0 \quad (3.2-9)$$

Momente - Querkräfte

$$M_x' + M_{yx}' = q_x \quad (3.2-10a)$$

$$M_y' + M_{xy}' = q_y \quad (3.2-10b)$$

} (3.2-10)

Momente - Querlast

Differenziert man (3.2-10a) einmal nach x

$$M_x'' + M_{yx}' = q_x' \quad (3.2-11a)$$

und (3.2-10b) einmal nach y

$$M_y'' + M_{xy}' = q_y' \quad (3.2-11b)$$

} (3.2-11)

so ergibt sich durch Einsetzen von (3.2-11a)

und (3.2-11b) in (3.2-8)

$$M_x'' + 2 \langle M_{xy} \rangle' + M_y'' + q = 0 \quad (3.2-12)$$

und in (3.2-9)

$$M_x'' + 2 \langle M_{xy} \rangle' + M_y'' = 0 \quad (3.2-13)$$

Wenn $q_x = q_y = 0$ und $M_{xy} = M_{yx}$, folgt aus (3.2-11)

$$M_x'' = M_y'' \quad (3.2-14)$$

Werkstoffgesetz

Allgemein

$$[M_{xy}] = - \begin{bmatrix} \lambda_{44} & \lambda_{45} & \lambda_{46} \\ \lambda_{45} & \lambda_{55} & \lambda_{56} \\ \lambda_{46} & \lambda_{56} & \lambda_{66} \end{bmatrix} [\Phi_{xy}] \quad (3.2-15)$$

In umgekehrter Form

$$[\Phi_{xy}] = - \begin{bmatrix} \mu_{44} & \mu_{45} & \mu_{46} \\ \mu_{45} & \mu_{55} & \mu_{56} \\ \mu_{46} & \mu_{56} & \mu_{66} \end{bmatrix} [M_{xy}] \quad (3.2-16)$$

Plattengleichung - Gleichgewichtsaussage

Drückt man (3.2-12) in w aus, so erhält man die sogenannte Plattengleichung

$$\lambda_{44} w'''' + 4 \lambda_{46} w'''' + (2 \lambda_{45} + 4 \lambda_{66}) w'''' + 4 \lambda_{56} w'''' + \lambda_{55} w'''' = q(x, y) \quad (3.2-17)$$

Die Plattenberechnung mit Hilfe dieser linearen und inhomogenen partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung entspricht einem Verschiebungsgrößenverfahren

Einführung der Momentenfunktion $W(x,y)$ in der Plattentheorie

Dual zu $w(x,y)$ kann man eine Hilfsfunktion $W(x,y)$ zur Beschreibung des Momentenzustandes einführen, die der folgenden Definition unterliegt

$$M_x = W'' \quad (3.2-18a) \quad M_y = W'' \quad (3.2-18b) \quad -\langle M_{xy} \rangle = W'' \quad (3.2-18c)$$

Die Dimension der Momentenfunktion ist $[N \cdot cm^2]$.

Die Momentengleichgewichtsbedingung (3.2-13) wird identisch erfüllt. Aus den zwei Verträglichkeitsbedingungen (3.2-4) und (3.2-5) folgen die zwei Grundgleichungen für $W(x,y)$

$$\mu_{55} W'''' - \mu_{56} W'''' + \mu_{46} W'''' - \mu_{44} W'''' = 0 \quad (3.2-19)$$

$$\begin{aligned} \mu_{55} W'''' - 2\mu_{56} W'''' + (\mu_{66} + 2\mu_{45}) W'''' \\ - 2\mu_{46} W'''' + \mu_{44} W'''' = 0 \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

Die Momentenfunktion ist nur dann anwendbar, wenn bei der Platte keine Querbelastung auftritt. Dies entspricht bei der Scheibentheorie der Spannungsfunktion $F(x,y)$, die keine Volumenkräfte enthält.

Momententransformation

Die Momententransformation gehorcht, wie die der Scheibenkräfte, der Formel

$$[M_{ns}] = [T_{\sigma}]_{\varphi} [M_{xy}] \quad (3.2-21)$$

mit $M_{ns}^T = (M_n, M_s, M_{ns})$

Diese Matrizenformel gilt nur dann, wenn $M_{xy} = M_{yx}$ und $M_{ns} = M_{sn}$.

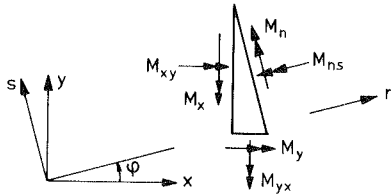


Bild 3.4 Momentengleichgewicht am Plattenelement

Krümmungstransformation

Wie (3.1-21)

$$[\Phi_{ns}] = [T_E] \varphi [\Phi_{xy}] \quad (3.2-22)$$

mit

$$\Phi_{ns}^T = (\Phi_n, \Phi_s, 2\Phi_{ns})$$

Hauptmomente und Hauptmomentenrichtungen

Wie (3.1-23) und (3.1-24)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \left[\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (3.2-23)$$

$M_1 \geq M_2$

$$\tan \varphi_0 = \frac{2M_{xy}}{(M_x - M_y) + [(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2]^{1/2}} \quad (3.2-24)$$

3.3 Stoffgesetz für den gekoppelten Scheiben- und Plattenzustand

Die Stoffgesetze (3.1-12) und (3.2-15) schreiben sich in Matrixform zu:

$$\begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda_{44} & -\lambda_{45} & -\lambda_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda_{45} & -\lambda_{55} & -\lambda_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda_{46} & -\lambda_{56} & -\lambda_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3-1)$$

In allgemeinen Fällen sind aber der Scheiben- und Biegezustand gekoppelt.

$$\begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & -\gamma_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} & -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & -\gamma_{33} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & -\lambda_{44} & -\lambda_{45} & -\lambda_{46} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & -\lambda_{45} & -\lambda_{55} & -\lambda_{56} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & -\lambda_{46} & -\lambda_{56} & -\lambda_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

oder kurz

$$\begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & E_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3-3)$$

Die Spannzahlen im rechten oberen und linken unteren Quadranten unterscheiden sich im Vorzeichen und stellen die gegenseitige Beeinflussung der Beanspruchungen auf Dehnung und Biegung dar. Die insgesamt 21 unabhängigen Koeffizienten lassen sich aus der Querschnittsstruktur bestimmen.

Zur Bestimmung des Werkstoffgesetzes (3.3-3) in gekoppelter Form denkt man sich den Gesamtquerschnitt aus einzelnen Teil-

querschnitten zusammengesetzt. Ein Beispiel hierfür ist eine konstruktiv orthotrope Platte mit exzentrischen Rippen. Der Plattenquerschnitt wird in eine isotrope Deckplatte und ein Rippen-system aufgeteilt. Der Querschnitt einer Stahlbetonplatte kann ebenso als ein zusammengesetzter Verbundquerschnitt aus Beton-anteil und Bewehrungsnetz angesehen werden.

Mit dem Index i kennzeichnet man einen Teilquerschnitt, dessen Tragverhalten zuerst im (n_i, s_i) -Koordinatensystem beschrieben ist (s. Bild 3.5).

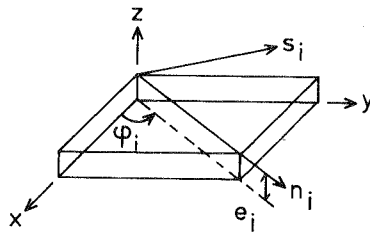


Bild 3.5 Lokale Koordinaten für Querschnittselement i

Die (n_i, s_i) - und (x, y) -Ebene liegen zueinander parallel mit dem Abstand e_i . Die Winkelabweichung zwischen der x - und n_i -Achse ist φ_i . Das Querschnittselement hat die (n_i, s_i) -Ebene zu seiner eigenen Bezugsebene. Dies ist aber nicht zwingend, weil alle Querschnittsgrößen schließlich auf die gemeinsame (x, y) -Ebene bezogen werden müssen.

Wird der Gesamtquerschnitt in einzelne einfache Teilquerschnitte eingeteilt, so kann man für jeden Teilquerschnitt ein mögliches Stoffgesetz

$$\begin{bmatrix} N_{ns} \\ M_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & E_{bb} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \\ \Phi_{ns} \end{bmatrix}_i \quad (3.3-4)$$

finden. In (3.3-4) sind die Momente $[M_{ns}]_i$ und die Dehnungen

$[\epsilon_{ns}]_i$ auf bestimmte Referenzachsen bezogen.

$[N_{ns}]_i$ und $[\Phi_{ns}]_i$ sind aber von der z-Koordinate unabhängige Größen. Aus (3.3-4) wird das Stoffgesetz für den Gesamtquerschnitt aufgebaut.

Mit Hilfe der Transformationsmatrix $[\mathcal{T}\epsilon]_{\varphi_i}$ und der Exzentrizitätsmatrix e_i , die allgemein Hebelarme enthält und Zustandsgrößen von einer Ebene auf die andere bezieht, verknüpft man zunächst $[\epsilon_{ns}]_i$ und $[\Phi_{ns}]_i$ mit ϵ_{xy} und Φ_{xy}

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{ns} \\ \Phi_{ns} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -e_i \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{T}\epsilon]_{\varphi_i} & 0 \\ 0 & [\mathcal{T}\epsilon]_{\varphi_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3-5)$$

In gleicher Weise erhält man auch für die Kraftgrößen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}_i &= \begin{bmatrix} [\mathcal{T}\sigma]_{\varphi_i} & 0 \\ 0 & [\mathcal{T}\sigma]_{\varphi_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ e_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ns} \\ M_{ns} \end{bmatrix}_i \\ &= \begin{bmatrix} [\mathcal{T}\epsilon]_{\varphi_i}^T & 0 \\ 0 & [\mathcal{T}\epsilon]_{\varphi_i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ e_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ns} \\ M_{ns} \end{bmatrix}_i \quad (3.3-6) \end{aligned}$$

$[N_{xy}]_i$ und $[M_{xy}]_i$ sind die Schnittkräfte, die vom Teilquerschnitt i aufgenommen werden. N_{xy} und M_{xy} sind dann gleich der Summe der Schnittkräfte aller Querschnittsflächen.

$$\begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.3-7)$$

Die Summation erstreckt sich über alle Querschnittselemente. Setzt man (3.3-4), (3.3-5) und (3.3-6) in (3.3-7) ein, so ergibt sich (3.3-3). Die Untermatrizen ergeben sich hierbei wie folgt.

$$[E_{mm}] = \sum_i \left[+ [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{mm}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \right] \quad (3.3-8)$$

$$[E_{mb}] = \sum_i \left[\begin{array}{l} - [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{mm}]_i \cdot \mathbf{e}_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \\ + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{mb}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \end{array} \right] \quad (3.3-9)$$

$$[E_{bm}] = \sum_i \left[\begin{array}{l} + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot \mathbf{e}_i \cdot [E_{mm}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \\ + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{bm}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \end{array} \right] \quad (3.3-10)$$

$$[E_{bb}] = \sum_i \left[\begin{array}{l} + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot \mathbf{e}_i \cdot [E_{mm}]_i \cdot \mathbf{e}_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \\ - [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot \mathbf{e}_i \cdot [E_{mb}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \\ + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{bm}]_i \cdot \mathbf{e}_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \\ + [T_{\epsilon}]_{\varphi_i}^T \cdot [E_{bb}]_i \cdot [T_{\epsilon}]_{\varphi_i} \end{array} \right] \quad (3.3-11)$$

Der gemeinsamen Bezugsfläche sind M_{xy} und ϵ_{xy} zugeordnet. N_{xy} und $\overline{\Phi}_{xy}$ sind nur von der Koordinatentransformation in der zur z-Achse senkrechten Ebene abhängig.

Zum besseren Verständnis soll der Vorgang noch einmal an einem Beispiel gezeigt werden. HENNING berechnet in [52] konstruktiv orthotrope Platten mit exzentrischen Versteifungen. Die Steifigkeitswerte des in Bild 3.6 dargestellten Quer-

schnittes werden hier nachgerechnet. Das Bezugskordinatensystem legt man in die Deckplattenmittelfläche. In diesem Fall ist $M_{xy} = M_{yx}$, weil der Querschnitt in beiden Richtungen gleiche Rippen hat.

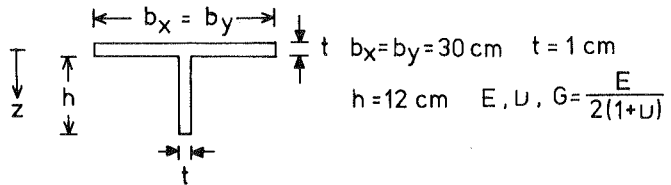


Bild 3.6 Plattenquerschnitt in [52]

Deckplatte $i=1$ ($\psi_1=0$)

$$[E_{mm}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{E t}{1-\nu^2} & \nu \frac{E t}{1-\nu^2} & . \\ \nu \frac{E t}{1-\nu^2} & \frac{E t}{1-\nu^2} & . \\ . & . & \frac{E t}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.3-12)$$

$$[E_{bb}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & \nu \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & . \\ \nu \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & . \\ . & . & \frac{E t^3}{24(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.3-13)$$

$$[E_{mb}]_1 = [0] , [E_{bm}]_1 = [0] , e_1 = [0] , [T_{\epsilon}]_{\varphi_1} = [I]$$

Rippensystem $i=2$ ($\varphi_2=0$)

$$[E_{mm}]_2 = \begin{bmatrix} \frac{E h t}{b_x} & - & - \\ - & \frac{E h t}{b_x} & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \quad (3.3-14)$$

$$[E_{bb}]_2 = \begin{bmatrix} \frac{E h^3 t}{12 b_x} & - & - \\ - & \frac{E h^3 t}{12 b_x} & - \\ - & - & \frac{G h t^3}{6 b_x} \end{bmatrix} \quad (3.3-15)$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} \frac{t+h}{2} & - & - \\ - & \frac{t+h}{2} & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \quad (3.3-16)$$

$$[E_{mb}]_2 = [0] , [E_{bm}]_2 = [0] , [T_{\epsilon}]_{\varphi_2} = [I]$$

Führt man die Matrizenrechnung (3.3-8) bis(3.3-11) durch, dann erhält man folgende Stoffmatrizen für den Plattenquerschnitt.

$$[E_{mm}] = \begin{bmatrix} \frac{E t}{1-\nu^2} + \frac{E h t}{b_x} & \nu \frac{E t}{1-\nu^2} & - \\ \nu \frac{E t}{1-\nu^2} & \frac{E t}{1-\nu^2} + \frac{E h t}{b_x} & - \\ - & - & \frac{E t}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.3-17)$$

$$[E_{mb}] = \begin{bmatrix} -\frac{E h t(t+h)}{2 b_x} & - & - \\ - & -\frac{E h t(t+h)}{2 b_x} & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \quad (3.3-18)$$

$$[E_{bm}] = - [E_{mb}] \quad (3.3-19)$$

$$[E_{bb}] = \begin{bmatrix} \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E h t^3}{12 b_x} + \frac{E h t(t+h)^2}{4 b_x} & \nu \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & - \\ \nu \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E h t^3}{12 b_x} + \frac{E h t(t+h)^2}{4 b_x} & - \\ - & - & \frac{E t^3}{24(1+\nu)} + \frac{G h t^3}{6 b_x} \end{bmatrix} \quad (3.3-20)$$

Setzt man in (3.3-17) bis (3.3-20) $\nu = 1/3$ ein, so ergibt sich die numerische Auswertung in der Tabelle 13.9 (Seite 72) in [52].

3.4 Lineare Theorie der orthotropen Platte

Die von M.T.HUBER aufgestellte Differentialgleichung der Biegefläche

$$B_x w'''' + 2H w'''' + B_y w'''' = q(x,y) \quad (3.4-1)$$

wurde ursprünglich für die Berechnung kreuzweise bewehrter Stahlbetonplatten entwickelt und gilt heute als Grundlage zur Berechnung orthotroper Plattentragwerke. Die Plattengleichung beschreibt eine Platte konstanter Dicke mit orthotropen Biegesteifigkeiten. Während man sich ziemlich klare Vorstellungen von B_x und B_y machen kann, ist die theoretische Bestimmung der Drillsteifigkeit H noch ein Streitpunkt. Die Schwerlinien der Querschnitte liegen bei dem Modell in der Plattenmittelfläche.

Die Anwendbarkeit der HUBERSchen Gleichung auf allgemeine orthotrope Platten wird in vielen Arbeiten gezeigt. Bei durch Rippen orthogonal versteiften Fahrbahnplatten wird die HUBERSche Theorie so angewendet, daß zur Bestimmung der Steifigkeitswerte die sich rechtwinklig kreuzenden Rippenscharen durch kontinuierliche Verteilung ihrer Querschnitte zum HUBERSchen orthotropen Modell idealisiert werden.

Wenn die Drillsteifigkeit H durch die von E.GIENCKE [41] angegebene Ersatzdrillsteifigkeit H^* ersetzt wird, so kann man näherungsweise den Einfluß der Steifenexzentrizität berücksichtigen. Bei W. CORNELIUS [46] werden die Längs- und Quertträger als gleichmäßig verteilt idealisiert. Durch Variieren der Drillsteifigkeit H werden verschiedene Fälle der Versteifungen

behandelt. K. HASSAN [162] setzt in B_x , B_y und H veränderliche Steifigkeitswerte ein. Die sich so ergebende Differentialgleichung mit von den Koordinaten abhängigen Koeffizienten wird mit Hilfe der Seilpolygongleichung gelöst. Ausgehend von der HUBERSchen Platte erhält E. WÖHRLE [165] eine Differentialgleichung für Querlast und Längskräfte nach der linearisierten Theorie II. Ordnung.

Will man die in vielen praktischen Fällen des Brückenbaus, Flugzeugbaus, Schiffsbaus und Stahlwasserbaus vorkommenden ebenen Flächentragwerke genauer berechnen, so muß man von der HUBERSchen Platte abgehen und mathematisch höhere Ansätze verwenden. Dies tut PFLÜGER mit seinem Kontinuummodell [86]. Bei dem PFLÜGERSchen Vorgehen werden die Rippen verschmiert und die orthotrope Platte als Kontinuum angesehen. Es wird dieser Theorie das Elastizitätsgesetz (3.3-3) in gekoppelter Form zugrunde gelegt. Ein solches Elastizitätsgesetz wurde beispielsweise schon von E. GIENCKE [41], K. KLÖPPEL [42], G. HENNING [52], H. RUBIN [59], A. PFLÜGER [86] und J. PELZ [164] verwendet.

Im geometrisch und physikalisch linearen Bereich geht der Kopplungszustand zwischen der Scheiben- und Biege Wirkung nur auf die orthotrope Struktur der Platte zurück. Der Beanspruchungszustand läßt sich grundsätzlich nach dem Kraftgrößenverfahren und nach dem Verschiebungsgrößenverfahren ermitteln. Zudem können für die Berechnung des Scheibenzustandes und des Plattenzustandes jeweils unterschiedliche Methoden angewendet werden (gemischte Methode).

Weil die Momentenfunktion $W(x,y)$ jedoch für die Plattenrechnung nicht gebräuchlich ist, bleiben folgende Verfahren übrig.

Spannungsfunktion und Biegefunktion

Mit Einführung der Spannungsfunktion wird das Gleichgewicht der Scheibenkräfte identisch erfüllt, es ist jedoch die Verträglichkeitsbedingung (3.1-10) der Scheibenverformungen zu formulieren. Entsprechend wird die Verträglichkeit der Biegefläche durch Einführung der Biegefunktion gesichert, so daß nur noch das Plattengleichgewicht senkrecht zur Plattenebene aufzustellen ist.

Man löst (3.3-3) nach ϵ_{xy} und M_{xy} .

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mm}^{-1} & -E_{mm}^{-1}E_{mb} \\ E_{bm}E_{mm}^{-1} & -E_{bm}E_{mm}^{-1}E_{mb} - E_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.4-2)$$

Scheibenzustand

$$D_F^T \cdot E_{mm}^{-1} \cdot D_F \cdot F(x,y) = D_F^T \cdot E_{mm}^{-1} \cdot E_{mb} \cdot D_w \cdot w(x,y) \quad (3.4-3)$$

Plattenzustand

$$\begin{aligned} D_w^T \cdot (E_{bm} \cdot E_{mm}^{-1} \cdot E_{mb} + E_{bb}) \cdot D_w \cdot w(x,y) \\ = q(x,y) + D_w^T \cdot E_{bm} \cdot E_{mm}^{-1} \cdot D_F \cdot F(x,y) \end{aligned} \quad (3.4-4)$$

$$\text{wobei} \quad D_F^T = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.4-5)$$

$$D_w^T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.4-6)$$

Die Stoffmatrizen E_{mb} und E_{bm} koppeln die beiden simultanen, linearen Differentialgleichungen 4. Ordnung. Im allgemeinen Fall werden mit Hilfe der Operatormatrizen auch die Untermatrizen des Stoffgesetzes differenziert, die Funktionen der Koordinaten (x,y) sind.

E.GIENCKE [41] beschreitet den Weg, in den beiden Gleichungen die Dehnsteifigkeiten D_x und D_y als unendlich groß anzunehmen, um damit die Scheibenwirkung in der Plattengleichung aufzunehmen. Die letztere unterscheidet sich dann von der HUBERSchen Gleichung nur durch die Ersatzdrillsteifigkeit H^+ . K.KLÖPPEL zeigt in [42] eine formale Analogie zwischen der Scheiben- und Plattentheorie.

Bei G. HENNING [52] werden als Lösungsansätze die Fourierreihen gewählt. An einem Plattenbeispiel werden die gekoppelte und die zwangsentkoppelte Rechnung durchgeführt. Für die finite Elementmethode nach dem Verschiebungsgrößenverfahren werden die HERMITESchen Polynome verwendet.

Scheibenverschiebungen und Biegefunktion

Wenn statt $F(x,y)$ die Scheibenverschiebungen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ als unbekannte Funktionen eingeführt werden, so müssen die zwei Scheibengleichgewichtsbedingungen erfüllt werden, wofür zwei Differentialgleichungen benötigt werden. Daraus folgt ein simultanes System von drei gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen

Scheibenzustand

$$D_{uv}^T \cdot E_{mm} \cdot D_{uv} \cdot \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = - D_{uv}^T \cdot E_{mb} \cdot D_w \cdot w(x,y) \quad (3.4-7)$$

Plattenzustand

$$D_w^T \cdot E_{bb} \cdot D_w \cdot w(x,y) = q(x,y) + D_w^T \cdot E_{bm} \cdot D_{uv} \cdot \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (3.4-8)$$

$$\text{mit } D_{uv}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.4-9)$$

Die Lösung des Differentialgleichungssystems wird von J.PELZ [164] mit Hilfe der Singularitätenmethode gewonnen. Durch Elimination von u und v gelangt K.TRENKS [17] zu einer partiellen Differentialgleichung 8. Ordnung für w , in die ein Lösungsansatz eingeführt wird.

Wenn die Platte endliche Rippenabstände hat und der unstetige Steifigkeitsverlauf brücksichtigt werden muß, hat man ein Diskontinuum zu berechnen. Das SCHUMANNsche Diskontinuummodell [45] zerlegt das Tragwerk in einzelne Glieder. Die Einzelelemente werden dann getrennt untersucht und unter Beachtung der Übergangsbedingungen in Kontaktlinien wieder zum Gesamtsystem zusammengefügt.

Die statische Analogie in Bild 1.5 vermittelt die wesentliche Wirkungsweise gerissener Stahlbetonplatten. Der mechanische Sachverhalt wird klarer, wenn man für Stahlbetonplatten die Materialgleichungen findet und in (3.4-3)/(3.4-4) oder in (3.4-7)/(3.4-8) einsetzt. Es zeigt sich, daß selbst für nur querbelastete Stahlbetonplatten besonders im gerissenen Zustand die Membranrandbedingungen vorgeschrieben sein müssen.

Die Kopplungsmatrizen erzeugen in (3.4-3) Quasi-Anfangszerrungen und in (3.4-7) Pseudo-Membranlasten. Der Plattenzustand wird entlastet.

Die Integration der Grundgleichungen ist nicht einfach, und der Rechenaufwand übersteigt ein sinnvolles Maß. Zur Berechnung der nichtlinearen Plattenaufgabe bedarf es einer rechnerorientierten numerischen Methode. In den folgenden Kapiteln wird die Methode der finiten Elemente zur rechenintensiven Rißuntersuchung von Stahlbetonplatten angewendet.

4. ZUR WAHL EINES FINITEN ELEMENTES

4.1 Plastizitätskontrolle

Bisher wurden zur Berechnung von Flächentragwerken zahlreiche finite Elemente entwickelt, wobei verschiedene Elementtypen zur Auswahl stehen.

Im Schrifttum setzte sich das Verschiebungsgrößenverfahren durch, weil es nicht nur am praktikabelsten ist, sondern auch durch die Rißbildung verlorengegangene Steifigkeiten ohne weiteres berücksichtigen kann. Bei der Kraftgrößenmethode, der hybriden Verschiebungsmethode und der gemischten Methode wäre die Erfassung der unendlich großen Flexibilität ($1/\text{Steifigkeit} = 1/0$) numerisch schwierig.

Bei der Auswahl eines dem Problem angepaßten Elementes muß eine sehr wichtige Besonderheit beachtet werden: Die Plastizitätskontrolle. In physikalisch nichtlinearen Problemen taucht die Frage auf, an welchen Stellen abgefragt werden muß, ob die Bruchbedingungen erfüllt sind. Streng genommen müßte man die Plastizitätskontrolle für unendlich viele Punkte im Kontinuum vornehmen, oder den Punkt suchen, der am stärksten beansprucht wird und am ehesten den Bruchzustand erreicht. In Stahlbeton müßten sogar noch die Hauptzugspannungen in jedem Punkt ermittelt werden. Die Aufgabe, solche Stellen aufzufinden, ist numerisch sehr aufwendig. Die Kontrolle, daß die Plastizitätsbedingungen in allen Punkten des Tragsystems eingehalten werden, ist fast unmöglich. Deshalb bleibt nichts anderes übrig, als zu kontrollierende Orte von vornherein festzulegen. Die Plastizitätskontrolle wird dadurch wesentlich vereinfacht. So spricht man von der Diskretisierung der Plastizitätskontrolle, da die Überprüfung nur für bestimmte Kontrollpunkte erfolgt.

Die Kontrollpunkte können z.B. Integrationspunkte [100], Elementkanten [32, 35, 79, 105], Knotenpunkte [104], oder Schwerpunkte einzelner Elementbereiche [120, 106] sein. Die Untersuchungen [101, 102, 103, 110, 111, 113, 116, 117, 118, 119], denen das Schichtenmodell zugrunde liegt, betrachten die Rißbildung meistens im Schwerpunkt jeder Schicht. Dies ist aber eine sehr makroskopische und zu grobe Betrachtungsweise, weil die maximale Beanspruchung nicht

immer im Schwerpunkt auftritt. Der Fehler, den man dadurch begeht, ist umso größer, je größer der Bereich wird, zu dem der Kontrollpunkt gehört, und je rascher sich der Gradient des Spannungsverlaufes ändert.

In der linear elastischen Rechnung kann bekanntlich eine bessere Genauigkeit der Ergebnisse bei gleicher Anzahl der resultierenden Gleichungen entweder bei gleicher Elemententeilung durch Erhöhung der Ordnung der Ansatzfunktionen für jedes Element; oder bei Beibehaltung der Anzahl der Freiheitsgrade der Elemente durch Verdichtung des Elementnetzes, erzielt werden. Die erste Möglichkeit kann im vorliegenden Problem aus dem erwähnten Grunde zu einem großen Fehler führen. Man könnte auch natürlich in einem großen Elementgebiet mehrere Kontrollpunkte ansetzen, wie es S.BERG in [100] macht. In diesem Fall ändert sich aber das Stoffgesetz innerhalb des Elementes von Punkt zu Punkt, d.h. Unstetigkeiten in Materialeigenschaften treten auf, was die Ermittlung der Elementmatrix erschwert. Die Einführung höherer Ansatzfunktionen [116] führt zu keiner Lösung bei der Rißbeschreibung.

