

Eine Verallgemeinerung des Kraftgrößen- und des Formänderungs- größenverfahrens aufgrund einer mathematischen Analyse dieser Verfahren

Von der Technischen Hochschule Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor - Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Gebhard Hees

geboren zu Jungenthal Krs. Altenkirchen

B.09.2006

2



Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. W. Pelikan
Tag der Einreichung: 27. November 1964
Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1965

1965

Allen, die mir auf meinem bisherigen Lebensweg durch ihren Rat oder ihre Hilfe, durch ihr Wissen oder ihr Verständnis weitergeholfen haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Mein besonderer Dank gilt meinen hochverehrten Lehrern Herrn Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer und Herrn Professor Dr. -Ing. W. Pelikan, die meiner Arbeit großes Interesse entgegenbrachten und denen ich manchen wertvollen Hinweis verdanke.

Gebhard Hees

Inhaltsverzeichnis

Seite

Schriftumsverzeichnis	4
Abkürzungsverzeichnis	5
1. Einleitung	7
2. Das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren	9
3. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten	13
4. Die Differentialgleichung des querbelasteten Biegeträgers und ihre Lösung	16
4.1 Die Differentialgleichung	16
4.2 Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung	17
4.3 Lösung durch ein System von Differentialgleichungen der 1. Ordnung	20
4.4 Entkopplung in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung. Statisch bestimmte Tragwerke.	22
4.5 Verschiedene Integrationsbereiche. Übergangsbedingungen und Sprunggrößen.	25
5. Eine mathematische Lösung analog zum Kraftgrößen- und Formänderungsgrößenverfahren	29
5.1 Das Kraftgrößenverfahren	29
5.2 Das Formänderungsgrößenverfahren	40
6. Zahlenbeispiele	48
6.1 Einfach statisch und einfach geometrisch unbestimmtes System	48
6.2 Kombinierte Anwendung des Kraftgrößen- und des Formänderungsgrößenverfahrens	49
6.3 Durchlaufträger nach dem Kraftgrößenverfahren. Änderung der Belastung und der Systemwerte des Tragwerks.	52
7. Anwendung auf die Differentialgleichung des längsbelasteten Stabes	60
8. Zusammenfassung	69
Lebenslauf	73

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
- [2] Stüssi, F.: Baustatik Band I. Basel, 1946.
- [3] Braun, O.: Vereinfachungen bei Ermittlung der Belastungsglieder der Elastizitätsgleichungen. Beton- und Stahlbetonbau 47 (1952), H. 1, S. 18 - 19.
- [4] Braun, O.: Neues zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Der Stahlbau 25 (1956), H. 10, S. 236 - 245.
- [5] Thürlimann, Ziegler: Plastische Berechnungsmethoden. Vorlesungsmanuskript des Fortbildungskurses für Bau- und Maschinen-Ingenieure, 25. - 30. März 1963 in Zürich.
- [6] Falk, S.: Die Berechnung von Rahmentragwerken mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. ZAMM 37 (1957), Nr. 7/8, S. 269 - 270.
- [7] Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technische Anwendung, 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

Abkürzungsverzeichnis

System- und Querschnittswerte

l, s	Stützweite, Stablänge
E, F	Dehnsteifigkeit
E, J	Biegesteifigkeit
ϵ_N, ϵ_M	Federzahlen für Federn, die eine Normalkraft bzw. ein Moment aufnehmen

Belastung, Schnittgrößen und Verformungen

q, n	Streckenlasten
P, H	Einzellasten
M	Moment
N	Normalkraft
Q	Querkraft
S	Stabkraft
A, B, C, V, H	Lagerreaktionskräfte
ϵ, κ, γ	Elementverformungen (Dehnung, Krümmung, Gleitung)
u, v	Verschiebungen eines Trägerpunktes
φ	Verdrehung eines Trägerquerschnitts
c	unelastische Stützensenkung

Sonstige Abkürzungen

A_a, A_i	äußere und innere Arbeit beim Prinzip der virtuellen Arbeiten
X, ξ	Unbekannte Konstanten beim Kraftgrößen- bzw. Formänderungsgrößenverfahren
δ_{ik}, Z_{ik}	Koeffizienten des Gleichungssystems beim Kraftgrößen- bzw. beim Formänderungsgrößenverfahren

Weitere Abkürzungen und Bezeichnungen, vor allem die Bedeutung der Indizes, sind im Text erläutert.

1. Einleitung

In der Statik können grundsätzlich zwei verschiedene Methoden bei der Lösung einer Aufgabe unterschieden werden: die statischen und die mathematischen.

Unter statischen Methoden sollen diejenigen verstanden werden, die ingenieurmäßiges Denken während der Lösung voraussetzen. Sie sind daher meist recht anschaulich.

Unter mathematischen Methoden sollen diejenigen verstanden werden, bei denen alle Zusammenhänge mathematisch formuliert werden und deren Lösung dann formal abläuft. Nach der Formulierung der Aufgabe sind keine technischen, sondern nur noch mathematische Kenntnisse erforderlich. Die Methoden sind daher meist abstrakt.

Zu Beginn dieses Jahrhunderts wurden sehr gute und einfache statische Verfahren entwickelt. In den letzten Jahrzehnten ist aber eine immer häufigere Anwendung der mathematischen Methoden zu beobachten. Dies hat vor allem zwei Gründe. Erstens lassen sich Flächentragwerke nur noch in wenigen Sonderfällen "anschaulich" berechnen. Hier ist es einfacher, die Aufgabe mathematisch zu formulieren, obwohl die Formulierung und auch die Lösung oft erhebliche Schwierigkeiten machen. Zweitens brachte das elektronische Rechnen eine gewisse Abkehr von der Anschaulichkeit.

Es ist aber keineswegs so, daß sich diese beiden Methoden als Alternativen gegenüberstehen müssen, sondern sie sollten sich vielmehr gegenseitig befruchten. Ein schönes Beispiel dafür ist das Mehrstellenverfahren [1], das von Stüssi als Seilpolygonverfahren [2] nur aus physikalischen Überlegungen entwickelt wurde. Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wie sie z. B. später in Formel (4.1) angegeben wird, leistet die Seilpolygonmethode aufgrund ihrer Anschaulichkeit mehr als das Mehrstellenverfahren, da sie Unstetigkeiten leicht erfassen kann. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung muß man aber schon Kunstgriffe anwenden, um die Seilpolygonmethode noch anschaulich zu machen. Das formale abstrakte Vorgehen beim Mehrstellen-

verfahren ist nun geeigneter, da es allgemeiner und nicht an die Anschauung gebunden ist. Darüber hinaus gestattet die mathematische Methode Betrachtungen über die Genauigkeit, was oft sehr wichtig ist.

Es ist naheliegend, auch die beiden wichtigsten statischen Methoden, das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren, mathematisch zu deuten. Das Ergebnis ist wiederum, daß man von der engen physikalischen Vorstellung loskommt. Es gelingt, die von Braun [3, 4] für das Kraftgrößenverfahren empirisch gefundenen Erkenntnisse zu beweisen und auch für das Formänderungsgrößenverfahren entsprechende Sätze aufzustellen.

Auf der anderen Seite zeigt sich aber auch, daß die von Ingenieuren entwickelten statischen Methoden, die den üblichen mathematischen Lösungen in vielen Fällen überlegen sind, wohl kaum aufgrund rein mathematischer Überlegungen gefunden worden wären.

Aufgabe dieser Arbeit ist es nicht, neue Methoden zu finden, sondern bekannte Methoden zu analysieren und daraus neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Um eine geschlossene Darstellung zu erhalten, ist es erforderlich, das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren, die beide als bekannt vorausgesetzt werden, noch einmal kurz zu beschreiben. Ebenso wird der Vollständigkeit halber auf manche bekannten Zusammenhänge noch einmal hingewiesen.

2. Das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren

Ein Tragwerk wird dann statisch bestimmt genannt, wenn sich alle Lager- und Schnittkräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen. Ist dies nicht mehr möglich, so ist das Tragwerk statisch unbestimmt.

Bei der Berechnung der Lager- und Schnittkräfte statisch unbestimmter Tragwerke müssen die Verformungen, die verträglich mit den Lagerbedingungen und den Zwischenbedingungen an den Gelenken sein müssen, berücksichtigt werden. Zu ihrer Berechnung ist eine Aussage über das Werkstoffverhalten erforderlich. In der klassischen Statik wählt man das Hooke'sche Gesetz, das einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung beschreibt.

Beim Kraftgrößenverfahren schaltet man soviele Kraftgrößen (Lager- und Schnittkräfte) durch den Einbau von Mechanismen (Gelenke) aus, wie erforderlich sind, um das Tragwerk statisch bestimmt zu machen. Die ausgeschalteten Kraftgrößen werden als Unbekannte eingeführt und so berechnet, daß die durch die zusätzlichen Mechanismen möglich gewordenen Verformungen rückgängig gemacht werden. Für jeden Mechanismus und damit für jede unbekannte Schnittkraft läßt sich eine Kontinuitätsbedingung anschreiben. Bei der Wahl des statisch bestimmten Systems muß man darauf achten, daß das Tragwerk nicht durch eine falsche Anordnung oder eine zu große Zahl von Mechanismen kinematisch wird.

Das Gesagte soll kurz an einem Beispiel erläutert werden. In Bild 2.1 a ist ein Tragwerk mit Belastung und Auflagerreaktionen dargestellt. Zur Berechnung der 4 Auflagerreaktionen stehen nur 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Das Tragwerk ist also einfach statisch unbestimmt. Durch den Einbau eines Gelenkes an der Stelle b wird es statisch bestimmt gemacht (Bild 2.1 b). Aus der Belastung ergeben sich die in Bild 2.1 c gezeichneten Zustände. Bringt man die durch das Gelenk ausgeschaltete Schnittgröße $M_b = X_1$ als Größe 1 an, so erhält man die in 2.1 d dargestellten Zustände. Die Kontinuitätsbedingung "kein Knick in der Biegelinie am Punkt b"

lautet:

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0 \quad (2.1)$$

Hieraus läßt sich X_1 berechnen und man erhält den endgültigen, statisch unbestimmten Zustand nach Bild 2. 1 e.