Die zweite Möglichkeit besitzt für die Rißuntersuchung den entscheidenden Vorteil, daß durch die Verfeinerung des Elementrasters das Rißbild wirklichkeitsnah simuliert wird. Der Spannungszustand in einem kleinen Elementbereich kann ohne großen Genauigkeitsverlust durch den des Schwerpunktes ersetzt werden. Ein feinerer Element raster ist aber bei gleicher Anzahl der Unbekannten erst dann möglich, wenn man ein finites Element verwendet, das wenige Parameter besitzt.

Dieser Vorteil wirkt sich auf die Plastizitätskontrolle aus, worauf schon H.KNÖPFEL [75], J.GRÜNBERG [113] und R.WEGNER [120] hingewiesen haben, und zwar dadurch, daß die Plastizitätsbedingungen durch das Vorhandensein von weiteren Kontrollpunkten besser gesichert werden.

4.2 Gemischtes Schalenmodell nach HERRMANN

Zur praktischen Rechnung im Rahmen dieser Arbeit wird das gemischte HERRMANNsche Schalenmodell [11] gewählt, das sich unter Berücksichtigung folgender Forderungen als besonders geeignet erweist

Die Membranwirkung in Stahlbetonplatten muß dabei berücksichtigt werden (Schalenmodell zur Plattenberechnung notwendig). Mit einem dreieckigen Element kann man jede Plattenform polygonzugartig annähern. Wenn die Schnittkräfte elementweise konstant sind, ist eine einfache Kontrolle des Bruchkriteriums möglich, und der Rechenaufwand des nichtlinearen Problems wird reduziert. Dazu sind Ansatzfunktionen von kleiner Ordnung erforderlich. Für sinnvolle Ergebnisse sind sie nur entweder bei hybriden oder gemischten Modellen möglich, an die vom Variationsprinzip weniger Bedingungen gestellt werden. Die Energieauswertung für gerissene Gebiete wird bei solchen Ansatzfunktionen erheblich erleichtert. Trotz der kleinen Ordnung der Funktionsansätze werden die Schnittkräfte genau und schnell berechnet, die für die Spanningskontrolle von entscheidender Bedeutung sind. Bei dem gewählten Modell ist die Nachlaufrechnung zur Ermittlung der Schnittkräfte sehr einfach.

Das gewählte Schalenmodell hat insgesamt 12 Knotenparameter, wie Bild 4.1 zeigt.

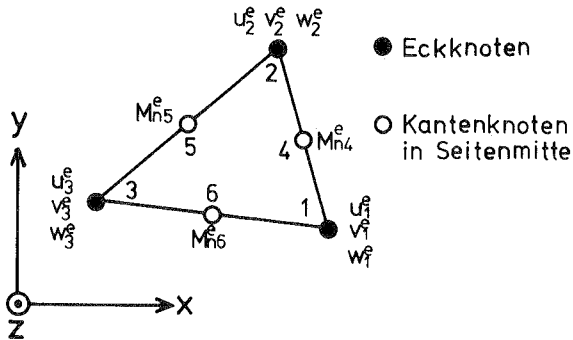


Bild 4.1 Herrmannsches gemischtes Schalenmodell in [11]

Membranverschiebungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{bmatrix}^T = (u_1^e, u_2^e, u_3^e, v_1^e, v_2^e, v_3^e)$$

Kantenmomente

$$\mathbf{M}_n^{eT} = (M_{r4}^e, M_{r5}^e, M_{r6}^e)$$

Durchbiegungen

$$\mathbf{w}^{eT} = (w_1^e, w_2^e, w_3^e)$$

Der Fußzeiger an jedem Parameter kennzeichnet die Knotennummer und bei jedem Vektor der Knotenparameter wird der Index "e" rechts hochgestellt. Die Knotennumerierung erfolgt entgegen dem Uhrzeigersinn. Von HERRMANN werden sowohl für die Verschiebungen als auch für die Momente folgende Ansätze gemacht:

Ansätze für u und v (CST-Element)

Die Membranverschiebungen u und v sind linear veränderlich.

$$\begin{array}{ll} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y & (4.2-1a) \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y & (4.2-1b) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} u \\ v \end{array}} \right\} (4.2-1)$$

Die sechs Konstanten α_1 bis α_6 werden durch sechs Knotenverschiebungen \mathbf{u}^e und \mathbf{v}^e eindeutig bestimmt. An den Elementrändern ist die Kontinuität der Verschiebungen garantiert.

Ansätze für M_x , M_y und M_{xy}

Die Momente ($M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$) sind elementweise konstant.

$$\begin{array}{ll} M_x = \alpha_7 & (4.2-2a) \\ M_y = \alpha_8 & (4.2-2b) \\ M_{xy} = \alpha_9 & (4.2-2c) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array}} \right\} (4.2-2)$$

Dieser Momentenansatz erfüllt in jedem Elementinnenpunkt die Gleichgewichtsbedingung (3.2-13). Die drei unbekannt Konstan-

ten werden hierbei durch die kontinuierlichen Kantenmomente M_n^e ausgedrückt.

Ansatz für w

Auch für die Durchbiegungen wird ein linearer Verschiebungsansatz gewählt.

$$w = \alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \quad (4.2-3)$$

Die Biegefläche ist im Innenbereich eine Ebene und die Bestimmungsgleichungen für die drei Ansatzkonstanten liefern die Knotenparameter W^e .

Die zur Berechnung der gemischten Elementmatrix nötigen Grundmatrizen und Matrixgleichungen sind im folgenden kurz angegeben.

CST-Element

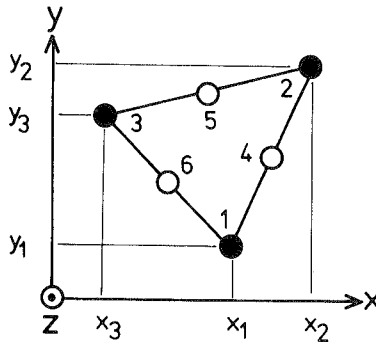


Bild 4.2 Koordinaten der Eckknoten

$$\epsilon_{xy} = B \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} \quad (4.2-4)$$

ϵ_{xy} enthält die konstanten Verzerrungskomponenten

$$\epsilon_{xy}^T = (\epsilon_x \cdot \epsilon_y \cdot \epsilon_{xy})$$

und B wird durch

$$B = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.2-5)$$

gegeben, wobei Δ : Flächeninhalt des Elementes
und

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Elementseiten

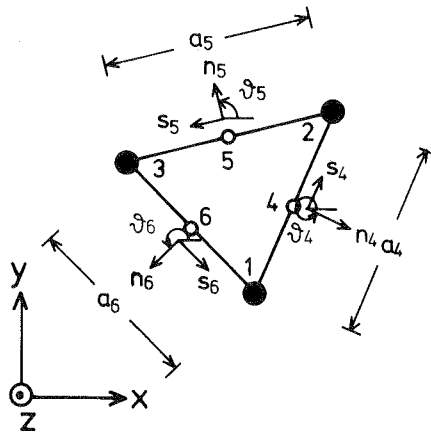


Bild 4.3 Koordinatensysteme für Kantenknoten

Die Winkelargumente werden positiv gezählt, wenn sie entgegen dem Uhrzeigersinn verlaufen.

Transformationsmatrizen für Momente

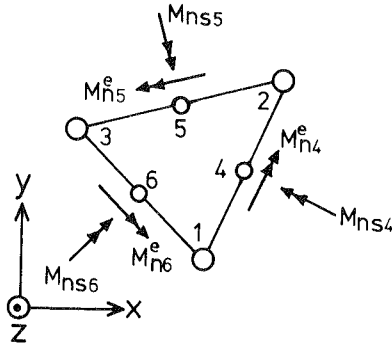


Bild 4.4 Momententransformation

$$M_n^e = S \cdot M_{xy} \quad (4.2-6)$$

$$M_t = C \cdot M_{xy} \quad (4.2-7)$$

wobei

$$M_t^T = (M_{ns4} , M_{ns5} , M_{ns6})$$

$$S = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta_4 & \sin^2 \vartheta_4 & \sin 2\vartheta_4 \\ \cos^2 \vartheta_5 & \sin^2 \vartheta_5 & \sin 2\vartheta_5 \\ \cos^2 \vartheta_6 & \sin^2 \vartheta_6 & \sin 2\vartheta_6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{\sin 2\vartheta_4}{2} & \frac{\sin 2\vartheta_4}{2} & \cos 2\vartheta_4 \\ -\frac{\sin 2\vartheta_5}{2} & \frac{\sin 2\vartheta_5}{2} & \cos 2\vartheta_5 \\ -\frac{\sin 2\vartheta_6}{2} & \frac{\sin 2\vartheta_6}{2} & \cos 2\vartheta_6 \end{bmatrix}$$

M_n^e wird bei der gemischten Methode vom Gleichungssystem unmittelbar berechnet. Aus (4.2-6)

$$M_{xy} = S^{-1} \cdot M_n^e \quad (4.2-8)$$

und aus (4.2-8) und (4.2-7)

$$M_t = C \cdot S^{-1} \cdot M_n^e \quad (4.2-9)$$

Äußere Querlasten und Membranlasten

$$Q^\circ = \begin{bmatrix} Q_1^\circ \\ Q_2^\circ \\ Q_3^\circ \end{bmatrix} \quad P^\circ = \begin{bmatrix} P_{U_1}^\circ \\ P_{U_2}^\circ \\ P_{U_3}^\circ \\ P_{V_1}^\circ \\ P_{V_2}^\circ \\ P_{V_3}^\circ \end{bmatrix}$$

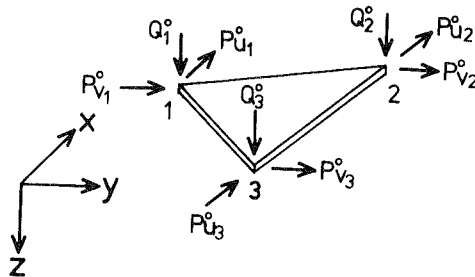


Bild 4.5 Äußere Quer- und Membranlasten

Statisch gleichwertige Ersatzquerkräfte

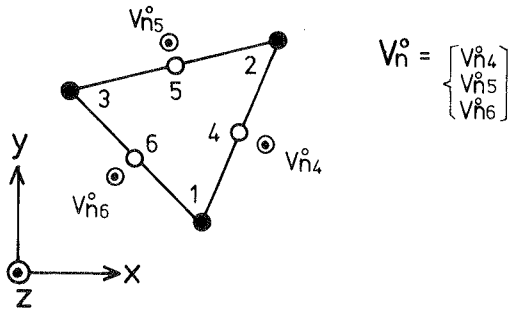


Bild 4.6 Ersatzquerkräfte an Kanten

Variationsfunktional

Fügt man die Potentialenergie der Membranwirkung [8] zu dem Energieausdruck in [10] hinzu, so erhält man das dem gemischten Modell zugrunde liegende Variationsfunktional [11]. Läßt man den Temperatureinfluß weg, so lautet es in der Schreibweise der vorliegenden Arbeit

$${}^s \pi = \sum {}^e \pi \quad (4.2-10)$$

\sum : über alle Elemente aufsummieren

${}^e \pi$ ist der Beitrag eines Elementes zum Gesamtpotential
 ${}^s \pi$ des Systems.

$${}^e \pi = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} (\mathbf{E}_{xy}^T \cdot \mathbf{M}_{xy}^T) \begin{bmatrix} N_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} dx dy \quad \text{-----} \quad \pi_{mb}$$

$$- \int_S (P\dot{u} \cdot u + P\dot{v} \cdot v) ds \quad \text{-----} \quad \pi_p^{\circ}$$

$$- \iint_{\Delta} q \cdot w \cdot dx dy \quad \text{-----} \quad \pi_q^{\circ}$$

$$- \int_S \frac{\partial w}{\partial s} \cdot M_{ns} \cdot ds \quad \text{-----} \quad \pi_s$$

$$- \int_{S_{W_n}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^{\circ} \cdot M_n \cdot ds \quad \text{-----} \quad \pi_{S_{W_n}}^{\circ}$$

$$- \int_{S_{V_n}} w \cdot V_n^{\circ} \cdot ds \quad \text{-----} \quad \pi_{S_{V_n}}^{\circ}$$

(4.2-11)

Der Index (^o) bezeichnet vorgeschriebene Größen und deutet an, daß die Terme später im Lastvektor auftreten.

π_{mb} -Integral

π_{mb} ist das innere Potential des Elementes. Mit dem Werkstoffgesetz in entkoppelter Form

$$\begin{bmatrix} N_{xy} \\ \Phi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mm} & 0 \\ 0 & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.2-12)$$

schreibt sich π_{mb} bei Berücksichtigung der eingeführten Funktionsansätze wie folgt:

$$\pi_{mb} = \frac{\Delta}{2} (\epsilon_{xy}^T, M_{xy}^T) \begin{bmatrix} D_{mm} & 0 \\ 0 & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.2-13)$$

Weiter mit Hilfe von (4.2-4) und (4.2-8)

$$\pi_{mb} = \frac{\Delta}{2} \left(\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}^T, M_n^{eT} \right) \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & (S^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{mm} & 0 \\ 0 & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ M_n^e \end{bmatrix} \quad (4.2-14)$$

π_p° - und π_q° -Integral

Die π_p° - und π_q° -Integrale sind die Potentiale der äußeren Belastung.

Wegen der diskretisierten äußeren Lasten ist:

$$\pi_p^{\circ} + \pi_q^{\circ} = - \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}^T P^{\circ} - w^{eT} Q^{\circ} \quad (4.2-15)$$

$\pi_{\mathcal{L}_S}$ -Integral

$$\pi_{\mathcal{L}_S} = - \int_S \frac{\partial w}{\partial s} \cdot M_{ns} \cdot ds$$

S ist die Randlinie des Elementes und M_{ns} das Drillmoment am Elementrand.

$\frac{\partial w}{\partial s}$ und M_{ns} werden aus dem Verschiebungs- und Momentenansatz voneinander unabhängig ermittelt. Die Kontinuitätsbedingungen für M_{ns} werden zwischen Nachbarelementen nicht erfüllt.

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_4 = \frac{\partial w}{\partial s} \text{ an der Kante 4} = \frac{w_2^g - w_1^g}{a_4}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_5 = \frac{\partial w}{\partial s} \text{ an der Kante 5} = \frac{w_3^g - w_2^g}{a_5}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_6 = \frac{\partial w}{\partial s} \text{ an der Kante 6} = \frac{w_1^g - w_3^g}{a_6}$$

Somit

$$\pi_{\mathcal{L}_S} = - \left(\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_4 a_4 + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_5 a_5 + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_6 a_6 \right) \cdot M_t$$

$$= - w^{eT} \cdot F \cdot M_t$$

$$= - w^{eT} \cdot F \cdot C \cdot S^{-1} \cdot M_n^e \quad (4.2-16)$$

wobei

$$F = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & 1 \\ 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Π_{SWn}° -Integral

Das Kantenmoment M_n zeigt am Elementrand keinen Sprung.
 SW_n ist ein Randstück, wo $\frac{\partial w}{\partial n}$ vorgegeben ist.

$$\begin{aligned} \Pi_{SWn}^{\circ} &= - \int_{SWn} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^{\circ} \cdot M_n \cdot ds \\ &= - w_n^{\circ T} \cdot A_n \cdot M_n^e \end{aligned} \tag{4.2-17}$$

In w_n° sind die vorgegebenen Randneigungen zusammengefaßt
 (Bild 4.7)

$$w_n^{\circ T} = \left(\frac{\partial w}{\partial n_4} \Big|_4, \frac{\partial w}{\partial n_5} \Big|_5, \frac{\partial w}{\partial n_6} \Big|_6 \right) \quad \text{und} \quad A_n = \begin{bmatrix} a_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_6 \end{bmatrix}$$

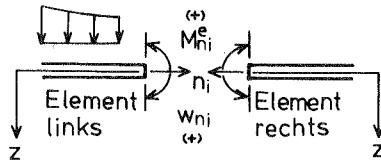


Bild 4.7 Vorzeichendefinition
 für M_n^e und w_n

Π_{SVn}° -Integral

Auf SV_n sind die Ersatzquerkräfte V_n° vorgeschrieben.

$$V_n^{\circ T} = (V_n^{\circ 4}, V_n^{\circ 5}, V_n^{\circ 6})$$

V_n° hat auf jeder Elementkante einen konstanten Verlauf.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Beitrag der Kante 4} \\ \text{Beitrag der Kante 5} \\ \text{Beitrag der Kante 6} \end{array} \right\} \text{ zu } \Pi_{SVn}^{\circ} \left[\begin{array}{l} = \frac{w_1^e + w_2^e}{2} \cdot a_4 \cdot V_n^{\circ} \\ = \frac{w_2^e + w_3^e}{2} \cdot a_5 \cdot V_n^{\circ} \\ = \frac{w_3^e + w_4^e}{2} \cdot a_6 \cdot V_n^{\circ} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Pi_{SVn}^{\circ} &= - \int_{SVn} w \cdot V_n^{\circ} \cdot ds \\ &= - w^{eT} \cdot A_f \cdot V_n^{\circ} \quad (4.2-18) \end{aligned}$$

mit $A_f = \begin{bmatrix} \frac{a_4}{2} & \cdot & \frac{a_6}{2} \\ \frac{a_4}{2} & \frac{a_5}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{a_5}{2} & \frac{a_6}{2} \end{bmatrix}$

Setzt man die Matrixausdrücke (4.2-14) bis (4.2-18) in (4.2-11) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} {}^e \Pi &= \frac{\Delta}{2} \left(\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}^T, M_n^{eT} \right) \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & (S^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{mm} & 0 \\ 0 & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ M_n^e \end{bmatrix} - \Pi_{mb} \\ &- \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}^T \cdot P^{\circ} \quad \text{-----} \quad \Pi_p^{\circ} \\ &- w^{eT} \cdot Q^{\circ} \quad \text{-----} \quad \Pi_q^{\circ} \\ &- w^{eT} \cdot F \cdot C \cdot S^{-1} \cdot M_n^e \quad \text{-----} \quad \Pi_s \\ &- w_n^{\circ T} \cdot A_n \cdot M_n^e \quad \text{-----} \quad \Pi_{swn}^{\circ} \\ &- w^{eT} \cdot A_f \cdot V_n^{\circ} \quad \text{-----} \quad \Pi_{svn}^{\circ} \end{aligned}$$

Das Gesamtpotential des Plattentragwerks wird aus den Beiträgen einzelner Elementbereiche zusammengesetzt. Die Durchführung der ersten Variation nach den unabhängigen Parametern führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^s \pi \\ &= \sum \delta^e \pi \end{aligned} \quad (4.2-20)$$

Die gemischte Elementmatrix folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^e \pi \\ &= \Delta \left(\begin{bmatrix} \delta u^e \\ \delta v^e \end{bmatrix}^T \cdot \delta M_n^{eT} \right) \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & (S^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{mm} & 0 \\ 0 & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ M_n^e \end{bmatrix} - \pi_{mb} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \delta u^e \\ \delta v^e \end{bmatrix}^T \cdot P^o \quad \text{-----} \quad \pi_p^o \\ &\quad - \delta w^{eT} \cdot Q^o \quad \text{-----} \quad \pi_q^o \\ &\quad - \delta w^{eT} \cdot F \cdot C \cdot S^{-1} \cdot M_n^e \quad \text{-----} \quad \pi_s \\ &\quad - \delta M_n^{eT} \cdot (S^{-1})^T \cdot C^T \cdot F^T \cdot w^e \quad \text{-----} \quad \pi_s \\ &\quad - \delta M_n^{eT} \cdot A_n \cdot w_n^o \quad \text{-----} \quad \pi_{swn}^o \\ &\quad - \delta w^{eT} \cdot A_f \cdot V_n^o \quad \text{-----} \quad \pi_{svn}^o \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u^{eT} & v^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{eT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P^\circ \\ A_n \cdot w_n \\ Q^\circ + A_f \cdot V_n^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & -G & -H^T \\ 0 & -H & 0 \end{bmatrix}$$

(4.2-22)

mit

$$K_{mm} = \Delta \cdot B^T \cdot D_{mm} \cdot B$$

$$G = \Delta \cdot (S^{-1})^T \cdot D_{bb} \cdot S^{-1}$$

$$H = F \cdot C \cdot S^{-1}$$

(4.2-23)

Die Systemmatrix wird aus den einzelnen Elementmatrizen zusammgebaut, indem man alle Knoten numeriert und nach der Zuordnungstabelle die Elementmatrizen einfach überlagert.

Die erstmals von HERRMANN angegebene gemischte Elementmatrix hat eine besondere Struktur.

$$\begin{bmatrix} K_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} -G & -H^T \\ -H & 0 \end{bmatrix}$$

stellen den Membran- [8] und den Plattenanteil [10] dar. Die beiden Anteile sind völlig entkoppelt. Die Minusvorzeichen im Plattenanteil sind zu beachten. K_{mm} und G kommen aus dem Π_{mb} -Integral und sind materialabhängig. Die zu Π_S gehörige Matrix H hängt jedoch nur von den Seitenwinkeln des Elementes ab.

$$-H \cdot M_n^e = -F \cdot C \cdot S^{-1} \cdot M_n^e$$

sind die von den Randdrillmomenten erzeugten Kräftepaare $-F \cdot M_t$ (Bild 4.8).

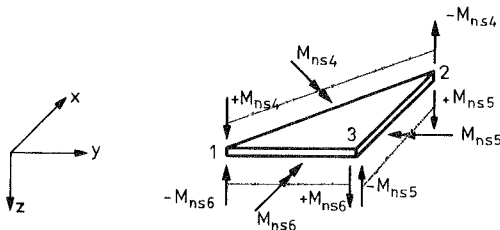


Bild 4.8 Kräftepaare $(-F \cdot M_t)$

Damit erkennt man, daß

$$-H \cdot M_n^e = Q^0 + A_f \cdot V_n^0$$

die Knotengleichgewichtsbedingungen in Querrichtung beschreiben. Da der konstante Momentenverlauf keine Querkräfte ergibt, werden die Querlasten lediglich über die mit M_t statisch äquivalenten Kräfte abgetragen. Das Auftreten von Nullelementen in der Hauptdiagonalen wird daher darauf zurückgeführt, daß sowohl der Verschiebungsansatz als auch der Momentenansatz frei gewählt worden sind und die Ordnung des Ansatzes für die Durchbiegungen so klein ist, daß durch deren Ableitungen kein Momentenzustand darstellbar ist.

Entsprechend ergeben

$$-G \cdot M_n^e - H^T \cdot w^e$$

die Neigungswinkel der Elementkanten. Auf die Größen $\frac{\partial w}{\partial n}$, die stetig verlaufen und keinen Knick aufweisen müssen, üben der Momentenansatz über das Stoffgesetz

$$\Delta \cdot (S^{-1})^T \cdot D_{bb} \cdot S^{-1} \cdot M_n^e$$

sowie der Verschiebungsansatz für w

$$(S^{-1})^T \cdot C^T \cdot F^T \cdot w^e$$

einen Einfluß aus.

Soweit W_n nicht vorgeschrieben ist, werden die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen für W_n wegen der gerade nur im Vorzeichen unterschiedlichen Definition (Bild 4.7) zwischen den beiden angrenzenden Elementen durch einfache Überlagerung erfüllt.

Während die Behandlung der Randbedingungen für die Membranwirkung wie üblich erfolgt, müssen die Randbedingungen für die Kantenknoten vorsichtig eingearbeitet werden. Falls beispielsweise $\frac{\partial w}{\partial n}$ an einer Innenkante vorgeschrieben ist, müssen für die Innenkante zwei unabhängige Parameter eingeführt werden. Momentenlasten werden als Sprünge in den Kantenmomenten berücksichtigt.

Es sei vermerkt, daß die gemischte Elementmatrix mit einem relativ geringen Rechenaufwand aufzustellen ist.

Das Gleichungssystem der gemischten Methode ist im allgemeinen nichtpositiv definit, so daß der Algorithmus von CHOLESKY geringfügig modifiziert werden muß, um während des Auflösungsprozesses in der Hauptdiagonalen auftretende negative Elemente oder Nullelemente durch Zeilen- und Spaltenvertauschung zu eliminieren.

Die anfallenden gemischten Gleichungen lassen sich aber mit der normalen GAUß-Elimination auflösen, wenn in dem Lösungsvektor die Reihenfolge der Knotenparameter so organisiert wird, daß vor den Durchbiegungen des Elementes mindestens ein Momentenparameter desselben Elementes auftaucht. Durch diese geschickte Knotennumerierung wird die Zeilen- und Spaltenvertauschung unnötig [21]. Die Randbreite wird allerdings dabei vergrößert.

5. IDEALISIERUNG GERISSENER STAHLBETONPLATTEN

5.1 Voraussetzungen zur Berechnung

Hinsichtlich der Rißbildung werden folgende Annahmen getroffen.

Rißbildung

Die Rißbildung wird innerhalb der einzelnen Elementbereiche in verschmierter Form betrachtet. Kein bestimmter Kontrollpunkt braucht festgelegt zu werden, weil für das gewählte finite Element jede Schnittgröße konstanten Verlauf hat. Die Plastizitätskontrolle wird demnach elementweise vorgenommen.

Rißkoordinatensystem

Das Rißkoordinatensystem wird näherungsweise durch die Hauptmomentenrichtungen im ungerissenen Zustand ersetzt [60, 106]. Risse treten auf, wenn die Spannungen in den Rißrichtungen die Betonzugfestigkeit überschreiten.

Außerdem liegen der Rechnung folgende Voraussetzungen zugrunde:

Bewehrung

Die Stahlbetonplatte ist so bewehrt, daß das Druckversagen des Betons vor dem Erreichen der Fließgrenze des Stahls ausgeschlossen ist. Die Querschnittserschöpfung wird durch Fließen der Stahleinlagen eingeleitet, so daß die für die Momentenumlagerung notwendige Rotationsfähigkeit gewährleistet wird. Die maßgebende Bruchart erfolgt durch Biegung. Andere Brucharten, wie Durchstanzen und Lasteinleitungsprobleme, können nicht behandelt werden.

Theorie I. Ordnung

Große Durchbiegungen werden nicht berücksichtigt. Die Rechnung wird am unverformten System durchgeführt. Die Druckmembranwirkung unter Gebrauchslast kann hingegen berechnet werden.

Weglassung des Querkrafteinflusses

Die Querkraftverformungen werden gegenüber den Verformungen aus Biegung vernachlässigt.

Materialverhalten (s. Kapitel 2)

Die Werkstoffe Beton und Stahl verhalten sich linear elastisch bis zur Zugfestigkeit. Es wird ein idealer Verbund zwischen Beton und Stahl vorausgesetzt. Die zeitabhängigen Formänderungen - Kriechen und Schwinden - werden nicht betrachtet.

Belastung

Die Querlasten werden monoton und proportional zunehmend angenommen. Entlastung und Wechselbelastung werden nicht untersucht.

5.2 Rißquerschnitt

Um den Rißquerschnitt statisch erfassen zu können, wird der Rißquerschnittszustand nach folgenden Sätzen idealisiert.

Bernoulli-Hypothesen

Wie in der üblichen Plattentheorie wird die Gültigkeit der Bernoulli-Hypothesen vorausgesetzt. D.h. die Normale zur Mittelfläche bleibt nach der Verformung gerade und normal zur verformten Mittelfläche.

Mögliche Rißquerschnittszustände (Bild 5.1)

Die in Bild 5.1 dargestellten sechs Rißquerschnittszustände sind möglich.

Jedes Rißufer ist eben und senkrecht zur Plattenmittelfläche. Diese Annahme reduziert den räumlichen Rißzustand auf ein zweidimensionales Plattenproblem und verringert den Rechenaufwand erheblich. Den Rißzustand beschreiben somit nur folgende drei Parameter:

t_1 : Rißtiefe im I-Querschnitt

t_2 : Rißtiefe im II-Querschnitt

φ_0 : Verdrehungswinkel des (I,II)-Systems gegen das (x,y)-System.

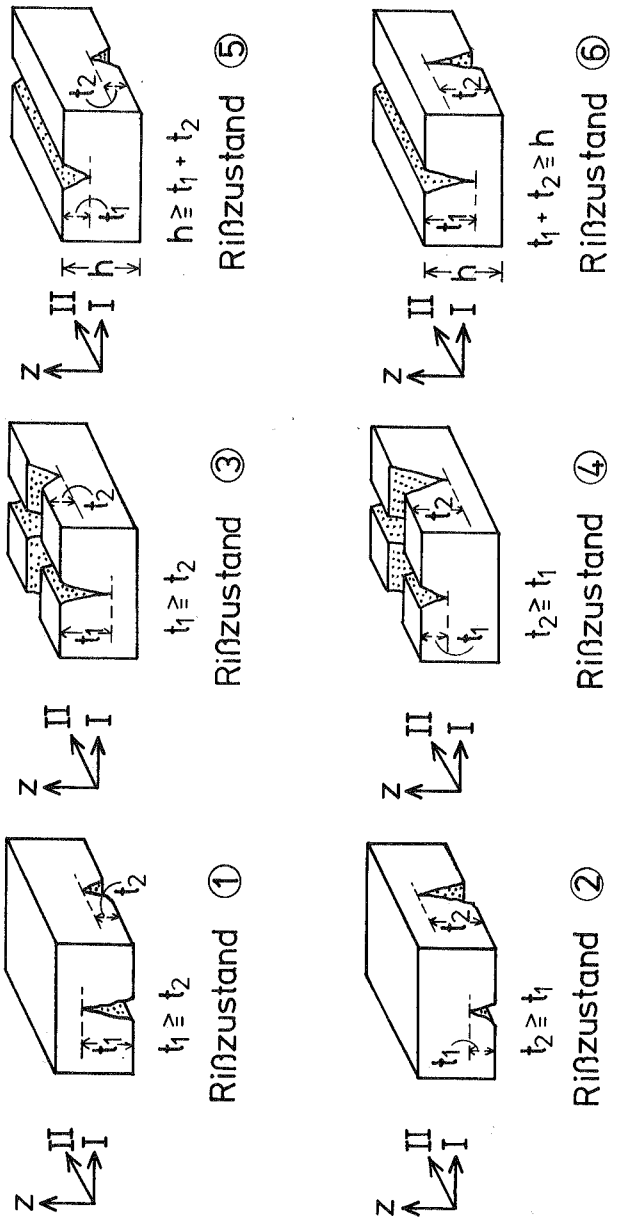


Bild 5.1 Sechs mögliche Rißzustände ① bis ⑥

Idealisierung des Querschnittes (Bild 5.2 und 5.3)

Jeder gerissene Querschnitt setzt sich zusammen aus

- | | |
|---------------------------------|---|
| Betonschicht B_{iso} | Isotrope und homogene Betonschicht
Diese Schicht ist im zweiachsigen Spannungszustand. |
| Betonschicht B_I und B_{II} | In einer Richtung gerissene Betonschichten
Einachsiger Spannungszustand
Keine Querverwirkung. |
| Betonschicht B_o | In beiden Richtungen gerissene Betonschicht
B_o hat keine Steifigkeit und dient nur zum Festhalten von Bewehrungsstäben. |
| Bewehrungsnetz i | Jeder Bewehrungsstab wird entweder auf Z_{ni} oder auf Z_{si} beansprucht.
Das Bewehrungsnetz wird gebietsweise gleichmäßig verteilt angenommen. |

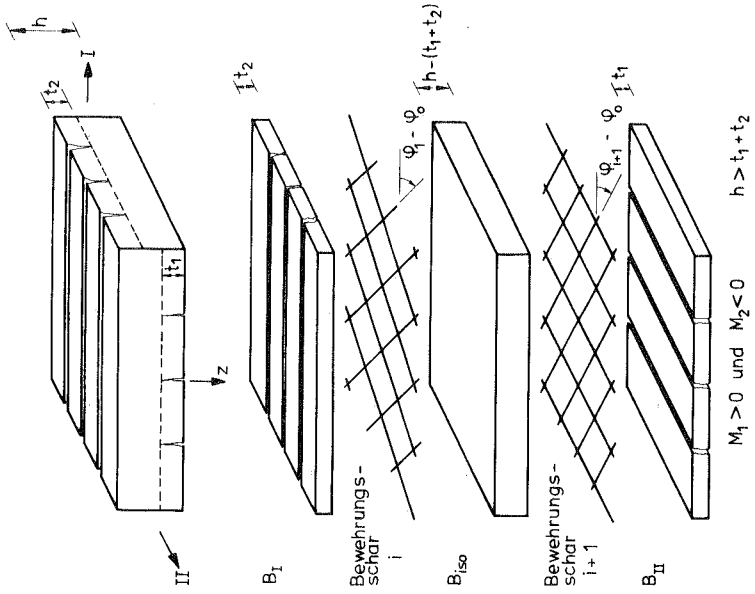


Bild 5.3 Idealisierter Rißquerschnitt
Rißzustand ⑤

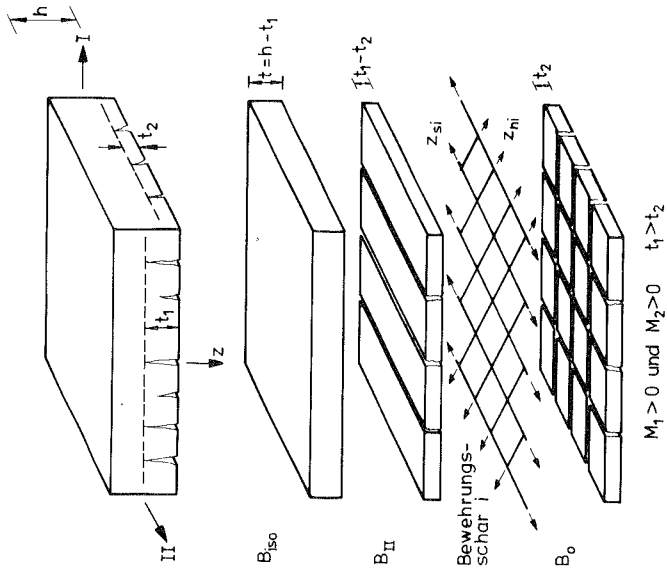


Bild 5.2 Idealisierter Rißquerschnitt
Rißzustand ③

6. BERECHNUNGSMETHODE

6.1 Stoffgesetz für den Reißquerschnitt

In diesem Unterkapitel wird mit den Annahmen gemäß Unterkapitel 3.3 und Unterkapitel 5.2 ein Stoffgesetz für den idealisierten Reißquerschnitt im Reißkoordinatensystem (I,II) hergeleitet. Der gerissene Verbundquerschnitt läßt sich in den Betonanteil und in den Anteil der Bewehrungsstäbe aufteilen, die sich sowohl als elastisch und als auch plastisch verhalten können. Da es sich im Stoffgesetz nur um elastische Anteile des Querschnitts handelt, werden die plastischen Stahleinlagen erst im nächsten Unterkapitel behandelt.

Betonanteil

Zum Betonanteil zählen die Betonschichten B_{iso} , B_I , B_{II} und B_O . Für den Betonanteil sind zunächst die konstitutiven Gleichungen (3.3-4) zu finden. Die Spannzahlen in (3.3-4) werden spaltenweise unter Beachtung der Einheitsverformungszustände bestimmt. Im folgenden kennzeichnet der obere Querstrich die Zugehörigkeit der Größe zu ihrer eigenen Referenzachse. Die Querschnittswerte sind im Anhang für jeden Reißquerschnittszustand angegeben.

Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_1 = 1$

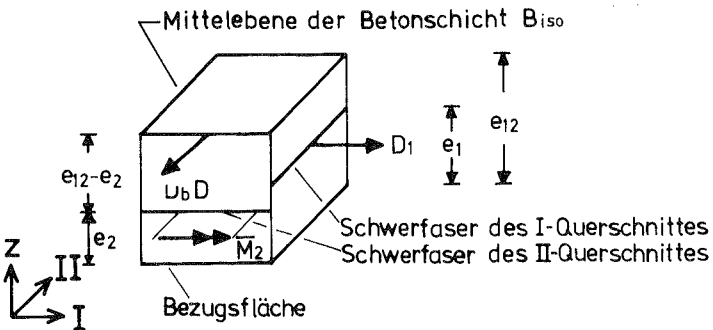


Bild 6.1 Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_1 = 1$

Unter dem Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_1=1$ versteht man, daß in diesem Zustand ausschließlich $\bar{\epsilon}_1$ vorhanden ist, während die anderen Komponenten $\bar{\epsilon}_2$, $\bar{\epsilon}_{12}$, $\bar{\phi}_1$, $\bar{\phi}_2$ und $\bar{\phi}_{12}$ Null bleiben. Infolge $\bar{\epsilon}_1=1$ entsteht im I-Querschnitt die Normalkraft $\bar{N}_1 = D_1$, deren Wirkungslinie in der Schwerfaser e_1 liegt. Der II-Querschnitt hat über die Querdehnungswirkung $\bar{N}_2 = \nu_b \cdot D$. Die Exzentrizität $(e_{12} - e_2)$ bringt zu \bar{M}_2 den Beitrag $(e_{12} - e_2) \cdot \bar{N}_2$.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= D_1 & \bar{M}_1 &= 0 \\ \bar{N}_2 &= \nu_b \cdot D & \bar{M}_2 &= \nu_b \cdot D \cdot (e_{12} - e_2) \\ \bar{N}_{12} &= 0 & \bar{M}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_2=1$

Analog zum vorigen Zustand erhält man

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \nu_b \cdot D & \bar{M}_1 &= \nu_b \cdot D \cdot (e_{12} - e_1) \\ \bar{N}_2 &= D_2 & \bar{M}_2 &= 0 \\ \bar{N}_{12} &= 0 & \bar{M}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_{12}=1$

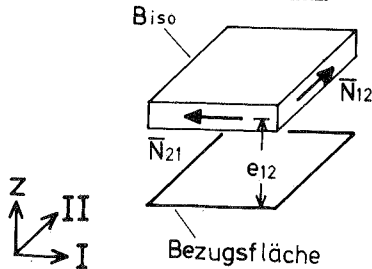


Bild 6.2 Einheitsverformungszustand $\bar{\epsilon}_{12}=1$

In diesem Zustand bleiben die Betonschichten B_I und B_{II} spannungsfrei, so daß für die Membranschubkräfte $\bar{N}_{12} = \bar{N}_{21}$ nur die isotrope Betonscheibe B_{iso} zur Verfügung steht. Es kommt daher zu

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= 0 & \bar{M}_1 &= 0 \\ \bar{N}_2 &= 0 & \bar{M}_2 &= 0 \\ \bar{N}_{12} &= \frac{D(1-\nu_b)}{2} & \bar{M}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Einheitsverformungszustand $\bar{\Phi}_1 = 1$

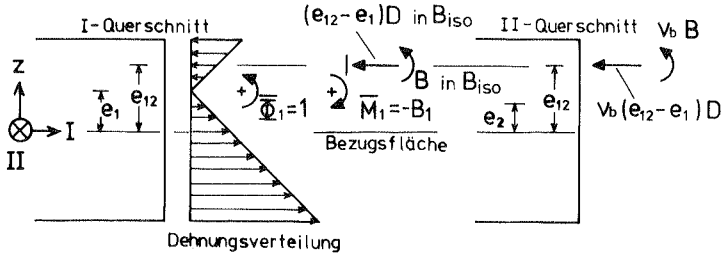


Bild 6.3 Einheitsverformungszustand $\bar{\Phi}_1 = 1$

Aus der linearen Dehnungsverteilung im I-Querschnitt ergibt sich $\bar{M}_1 = -B_1$. Im II-Querschnitt tritt die Spannungsverteilung über die Höhe der Betonscheibe B_{iso} auf, die sich aus dem konstanten Anteil $-v_b D(e_{12} - e_1)$ und dem Momentenanteil $-v_b B$ zusammensetzt.

$$\begin{array}{ll} \bar{N}_1 = 0 & \bar{M}_1 = -B_1 \\ \bar{N}_2 = -v_b D(e_{12} - e_1) & \bar{M}_2 = -v_b B - v_b D(e_{12} - e_1)(e_{12} - e_2) \\ \bar{N}_{12} = 0 & \bar{M}_{12} = 0 \end{array}$$

Einheitsverformungszustand $\bar{\Phi}_2 = 1$

Entsprechend

$$\begin{array}{ll} \bar{N}_1 = -v_b D(e_{12} - e_2) & \bar{M}_1 = -v_b B - v_b D(e_{12} - e_1)(e_{12} - e_2) \\ \bar{N}_2 = 0 & \bar{M}_2 = -B_2 \\ \bar{N}_{12} = 0 & \bar{M}_{12} = 0 \end{array}$$

Einheitsverformungszustand $2\bar{\Phi}_{12}=1$

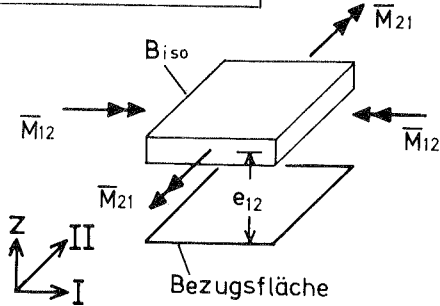


Bild 6.4 Einheitsverformungszustand $2\bar{\Phi}_{12}=1$

Die Drillmomente werden nur durch B_{iso} aufgenommen. Der Drillwiderstand von B_{iso} ist $\frac{B(1-\nu_b)}{2}$, und $\bar{M}_{12} = \bar{M}_{21}$.

$$\begin{array}{ll} \bar{N}_1 = 0 & \bar{M}_1 = 0 \\ \bar{N}_2 = 0 & \bar{M}_2 = 0 \\ \bar{N}_{12} = 0 & \bar{M}_{12} = -\frac{B(1-\nu_b)}{2} \end{array}$$

Die ermittelten Spannzahlen ordnet man folgendermaßen in Matrizenform ein.

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{12} \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \bar{E}_{mm} & \bar{E}_{mb} \\ \bar{E}_{bm} & \bar{E}_{bb} \end{bmatrix}_b \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\Phi}_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1-1)$$

└──────────────────┘
Betonanteil

wobei

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{mm} \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} D_1 & \nu_b D & \cdot \\ \nu_b D & D_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{D(1-\nu_b)}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1-2)$$

$$[\bar{E}mb]_b = \begin{bmatrix} \cdot & -\nu_b D(e_{12} - e_2) & \cdot \\ -\nu_b D(e_{12} - e_1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.1-3)$$

$$[\bar{E}bm]_b = -[\bar{E}mb]_b^T \quad (6.1-4)$$

$$[\bar{E}bb]_b = \begin{bmatrix} B_1 & \nu_b B + \nu_b D(e_{12} - e_1)(e_{12} - e_2) & \cdot \\ \nu_b B + \nu_b D(e_{12} - e_1)(e_{12} - e_2) & B_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{B(1 - \nu_b)}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1-5)$$

(6.1-1) bezieht sich auf die Schwerachsen (e_1, e_2, e_{12}) .

Die Hypermatrix

$$\begin{bmatrix} \bar{E}mm & \bar{E}mb \\ \bar{E}bm & -\bar{E}bb \end{bmatrix}_b$$

ist nicht symmetrisch. Der rechte obere Quadrant $[\bar{E}mb]_b$ und der linke untere Quadrant $[\bar{E}bm]_b$ unterscheiden sich im Vorzeichen. Dieser Vorzeichenunterschied wird aber später durch eine Matrizenoperation ausgeglichen. Eine Energierechnung ist mit Zustandsgrößen durchzuführen, die alle auf eine gemeinsame Bezugsebene bezogen sind. Bezieht man die Schnittkräfte mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{M}_{12} \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_b & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_{12} \\ \bar{\mathbf{M}}_{12} \end{bmatrix}_b \quad (6.1-6)$$

mit

$$\mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{e}_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1-7)$$

und die Verformungen mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{e}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1-8)$$

auf die Bezugsfläche (z.B. Plattenmittelfläche), so erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{M}_{12} \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{mm} & \mathbf{E}_{mb} \\ \mathbf{E}_{bm} & -\mathbf{E}_{bb} \end{bmatrix}_b \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1-9)$$

Die Untermatrizen in (6.1-9) sind durch

$$[\mathbf{E}_{mm}]_b = [\bar{\mathbf{E}}_{mm}]_b \quad (6.1-10)$$

$$[\mathbf{E}_{mb}]_b = [\bar{\mathbf{E}}_{mb}]_b - [\bar{\mathbf{E}}_{mm}]_b \cdot \mathbf{e}_b \quad (6.1-11)$$

$$[\mathbf{E}_{bm}]_b = [\bar{\mathbf{E}}_{bm}]_b + \mathbf{e}_b \cdot [\bar{\mathbf{E}}_{mm}]_b \quad (6.1-12)$$

$$[\mathbf{E}_{bb}]_b = [\bar{\mathbf{E}}_{bb}]_b - \mathbf{e}_b \cdot [\bar{\mathbf{E}}_{mb}]_b + [\bar{\mathbf{E}}_{bm}]_b \cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_b \cdot [\bar{\mathbf{E}}_{mm}]_b \cdot \mathbf{e}_b \quad (6.1-13)$$

gegeben. Es gelten hierbei

$$[\mathbf{E}_{mm}]_b^T = [\mathbf{E}_{mm}]_b \quad - \quad [\mathbf{E}_{mb}]_b^T = [\mathbf{E}_{bm}]_b$$

$$- \quad [\mathbf{E}_{bm}]_b^T = [\mathbf{E}_{mb}]_b \quad [\mathbf{E}_{bb}]_b^T = [\mathbf{E}_{bb}]_b$$

Vergleicht man (6.1-9) mit (6.1-1), so kann man feststellen, daß die Exzentrizitätsmatrix \mathbf{e}_b für die Kopplung der Scheiben- und Plattenwirkung eine wesentliche Rolle spielt. Die Kopplungsmatrizen $[\overline{\mathbf{E}}_{mb}]_b$ und $[\overline{\mathbf{E}}_{bm}]_b$ in (6.1-1) enthalten die vernachlässigbar kleinen Steifigkeitswerte, die nur auf der Querkontraktion in B_{iso} beruhen. Im auf die Bezugsfläche bezogenen Stoffgesetz (6.1-9) sind dagegen die beiden Zustände, wie man in (6.1-11) und (6.1-12) sieht, über $[\mathbf{E}_{mb}]_b$ und $[\mathbf{E}_{bm}]_b$ umso stärker gekoppelt, je weiter die Schwerlinien von der Bezugsfläche abweichen. (6.1-13) ist der in Matrizenform dargestellte STEINERSche Satz.

Elastischer Bewehrungsanteil

Jede Bewehrungsschar hat einen konstanten Hebelarm e_i aber kein Eigenträgheitsmoment. Somit ergibt sich nach (3.3-8) bis (3.3-11)

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}_s = \sum_i^e \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1-14)$$

└─ Stahl

mit

$$[\mathbf{E}_{mm}]_i = [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0}^T \cdot [\mathbf{E}_{ns}]_i \cdot [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0} \quad (6.1-15)$$

$$[\mathbf{E}_{mb}]_i = -e_i \cdot [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0}^T \cdot [\mathbf{E}_{ns}]_i \cdot [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0} \quad (6.1-16)$$

$$[\mathbf{E}_{bm}]_i = -[\mathbf{E}_{mb}]_i^T \quad (6.1-17)$$

$$[\mathbf{E}_{bb}]_i = e_i^2 \cdot [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0}^T \cdot [\mathbf{E}_{ns}]_i \cdot [\mathbf{T}_\epsilon]_{\varphi_i - \varphi_0} \quad (6.1-18)$$

\sum_1^e bezieht sich auf elastisch verbleibende Bewehrungs-
scharen.

Das Werkstoffgesetz für den Gesamtquerschnitt wird dann aus

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}_b + \begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}_s$$

zu

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix}$$

(6.1-19)

wobei

$$\begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix}_b + \sum_1^e \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix}_i \quad (6.1-20)$$

Hiermit sei betont, daß die Stoffmatrizen in (6.1-20) Funk-
tionen der Systemparameter

$\left. \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \right\}$ zur Beschreibung des Rißquerschnittes
 $\left. \sum_1^e \right\}$ zur Indizierung des elastischen Zustandes der
Bewehrungsstäbe

und der Materialparameter (E_b, ν_b, E_s) sind. Die
Systemparameter beschreiben als Variable den sich verändernden
Systemzustand, die Materialkennwerte sind jedoch als konstant
anzunehmen. Da (6.1-20) Sekantenmoduli sind, wird schon hier
angedeutet, daß zur schrittweisen nichtlinearen Rechnung ir-
gendeine iterative Methode herangezogen werden muß (s. Bild 6.5).

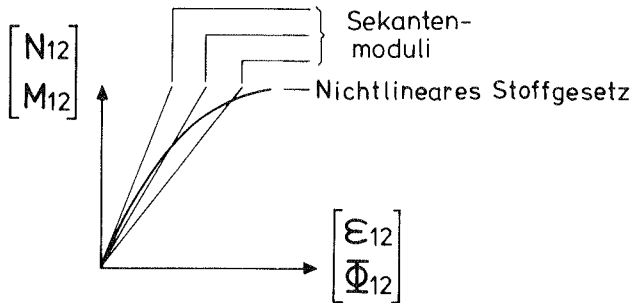


Bild 6.5 Sekantenmoduli zur Sekanteniteration

Zur Anwendung in der gemischten Methode muß man (6.1-19) weiter umschreiben.

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mb} \\ D_{bm} & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} \quad (6.1-21)$$

Hierbei

$$[D_{mm}] = [E_{mm}] + [E_{mb}] \cdot [E_{bb}]^{-1} \cdot [E_{bm}] \quad (6.1-22)$$

$$[D_{mb}] = - [E_{mb}] \cdot [E_{bb}]^{-1} \quad (6.1-23)$$

$$[D_{bm}] = [E_{bb}]^{-1} \cdot [E_{bm}] \quad (6.1-24)$$

$$[D_{bb}] = [E_{bb}]^{-1} \quad (6.1-25)$$

und

$$[D_{mb}] = [D_{bm}]^T \quad [D_{bm}] = [D_{mb}]^T$$

Die Symmetrie in den Stoffmatrizen ist also hergestellt. (6.1-19) bzw. (6.1-21) ist das Stoffgesetz für den idealisierten Rißquerschnitt, das sich durch die stark belegten Kopplungsmatrizen auszeichnet.

Die Rechnung mit empirischen Ansätzen für die Momenten-Krümmungs-Beziehung [106, 114, 120, 132] kann den Kopplungszustand nicht darstellen. Die Kopplungsmatrizen sind nur dann zu ermitteln, wenn man z.B. bei Verwendung des Schichtenmodells den Plattenquerschnitt in einzelne Querschnittselemente aufteilt, um die Unsymmetrie des RiBquerschnittes bezüglich der Plattenmittelfläche zu berücksichtigen. Beim Schichtenmodell ist eine dreidimensionale Diskretisierung erforderlich. Die Idealisierung in der vorliegenden Arbeit unterscheidet sich vom Schichtenmodell dadurch, daß der RiBzustand mit Einführung der einfachen Querschnittsparameter auf eine zweidimensionale statische Aufgabe zurückgeführt wird. Die analytische Darstellung des Querschnittszustandes erspart hier die Diskretisierung und die Integration über die Plattendicke.

6.2 Gemischte Methode

Das Energieintegral (4.2-11) liefert einen vom gewählten Bezugssystem unabhängigen Wert. Die Energieauswertung wurde in Unterkapitel 4.2 bezogen auf das (x,y) -System gezeigt. Es empfiehlt sich aber hier, zunächst das Gebietsintegral mit (6.1-21) im RiBkoordinatensystem auszuführen und danach die diskretisierten Knotengrößen auf das (x,y) -System zu transformieren.

B, **S** und **C** müssen dem (I,II) -System entsprechend umgerechnet werden.

Wenn man (6.1-21) in den Energieausdruck einsetzt und nach den Knotenparametern variiert, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} u_{12}^{eT} & v_{12}^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{eT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{mm} & \Delta \cdot B^T \cdot D_{mb} \cdot S^{-1} & 0 \\ \Delta (S^{-1})^T \cdot D_{bm} \cdot B & -G & -H^T \\ 0 & -H & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12}^0 \\ A_n \cdot w_n^0 \\ Q^0 + A_f \cdot V_n^0 \end{bmatrix}$$

(6.2-1)

(6.2-1) wird weiter mit Hilfe der Verschiebungs- und der Knotenkräftetransformation

$$\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}_{12} = [T] \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}$$

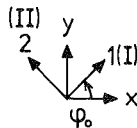
(6.2-2)

$$[P^0] = [T]^T [P^0]_{12}$$

(6.2-3)

mit

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \cdot & \cdot & \sin \varphi_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \varphi_0 & \cdot & \cdot & \sin \varphi_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos \varphi_0 & \cdot & \cdot & \sin \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cdot & \cdot & \cos \varphi_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sin \varphi_0 & \cdot & \cdot & \cos \varphi_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\sin \varphi_0 & \cdot & \cdot & \cos \varphi_0 \end{bmatrix}$$



(6.2-4)

auf das (x,y)-System transformiert.

$$\begin{pmatrix} u^{eT} & v^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n^{eT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{eT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P^{\circ} \\ A_n \cdot w_n^{\circ} \\ Q^{\circ} + A_f \cdot V_n^{\circ} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T^T \cdot K_{mm} \cdot T & \Delta \cdot T^T \cdot B^T \cdot D_{mb} \cdot S^{-1} & 0 \\ \Delta (S^{-1})^T \cdot D_{bm} \cdot B \cdot T & -G & -H^T \\ 0 & -H & 0 \end{bmatrix}$$

(6.2-5)

Der Plattenanteil ist von der Transformation in (x,y)-Ebene unabhängig.

Behandlung der plastischen Bewehrungsstäbe

Die Fließspannungen in den Bewehrungsscharen werden als Anfangsspannungen aufgefaßt und in $[Z_{ns}]_i^{\circ}$ zusammengefaßt. $[Z_{ns}]_i^{\circ}$ hat positive (negative) Werte, wenn die Scharen Zug(Druck)-Fließspannungen aufweisen.

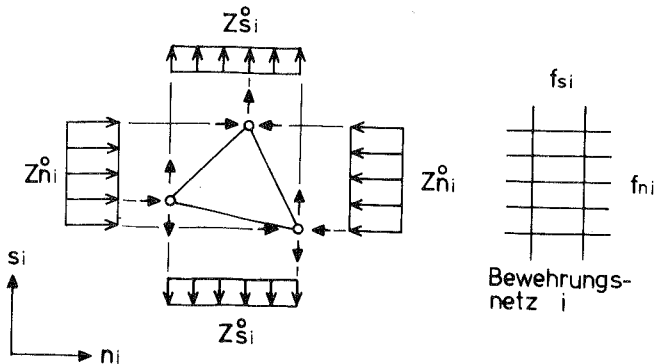


Bild 6.6 Fließspannungen als Anfangsspannungen

Z.B.

$$\begin{bmatrix} Z_{ns} \end{bmatrix}_i^\circ = \begin{bmatrix} Z_n \\ Z_s \\ 0 \end{bmatrix}_i^\circ = \begin{bmatrix} 0_f \cdot f_{ni} \\ -0_f \cdot f_{si} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Bild 6.6})$$

Die inneren Membran- und Momentenlasten lassen sich wie folgt errechnen.