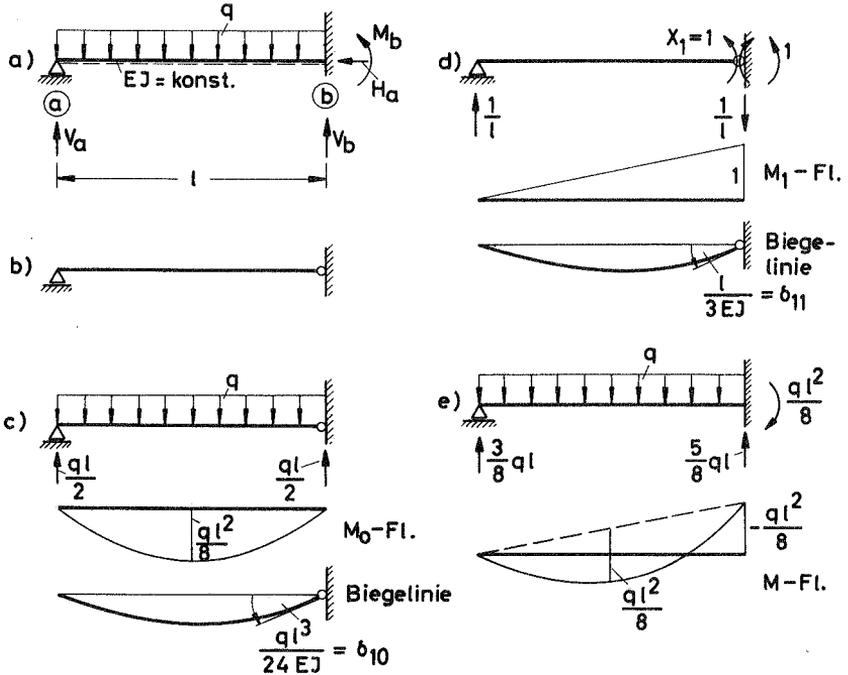


Bild 2.1

Beim Formänderungsgrößenverfahren schaltet man so viele Verformungen (Stab- und Knotendrehwinkel) durch den Einbau von Halterungen (Lager und Einspannungen) aus, wie erforderlich sind, um das Tragwerk geometrisch bestimmt zu machen. Die ausgeschalteten Verformungen werden als Unbekannte eingeführt und so berechnet, daß die durch die zusätzlichen Halterungen möglich gewordenen Festhaltekräfte rückgängig gemacht werden. Für jede Halterung und damit für jede unbekannte Verformung läßt sich eine Gleichgewichtsbedingung anschreiben. Bei der Wahl des geometrisch bestimmten Systems können über die erforderlichen Halterungen hinaus noch

weitere Halterungen (z. B. in den Feldern) angebracht werden.

In Bild 2.2 a ist ein Tragwerk mit Belastung und Verformungsfigur dargestellt. An den Punkten 0 und 2 sind alle Verformungen bekannt. An der Stelle 1 ist nur die Durchbiegung bekannt, die Verdrehung φ_1 ist unbekannt. Das Tragwerk ist also einfach geometrisch unbestimmt. Durch eine Einspannung an 1 wird das Tragwerk geometrisch bestimmt (Bild 2.2 b). Aus der Belastung ergeben sich die in Bild 2.2 c dargestellten Reaktionen und Verformungen. Bringt man die ausgeschaltete Verformung $\varphi_1 = \xi_1$ als Größe 1 an, so erhält man den in Bild 2.2 d dargestellten Zustand. Die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ am Punkt 1 lautet

$$\xi_1 \frac{4EJ}{l} + \xi_1 \frac{4EJ}{l} + \frac{ql^2}{12} = 0$$

oder wenn man für die Zwangskräfte die Abkürzung Z einführt:

$$\xi_1 Z_{11} + Z_{10} = 0 \quad (2.2)$$

Hieraus läßt sich ξ_1 berechnen und man erhält den endgültigen Zustand nach Bild 2.2 e.

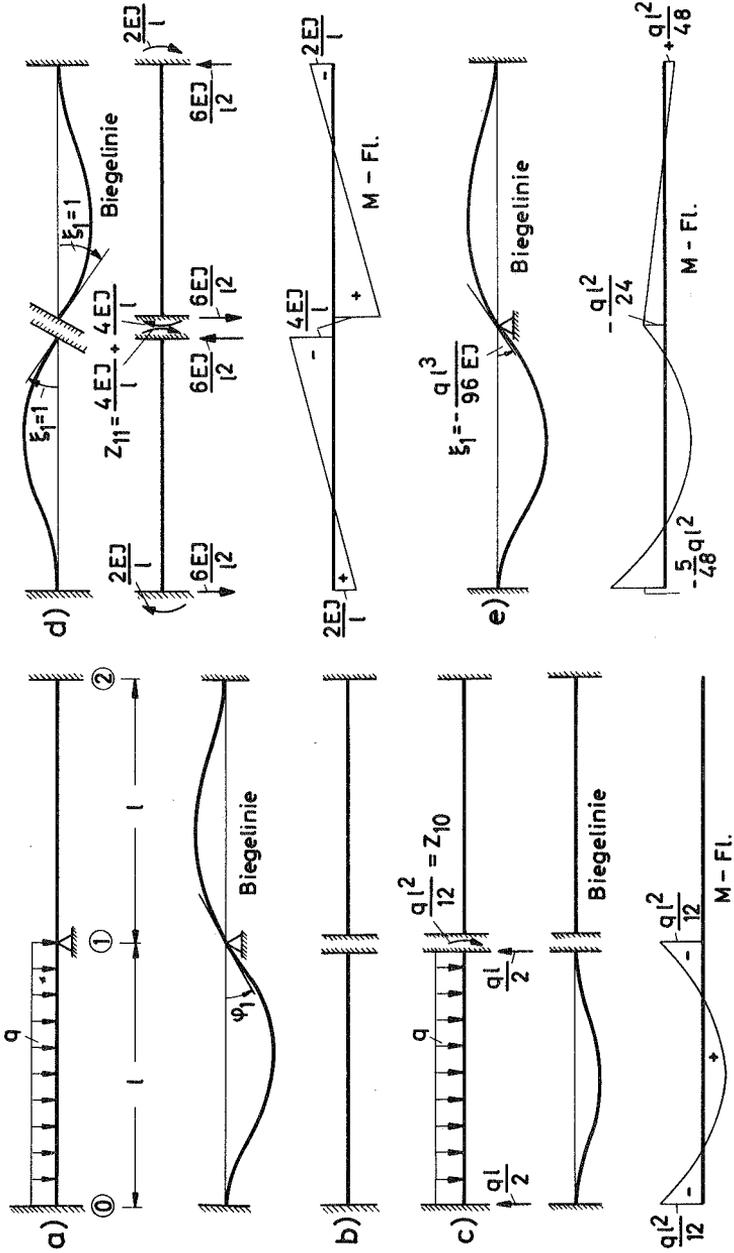


Bild 2.2

3. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten ist vorzüglich geeignet, um einzelne Verformungen (Prinzip der virtuellen Kräfte) oder Kräfte (Prinzip der virtuellen Verformungen) zu berechnen. Da es später benötigt wird, soll es hier kurz angegeben werden, und zwar in der Form wie es in[5] dargestellt ist.