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}_i^\circ = \begin{bmatrix} [T_e] \varphi_i - \varphi_i [Z_{ns}]_i^\circ \\ e_i [T_e] \varphi_i - \varphi_i [Z_{ns}]_i^\circ \end{bmatrix} \quad \text{für einzelne Scharen}$$

Im I- und II-Querschnitt sind dann zusätzlich zu (6.1-19) noch die Schnittkräfte

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}^\circ = \sum_i^p \begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix}_i^\circ \quad \sum_i^p: \text{Über plastische Bewehrungsscharen aufsummieren}$$

als Anfangsspannungen vorhanden. Statt (6.1-19) und (6.1-21) schreibt man

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mm} & E_{mb} \\ E_{bm} & -E_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{12}^\circ \\ M_{12}^\circ \end{bmatrix} \quad (6.2-6)$$

und für die gemischte Methode

$$\begin{bmatrix} N_{12} - N_{12}^\circ \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mb} \\ D_{bm} & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ M_{12} - M_{12}^\circ \end{bmatrix} \quad (6.2-7)$$

oder

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mb} \\ D_{bm} & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{12}^\circ \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{mb} M_{12}^\circ \\ -D_{bb} M_{12}^\circ \end{bmatrix} \quad (6.2-8)$$

Die Potentiale infolge

$$N_{12}^\circ - D_{mb} \cdot M_{12}^\circ \quad (\text{Vorgegebene Membrankräfte})$$

und

$$D_{bb} \cdot M_{12}^\circ \quad (\text{Vorgegebene Krümmungen})$$

sind bzw.

$$\begin{aligned} \pi_N^{\circ} &= \Delta \cdot [\epsilon_{12}]^T \cdot (N_{12}^{\circ} - D_{mb} M_{12}^{\circ}) \\ &= \Delta \cdot \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}_{12}^T \cdot B^T \cdot (N_{12}^{\circ} - D_{mb} M_{12}^{\circ}) \quad (6.2-9) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{x}}^{\circ} &= \Delta \cdot M_{12}^T \cdot D_{bb} \cdot M_{12}^{\circ} \\ &= \Delta \cdot M_n^{eT} \cdot (S^{-1})^T \cdot D_{bb} \cdot M_{12}^{\circ} \quad (6.2-10) \end{aligned}$$

Variiert man in dem Energieausdruck π_N° und $\pi_{\bar{x}}^{\circ}$ mit, so erhält man nach der Koordinatentransformation die folgende Lastspalte (rechte Seite in (6.2-5)).

$$\left[\begin{array}{l} P^{\circ} \\ -\Delta \cdot [T]^T \cdot B^T \cdot N_{12}^{\circ} \\ + \Delta \cdot [T]^T \cdot B^T \cdot D_{mb} \cdot M_{12}^{\circ} \\ \hline A_n \cdot w_n^{\circ} \\ -\Delta \cdot (S^{-1})^T \cdot D_{bb} \cdot M_{12}^{\circ} \\ \hline Q^{\circ} \\ + A_f \cdot V_n^{\circ} \end{array} \right] \quad (6.2-11)$$

Gerät eine Stabschar der Bewehrung ins Fließen, dann muß (6.2-11) ermittelt werden.

6.3 Nichtlineare Rechentechnik

Bevor auf die nichtlineare Rechentechnik eingegangen wird, soll kurz das charakteristische Tragverhalten von Stahlbetonkonstruktionen an einem fiktiven Beispiel erläutert werden.

Erläuterungsbeispiel

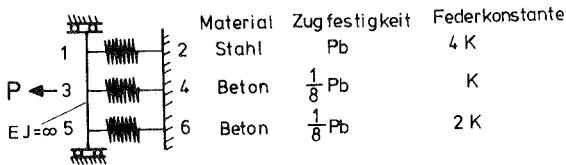


Bild 6.7 Federsystem als Mehrstoffsystem

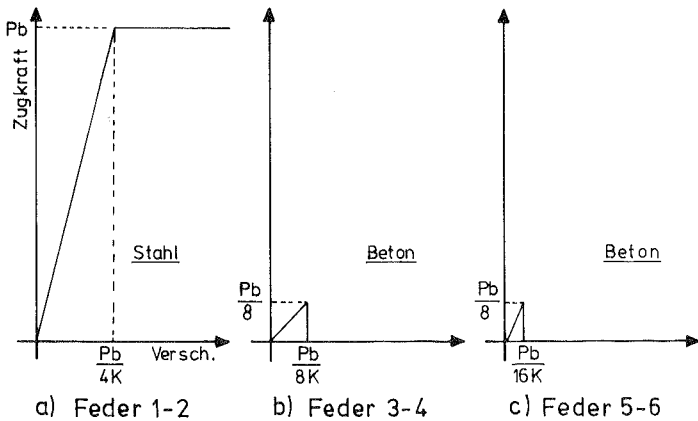


Bild 6.8 Materialverhalten der drei Federn im Zugbereich

Es wird ein Federsystem nach Bild 6.7 mit der Zugkraft P zentrisch gezogen. Das statisch zweifach unbestimmte System setzt sich aus einer Stahl-Feder (1-2) und zwei Beton-Federn (3-4 und 5-6) zusammen, deren Materialverhalten in Bild 6.8 dargestellt sind. Die Stahl-Feder verhält sich linear elastisch und ideal plastisch. Bei den spröden Beton-Federn ist das Erreichen ihrer Zugfestigkeit einer Verkleinerung des Querschnitts des Gesamtsystems gleichzusetzen. Den drei Federn gemeinsam ist das elastische Verhalten bis zur Zugfestigkeit.

Das berechnete Last-Verschiebungs-Diagramm ist in Bild 6.9 eingetragen. Die Kurve läuft o-a-b-c-d-e-f. Das System 0 ist der Ausgangszustand für die statische Rechnung. Bei $P = (7/16) P_b$ wird die Zugfestigkeit der Feder 5-6 erreicht. Damit zerreißt diese Feder, man erhält schlagartig einen Sprung von System 0 auf System 1. Diesen Sprung zeigt a-b. Die Statik vermag nicht, der dynamischen Veränderung des Systems zu folgen. Eine weitere Verfolgung des Vorganges ist nur dann möglich, wenn der neue Systemzustand als stabiler statischer Zustand angesehen wird. Man weiß noch nicht, ob für $P = (7/16) P_b$ in dem neuen System nirgendwo wieder die Plastizitätsbedingungen verletzt sind. Die in 5-6 eingespeicherte innere Energie o-a-g ist verschwunden. Vor und nach dem Sprung ist die Gesamtenergie nicht ausgeglichen. Nachdem man festgestellt hat, daß im System 1 für $P = (7/16) P_b$ nirgendwo die Zugfestigkeit überschritten ist, kann die Last weiter gesteigert werden. Bei Laststeigerung verhält sich das System 1 zunächst wieder linear, bis in c die Feder 3-4 reißt. Zu beachten ist, daß b und c auf einer vom Ausgangspunkt o ausgehenden geraden Linie liegen. Der Sekantenmodul o-b-c springt mit der zweiten Systemveränderung auf o-d-e über. Die Tragfähigkeit des Systems 2 ist gleich der Festigkeit der Stahl-Feder.

Die Systemveränderung geht in Wirklichkeit bei der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen mikroskopisch und sukzessiv vor sich. Die springenden Querstriche sind unerkennbar, so daß man im Last-Verschiebungs-Diagramm eine Kurve wie die punktierte Linie erhält.

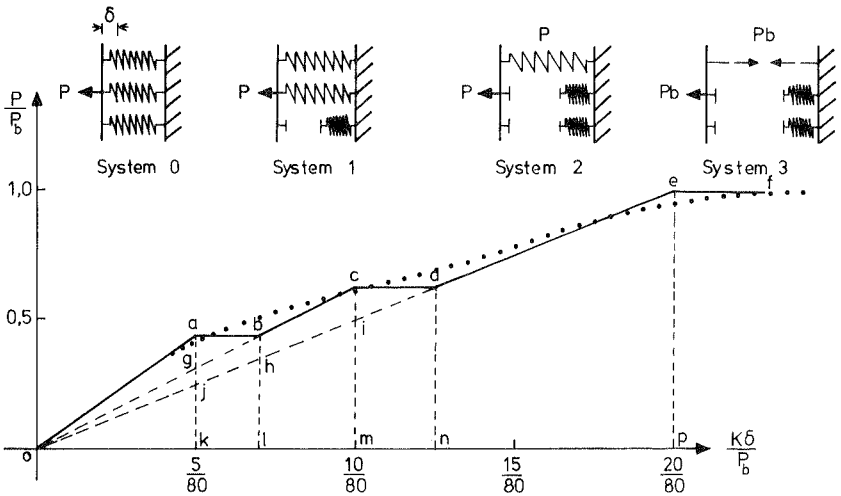


Bild 6.9 Last-Verschiebungs-Diagramm des Federsystems (sog. nackter Rißzustand)

Nichtlineare Rechentechnik

Die Last wird in mehreren Laststufen aufgebracht. Für jedes Lastniveau müssen die Gleichgewichts-, Verträglichkeits- und Plastizitätsbedingungen eingehalten werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kantenmomente und die Verträglichkeitsbedingungen für die Verschiebungen sind wegen der gewählten Ansätze von vornherein befriedigt. Um die Plastizitätsbedingungen für Beton und Stahl zu gewährleisten, ist für jede Laststufe ein Iterationsprozeß erforderlich. Zur Unterscheidung der Last- und Iterationsschritte führt man folgende Indizes ein.

- l : für Lastschritte
- k : für Iterationsschritte

Darstellung des Rißzustandes der Platte

System s (t₁, t₂)^l Lastschritt
 k Iterationsschritt

Am Ende des (n-1)-ten Lastschrittes sei der Rißzustand $s(t_1, t_2)^{n-1}$ bekannt, in dem die Plastizitätsbedingungen eingehalten sind. Die Iteration für den nächsten n-ten Lastschritt wird folgendermaßen durchgeführt.

Berechnungsablauf

① Laststeigerung

Zu Beginn werden die Querlasten proportional um ein Inkrement erhöht. Je kleiner das Lastinkrement ist, desto besser werden die Zustandsgrößen angenähert. Der Index k wird auf Null gesetzt.

② Beginn der Iteration

Indexberechnung

$$k = k + 1$$

└──┬── alt (vorher)
 └── neu (nachher)

③ Aufbau des Gleichungssystems

Die Systemmatrix wird unter Beachtung des augenblicklichen Rißzustandes

$$s(t_1, t_2)_{k-1}^n$$

aufgestellt. Für $k = 1$ hat man den Ausgangszustand für den n-ten Lastschritt

$$s(t_1, t_2)^{n-1}.$$

Der Lastvektor beinhaltet nicht nur die Gesamtquerlasten, sondern auch die Beiträge von N_{12}^0 und M_{12}^0 , wenn die Stahleinlagen bereits teilplastiziert sind.

④ Auflösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem ist aufzulösen.

⑤ Rechnung der Zustandsgrößen

Mit dem Lösungsvektor werden alle nötigen Zustandsgrößen berechnet.

⑥ Plastizitätskontrollen und Systemmodifikation

In jedem Elementbereich wird überprüft, ob die Betonzugfestigkeit und die Fließgrenze von Stahl erreicht sind. Diese Kontrollen nennt man Riß- und Fließkontrolle. Bei verletzten Plastizitätsbedingungen muß der Systemzustand so modifiziert werden, daß das Riß- und Fließkriterium bestmöglich erfüllt werden. Veränderungen werden in

$$s(t_1, t_2)_k^n$$

eingespeichert.

⑦ Konvergenzkriterium

Am Ende jedes Iterationsschrittes wird abgefragt, inwieweit die Plastizitätsbedingungen erfüllt sind, ob es sinnvoll ist, weiter zu iterieren, oder ob der Iterationsprozeß abgebrochen werden soll. Hierzu ist ein Konvergenzkriterium notwendig. Ist das Kriterium erfüllt, so wird die Iteration abgebrochen, und ein neuer Lastschritt kann begonnen werden. Wenn nicht, so ist die Iteration fortzuführen (Rücksprung zu ②).

Innerhalb einer Belastungsstufe ist die geschilderte Sekanteniteration mit Hilfe von (6.2-8) für den augenblicklichen Zustand solange fortzusetzen, bis sich die Risse im modifizierten System nicht mehr weiter fortpflanzen.

Die Plastizitätskontrolle und die Systemmodifikation in ⑥ sind die wichtigsten Bestandteile der nichtlinearen Rechnung. Bei der Spannungskontrolle werden die errechneten Beton- und Stahlspannungen mit den Materialfestigkeiten verglichen. Die Rückrechnung für die Membrankräfte und die Krümmungen ist dabei mit (6.2-8) durchzuführen.

Zu den Begriffen aus dem Berechnungsablauf

Rißkontrolle

Zur Rißkontrolle genügt es, für jeden Elementbereich hinsichtlich der Rißrichtungen die Spannungen der äußeren Betonfasern in der Zugseite zu kontrollieren. In dem Querschnitt, in dem die Betonzugfestigkeit überschritten wird, wird eine Rißvertiefung eingeführt.

Rißvertiefung

Die Rißvertiefung ist die Zunahme der den Rißquerschnittszustand beschreibenden Parameter. Dynamische Effekte beim schlagartigen Aufklaffen des Risses werden nicht erfaßt. Es wird angenommen, daß

$$s(t_1, t_2)^1 \cong s(t_1, t_2)^{1+1}$$

Gerechtfertigt wird diese Annahme, wenn man sich vergegenwärtigt, daß der Riß mit der Laststeigerung stets weiter aufklafft, sich aber nie wieder schließt.

Es erhebt sich dabei die Frage, um wieviel die Parameter zunehmen sollen. Dafür ist ein gewisser Spielraum möglich. Aus rechenpraktischen Erfahrungen wird hier empfohlen, anhand des kontrollierten vorhandenen Beanspruchungs- und Querschnittszustandes versuchsweise bis zur Nulllinie der Dehnungsverteilung aufreißen zu lassen.

Fließkontrolle

Ebenso muß kontrolliert werden, ob die Stahlspannungen in der Bewehrung die Fließspannung σ_f überschreiten oder nicht. Der Verformungszustand der Stabschar i ist durch

$$[\mathbf{E}_{ns}]_i = [\mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon}] \varphi_i - \varphi_0 [\mathbf{E}_{12}] - e_i [\mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon}] \varphi_i - \varphi_0 [\Phi_{12}]$$

gegeben. Die Kräfte in der Schar sind mit (2.2-1) zu ermitteln.

Falls die Fließspannung beispielsweise in der n_1 -Richtung erreicht wird, verringert sich die Querschnittsfläche bei weiteren Berechnungsschritten um f_{n_1} . Der Beitrag der konstanten Schnittkraft

$\sigma_f \cdot f_{n_i}$ wird als Entlastung der Platte in (6.2-11) berücksichtigt.

Konvergenz

Der Konvergenz der Iterationslösung kommt, wie schon angedeutet, folgende mechanische Bedeutung zu: Die Stahlbetonplatte zeigt für jede Laststeigerung eine gewisse Rißentwicklung. Jedem Lastniveau ist ein bestimmter Rißzustand zugeordnet. Der Iterationsprozeß verläuft durch die Systemmodifikation diese sukzessive Rißentwicklung, bis sie aufhört.

Das Konvergenzproblem der nichtlinearen Rechnung hängt damit zusammen, ob eine Rißstabilisierung stattfindet oder nicht. Eine frühzeitige Rißstabilisierung führt zur guten Konvergenz. Wenn die Rißentwicklung umgekehrt nicht zu Ende kommt, genauer gesagt, wenn dies nicht erfaßbar ist, dann divergiert die Rechnung.

Konvergenzkriterium

Das Konvergenzkriterium ist eine Abfrage, ob der erreichte Rißzustand stabil ist. Zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens bieten sich folgende Möglichkeiten an.

$\max (\sigma_b / \beta_{bz})$ Es wird die Betonfaser gesucht, die am stärksten auf Zug beansprucht ist. Und

$$\max (\sigma_b / \beta_{bz}) \stackrel{\text{soll}}{\leq} 1.0$$

Dieses Kriterium ist manchmal zu scharf, weil bei allen Kontrollpunkten die Plastizitätsbedingungen eingehalten werden müssen und der Rechenaufwand sehr groß werden kann.

$\max (dt_1, dt_2)$ Die Zunahme in den Parametern beschreibt betragsmäßig, wie groß der Sprung auf ein neues System ist. Diese Kenngrößen sind eventuell maßgeblicher als die obige Konvergenzabfrage. In der vorliegenden Arbeit wird aber dieses Kriterium nicht verwendet.

Spannungskontrolle im Spannungsraum

Die Rißfortpflanzung geschieht in Wirklichkeit so, daß einzelne Systempunkte aufeinanderfolgend die Bruchfläche erreichen (Bild

6.1o). Für ein Lastinkrement zeigt Punkt a ein zugehöriges Spannungsinkrement $a-a''$ und Punkt b $b-b''$. Man kann für jeden Punkt aus dem gegenwärtigen Spannungszustand und dem Spannungszuwachs einen Faktor bestimmen, der die Steigerungsrate bis zum Erreichen der Bruchgrenze beschreibt.

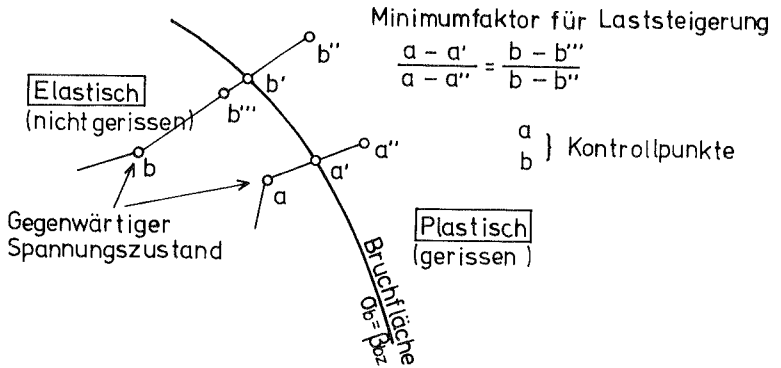


Bild 6.10 Spannungsraum und Bruchfläche

Z.B. für Punkt a $\frac{a-a'}{a-a''}$ und für Punkt b $\frac{b-b'}{b-b''}$.

Der Faktor spiegelt den Abstand des gegenwärtigen Spannungszustandes zur Bruchfläche im Spannungsraum wieder. Es wird dann der Punkt gesucht, für den der Faktor zum Minimum wird. Die mit dem Minimumfaktor multiplizierte Laststeigerung ist hinreichend, um nur in diesem Punkt (z.B. a) gerade einen Bruchzustand zu definieren. Die restlichen Punkte (z.B. b) verbleiben noch innerhalb der Bruchfläche (b'''). In jedem einzelnen Rechenschritt darf streng genommen nur ein Punkt den Bruchzustand erreichen. Dieses Ablaufschema zur Plastizitätskontrolle scheitert bei dem vorliegenden Problem am sehr großen numerischen Aufwand. In dieser Arbeit dürfen mit klein gewählten Lastinkrementen mehrere Kontrollpunkte in den Bruchzustand hinauspringen.

Betrachtung der Lösung

Die iterative Rechnung sucht einen plastizitätstheoretisch zulässigen Zustand. Bild 6.11 erörtert schematisch die rißbedingte Sy-

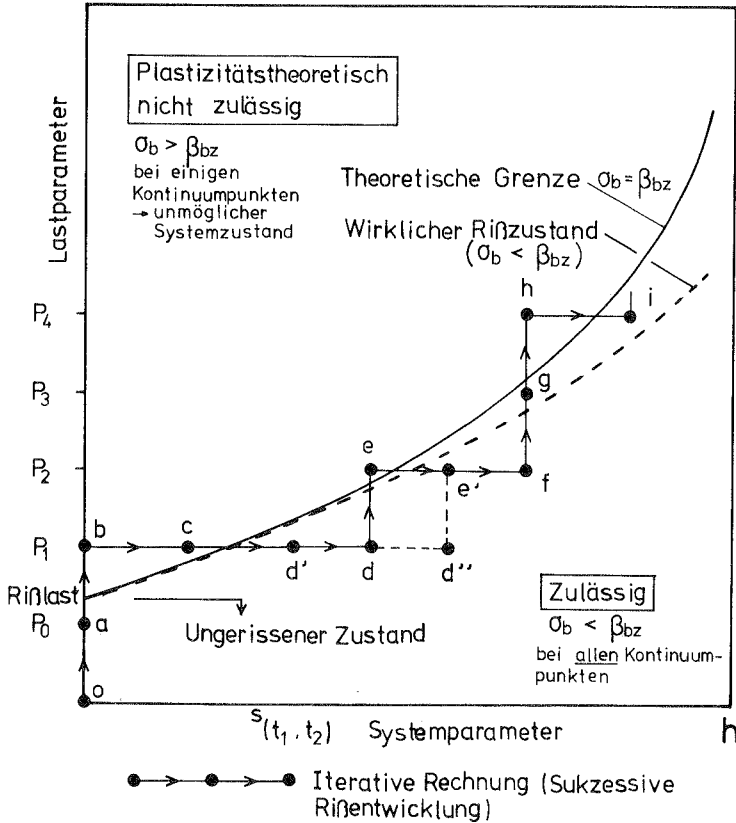


Bild 6.11 Schematische Darstellung der iterativen Rechnung (Lower Bound Solution)

stemveränderung mit den Achsen für den Systemzustand und den Lastparameter.

Der obere Bereich umfaßt die plastizitätstheoretisch nicht zulässigen Zustände, nicht zulässig, weil irgendwo im Tragwerkssystem die Betonzugfestigkeit überschritten ist. Der wirkliche Rißzustand liegt immer im zulässigen Bereich. Er kann im Idealfall die theoretische Grenze erreichen, muß es aber nicht. Bevor sich der erste Riß ausbildet, ist keine Iteration nötig (o-a). Der ungerissene Zustand ist aber bei b nicht mehr zulässig, weil die Platte unter der Last P_1 ohne Risse nicht durchhalten kann. Die Iteration b-c-d beschreibt die Rißentwicklung, die das System auf d reduziert. Die Querschnittsfläche der Platte geht während der Iteration immerfort und irreversibel verloren. Eine rückgängige Korrektur ist nicht möglich. Man muß daher besonders darauf achten, den Systemzustand nicht schlagartig zu verändern, wenn eine brauchbare Lösung gefunden werden soll. Einen unrealistischen, aber zulässigen Zustand d" erreicht man, wenn man im Zustand c unnötigerweise mehr Risse zuläßt, weil d-d" nicht umkehrbar ist. Die bessere Lösung, die näher der Schranke liegt, ist d'. Für P_2 ist der Zustand d = e wiederum nicht zulässig und muß zu f abwandern. Ausgehend von d" braucht man keine Iteration in dieser Laststufe und erhält sogar ein besseres Ergebnis e als f. Der Zustand f ist sowohl für P_2 als auch für P_3 rißstabil, bis bei h Risse auftreten.

Die Darstellungsweise des Rechenvorganges erinnert an den statischen Satz im Traglastverfahren (untere Schranke der Traglast).

In diesem Zusammenhang sei noch auf die Veröffentlichung [149] von O.C.ZIENKIEWICZ in der Felsmechanik verwiesen, die für Tunnel und Dämme auch einen nur möglichen Spannungszustand ohne Zugspannung sucht. Der gefundene Spannungszustand ist eine untere Schranke der richtigen Lösung (Lower bound on the true solution).

Zum Rechenaufwand bei der Rißentwicklung

Die Frage, ob man den Rißquerschnitt sofort bis zur Nulllinie aufreißen darf, oder ob man die Rißvertiefung schrittweise einführen muß, hängt in der Rechenpraxis in erster Linie von dem vertretbaren Aufwand und von dem Beispiel ab.

Eine Testrechnung zeigt, daß zu Beginn der Rißbildung im Querschnitt die Betonzugfestigkeit sowieso bis nahe der Plattenmittelfläche erreicht wird, auch wenn man die Querschnittsparameter in ganz kleinen Stufen anwachsen läßt. Die Rißvertiefung verlangsamt sich nur dann, wenn sich die Risse bis in die andere Hälfte der Plattendicke fortgesetzt haben. In der Rechnung ist deshalb die Annahme der Rißbildung bis zur Nulllinie des Querschnitts normalerweise sinnvoll.

Wenn aber in der Wirklichkeit schlagartige Risse zu erwarten sind (z.B. gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast), und die Rißstabilisierung erst später oder überhaupt nicht stattfindet, ist es notwendig, den Querschnitt nicht so schlagartig zu modifizieren. Der Rechenaufwand wird dann allerdings erheblich größer.

7. NUMERISCHE ERGEBNISSE

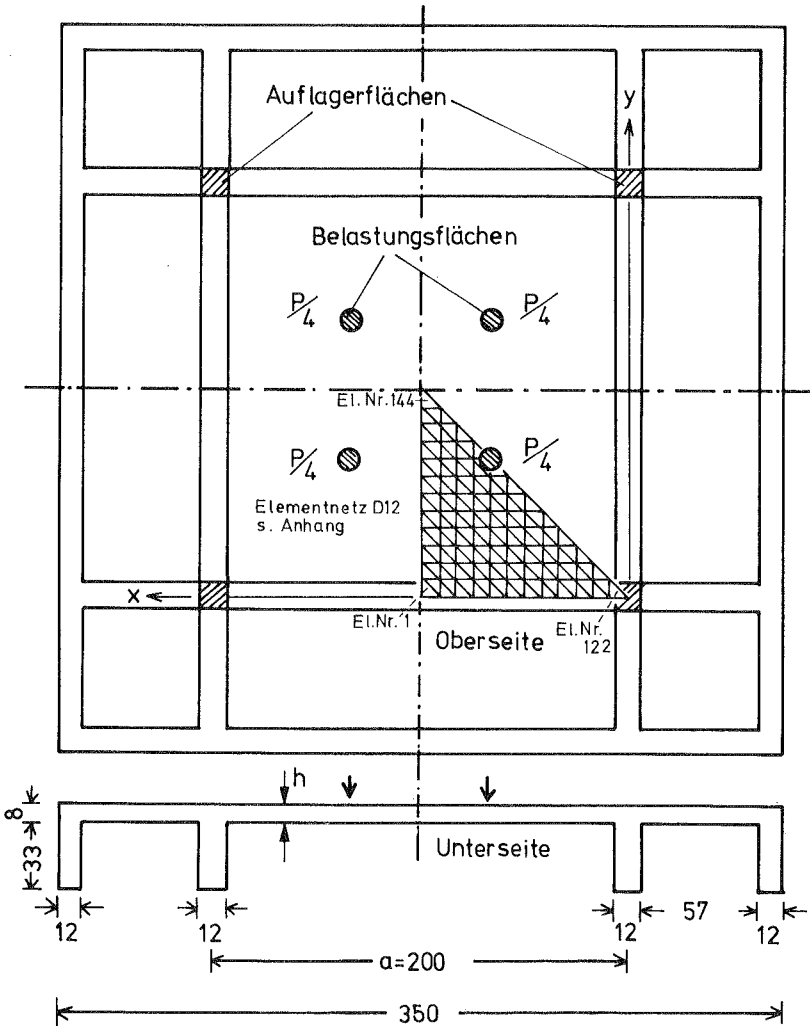
Für die geschilderte Berechnungstheorie wurde ein FORTRAN-Programm geschrieben, dem das gewählte gemischte Schalenmodell zugrunde liegt. Die nachstehenden Beispielrechnungen wurden an den Rechenanlagen CYBER 174 und CD 6600 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt. An den beiden elektronischen Rechenautomaten steht je ein Kernspeicher bis zu 128 K Worten mit einer Wortlänge von 60 Bit zur Verfügung. Zur Umrechnung der SI-Einheiten gelten z.B. 1 kp = 10 N und 1 Mp = 10 kN.

7.1 Gewölbewirkung

In [99] werden von SCHLAICH zum Nachweis der in durchlaufenden Stahlbetonplatten zustande kommenden Gewölbekräfte Plattenversuche durchgeführt. Als Versuchskörper wird eine auf allen vier Seiten durch schmale Nachbarplatten umgebene Quadratplatte gewählt, die auf einem mit ihr monolithisch verbundenen Trägerrost aufgelagert ist. Die Abmessungen sowie die Belastungs- und Lagerflächen sind aus Bild 7.1 ersichtlich.

Hergestellt werden zwei Platten (Platte I und II) mit den gleichen geometrischen Abmessungen. Die beiden Versuchsplatten unterscheiden sich nur durch ihre Bewehrungsmenge. Die unterschiedliche Bewehrung zeigt aber schließlich im Versuch keinen großen Einfluß auf die Gewölbewirkung.

In [99] wird nur die Mittelplatte betrachtet, die weiter zu einem Ersatzplattensystem idealisiert wird, das unterhalb der Mittelfläche gelenkig gelagert ist, und dessen Horizontalverschiebungen elastisch behindert sind (Bild 7.2a). Dabei wird angenommen, daß das ganze Plattenfeld, abgesehen von den oberen Rissen über den Auflagern, im homogenen Zustand verbleibt. Die Biegefläche wird als Sinus-Doppelreihe angesetzt. Die Gewölbenormalkraft N_x (N_y) wird in x-(y-)Richtung als konstant angenommen und in y-(x-)Rich-



Abmessungen in (cm)

Bild 7.1 Versuchsplatte in [99]

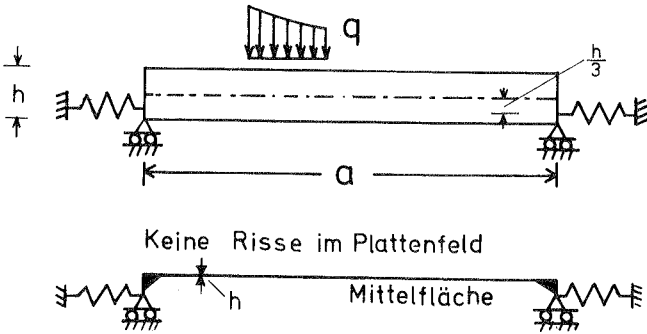


Bild 7.2 a Ersatzmodell in [99]

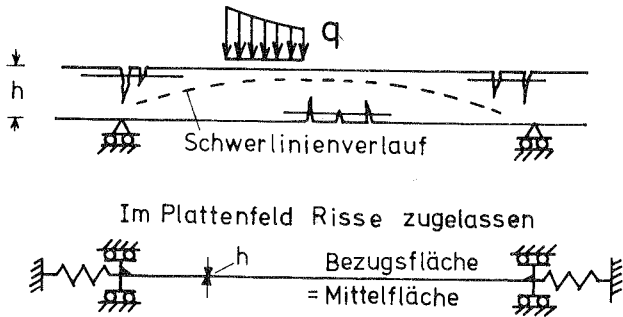


Bild 7.2 b Ersatzmodell für die FEM-Rechnung

tung mit Sinus-Wellen angenähert. N_{xy} wird über die ganze Platte zu Null gesetzt.

Auch bei der vorliegenden Arbeit wird nur das Mittelfeld betrachtet, dessen rechnerische Lagerbedingungen in Bild 7.2b dargestellt sind. Alle vier Ränder des Innenfeldes werden vertikal unverschieblich und voll eingespannt betrachtet. In horizontaler Richtung werden elastische Dehnsfedern angenommen.

Die Biegesteifigkeit am Rand wird durch das Auftreten von Rissen an der Oberseite im auflagernahen Bereich verkleinert, so daß das Rechenmodell der FEM-Rechnung beinahe dieselben Randbedingungen aufweist wie das Modell in [99].

Zur Nachrechnung des Versuches wird eine der zwei Platten gewählt. Für die FEM-Rechnung werden hier die Werte der Platte II aus [99] eingegeben:

$$\begin{aligned} \text{Beton} \quad E_b &= 1.4 \text{ MN/cm}^2 \\ V_b &= 0.15 \\ \beta_{bz} &= 388 \text{ N/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stahl} \quad E_s &= 20.6 \text{ MN/cm}^2 \\ \sigma_f &= 40.25 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Obere Bewehrung im Mittel

$$0.01750 \text{ cm}^2/\text{cm} \text{ für } x\text{- und } y\text{-Richtung}$$

Untere Bewehrung im Mittel

$$0.03750 \text{ cm}^2/\text{cm} \text{ für } x\text{- und } y\text{-Richtung.}$$

Um einen Vergleich mit [99] sinnvoll zu gestalten, wird dieselbe konstante horizontale Bettungsziffer wie [99] angenommen

$$(1/0.0000051) \text{ N/cm}^2 = 196 \text{ kN/cm}^2$$

Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen wird die FEM-Rechnung an einem Achtel der Mittelplatte durchgeführt, das in 144 gleich große Elemente eingeteilt wird (Bild 7.1). Die Knotennumerierung ist im Anhang angegeben.

Die Bilder 7.3a bis f zeigen die computersimulierten Rißbilder, die mit einem Plotterprogramm automatisch aufgezeichnet wurden. Die Rißbilder sind von grundlegender Bedeutung, weil mit dem dargestellten Rißzustand der veränderliche Systemzustand deutlich gezeigt wird.

Die Bilder 7.3g und h sind die tatsächlichen Bruchbilder der Platten I und II aus dem Versuch.

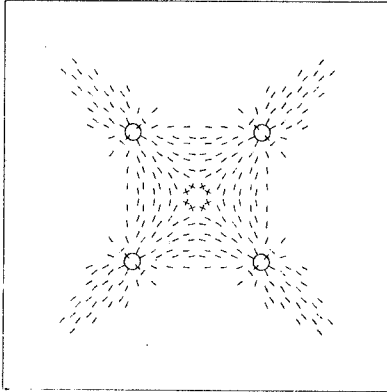
In Bild 7.4 sind die gemittelten Gewölbenormalkräfte in den Symmetrieachsen abhängig von der Last aufgetragen. Folgender Unterschied ist festzustellen und vom gesetzten Modell her zu erklären: SCHLAICH nimmt vereinfachend an, daß die Gewölbekräfte von Anfang an linear abhängig sind, während der Versuch und die FEM-Rechnung ergeben, daß erst nach dem Auftreten der ersten Risse ein linearer Zusammenhang zwischen der Last und den Gewölbekräften besteht.

Aus Bild 7.5 sieht man, wie die Normalkräfte in den Symmetrieachsen verlaufen, und aus Bild 7.6, wie die Federkräfte am Randquerschnitt entlang verlaufen. Die Querschnittswerte sind wegen der Rißbildung unstetig, so daß die Kurven auch besonders im noch nicht stabilisierten Rißzustand unstetig verlaufen (s. Kurve für $P = 60$ kN in Bild 7.6). Der Querschnittszustand im Eckbereich (Rißzustand ⑤ und ⑥ in Bild 5.1) ist sehr schwer darstellbar. Die Kurve für $P = 260$ kN in Bild 7.6 zeigt in diesem Rißbereich eine Unstetigkeit (Sprung auf Zug).

Der Biegemomentenverlauf ist in Bild 7.7 eingetragen. Mit der Rißbildung am eingespannten Rand verkleinert sich das Einspannmoment, und das Feldmoment wird größer (Kurve für $P = 60$ kN). Bei $P = 100$ kN nimmt das negative Moment wieder zu, und der Feld-

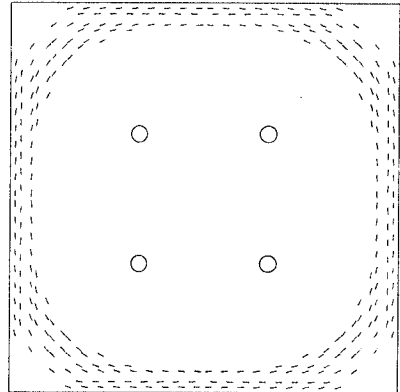
UNTERSEITE

P = 100 KN



OBERSEITE

P = 100 KN



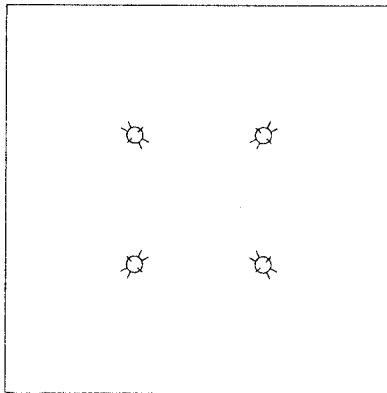
COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7 3 b Theoretische Rißbilder für 100 kN

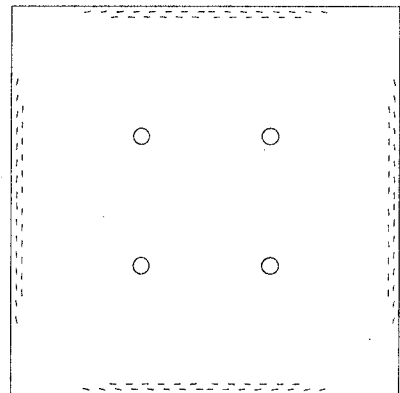
UNTERSEITE

P = 60 KN



OBERSEITE

P = 60 KN



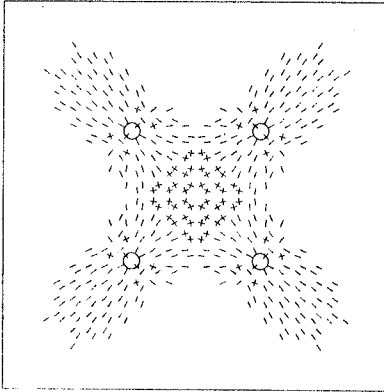
COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7.3 a Theoretische Rißbilder für 60 kN

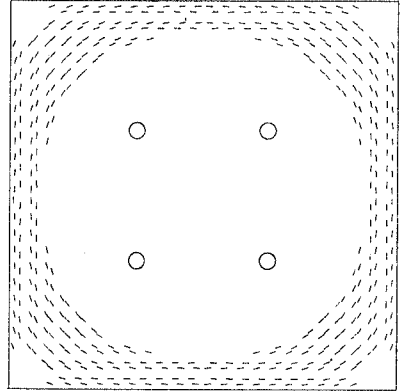
UNTERSEITE

$P = 180 \text{ kN}$



OBERSEITE

$P = 180 \text{ kN}$



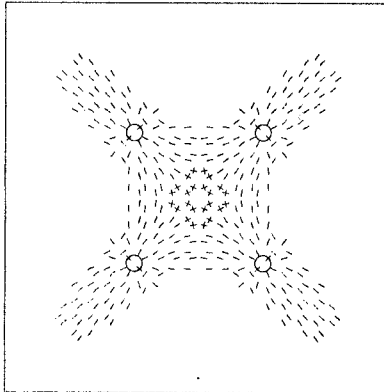
COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7.3 d Theoretische Rißbilder für 180 kN

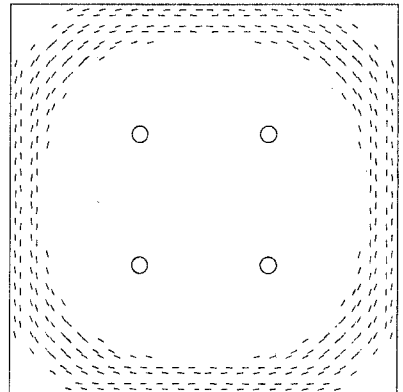
UNTERSEITE

$P = 140 \text{ kN}$



OBERSEITE

$P = 140 \text{ kN}$

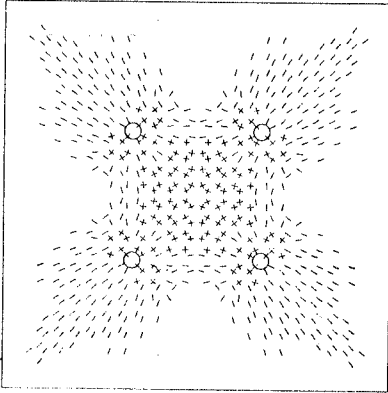


COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

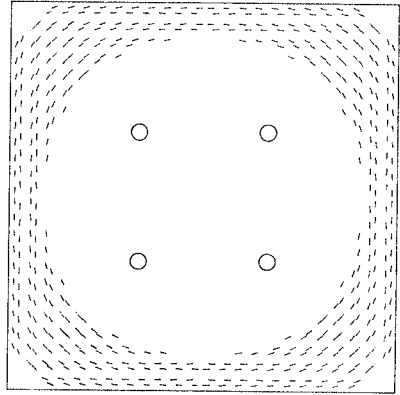
○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7.3 c Theoretische Rißbilder für 140 kN

UNTERSEITE P = 260 kN



OBERSEITE P = 260 kN

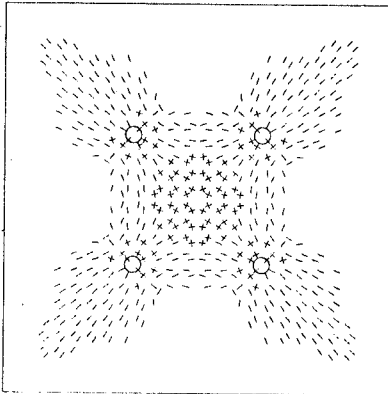


COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

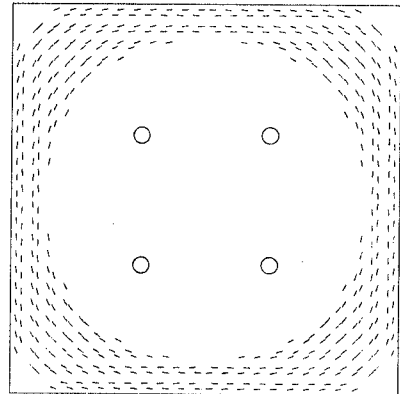
○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7.3 f Theoretische Rißbilder für 260 kN

UNTERSEITE P = 220 kN



OBERSEITE P = 220 kN



COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DES INNENFELDES

○ = BELASTUNGSFLAECHE

Bild 7.3 e Theoretische Rißbilder für 220 kN

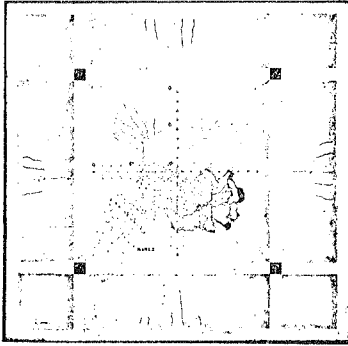


Bild 68 : Unterseite der Platte I,
Rissbild nach dem Bruch

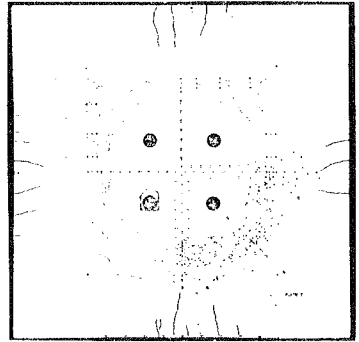


Bild 66 : Oberseite der Platte I,
Rissbild nach dem Bruch

Bild 7.3 h Bruchbilder der Platte I



Bild 69 : Unterseite der Platte II,
Rissbild nach dem Bruch

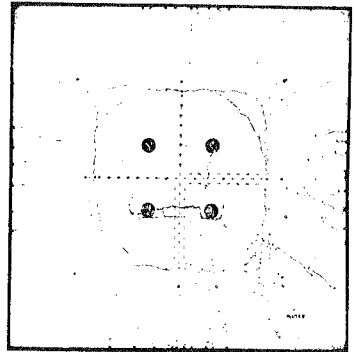


Bild 67 : Oberseite der Platte II,
Rissbild nach dem Bruch

Bild 7.3 g Bruchbilder der Platte II

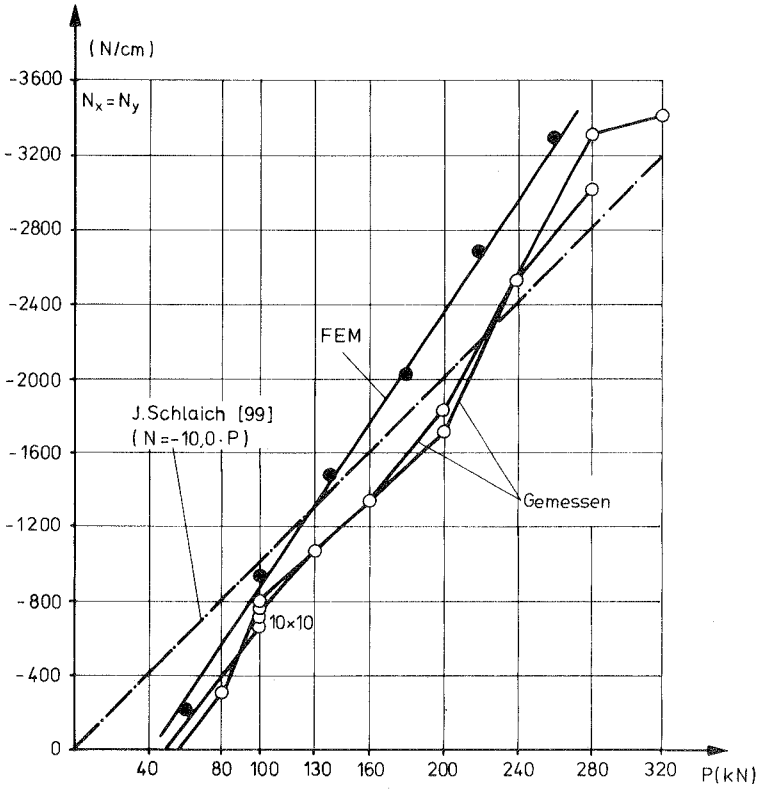


Bild 7.4 Mittelwert der Normalkräfte
 N_x in $y=a/2$ bzw. N_y in $x=a/2$

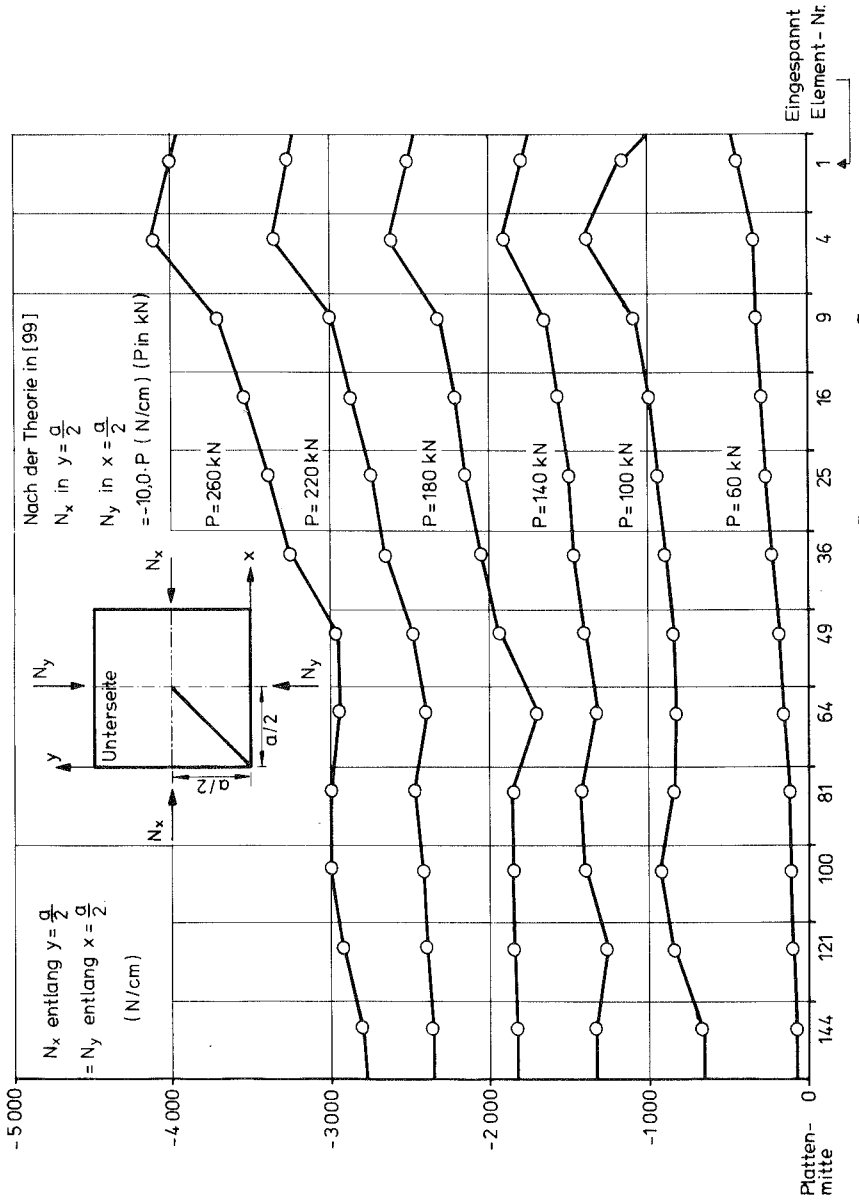


Bild 7.5 Verlauf der Normalkräfte N_x ($y = \frac{a}{2}$) und N_y ($x = \frac{a}{2}$)

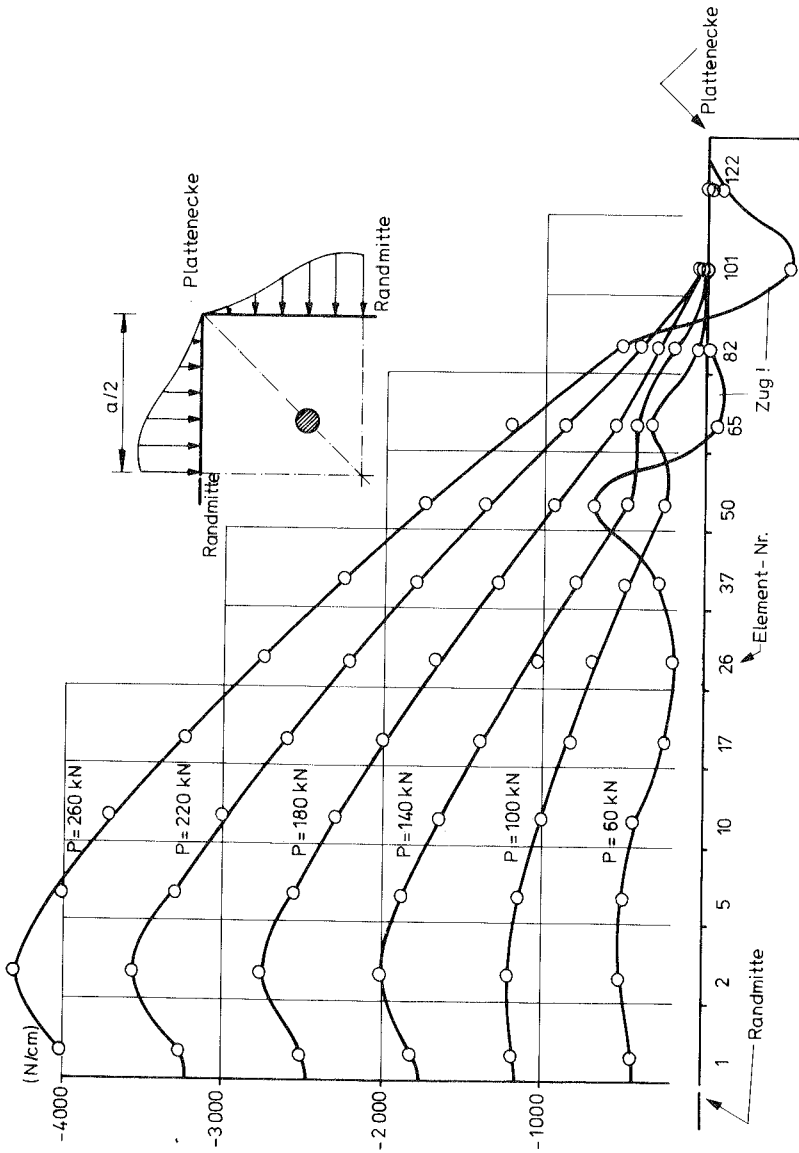


Bild 7.6 Federkräfte N_x und N_y am Randquerschnitt entlang

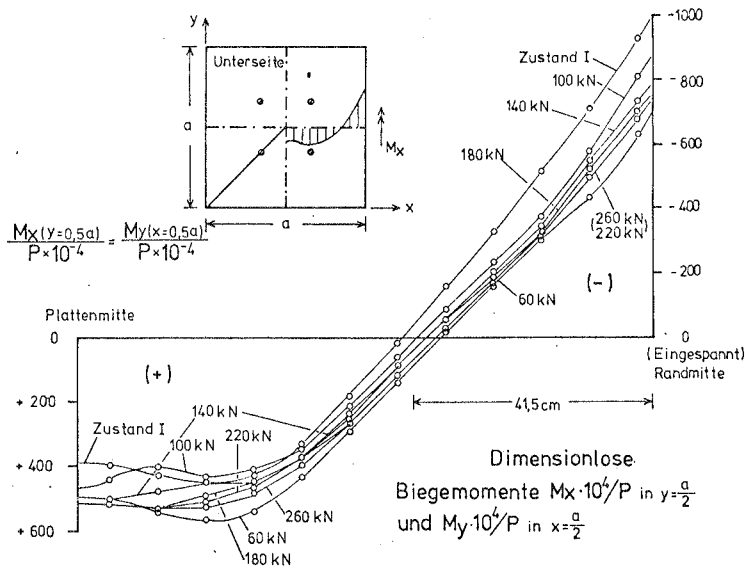


Bild 7.7 Momentenbild

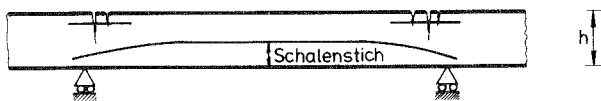


Bild 78 a Keine Risse im Innenbereich

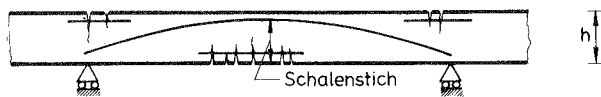


Bild 78 b Innenbereich auch gerissen

bereich wird entsprechend weniger biegebeansprucht. Bei weiterer Belastung bis $P = 260 \text{ kN}$ verlagert sich das Biegemoment wieder zur Feldmitte hin. Im stabilisierten Systemzustand bleibt der Momentenverlauf unverändert.

Zum besseren Verständnis des Schnittgrößenverlaufes sollten die zugehörigen Rißbilder gleichzeitig betrachtet werden.

Das Tragverhalten der Platte bei Laststeigerung wird im folgenden erläutert:

Bis die Rißlast erreicht wird, bleibt die Platte im homogenen Zustand. In diesem ungerissenen Zustand ist der Verlauf der Querschnittsschwerlinien stetig, und die Matrizenelemente in den Kopplungsmatrizen sind im Vergleich zu den Dehn- und Biegesteifigkeitswerten vernachlässigbar klein. Es liegt also noch keine starke Kopplung zwischen der Membran- und der Biegewirkung vor, so daß die Membrantragfähigkeit der Platte noch nicht geweckt wird. Der reine Biegezustand läßt sich nach der klassischen Plattentheorie berechnen.

FEM-Rechnung im Vergleich zur Plattentheorie

Berechnungsverfahren	Biegemoment in Randmitte	Biegemoment in Feldmitte
PUCHER(Voll-einspannung)	$-0.095 P$	$+ 0.030 P$
Momentenausgleichsverfahren	$-0.083 P$	$+ 0.033 P$
FEM	$-0.0926 P$	$+ 0.038 P$

Die Momentenwerte nach der FEM weichen geringfügig von den klassischen Lösungen ab, weil die Stahlbetonplatte über den Querschnitt nicht symmetrisch bewehrt ist, und damit der Scheiben- und der Plattenzustand schon im ungerissenen Zustand schwach gekoppelt sind.