Zuerst sollen einige Definitionen gegeben werden.

Ein virtueller Zustand ist ein gedachter Zustand.

Bei einem statisch zulässigen Spannungszustand müssen die äußeren und inneren Kräfte am Gesamttragwerk und an jedem Teil des Tragwerks im Gleichgewicht sein. Der statisch zulässige Spannungszustand braucht nicht mit dem wirklichen Spannungszustand übereinzustimmen.

Ein kinematisch zulässiger Verformungszustand muß mit den Bindungen verträglich sein. Er braucht nicht mit dem wirklichen Verformungszustand übereinzustimmen.

Das Prinzip der virtuellen Kräfte lautet mit diesen Definitionen:

Die Arbeit eines virtuellen statisch zulässigen Spannungszustandes an einem wirklichen Verformungszustand ist Null.

Das Prinzip der virtuellen Verformungen lautet:

Die Arbeit eines wirklichen Spannungszustandes an einem virtuellen Verformungszustand ist Null. Der Verformungszustand ist beliebig, zulässig oder unzulässig.

Es entstehen äußere Arbeiten A_a und innere Arbeiten A_i . Die inneren

Arbeiten sind immer negativ.

Als Formel geschrieben lautet das Prinzip der virtuellen Arbeiten

$$A_a + A_i = 0 \quad (3.1)$$

bzw.

$$A_a = -A_i \quad (3.2)$$

Auf eine besondere Kennzeichnung der virtuellen Zustände wird verzichtet.

In Bild 3.1 sind die wichtigsten Ausdrücke für die äußeren Arbeiten, in Bild 3.2 diejenigen für die inneren Arbeiten dargestellt.

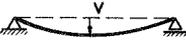
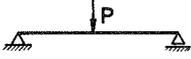
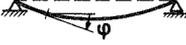
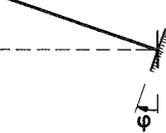
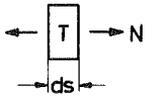
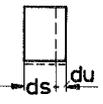
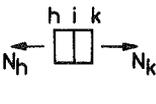
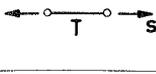
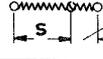
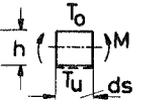
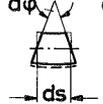
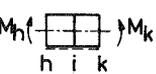
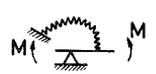
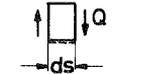
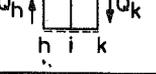
Verformungszustand	Kraftzustand	Äußere Arbeit A_a
		$P v$
		$M \varphi$
		$C c$
		$M \varphi$

Bild 3.1

Schnittkraft	Verformung	Innere Arbeit (-A _i) beim Prinzip der virt. Verformungen		
		Allgemein	*	virt. Kräfte
	 $du = \epsilon ds$ $\epsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_T T$	$\int_S N \epsilon ds$	$\int_S N \frac{N}{EF} ds$	$\int_S N \frac{N}{EF} ds + \int_S N \alpha_T T ds$
Spannungslose Verlängerung eines Stabes Δs_i an der Stelle i:		$N_i \Delta s_i$		$N_i \Delta s_i$
Fachwerkstab: $N = \text{konst.} = S$	 $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \alpha_T Ts$	$\sum S \Delta s$	$\sum S \frac{S}{EF} s$	$\sum S \frac{S}{EF} s + \sum S \alpha_T Ts$
Normalkraftfeder: $N = \text{konst.} = C$	 $\Delta s = C \epsilon_N$	$C \Delta s$	$CC \epsilon_N$	$CC \epsilon_N$
	 $d\phi = \chi ds$ $\chi = \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$ $\Delta T = T_u - T_0$	$\int M \chi ds$	$\int M \frac{M}{EJ} ds$	$\int_S M \frac{M}{EJ} ds + \int M \frac{\alpha_T \Delta T}{h} ds$
Spannungslos aufgebrachtcr Knick $\Delta \phi_i$ an der Stelle i:		$M_i \Delta \phi_i$		$M_i \Delta \phi_i$
Momentenfeder: $M = \text{konst.}$	 $\Delta \phi = M \epsilon_M$	$M \Delta \phi$	$MM \epsilon_M$	$MM \epsilon_M$
	 $dv = \gamma ds$ $\gamma = \frac{Q}{GF}$	$\int Q \gamma ds$	$\int Q \frac{Q}{GF} ds$	$\int Q \frac{Q}{GF} ds$
Spannungslos aufgebrachtcr Sprung Δv_i an der Stelle i:		$Q_i \Delta v_i$		$Q_i \Delta v_i$

* Darstellung der Verformungen durch die Schnittkräfte

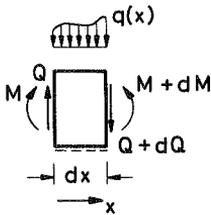
Bild 3.2

4. Die Differentialgleichung des querbelasteten Biegeträgers und ihre Lösung

4.1 Die Differentialgleichung

Auf die Darstellung der einzelnen Schritte bei der Herleitung der Differentialgleichungen wird hier verzichtet.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Element erhält man mit den Bezeichnungen nach Bild 4.1 bei Vernachlässigung der Anteile, die klein von zweiter Ordnung sind, (4.2) und (4.3), durch Differenzieren und Einsetzen (4.1).



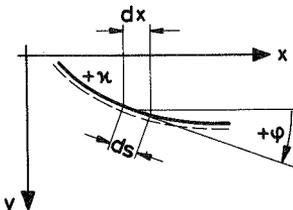
$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (4.1)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (4.2)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (4.3)$$

Bild 4.1

Aus der Elementverformung erhält man unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen ($\tan \varphi = \varphi$; $ds = dx$) mit den Bezeichnungen nach Bild 4.2 die Beziehungen:



$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\kappa(x) \quad (4.4)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \varphi(x) \quad (4.5)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\kappa(x) \quad (4.6)$$

Bild 4.2

Die Gleichung, die diese beiden Gruppen von Differentialgleichungen verbindet, erhält man durch das Spannungs-Dehnungs- bzw. Kraft-Verformungs-

gesetz. Mit dem Hookeschen Gesetz schreibt sich die Beziehung zwischen Moment und Krümmung

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (4.7)$$

Setzt man (4.7) in (4.4) ein und berücksichtigt man (4.1), so erhält man, wenn Striche Ableitungen nach x bedeuten,

$$(EJ v'')'' = q(x)$$

Im Rahmen dieser Arbeit ist der Trägheitsmomentenverlauf nicht von Interesse. Es kann also ohne weiteres $EJ = \text{konstant}$ gesetzt werden. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$EJ v'''' = q(x) \quad (4.8)$$

4.2 Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung

Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen besteht die Lösung aus zwei Anteilen: der Partikularlösung und der homogenen Lösung.

Die Partikularlösung der Differentialgleichung $EJ v''''(x) = q(x)$ muß die Differentialgleichung erfüllen, ist sonst aber beliebig, braucht also die Randbedingungen nicht zu erfüllen. Die Lösung laute v_p .

Die homogene Differentialgleichung

$$EJ v''''(x) = 0 \quad (4.8a)$$

hat ein Fundamentalsystem voneinander unabhängiger Lösungen v_H . Die Gesamtlösung lautet:

$$v(x) = v_p(x) + v_H(x) \quad (4.9)$$

Diese Lösung muß die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllen.

Erfüllt beispielsweise die Partikularlösung $v_p(x)$ schon Differentialgleichung und Randbedingungen, so ist $v_H(x) \equiv 0$.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$v_H(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (4.10)$$

Die Konstanten werden so bestimmt, daß (4.9) die Randbedingungen erfüllt.

Die Differentialgleichung (4.8) stellt sich in der Statik immer als ein Randwertproblem dar [6], da immer die Hälfte der Bedingungen am linken, die andere Hälfte am rechten Rand gegeben ist. Außerdem ist aufgrund der physikalischen Zusammenhänge immer nur eine Aussage über eine der beiden im Folgenden zusammengestellten Größen möglich.

$$\begin{aligned} & Q, v \\ & M, \varphi. \end{aligned}$$

An einem Rand, an dem $v = 0$ ist, muß $Q \neq 0$ sein, weil dieser Rand gehalten sein muß und dadurch eine Kraft entsteht. Andererseits muß sich ein Rand, an dem $Q = 0$ sein soll, frei bewegen können. Entsprechend ist es bei M und φ . Einige der in der Statik üblichen Randbedingungen sind im Bild 4.3 jeweils am linken Rand dargestellt.

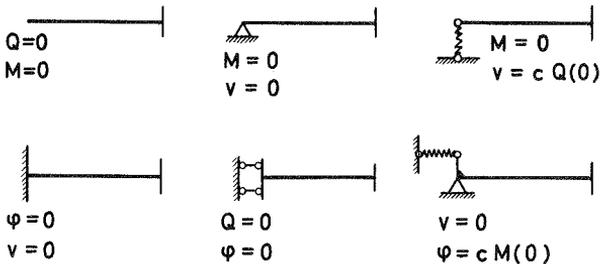
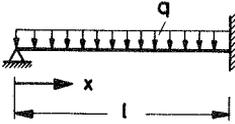


Bild 4.3

Das bisher Gesagte soll an einem Beispiel erläutert werden.



Randbedingungen :

$$M = 0 \qquad v = 0$$

$$v = 0 \qquad \varphi = 0$$

Bild 4.4

Der in Bild 4.4 dargestellte Träger soll berechnet werden.

Als partikuläres Integral wird gewählt:

$$v_p = \frac{q x^4}{24 E J}$$

Dieser Ansatz erfüllt die Differentialgleichung, aber nicht die Randbedingungen.

Die homogene Lösung lautet nach (4.10)

$$v_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

Aus

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{q x^4}{24 E J}$$

müssen die Konstanten so bestimmt werden, daß die Lösung auch die Randbedingungen erfüllt. Zu diesem Zweck werden die einzelnen Ableitungen gebildet.

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{q x^4}{24 E J}$$

$$v' = C_2 + 2 C_3 x + 3 C_4 x^2 + \frac{q x^3}{6 E J} = \varphi$$

$$v'' = 2 C_3 + 6 C_4 x + \frac{q x^2}{2 E J} = -\kappa = -\frac{M}{E J}$$

$$v''' = 6 C_4 + \frac{q x}{E J} = -\frac{Q}{E J}$$

Aus den Randbedingungen ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$v(0) = 0 : C_1 = 0$$

$$M(0) = 0 : C_3 = 0$$

$$v(l) = 0 : C_2 l + C_4 l^3 + \frac{q l^4}{24 E J} = 0$$

$$\varphi(l) = 0 : C_2 + 3 C_4 l^2 + \frac{q l^3}{6 E J} = 0$$

Die Lösung der beiden Gleichungen ergibt:

$$C_2 = \frac{q l^3}{48 E J} \quad ; \quad C_4 = - \frac{3 q l}{48 E J}$$

Damit lautet die Lösung:

$$v = \frac{q}{48 E J} (x l^3 - 3 x^3 l + 2 x^4)$$

Mit diesem Ansatz als Partikularlösung wäre die homogene Lösung identisch Null gewesen, weil der Ansatz alle Randbedingungen erfüllt.