Der erste Riß tritt beinahe gleichzeitig in Randmitte ($M_2 = -0.0926 P$) an der Oberseite und an der Unterseite der Belastungsstellen ($M_1 = +0.0926 P$) auf. Die Rißlast beträgt nach der eigenen Rechnung $P = 50 \text{ kN}$ und im Versuch auch ca. 50 kN (Bild 7.4). Von der Rißlast bis etwa $P = 60 \text{ kN}$ entwickeln sich die Risse in einem schmalen Bereich parallel zum Rand (Bild 7.3a).

Sobald sich Risse im auflagnahen Bereich ausbilden, versetzen sich die Querschnittsschwerlinien zur Plattenunterseite hin. Dieser Vorgang führt zum Auftreten der Exzentrizitätsmatrix. ber die Kopplungsmatrizen wird nun die Membranwirkung, insbesondere im gerissenen Randbereich hervorgerufen. Die Membranrandbedingungen beeinflussen neben den Biegerandbedingungen auch das Tragverhalten der gerissenen Platte. Im außer den Belastungsstellen rißfreien Innenbereich sind die Kopplungsmatrizen noch schwach belegt.

Die obere Bewehrung über den Plattenrändern bleibt noch elastisch und behindert die Drehbewegung der Randquerschnitte. Wenn die Platte eine extrem starke obere Bewehrung am Plattenrand hätte, würde ein beinahe symmetrischer Rißquerschnitt vorliegen und keine Membranwirkung entstehen.

Aus dem Rißzustand in Bild 7.3a ist zu erkennen, daß sich in der gerissenen Stahlbetonplatte eine sehr flache Schale ausgebildet hat, deren Mittelfläche in Feldmitte fast eben und im gerissenen Randbereich etwas geneigt verläuft (Bild 7.8a). Der Stich der plattenähnlichen Schale ist höchstens die Hälfte der Plattendicke. In einem solchen Schalensystem klingt die Membranwirkung im ebenen Bereich ab (Bild 7.5 Kurve für $P = 60 \text{ kN}$), weil kein großer Kopplungszustand besteht. Erst wenn auch der Innenbereich aufreißt, wird der Schalenstich vergrößert und die Schalenfläche stärker gekrümmt, so daß im ganzen Plattenbereich neben dem Biegezustand auch ein Membranzustand herrscht (Bild 7.8b). Die Gewölbewirkung basiert auf dieser schalenartigen Tragwirkung der gerissenen Stahlbetonplatte.

Aus den Rißfiguren und den Diagrammen für die Schnittkräfte wird klar, daß die Stabilisierung des Rißzustandes bei $P = 100 \text{ kN}$ erreicht wird. Im Versuch wurden nach 10-maliger Be- und Entlastung in dieser Laststufe folgende Werte gemessen:

	Platte II	FEM
Durchbiegung in Plattenmitte	3.5 mm	3.3 mm
Stahlspannung in Plattenmitte (unten)	5500 N/cm^2	8000 N/cm^2
Betonspannung in Plattenmitte (oben)	-930 N/cm^2	-700 N/cm^2
Stahlspannung in Randmitte (oben)	11900 N/cm^2	40250 N/cm^2 (Fließgrenze)
Betonspannung in Randmitte (unten)	-720 N/cm^2	-1290 N/cm^2

Da der FEM-Rechnung die Makro-Idealisierung (konstante Materialkennwerte, idealer Verbund, verschmierte Betrachtung der Bewehrung usw.) zugrunde liegt, zeigt dieser Vergleich im Mikro-Bereich keine gute Übereinstimmung.

Bei weiterer Belastung von $P = 100 \text{ kN}$ bis 260 kN verbreitert sich die ringförmige Rißzone an der Oberseite. An der Unterseite vermehren sich die Diagonalrisse. Die Schnittkräfte wachsen fast proportional mit der Last an. In diesen Lastschritten treten zwar sekundäre Risse auf, aber das Gesamtsystem bleibt nahezu unverändert. Dank der Druckgewölbewirkung ist keine große Rißentwicklung mehr möglich. Für den stabilisierten Rißzustand ergibt die Biegetheorie mit Gewölbewirkung [99] folgende Rechenwerte:

	Platte II
Normalkräfte in Symmetrieachsen (N/cm)	-10.05 P

Platte II

Moment in Randmitte (kN)	-0.0268 P
Moment in Plattenmitte (kN)	+0.0517 P
Durchbiegung in Plattenmitte (mm)	0.0193 P

(P in kN)

Vergleicht man diese Momentenwerte und die mit finiten Elementen errechneten Werte (Bild 7.7), so stellt man fest, daß die Biegemomente in Randmitte nach der FEM-Rechnung erheblich größer sind. Dies läßt sich dadurch erklären, daß in der vorliegenden Arbeit eine Volleinspannung am Plattenrand angenommen wurde. In [99] ist dagegen eine gelenkige Auflagerung mit den exzentrischen Dehnfedern vorausgesetzt. Die berechneten Durchbiegungen in Plattenmitte sind

für P	Versuch (Platte II)	FEM
140 kN	5.5 mm	5.048 mm = 0.036 P
180 kN	8.8 mm	6.856 mm = 0.038 P
220 kN	13.0 mm	8.619 mm = 0.039 P
260 kN	19.0 mm	10.45 mm = 0.040 P

Eine große Abweichung der rechnerischen Plattendurchbiegungen von den Meßwerten läßt sich bei höheren Laststufen feststellen. Dies ist eine Folge der Rechenannahme vertikal unverschieblicher Auflagerung der Platte sowie der zunehmenden Nachgiebigkeit der gerissenen Nachbarplatten und Unterzüge.

Die elektronische Rechnung wird bei $P = 260$ kN abgebrochen. Die simulierten Rißbilder zeigen gute Übereinstimmung mit den Bruchbildern (Bild 7.3g und h) bei $P = 290$ kN (Platte II) und $P = 360$ kN (Platte I). Der Bruch trat im Versuch unter den Lastpunkten ein. In den Lasteintragungsstellen versagte die Druckzone wegen der großen Schubspannungen (Durchstanzen). Die Rißbilder der Nachbar-

platten zeigen, daß sie scheibenartig beansprucht waren. Die Auflagerunterzüge wurden auf Torsion beansprucht.

In [99] wird die Gewölbewirkung an einem feststehenden Plattenmodell untersucht, dessen Auflagerbedingungen schon die Rißausbildung am eingespannten Plattenrand darstellen. In der FEM-Rechnung entsteht dagegen die Druckmembran über die veränderlichen Kopplungsmatrizen. Die Exzentrizitätsmatrix ist der Exzentrizität der Dehnfedern in Bild 7.2b äquivalent.

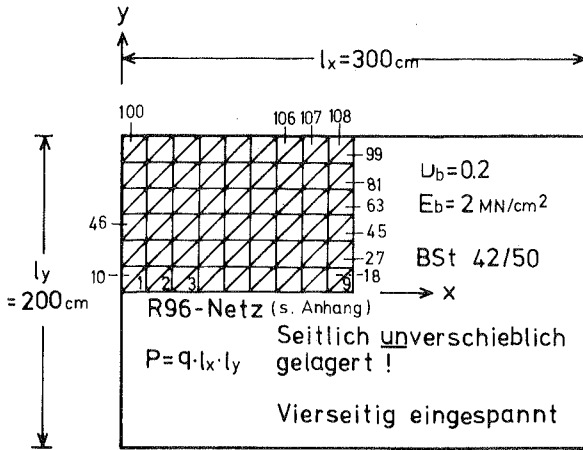
Um mit der FEM-Rechnung dieselbe Idealisierung wie in [99] zu erreichen, müßte man die Ebene, in der die Dehnfedern liegen, zur Bezugsfläche wählen und bezogen auf die Bezugsfläche eine gelenkige Auflagerung annehmen.

Abgesehen davon, daß in dieser Arbeit im Innenbereich auch Risse zugelassen sind, liegt der Unterschied der beiden Lösungsmethoden nur in den Formulierungen über das Zustandekommen des Druckgewölbes.

7.2 Parameterstudie

An Rechteckplatten wird eine Parameterstudie über den Kraftzustand in gerissenen Stahlbetonplatten durchgeführt. Als Vergleichslösung steht wiederum die Parameterstudie von J. SCHLAICH [99] zur Verfügung.

In Anlehnung an das Beispiel in [99] (Abschnitt II.7) wird das in Bild 7.9 skizzierte Plattensystem als Grundsystem zur Parameteruntersuchung gewählt. Um den Arbeitsaufwand der Erstellung der Eingabedaten gering zu halten, ist die Rechteckplatte (Platte g) rechnerisch konstant bewehrt. Die Bewehrungsstäbe werden über die ganze Platte verschmiert gerechnet. Die konstante Bewehrung vereinfacht eine Kontrollrechnung der Steifigkeitswerte im gerissenen Zustand. Die Betonzugfestigkeit wird bei dem Grundsystem zu $\beta_2 = 300 \text{ N/cm}^2$ gesetzt.



Betonzugfestigkeit : 300 N/cm^2

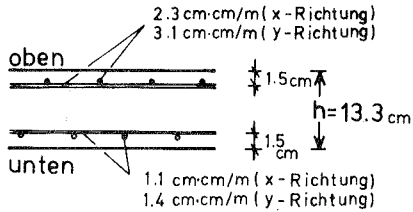


Bild 7.9 Grundsystem der Rechteckplatte zur Parameteruntersuchung

Es muß nochmals auf die unterschiedlichen Auflagerbedingungen bei den Rechenmodellen in Bild 7.2 hingewiesen werden. Im Grundsystem zur Parameterstudie ist die Platte nicht federnd, sondern seitlich unverschieblich gelagert.

Grundsystem (Platte g)

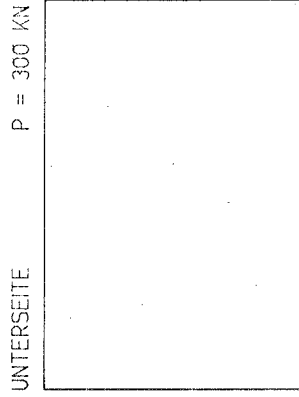
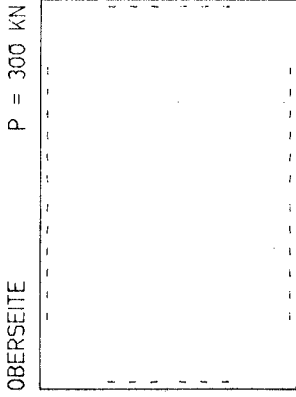
Die Bilder 7.10 bis 7.14 beschreiben das Tragverhalten des Grundsystems.

Die ersten Risse werden, wie bereits die reine Plattentheorie vermuten läßt, bei $P = 184 \text{ kN}$ (elastische Lösung 175 kN mit $V = 0$) in der Mitte der längeren Plattenränder beobachtet. Bis etwa 300 kN entwickeln sich die Risse an der Oberseite langsam randparallel.

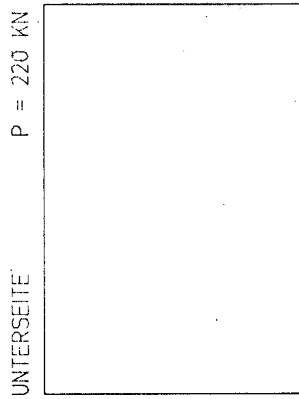
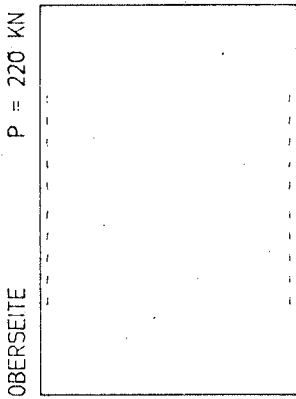
Durch Versuche und Rechnungen ist festzustellen, daß der Rißfortschritt bei Momentenspitzen, die am eingespannten Rand und unter Einzellasten auftreten, sofort gedämpft wird und die Rißbildung somit örtlich bleibt.

Diese örtliche Rißbildung ist so zu erklären: Der lokal stark aktivierte Druckmembranzustand (s. N_x - und N_y -Verlauf in Bild 7.12), der sich teilweise auf die ungerissenen Nachbarquerschnitte abstützt, kompensiert die verlorengegangene Biegetragfähigkeit und verhindert weitere Risse.

Das Rißbild der Oberseite für $P = 500 \text{ kN}$ (Bild 7.10b) ist dem Rißzustand vergleichbar, der in [99] von vornherein vorausgesetzt wird. Es treten allerdings schon die Risse an der Unterseite auf, lange bevor alle eingespannten Ränder rundum gerissen sind. SCHLAICH nimmt an, daß die Gewölbewirkung unmittelbar nach dem Auftreten der oberen Risse entlang der Ränder einsetzt. Die vollständige obere Rißbildung an den Plattenrändern ist aber ohne untere Risse nicht möglich. Der Einfluß der unteren Rißbildung im Innenbereich auf das Tragverhalten des Gesamtsystems ist in der Idealisierung in [99] durch die Auflagerbedingungen im globalen Sinne enthalten.

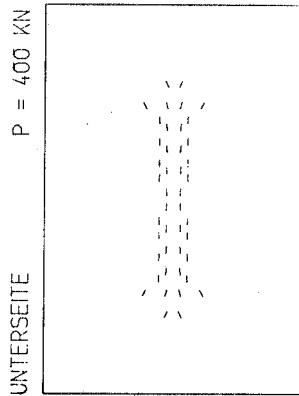
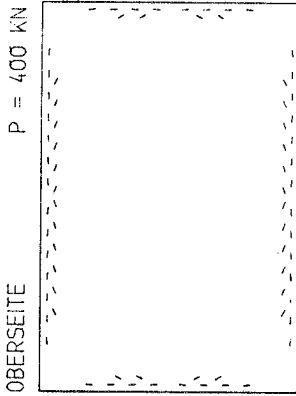


COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DER RECHTECKPLATTE UNTER GLEICHLAST

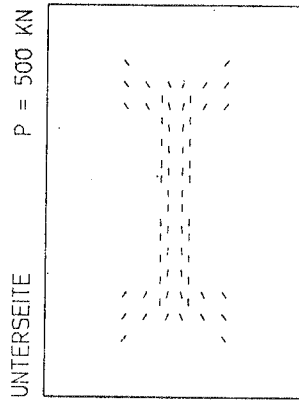
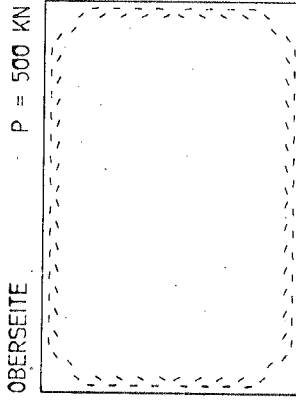


COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DER RECHTECKPLATTE UNTER GLEICHLAST

Bild 7.10 a Rißbilder des Grundsystems



COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DER
RECHTECKPLATTE UNTER GLEICHLAST



COMPUTERSIMULIERTE RISSBILDER DER
RECHTECKPLATTE UNTER GLEICHLAST

Bild 7.10 b Rißbilder des Grundsystems

Nachdem auch an der Unterseite Risse auftreten (Bild 7.10b), trägt fast im ganzen Plattenbereich die lediglich von den unendlich steifen Dehnsfedern gestützte Druckmembran.

Wie bereits zu Bild 7.8 erläutert, sind in der Rechnung zwei Phasen der Membranwirkung erkennbar. Die erste Membranwirkung entsteht mit der Ribbildung an der Oberseite und klingt zur Innenseite hin ab. Die andere tritt gleichzeitig mit dem Verlagern der Schwerlinien im Innenbereich ein, so daß sich in dem stabilisierten Ribzustand die Effekte der oberen und unteren Risse überdecken. Bei einer gelenkig und nicht membrangelagerten Stahlbetonplatte kann sich nur der der unteren Ribbildung entsprechende Membrananteil ausbilden, der bei einer Quadratplatte durch einen Zugring in der Nähe der freien Ränder gestützt wird. Die Druck- und Zugkräfte bilden zusammen eine Kräftegruppe, die für sich im Gleichgewicht ist.

Aus der Rechnung mit $P = 500 \text{ kN}$ ergeben sich die Mittelwerte für N_x und N_y in den Hauptachsen ($y = 0$, $x = 1x/2$) zu:

	FEM	[99]
N_x	-962.3	-1750
N_y	-2070.0	-3100

(N/cm)

Die Differenz in den Werten wird darauf zurückgeführt, daß in [99] die für das Entstehen der Gewölbewirkung günstigen Annahmen (die Randquerschnitte besitzen keine Auflagerbewehrung und sind durchgerissen; $t_2 = h$) getroffen werden, während das Rechenmodell der FEM-Rechnung biegesteif gelagert wird.

In Bild 7.11a ist der gesamte Verlauf der normal zum Plattenrand wirkenden Membrankräfte dargestellt. Die Verteilung dieser Federkräfte weicht von der SCHLAICHschen Lösung besonders im ecknahen Bereich ab; der Ansatz mit Sinus-Reihen in [99] führt zu zu großen Werten. Das Ersatzmodell in [99] nimmt ferner ideale Risse

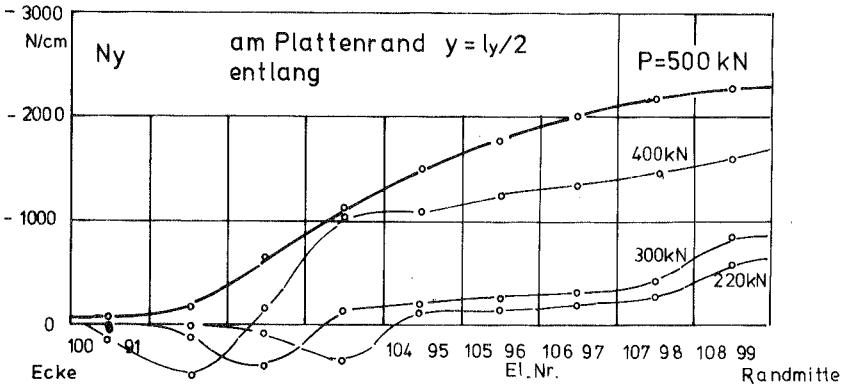
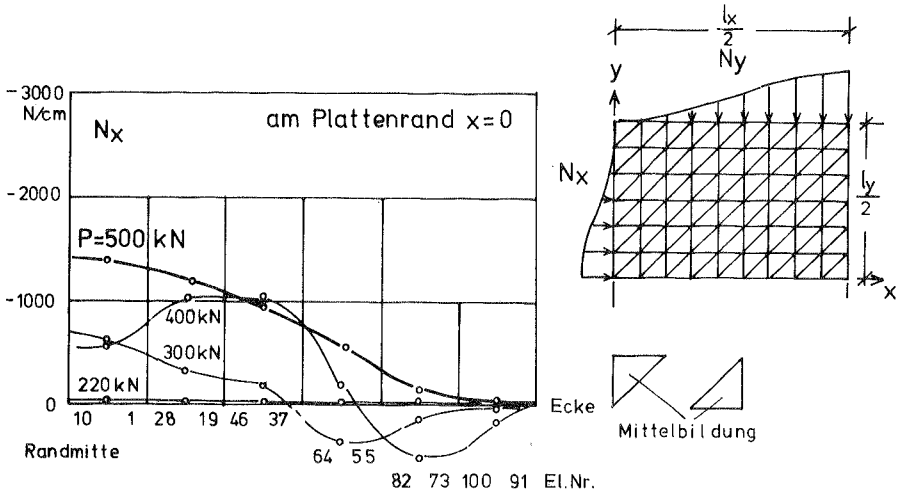


Bild 7.11a Normalkräfte am Plattenrand
(Grundsystem)

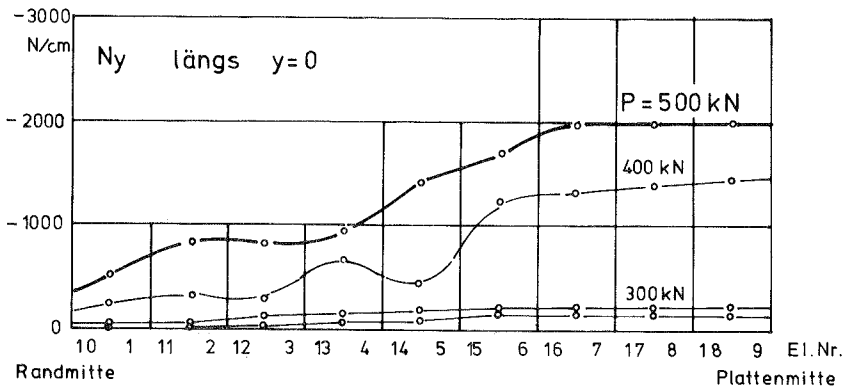
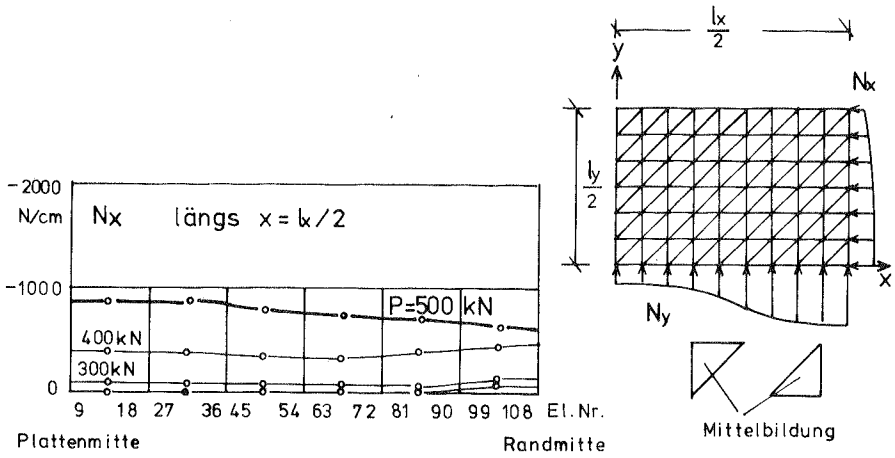


Bild 7.11 b Normalkräfte in den Hauptachsen (Grundsystem)

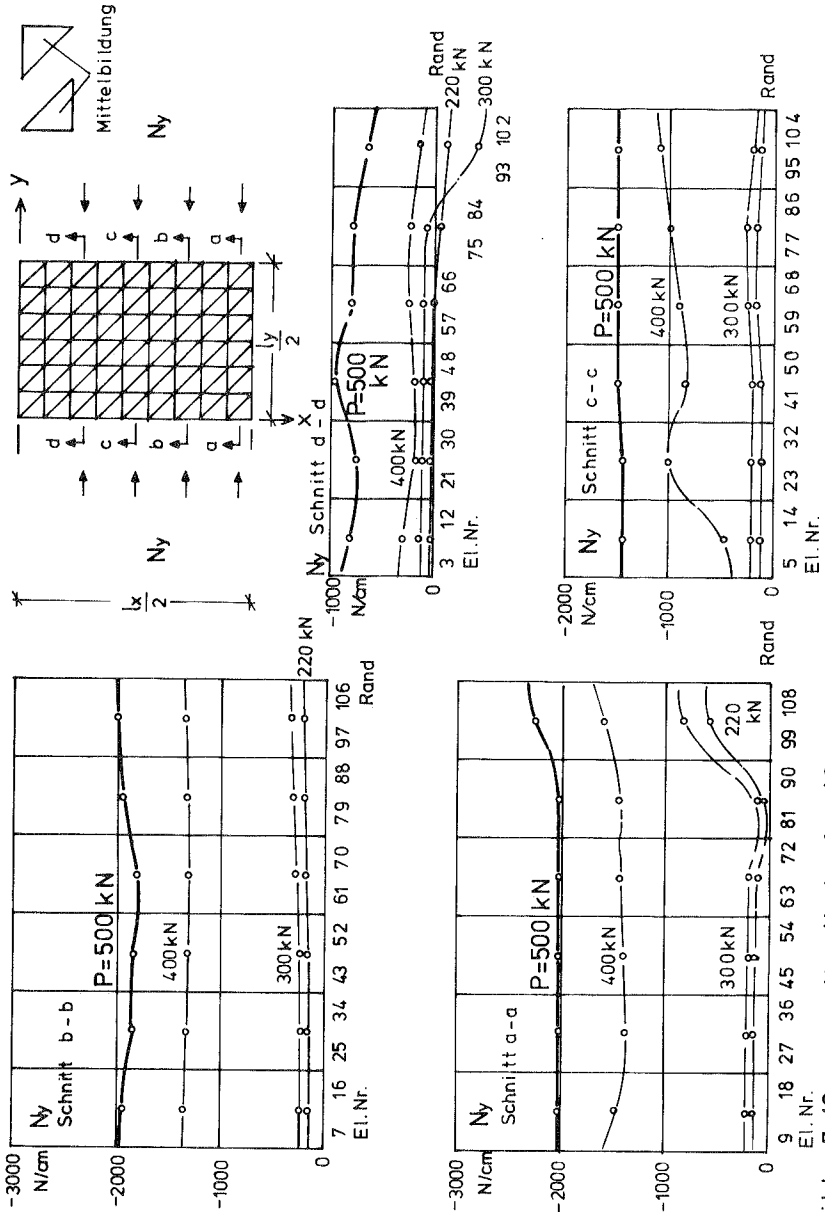


Bild 7 12 a Ny - Verlauf (Grundsystem)

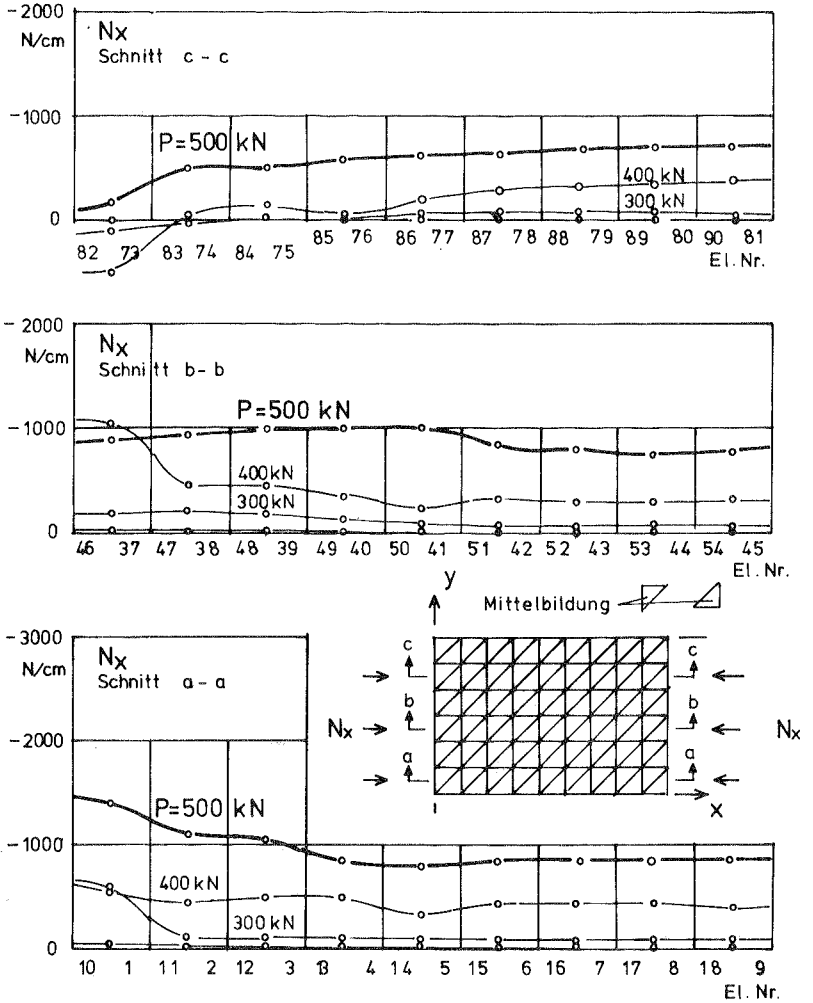


Bild 7.12 b N_x - Verlauf (Grundsystem)