Für eine andere Partikularlösung hätte man auch eine andere homogene Lösung gefunden. Die oben verwandte Partikularlösung ist physikalisch nicht deutbar, denn sie hat die Anfangsbedingungen

$$Q(0) = M(0) = \varphi(0) = v(0) = 0$$

Mit der Partikularlösung

$$v_p = \frac{q}{24 E J} (x l^3 - 2 x^3 l + x^4)$$

der Gleichung der Biegelinie für einen beidseitig frei aufliegenden Träger auf 2 Stützen, hätte man für den Ansatz (4.10) die Konstanten erhalten:

$$C_2 = - \frac{q}{48 E J} l^3 \quad ; \quad C_4 = \frac{q}{48 E J} l$$

und damit dieselbe Lösung wie vorher.

4.3 Lösung durch ein System von Differentialgleichungen der 1. Ordnung

Statt der Beziehung (4.8), also einer Differentialgleichung 4. Ordnung, kann man auch das System der 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung (4.2, 4.3, 4.5, 4.6) anschreiben.

$$v'(x) = \varphi(x) \quad (d)$$

$$\varphi'(x) = -\kappa(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad (c)$$

$$M'(x) = Q(x) \quad (b)$$

$$Q'(x) = -q(x) \quad (a)$$

(4.11)

Es sind dies 4 gekoppelte Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Die Lösung wird jeweils durch Integration gewonnen. Bei jeder Integration entsteht eine Konstante C .

Die Lösung soll am Beispiel (Bild 4.4) erläutert werden.

$$Q(x) = -\int_0^x q \, dx + C_1 = -q x + C_1$$

Die Integration kann ausgeführt werden, da q konstant ist. Die Konstante C_1 kann noch nicht bestimmt werden.

$$M(x) = \int_0^x Q(x) \, dx + C_2$$

und unter Berücksichtigung des Ausdrucks für $Q(x)$

$$M(x) = -\int_0^x q x \, dx - C_1 x + C_2 = -\frac{q x^2}{2} - C_1 x + C_2$$

Nun steht auch eine Randbedingung zur Verfügung, aus der C_2 bestimmt werden kann:

$$M(0) = C_2 = 0$$

Es ergibt sich mit (4.7)

$$\kappa(x) = -\frac{q x^2}{2 EJ} - \bar{C}_1 x$$

wenn man unter \bar{C}_1 die neue Konstante $\frac{C_1}{EJ}$ versteht.

Weiterhin erhalten wir

$$\varphi(x) = -\int_0^x \kappa(x) dx + C_3 = + \frac{q x^3}{6 EJ} + \frac{\bar{C}_1}{2} x^2 + C_3$$

$$v(x) = \int_0^x \varphi(x) dx + C_4 = + \frac{q x^4}{24 EJ} + \frac{\bar{C}_1 x^3}{6} + C_3 x + C_4$$

Die Konstanten werden mit den Randbedingungen bestimmt.

$$v(0) = 0: \quad C_4 = 0$$

$$v(l) = 0: \quad \frac{q l^4}{24 EJ} + \frac{\bar{C}_1 l^3}{6} + C_3 l = 0$$

$$\varphi(l) = 0: \quad \frac{q l^3}{6 EJ} + \frac{\bar{C}_1 l^2}{2} + C_3 = 0$$

Daraus erhält man

$$\bar{C}_1 = -\frac{3}{8} \frac{q l}{EJ}; \quad C_3 = +\frac{q l^3}{48 EJ}$$

und dieselbe Funktion für v wie im vorigen Abschnitt.

4.4 Entkopplung in 2 Differentialgleichungen 2. Ordnung. Statisch bestimmte Tragwerke

In der Statik wird zwischen statisch bestimmten und statisch unbestimmten Tragwerken unterschieden. Können alle Schnittgrößen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, so wird das System statisch bestimmt genannt, andernfalls statisch unbestimmt.

Mathematisch heißt das, daß an die Stelle der Differentialgleichung

4. Ordnung (4.7) die beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung (4.2 und 4.4) treten. Das Differentialgleichungssystem (4.11) zerfällt dann in die beiden Systeme der Kraftgrößen (4.11 a und b) und der Verformungsgrößen (4.11 c und d).

In dem Beispiel (Bild 4.4) war keine Entkopplung vorhanden, da nicht genügend Kraftgrößenbedingungen zur Verfügung standen, um die nach den ersten beiden Integrationen zu bestimmenden 2 Konstanten zu berechnen.

An die Stelle der in der Statik üblichen Abzählformeln tritt nun eine Betrachtung der Randbedingungen. Sind genügend Randbedingungen gegeben, um die Konstanten der Differentialgleichung für die Kraftgrößen zu berechnen, so ist das Tragwerk statisch bestimmt. Im Falle der Differentialgleichung des querbelasteten Trägers (4.1) müssen also bei statischer Bestimmtheit 2 Randbedingungen in den Kraftgrößen gegeben sein.

Im Bild 4.5 sind einige Beispiele für statisch bestimmte und statisch unbestimmte Lagerung zusammengestellt.

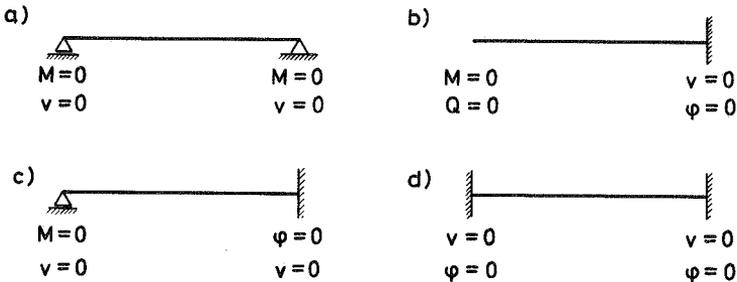


Bild 4.5

Die in Bild 4.5 a und b dargestellten Träger sind statisch bestimmt, die Träger c und d statisch unbestimmt.

Für jede der beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung (4.1 und 4.4) ergibt sich für den Träger Bild 4.5 a ein Randwertproblem, für den Träger Bild 4.5 b ein Anfangswertproblem.

Beim Anfangswertproblem ist jede der Differentialgleichungen (4.11) für sich lösbar, weil für jede Differentialgleichung eine Bedingung zur Bestimmung der Konstante zur Verfügung steht. Die Differentialgleichungen sind also in den Randbedingungen alle entkoppelt.

Beim statisch bestimmten Randwertproblem nach Bild 4.5 a ist noch eine Kopplung der beiden Differentialgleichungen (4.11 a) und (4.11 b) bzw. (4.11 c) und (4.11 d) vorhanden. Die homogene Lösung dieser Differentialgleichungen 2. Ordnung (4.1 bzw. 4.4) lautet

$$Y_H = C_1 x + C_2 \quad (4.12)$$

d. h. die Korrektur der Partikularlösung ist in jedem Fall eine Gerade. Hier liegt die mathematische Begründung für das Zeichnen der Schlußlinie bei Momentenflächen bzw. Biegelinien. Wurde die Momentenfläche für irgendwelche Randbedingungen gezeichnet - z. B. für $M(0) = Q(0) = 0$ nach Bild 4.6 b - , so kann man durch eine Gerade - die Schlußlinie - die Korrektur der Randbedingungen vornehmen. Nach Bild 4.6 a muß das Moment am rechten Trägerende Null sein. Damit ist die Schlußlinie festgelegt und es ergibt sich die im Bild 4.6 horizontal schraffierte Momentenfläche.

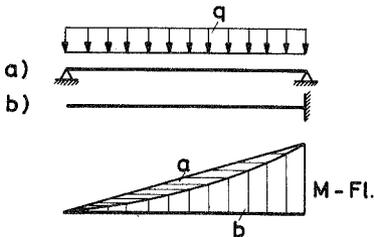


Bild 4.6

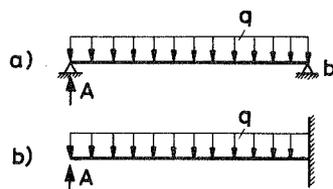


Bild 4.7

Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß der Statiker beim Lösen der Aufgabe im Falle des Bildes 4.5 a das Randwertproblem in ein Anfangswert-

problem umwandelt. Er berechnet mit der statischen Bedingung, daß die Summe der Momente um b Null sein muß (Bild 4.7 a) den zweiten Anfangswert A . Nun sind die beiden Anfangswerte $M(0) = 0$ und $Q(0) = A$ bekannt, und das System 4.5 a kann als Anfangswertproblem nach Bild 4.7 b berechnet werden. Damit sind die beiden Differentialgleichungen (4.11 a und b) in den Randbedingungen entkoppelt. -An dieser Stelle sei auch noch auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß das Mohrsche Verfahren zur Berechnung von Biegelinien auf der Analogie der Differentialgleichungen (4.1) und (4.4) beruht.

4.5 Verschiedene Integrationsbereiche. Übergangsbedingungen und Sprunggrößen.

Die Differentialgleichungen müssen gesondert für jeden stetigen Bereich gelöst werden.

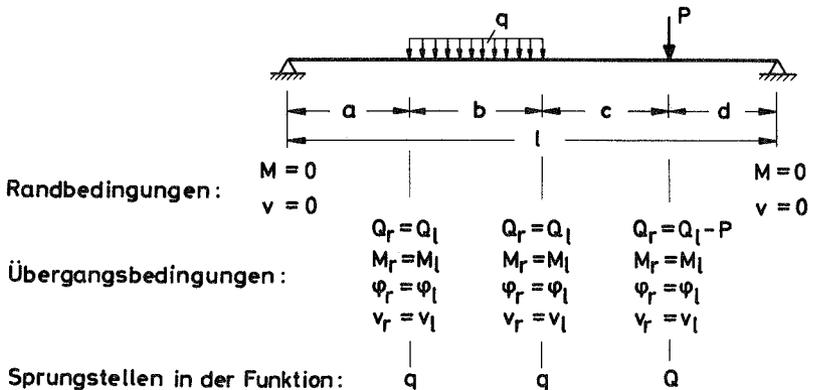


Bild 4.8

Im Falle des Bildes 4.8 sind 4 Integrationsbereiche a bis d vorhanden, wobei in den Bereichen a , c und d die Differentialgleichung homogen ist. In jedem Bereich sind 4 Konstanten zu bestimmen, insgesamt also 16. Zu ihrer Bestimmung stehen 4 Randbedingungen und 3 mal 4 Übergangsbedingungen, also insgesamt 16 Bedingungen zur Verfügung. Aus dieser

Aufzählung erkennt man schon, daß eine solche Lösung sehr aufwendig wird.

Nun interessiert den Statiker im allgemeinen nicht die analytische Darstellung aller Funktionen. Er benötigt ausgezeichnete Werte und eventuell noch eine graphische Darstellung einiger Funktionen. Hierzu eignet sich die Lösung durch das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Zuerst berechnet man, wie gezeigt, die fehlenden Anfangswerte, dann kann man durch Integration eine Funktion nach der anderen ermitteln. Bei stückweise stetigen Funktionen, also Funktionen mit Sprungstellen, muß man die Differenzen der Funktionswerte links und rechts der Sprungstellen, die Sprunggrößen, kennen. Im vorliegenden Fall (Bild 4.8) haben die Funktionen q und Q Sprungstellen mit bekannten Sprunggrößen. Man erhält den im Bild 4.9 dargestellten Q - und M -Verlauf.