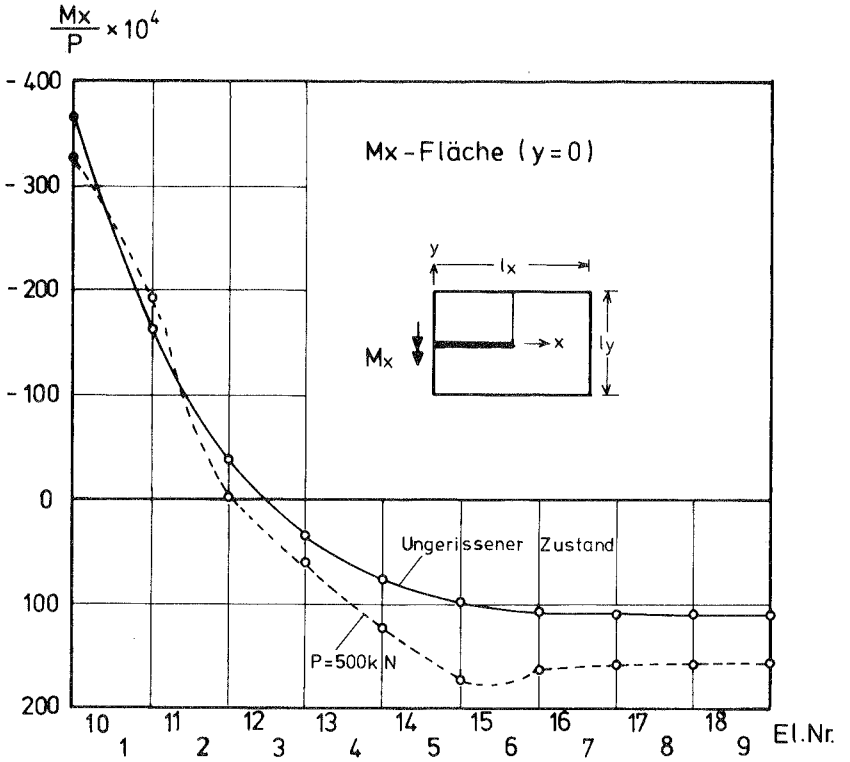


Bild 7.13a Momentenbild für $M_x(y=0)$ des Grundsystems

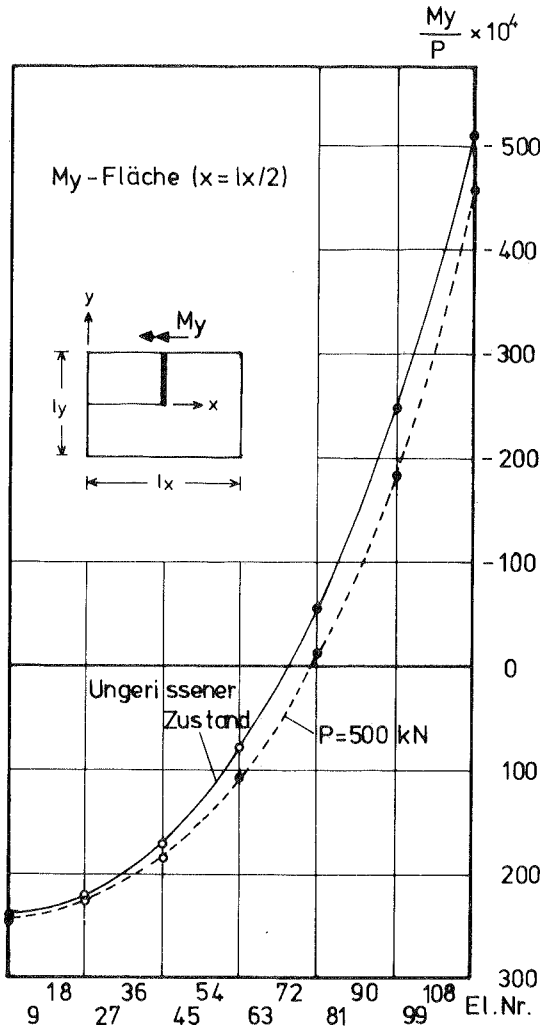


Bild 7.13 b Momentenbild für $M_y (x = lx/2)$ des Grundsystems

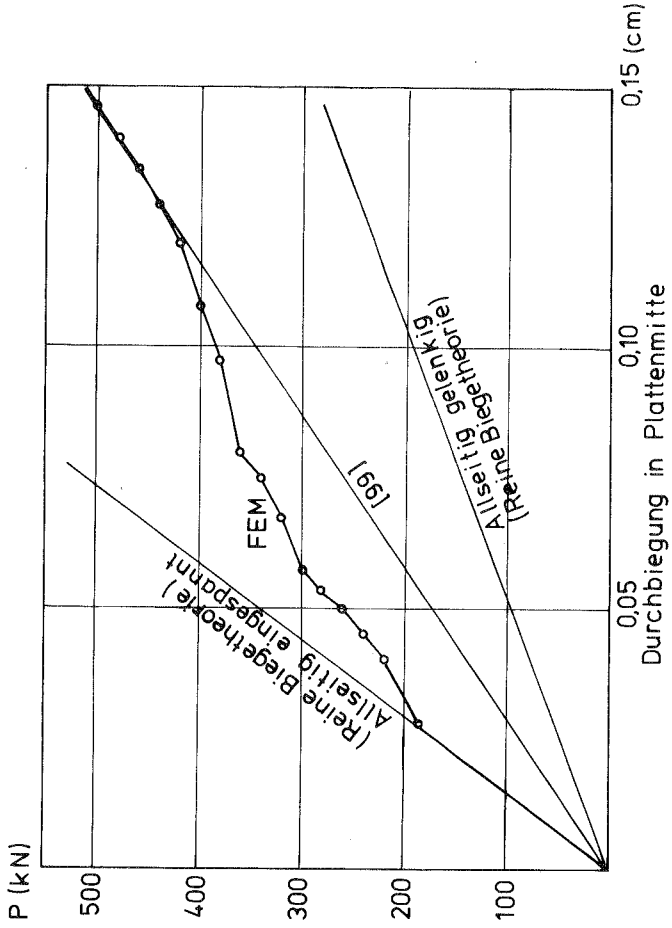


Bild 7.14 Last-Verschiebungs-Diagramm des Grundsystems

bis zu den Ecken an. Die FEM-Rechnung ergibt aber, daß sich die oberen Risse an den benachbarten Plattenseiten bogenförmig zusammenschließen. Die Ny-Kurven für $P = 220 \text{ kN}$ bis 400 kN in Bild 7.11a zeigen, daß an den beiden Enden der schmalen Rißzonen am Rand örtlich große Zugfederkräfte auftreten. In Bild 7.11b sind die Normalkräfte in den Hauptachsen aufgetragen, die mit den Federkräften am Rand in Bild 7.11a im Gleichgewicht stehen.

Die Bilder 7.12a und b zeigen, daß die Normalkräfte in Quer- und Längsrichtung nach dem Auftreten der unteren Risse fast konstant durchlaufen.

Im y-Querschnitt sind die Steifigkeitswerte im Innenbereich kleiner als im x-Querschnitt. Die Momentenbilder in Bild 7.13a und b zeigen, daß die Momente von den steiferen Plattenquerschnitten in der längeren Spannrichtung angezogen werden. Das selbe bestätigt auch R. WEGNER [120] an einer gelenkig gelagerten Platte mit dem gleichen Seitenverhältnis. Ein beachtlicher Momentenabbau in der kürzeren Spannweite, in deren Richtung das Druckgewölbe stärker abgestützt wird, wird aber hier nicht festgestellt, wie Bild 7.13b zeigt. Dieser unveränderte Momentenverlauf läßt sich dadurch erklären, daß der auf die Plattenmittelfläche bezogene Momentenzustand den Membrananteil (Normalkräfte multipliziert mit dem Hebelarm) enthält. Zwar verringert sich der schwer darstellbare reine Biegezustand (bezogen auf die eigene Schwerlinie im jeweiligen Querschnitt), aber der Momentenzustand der Mittelfläche bleibt wegen der großen außermittig wirkenden Normalkräfte unverändert. Die Matrizengleichung (6.1-6) zeigt die Aufspaltung in zwei Momentenanteile deutlich.

In Bild 7.14 ist der nichtlineare Verlauf des Last-Mittendurchbiegungs-Diagrammes aufgetragen. Nach der Rißstabilisierung schmiegt sich die Kurve an die vom Nullpunkt ausgehende gerade Linie an, die sich genau mit der Lösung in [99] deckt. Diese gute überraschende Übereinstimmung rührt davon her, daß die zunehmenden Nachgiebigkeiten im Innenbereich und das Tragsystem ver-

steifenden Effekte (starre Einspannung) bei dem FEM-Modell mit dem steiferen Innenbereich und weicheren Randbereich bei dem SCHLAICHschen Modell zufällig ausgeglichen werden.

Es läßt sich allgemein sagen, daß sich die Stahlbetonplatte bei der Rißbildung durch den Schwerlinienversatz zu einem Schalen-tragwerk hin verändert und die Querlasten zusätzlich noch über die Schalenwirkung abträgt. Die Exzentrizitätsmatrix beschreibt dabei die Form der Mittelfläche der sehr flachen Schale in der Stahlbetonplatte.

In der wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetontragwerken ist die Beschreibung des schlagartigen Auftretens von Rissen numerisch sehr schwierig. Bei dem berechneten Ausgangssystem zur Parameterstudie ist das Konvergenzverhalten recht gut, da die horizontale Unverschieblichkeit für die Rißentwicklung eine mechanische Dämpfung bewirkt.

Variation der Parameter

Im folgenden wird von dem oben untersuchten Ausgangssystem ausgehend jeweils eine Variable verändert, während die übrigen Parameter die Werte des Ausgangssystems beibehalten. Die Aufgabe der Parameteruntersuchung besteht darin, die Abhängigkeit des Membranzustandes von den verschiedenen Faktoren zu finden. In [99] wird mitgeteilt, daß der E-modul und die Querdehnungszahl des Betons für den Membranzustand von untergeordneter Bedeutung sind. Diese Parameter werden deswegen in den folgenden Rechnungen nicht verändert.

Betonzugfestigkeit

Das in dieser Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren nimmt an, daß der Rißzustand allein von der Betonzugfestigkeit bestimmt wird, solange die Fließgrenze der Bewehrungseinlagen noch nicht überschritten ist.

Aus der in Unterkapitel 6.3 geschilderten Iterationsmethode, den Querschnitt stets einfach bis zur Nulllinie der Dehnungsverteilung aufreißen zu lassen, erscheint als logische Folge, daß der in Bild 6.11 dargestellte Iterationsweg für einen anderen Festigkeitswert nur in vertikaler Richtung parallel verschoben wird. Die Nulllinien liegen bei einem gleichen Rißzustand in gleicher Höhe und die stufenweise Modifikation ist unabhängig von der Betonzugfestigkeit immer gleich. Nur das Lastniveau muß je nach der Zugfestigkeit multipliziert werden. Das heißt, daß ein linearer Zusammenhang zwischen dem Tragverhalten von Platten, die sich nur in ihrer Betonzugfestigkeit unterscheiden, besteht.

Diese Annahme ist für die Rechnung von großem Vorteil: Wenn das Grundsystem mit $\beta_z = 300 \text{ N/cm}^2$ berechnet wird, ist das Tragverhalten bei beliebiger Betonzugfestigkeit voraussagbar. Eine Platte mit $\beta_z = 450 \text{ N/cm}^2$ befindet sich beispielsweise bei $P = 600 \text{ kN}$ in dem gleichen Rißzustand wie das Grundsystem bei $P = 400 \text{ kN}$. Alle Zustandsgrößen des Grundsystems können also mit dem Faktor 1.5 multipliziert werden.

Bewehrung

Der Einfluß der Bewehrung wird an einer unbewehrten Betonplatte untersucht, und deren Tragverhalten wird mit dem des Grundsystems (Platte g) verglichen.

Die Rechenergebnisse der beiden Platten mit der FE-Methode werden für $P = 500 \text{ kN}$ nachstehend einander gegenübergestellt.

Dimensionen in 10 N und cm	Platte g	unbewehrte Platte
Durchbiegung in Plattenmitte	0.1466	0.1720
Mittelwert für N_x in $y = 0$	-96.23	-121.84
Mittelwert für N_y in $x = 1x/2$	-207.0	-256.24

Dimensionen in 10 N und cm	Platte g	unbewehrte Platte
Einspannmoment M_y in der Mitte der längeren Plattenränder	-2294	-2180
Einspannmoment M_x in der Mitte der kürzeren Plattenränder	-1644	-1635
Betonspannung σ_y an der Unterseite in der Mitte der längeren Plattenränder	-149.1	-172.6
Betonspannung σ_x an der Unterseite in der Mitte der kürzeren Plattenränder	-113.3	-132.6
M_x in Plattenmitte	782.8	870.2
M_y in Plattenmitte	1242.0	1335.0

Die Momente werden, wie bereits bei dem Grundsystem erwähnt, auf die Plattenmittelfläche bezogen und beinhalten schon die außermittig wirkenden Membrankräfte.

Die unbewehrte Platte verhält sich bis ca. $P = 175$ kN als ideal homogene und isotrope Plattenstruktur. Die Querschnitte sind vollkommen symmetrisch. Im gerissenen Zustand ist aber die Unsymmetrie der Querschnitte der unbewehrten Platte wesentlich ausgeprägter als bei der bewehrten Platte g. Der Bewehrungsgehalt im Rißquerschnitt bestimmt die Schwerlinienlage und das Trägheitsmoment. Die Membrantragfähigkeit wird aber von der Bewehrung nur unbedeutend beeinflusst.

Bei der unbewehrten Platte wird demzufolge über den stärkeren Kopplungszustand mehr Membranwirkung aktiviert. Die geweckten Normalkräfte sind um ca. 20% größer.

Die Ergebnisse für die Rißverteilung sind bei den zwei Platten qualitativ völlig gleich.

Wesentlich ist hier, daß die seitlich unverschieblich gelagerte Stahlbetonplatte theoretisch auch ohne Bewehrung tragfähig ist.

Plattenschlankheit ($1y/h$)

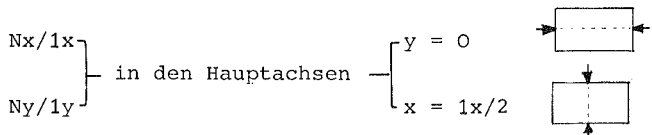
Die Plattenschlankheit wird so variiert, daß das Seitenverhältnis $1y/1x = 2/3$ und alle anderen Parameter unverändert bleiben.

In Bild 7.15 sind die Ergebnisse für folgende fünf Platten dargestellt.

Platte	1x	1y	1y/h
d1	200	133	10
g	300	200	15
d2	500	333	25
d3	800	533	40
d4	2000	1333	100

(Dimension cm)

Aufgetragen sind in Bild 7.15 die bezogenen Normalkräfte



in Abhängigkeit vom Verhältnis (Plattendicke/kürzere Stützweite).

Die Querlasten werden zunächst monoton gesteigert, bis sich die Rißdurchsetzung stabilisiert. Der erreichte Systemzustand wird dann durch die Gleichlast $q = 0.5 \text{ N/cm}^2$ belastet. Diese Lasthöhe wird aus der anderen Parameterstudie in [99] entnommen, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

Die Rißlast P ist bei diesen fünf Platten gleich, die entsprechende auf die Fläche bezogene Last ist aber wegen der unterschiedlichen Plattenflächen ungleich. Die nicht bezogenen Werte der Schnittgrößen haben fast die gleiche Größenordnung.

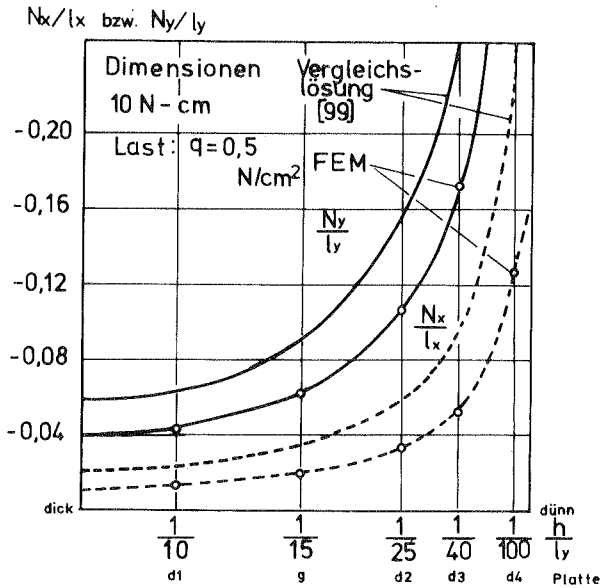


Bild 7.15 Einfluß der Plattenschlankeit auf den Membranzustand

Die auf die Seitenlänge bezogenen Gewölbekräfte sind stark von der Plattenschlankheit abhängig. Nimmt die Schlankheit zu, so ist die Platte bestrebt, die Querlasten weitmöglichst als dünne Druckmembranschale abzutragen. Die berechneten Kurven stimmen in der Tendenz recht gut mit [99] überein.

Dehnfedern

Soll ein Druckmembranzustand in gerissenen Stahlbetonplatten bei der Bemessung in Rechnung gestellt werden, so muß bei der betrachteten Platte eine genügende Aussteifung gegen horizontale Verschiebungen vorhanden sein. Die Größe der Membrankräfte ist vor allem von der Steifigkeit der Dehnfedern abhängig, die durch die Bettungsziffern gekennzeichnet wird.

Es werden zwei Platten (S_x und S_y) berechnet, bei denen die seitlichen Behinderungen jeweils nur in einer Richtung stufenweise gelöst werden und jeweils die anderen zwei gegenüberliegenden Ränder unverschieblich gehalten bleiben. Alle Ränder sind voll eingespannt.

Die Systemskizzen und die gemittelten Normalkräfte in den Hauptachsen sind aus Tabelle 7.1 zu entnehmen. Die Normalkräfte sind bezogen auf das Ausgangssystem (Platte g) in Prozent angegeben. Die einzelnen Berechnungsbeispiele werden mit S_x-m_1 bis $-m_7$ und S_y-m_1 bis $-m_7$ bezeichnet.

Verglichen werden die Momente und die Normalkräfte bei einer Last $P = 500 \text{ kN}$.

Die Momentenflächen bei unterschiedlichen Membranauflagerungen (S_x-m_7 und S_y-m_7) sind in Bild 7.16 dargestellt. Die gerissenen Ober- und Unterseiten sind für m_1 und m_7 beider Plattenarten in Bild 7.17 abgebildet.

System					
Theorie		FEM	[99]	FEM	[99]
g	Nx	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	Ny	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
m1	Nx	0,5102	0,5682	1,1427	1,1934
	Ny	1,0526	1,0389	0,7435	0,6042
m2	Nx	0,3622	0,3967	1,4340	1,2770
	Ny	1,0696	1,0543	0,6069	0,4328
m3	Nx	0,1116	0,1163	1,7387	1,4229
	Ny	1,0844	1,0790	0,2818	0,1323
m4	Nx	/		1,7160	1,4422
	Ny			0,2109	0,0923
m5	Nx	0,0658	0,0617	/	
	Ny	1,0862	1,0840		
m6	Nx	0,0247	0,0130	2,0641	1,4798
	Ny	1,0879	1,0890	0,1336	0,0151
m7	Nx	0,0138	0,0032	2,0816	1,4872
	Ny	1,0882	1,0900	0,1100	0,0001

-Nx= 962.3 N/cm } für g nach FEM
 -Ny=2070.0 N/cm

(s. S. 67 und 68 in [99])

Tabelle 7.1 Einfluß der Bettungsziffern auf den Druckmembranzustand

Aus der Veränderung der Normalkräfte in Tabelle 7.1 läßt sich folgendes Tragverhalten erklären. Werden die Dehnfedern in einer Richtung weich, so nehmen die Druckkräfte in dieser Richtung ab. In der anderen steiferen Spannrichtung aber wachsen die Membrankräfte an. Die Schnittgrößen verlagern sich also in Richtung der steiferen Widerlager. Das Druckgewölbe stützt sich bei den gleichen Randnachgiebigkeiten in beiden Richtungen mehr in Richtung der kürzeren Spannweite ab. Nehmen die Nachgiebigkeiten in dieser eigentlichen Haupttragrichtung zu (S_y -Platten), treten mehr Kraftumlagerungen auf, als bei S_x -Platten. Die prozentuale Zunahme der Gewölbekräfte in der zweiten Richtung tritt also, wie die Tabelle 7.1 zeigt, bei S_y viel stärker hervor, als bei S_x .

Der Vergleich mit der SCHLAICHschen Lösung läßt sich am besten anhand der Rißbilder erläutern. An der Unterseite laufen die Risse in x -Richtung und diagonal (s. Bild 7.17). Wenn die Kämpfer bei dem Gewölbe in der kürzeren Spannrichtung nachgeben (S_y), macht sich der Einfluß der in [99] vernachlässigten Rißbildung im Feldbereich auf die Gewölbekräfte umso mehr bemerkbar, je kleiner die Bettungsziffern in y -Richtung werden.

Dieser Unterschied erklärt sich wie folgt: Die Membranwirkung geht mit der stufenweisen Lösung der seitlichen Behinderungen zuerst im Randbereich verloren. Der schon erwähnte Membrananteil, der der unteren Rißbildung entspricht und sich auch im membranfreien Lagerungsfall ausbildet, entsteht weiterhin, allerdings wesentlich geringer (s. N_y bei Platte S_y -m7). Die FEM-Rechnung erfaßt diesen anhaltenden Membrananteil.

In der S_x -Serie wird der Einfluß dieses Membrananteils auf N_x erst bei S_x -m6 groß, weil die x -Querschnitte von der unteren Rißbildung nicht so erheblich verändert werden wie die y -Querschnitte.

Der Einfluß der Rißbildung an der Unterseite auf die Momentenverteilung wurde schon in Bild 7.13 erläutert. Bei der Änderung der Dehnfedern zeigt sich, wie die Membranrandbedingungen im

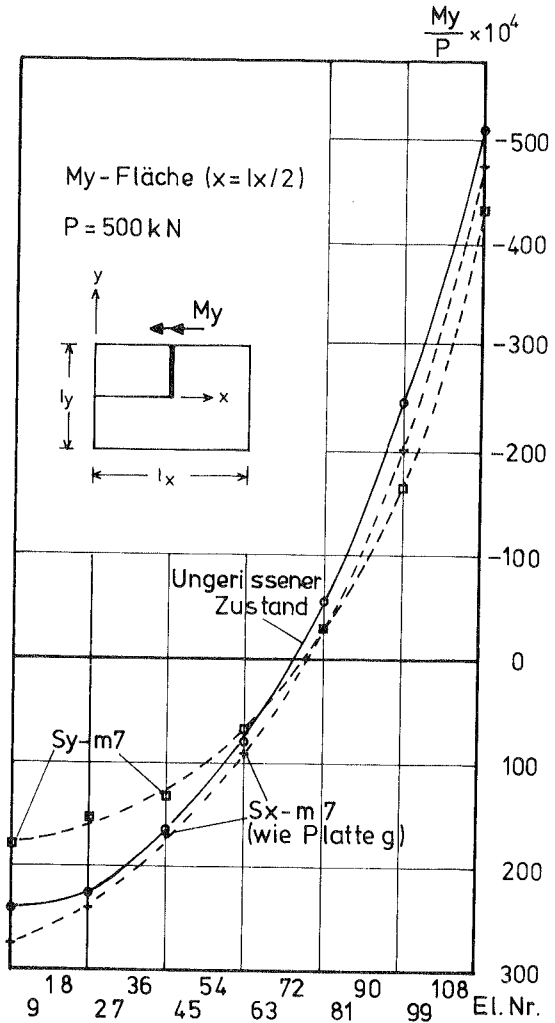


Bild 7.16 a Einfluß der Membranrandbedingungen auf den Plattenzustand

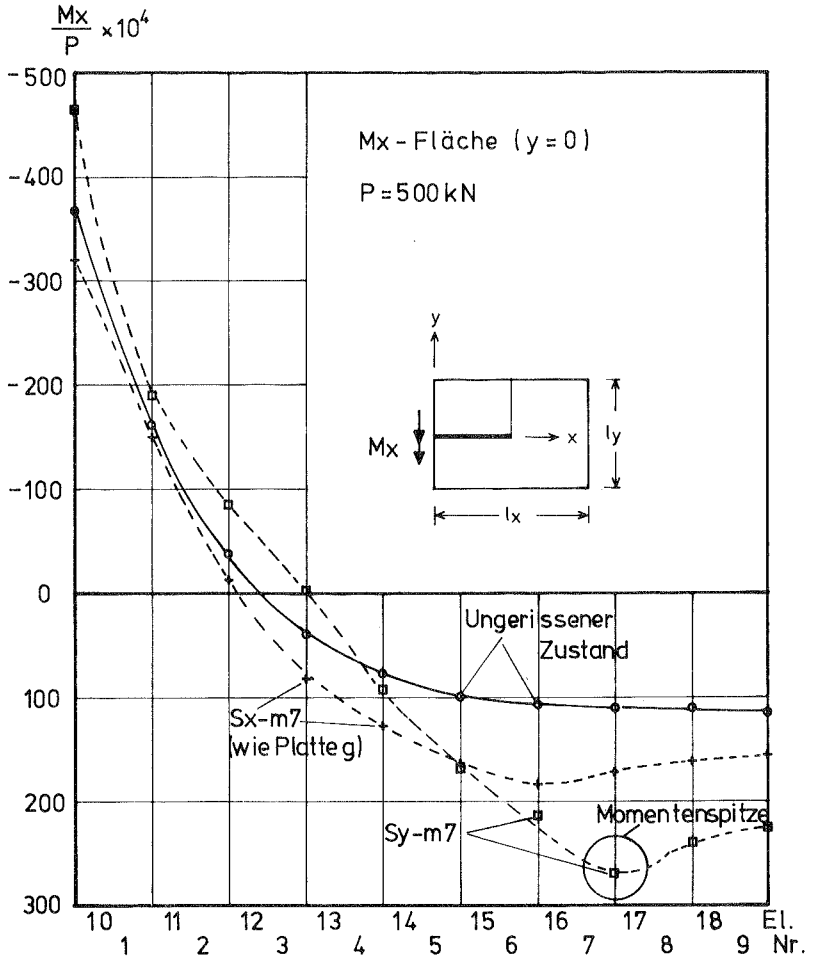
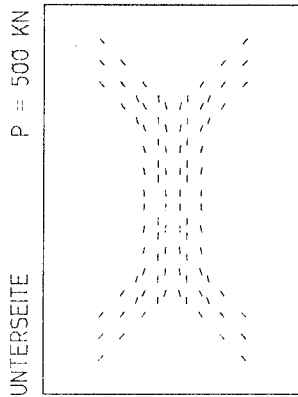
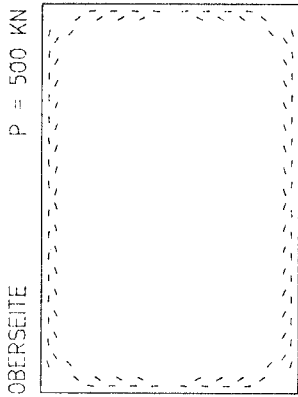
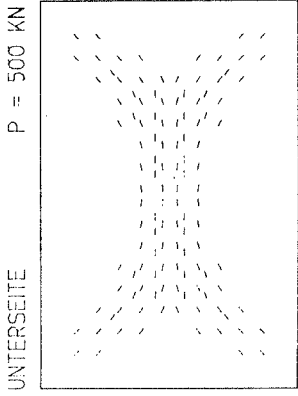
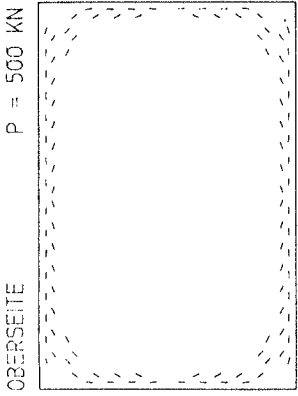


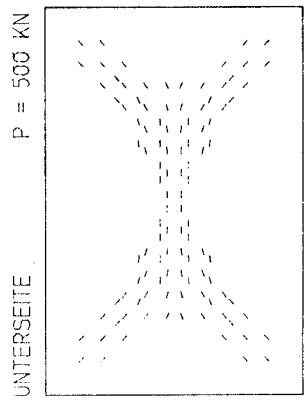
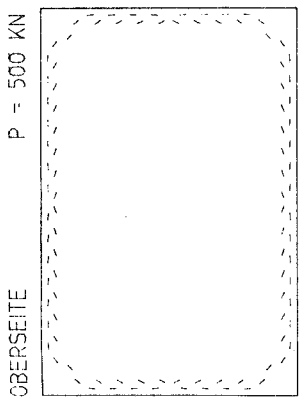
Bild 7.16b Einfluß der Membranrandbedingungen auf den Plattenzustand



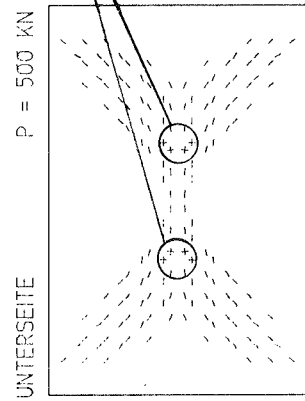
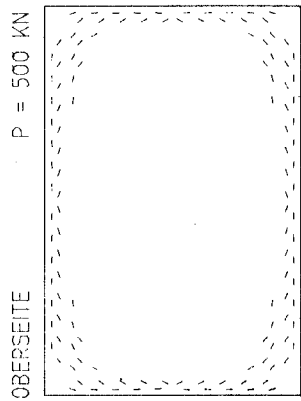
EINFLUSS DER MEMBRANWIRKUNG AUF
DAS RISSBILD PLATTE SX-M1



EINFLUSS DER MEMBRANWIRKUNG AUF
DAS RISSBILD PLATTE SX-M7



EINFLUSS DER MEMBRANWIRKUNG AUF DAS RISSBILD PLATTE SY-M1



EINFLUSS DER MEMBRANWIRKUNG AUF DAS RISSBILD PLATTE SY-M7

Bild 7.17 b Rißbilder für Sy-Platten

gerissenen Zustand die Plattenbeanspruchung und den Rißverlauf beeinflussen. Werden in der kürzeren Plattenrichtung die horizontalen Randverschiebungen frei ($Sy-m7$), so ergibt sich in dieser Richtung im Innenfeld ein Momentenabbau gegenüber der Elastizittslsung (Bild 7.16a). In der längeren Tragrichtung ist dagegen mit einem großen Momentenzuwachs zu rechnen (Bild 7.16b). Im umgekehrten Fall ($Sx-m7$) werden in beiden Richtungen die Feldmomente größer als im ungerissenen Zustand, weil die große Membrannachgiebigkeit in Längsrichtung die Momente in Querrichtung verlagert und die Steifigkeitsabminderungen der y -Richtung im Feldbereich gerade umgekehrt eine Zunahme der Momente in Längsrichtung bewirken.