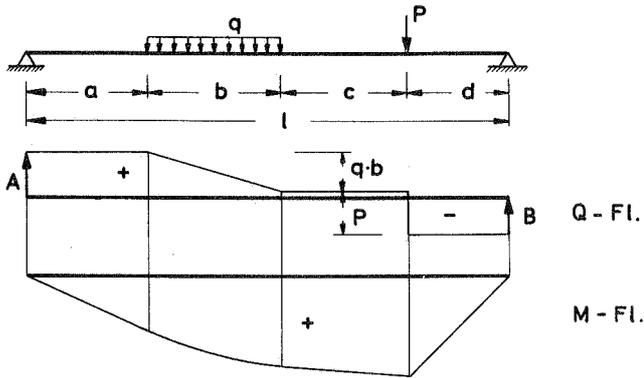


Bild 4.9

Beim Zeichnen der Biegelinie verfährt man analog.

Anhand des Beispiels Bild 4.10 sollen nun einige Sprunggrößen näher erläutert werden.

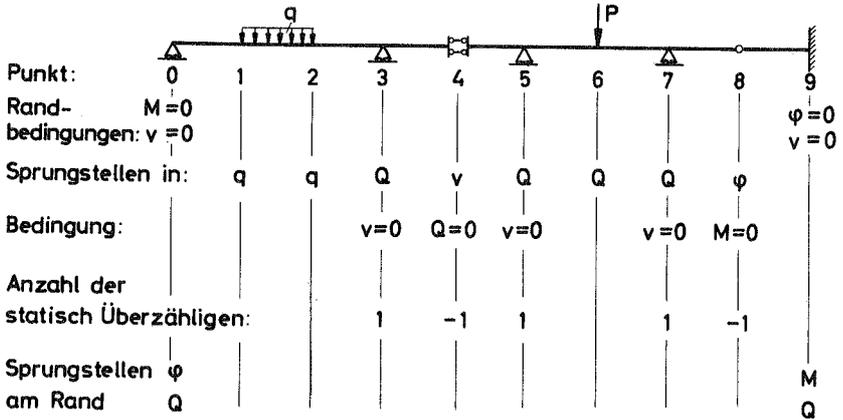


Bild 4.10

Es treten auf: Sprunggrößen infolge der Lastfunktion und Sprunggrößen in den Kraftgrößen und in den Verformungsgrößen infolge der übrigen Übergangsbedingungen.

Die Sprunggrößen infolge der Belastung an den Stellen 1, 2 und 6 sind bekannt und bereiten daher keine Schwierigkeiten.

Die anderen Sprunggrößen sind noch unbekannt. Zu ihrer Berechnung steht jeweils eine Bedingung zur Verfügung.

Die Sprunggrößen in den Kraftgrößen an den Stellen 3, 5 und 7 werden aus Verformungsbedingungen berechnet. Hierdurch sind also die beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung gekoppelt. Jede dieser Sprungstellen erhöht somit den Grad der statischen Unbestimmtheit um eins. Die Sprunggrößen in den Verformungsgrößen an den Stellen 4 und 8 werden aus Bedingungen berechnet, die die Funktionen der Kraftgrößen erfüllen müssen. Das heißt aber, daß die Kraftgrößen berechnet werden können, ohne daß die Formänderungen bekannt sind. Es sind im Gegenteil noch zusätzliche Bedingungen vorhanden, mit deren Hilfe Konstanten der

Funktionen der Kraftgrößen berechnet werden können. Jede dieser Sprungstellen vermindert also den Grad der statischen Unbestimmtheit um eins.

Von den Randbedingungen her ist das Tragwerk einfach statisch unbestimmt. Infolge der 3 Sprünge in den Kraftgrößen kommen 3 Überzählige dazu und infolge der 2 Sprünge in den Verformungsgrößen sind 2 Überzählige abzuziehen, sodaß das Tragwerk insgesamt 2-fach statisch unbestimmt ist.

Man kann auch die Randbedingungen mit in die Betrachtung der Sprungstellen hinein nehmen. Wie in Bild 4. 10 zu sehen ist, treten an den Rändern insgesamt 3 Sprünge in den Kraftgrößen auf. Mit der Differentialgleichung 2. Ordnung sind aber nur 2 Aussagen möglich, sodaß eine unbekannte Sprunggröße übrig bleibt.

5. Eine mathematische Lösung analog zum Kraftgrößen- und Formänderungsgrößenverfahren

5.1 Das Kraftgrößenverfahren

Für die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung $\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}$ sind eine Partikularlösung und eine homogene Lösung so zu bestimmen, daß sie zusammen die Differentialgleichung und alle Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen.

Es soll aber nur mit der Differentialgleichung der Kraftgrößen

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (4.1)$$

gearbeitet werden, die jedoch in den meisten Fällen durch Rand- oder Übergangsbedingungen mit der Differentialgleichung der Formänderungsgrößen (4.4) gekoppelt ist. Die Anzahl dieser Kopplungen ist gleich der Zahl der statisch Unbestimmten nach dem Kraftgrößenverfahren.

Aufgrund der im Abschnitt 4.5 angestellten Betrachtungen sollen nicht die Konstanten für die analytische Lösung bestimmt werden, sondern es soll der für die praktische Rechnung einfachere Weg beschritten werden, die Sprünge in den Funktionen zu berechnen.

Es werden nun ganz bestimmte Bedingungen an die Partikularlösung und an die homogene Lösung gestellt.

Die Partikularlösung soll soweit wie nur eben möglich dem endgültigen Funktionsverlauf angepaßt sein, d. h. sie ist so zu wählen, daß sie möglichst viele Rand- und Übergangsbedingungen erfüllt, also möglichst alle bekannten Sprunggrößen enthält und keine neuen schafft. Sie muß unter Berücksichtigung der möglichen Lagerreaktionen im Gleichgewicht sein.

Die homogene Lösung ist so zu wählen, daß sie die gesuchten Unstetig-

Lösung noch zu addieren ist, um die Randbedingungen erfüllen zu können. Da der Träger einfach statisch unbestimmt ist, also auch nur eine Bedingungsgleichung zur Berechnung der einen unbestimmten Sprungstelle zur Verfügung steht, kann jeweils nur eine homogene Lösung in Frage kommen.