Die große Momentenumlagerung bei $Sy-m7$ äußert sich auch in den Ribildern (Bild 7.17b). Die Momentenspitze aus Bild 7.16b ist schon bei den in zwei Richtungen gerissenen Elementen an der Unterseite erkennbar (s. Unterseite in Bild 7.17b).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die FEM-Rechnung gezeigt hat, daß das in [99] zur Erklärung des Entstehens des Druckgewlbes angesetzte mechanische Modell bei großer Aussteifung durch anschließende Nachbarplatten eine befriedigend anwendbare Lösung ergibt. Allerdings wird bei freiwerdenden Seitenverschiebungen der Einfluß der unterseitigen Rißbildung im Feldbereich größer und damit die vereinfachte Modellierung unbrauchbar.

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren hingegen, dem eine wirklichkeitsnahe Rißdarstellung zugrunde liegt, versagt auch im membran- und momentenfreien Lagerungsfall nicht, in dem der Momentenzustand in Plattenmitte ein Maximum erreicht.

Bei der Betrachtung elastischer Lagerung in horizontaler Richtung darf aber nicht vergessen werden, daß der Druckgewlbezustand in einem Innenfeld andere umliegende Nachbarplatten nachteilig beeinflusst. Das heißt, die Randfelder werden auf Biegung und Zug in ihrer Ebene beansprucht.

8. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

In dieser Arbeit wurde ein numerisches Rechenverfahren, beruhend auf der Methode der finiten Elemente beschrieben. Mit diesem Rechenverfahren wurden gerissene Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung des Kopplungszustandes zwischen der Membran- und Plattenwirkung untersucht. Besonderer Augenmerk wurde auf den Druckmembranzustand im gerissenen Zustand gelegt.

Der Rißzustand wurde mit den vereinfachenden Annahmen des statischen Modells so idealisiert, daß die Nichtlinearität der Berechnung nur auf der Rißbildung und der Plastizität der Bewehrung beruhte.

Das Stoffgesetz für den idealisierten Rißquerschnitt zeigt deutlich, daß die Schwerlinienwanderung als Folge der in die Druckzone hineinreichenden Risse für die Kopplungsmatrizen verantwortlich ist, über die im gerissenen Zustand die Membrantragfähigkeit der Platte herangezogen wird. Im Rißbereich müssen unabhängig von den Randbedingungen die Scheiben- und die Plattenbeanspruchung überlagert werden, um den Kraftzustand in gerissenen Stahlbetonplatten zu erfassen.

Mit dem gemischten Schalenmodell von HERRMANN wurden die Grundmatrizen zur elektronischen Rechnung abgeleitet. Einige Beispielrechnungen wurden durchgeführt, um die Vorgehensweise auf ihre Anwendbarkeit zu überprüfen und um das Tragverhalten gerissener Stahlbetonplatten zu studieren. Vor allem die theoretischen und experimentellen Rißbilder zeigen gute Übereinstimmung.

Weitere Parameterstudien für Lastfälle, Bewehrungsanordnung, veränderliche Plattendicke, Einspannungsgrade, nichtkonstante Bettungsziffernverläufe usw. bleiben nachfolgenden Untersuchungen vorbehalten.

Aussagen über Rißabstände und Rißbreiten müssen mit empirischen Ansätzen aus Versuchen ermittelt werden, weil die vorliegende

rein statische Untersuchung nur Kenntnisse über das Tragverhalten gerissener Stahlbetonplatten liefert.

Folgende Schlußfolgerungen lassen sich aus den durchgeführten Rechnungen ziehen:

Risse wurden lange Zeit als schädlich angesehen. Sofern durch konstruktive Maßnahmen Risse haarfein bleiben und keine Korrosionsgefahr für den Stahl besteht, kann aber das Auftreten der Risse zu einer Strukturoptimierung führen, wie die berechnete Gewölbewirkung zeigt. Im aktivierten Druckmembranzustand wird nämlich die höhere Druckfestigkeit des Betons beim zweiachsigen Spannungszustand besser ausgenutzt als im ungerissenen Zustand.

Die vorliegende Arbeit weist auf folgende Probleme bei der wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetontragwerken hin:

Für die Entwicklung eines numerischen Materialmodells sind die derzeitigen Kenntnisse über das Verformungs- und Bruchverhalten des Betons bei mehrachsiger Beanspruchung noch nicht ausreichend. Dies wird sich auch in absehbarer Zeit nicht so schnell ändern. Auch wenn man höhere Ansätze für das Materialverhalten des Betons der nichtlinearen Rechnung zugrunde legt, steht dem erheblich größeren Rechenaufwand nur eine verhältnismäßig geringe Genauigkeitssteigerung gegenüber.

Die Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen liegt bei allen vorliegenden Rechnungen im Bereich der bei Stahlbetonversuchen üblichen Streuung. Der Versuch, komplexere Hypothesen der Spannungstheorie für den Beton heranzuziehen, um bessere Ergebnisse zu erzielen, wird durch diese streuenden Materialeigenschaften des Betons und durch die allgemein übliche Makro-Idealisierung für die Risse vereitelt. Man sollte deshalb für die praktische Anwendung eine überschlägige Betrachtungsweise bevorzugen, die das Tragverhalten grob erfaßt und auf der sichereren Seite liegt.

ANHANG

Querschnittswerte für Rißzustände ① bis ⑥

Diskretisierungsnetze D12 und R96

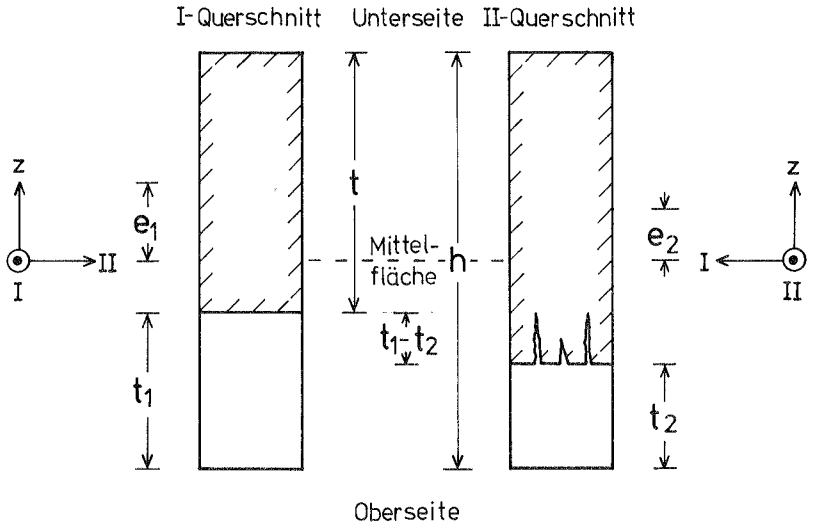


Bild A1 Rißzustand ①

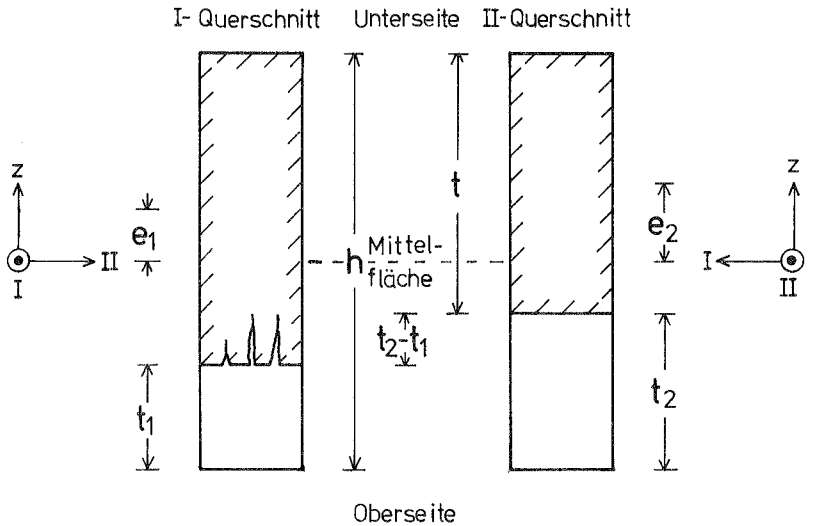


Bild A2 Rißzustand ②

Rißzustand ① Risse an der Oberseite $t_1 \cong t_2$

Biso-Schicht

$$t = h - t_1 \quad e_{12} = \frac{t_1}{2} \quad D = \frac{E_b \cdot t}{1 - \nu_b^2}$$

$$B = \frac{E_b \cdot t^3}{12(1 - \nu_b^2)}$$

I-Querschnitt

$$D_1 = D \quad e_1 = e_{12} \quad B_1 = B$$

II-Querschnitt

$$D_2 = D + E_b \cdot (t_1 - t_2)$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{D_2} \right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot (t_1 - t_2) \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{h}{2} \right) \right\}$$

$$B_2 = B + D \cdot (e_{12} - e_2)^2 + E_b \cdot \frac{(t_1 - t_2)^3}{12} + E_b \cdot (t_1 - t_2) \cdot \left(e_2 + \frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2$$

Rißzustand ② Risse an der Oberseite $t_2 \cong t_1$

Biso-Schicht

$$t = h - t_2 \quad e_{12} = \frac{t_2}{2} \quad D = \frac{E_b \cdot t}{1 - \nu_b^2}$$

$$B = \frac{E_b \cdot t^3}{12(1 - \nu_b^2)}$$

I-Querschnitt

$$D_1 = D + E_b \cdot (t_2 - t_1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{D_1} \right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot (t_2 - t_1) \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{h}{2} \right) \right\}$$

$$B_1 = B + D \cdot (e_{12} - e_1)^2 + E_b \cdot \frac{(t_2 - t_1)^3}{12} + E_b \cdot (t_2 - t_1) \cdot \left(e_1 + \frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2$$

II-Querschnitt

$$D_2 = D \quad e_2 = e_{12} \quad B_2 = B$$

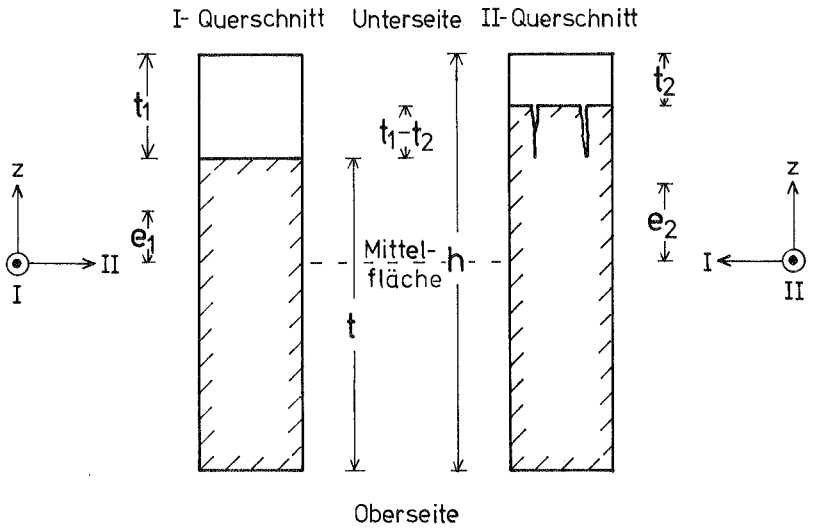


Bild A3 Rißzustand ③

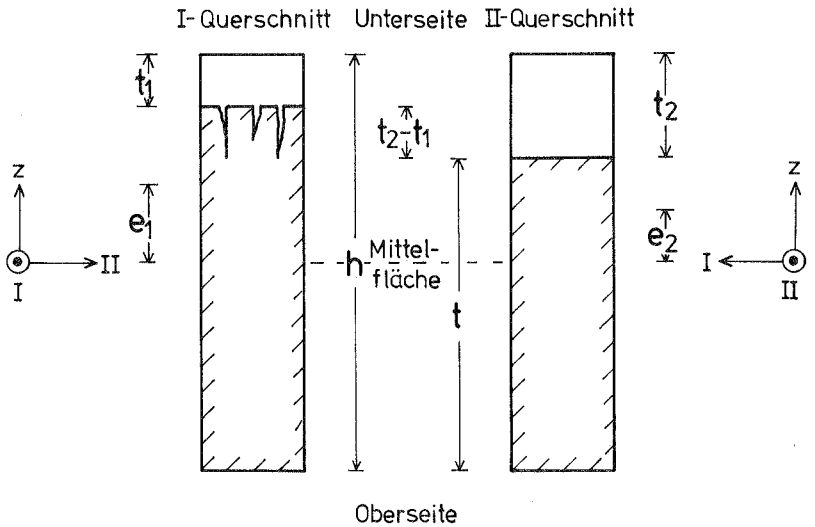


Bild A4 Rißzustand ④

Rißzustand ③ Risse an der Unterseite $t_1 \cong t_2$

B_{iso}-Schicht

$$t = h - t_1 \quad e_{12} = -\frac{t_1}{2} \quad D = \frac{E_b t}{1 - \nu_b^2}$$

$$B = \frac{E_b \cdot t^3}{12(1 - \nu_b^2)}$$

I-Querschnitt

$$D_1 = D \quad e_1 = e_{12} \quad B_1 = B$$

II-Querschnitt

$$D_2 = D + E_b \cdot (t_1 - t_2)$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{D_2}\right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot (t_1 - t_2) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right\}$$

$$B_2 = B + D \cdot (e_{12} - e_2)^2 + E_b \cdot \frac{(t_1 - t_2)^3}{12} + E_b \cdot (t_1 - t_2) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2} - e_2\right)^2$$

Rißzustand ④ Risse an der Unterseite $t_2 \cong t_1$

B_{iso}-Schicht

$$t = h - t_2 \quad e_{12} = -\frac{t_2}{2} \quad D = \frac{E_b t}{1 - \nu_b^2}$$

$$B = \frac{E_b \cdot t^3}{12(1 - \nu_b^2)}$$

I-Querschnitt

$$D_1 = D + E_b \cdot (t_2 - t_1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{D_1}\right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot (t_2 - t_1) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right\}$$

$$B_1 = B + D \cdot (e_{12} - e_1)^2 + E_b \cdot \frac{(t_2 - t_1)^3}{12} + E_b \cdot (t_2 - t_1) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1 + t_2}{2} - e_1\right)^2$$

II-Querschnitt

$$D_2 = D \quad e_2 = e_{12} \quad B_2 = B$$

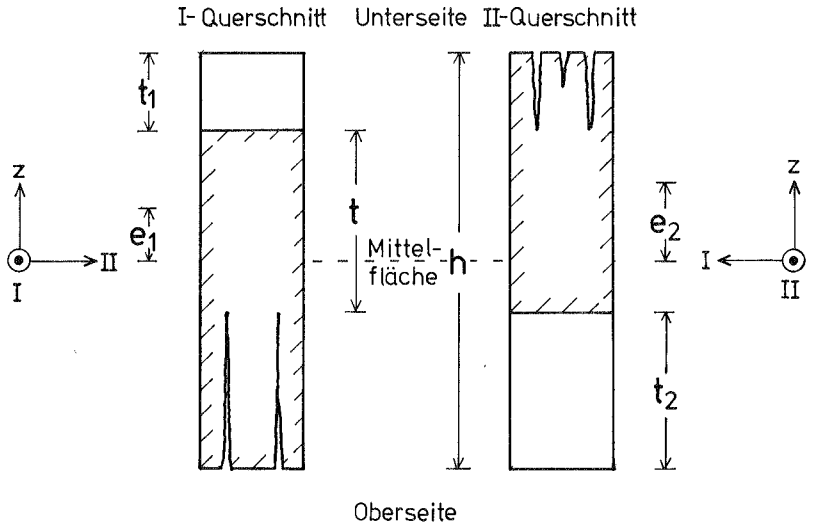


Bild A5

Rißzustand ⑤

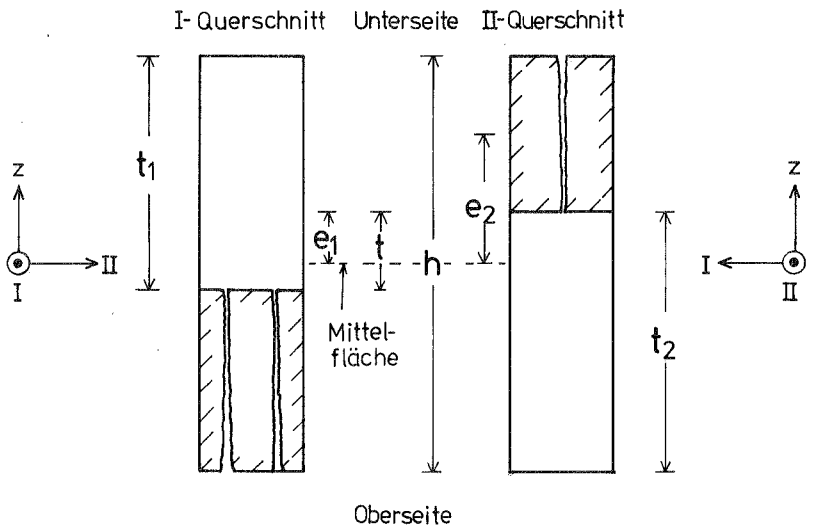


Bild A6

Rißzustand ⑥

Rißzustand (5) Risse an der Ober- und Unterseite

Bisot-Schicht

$$t = h - (t_1 + t_2) \quad e_{12} = \frac{t_2 - t_1}{2} \quad D = \frac{E_b t}{1 - \nu_b^2} \quad h \cong t_1 + t_2$$

$$B = \frac{E_b t^3}{12(1 - \nu_b^2)}$$

I-Querschnitt

$$D_1 = D + E_b \cdot t_2$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{D_1}\right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{t_2}{2} - \frac{h}{2}\right) \right\}$$

$$B_1 = B + D \cdot (e_{12} - e_1)^2 + E_b \cdot \frac{t_2^3}{12} + E_b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_2}{2} + e_1\right)^2$$

II-Querschnitt

$$D_2 = D + E_b \cdot t_1$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{D_2}\right) \cdot \left\{ D \cdot e_{12} + E_b \cdot t_1 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1}{2}\right) \right\}$$

$$B_2 = B + D \cdot (e_{12} - e_2)^2 + E_b \cdot \frac{t_1^3}{12} + E_b \cdot t_1 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1}{2} - e_2\right)^2$$

Rißzustand (6) Risse an der Ober- und Unterseite

In diesem Fall

$$h \cong t_1 + t_2$$

$t = (t_1 + t_2) - h$: Dicke der B₀-Schicht

$$e_{12} = \frac{t + h}{2} - t_1 \quad D = 0 \quad B = 0$$

I-Querschnitt

$$D_1 = E_b \cdot (h - t_1)$$

$$e_1 = -\frac{t_1}{2}$$

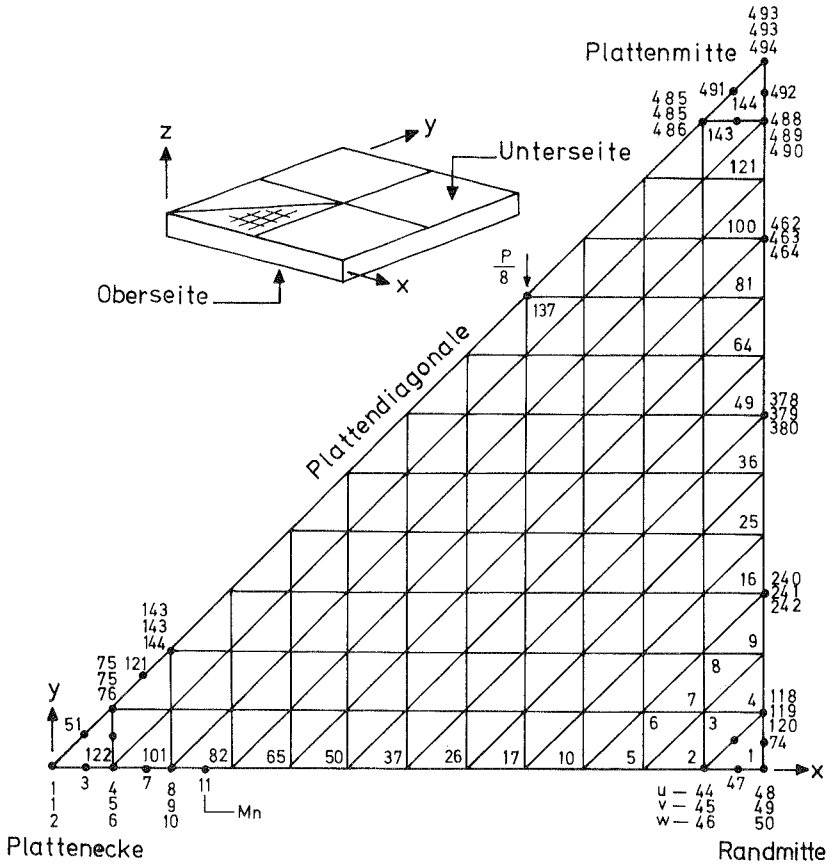
$$B_1 = \frac{E_b}{12} (h - t_1)^3$$

II-Querschnitt

$$D_2 = E_b \cdot (h - t_2)$$

$$e_2 = \frac{t_2}{2}$$

$$B_2 = \frac{E_b}{12} (h - t_2)^3$$



Anzahl der Elemente 144

Anzahl der Parameter 494

Bild A7 D12-Netz

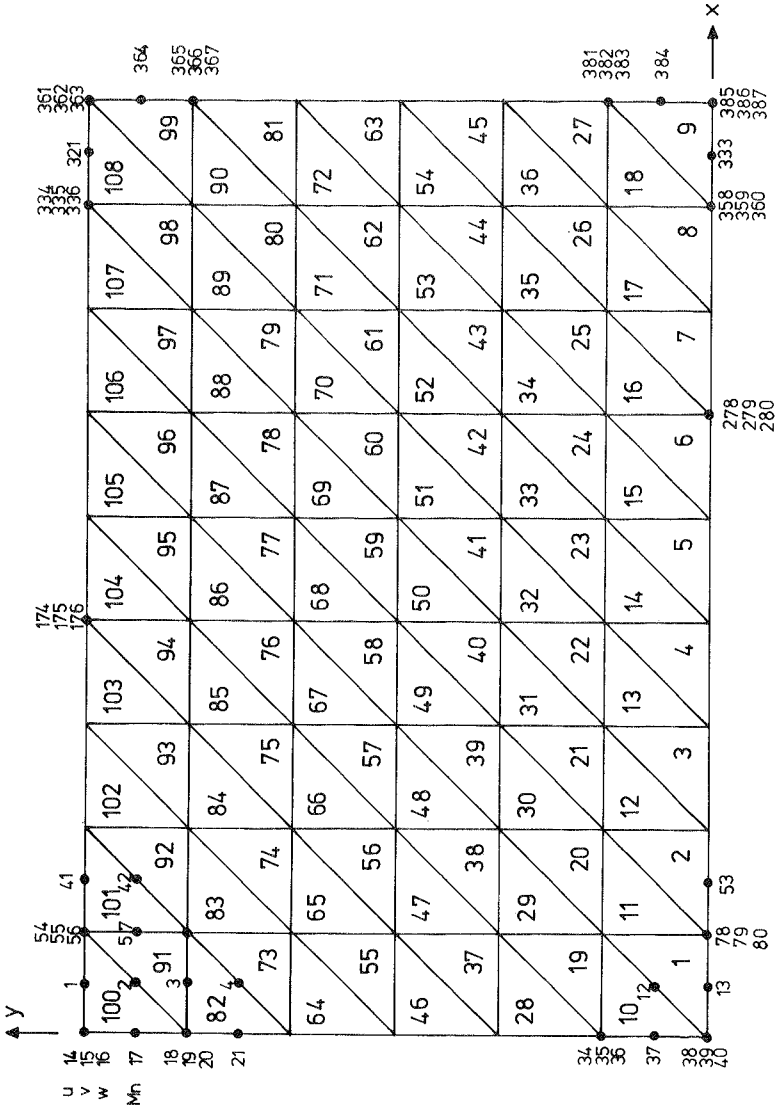


Bild A8 R96-Netz

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M.Becker, J.Bühler, G. Lang-Lendorff, K.Papailiou,
J. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdreh-
beanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten
Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R.W.Rembold, J.M.Sättele,
K.H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und
erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E.A.Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G.Eisenbiegler, R.D.Kugler, h.Lieb,
G. Müller, J.Müller, K.-H.Reineck, J.Schlaich,
K.H. Schweizerhof, F.Seible:
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und
finite Elemente
- 77-1 B.-M. Sulke
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt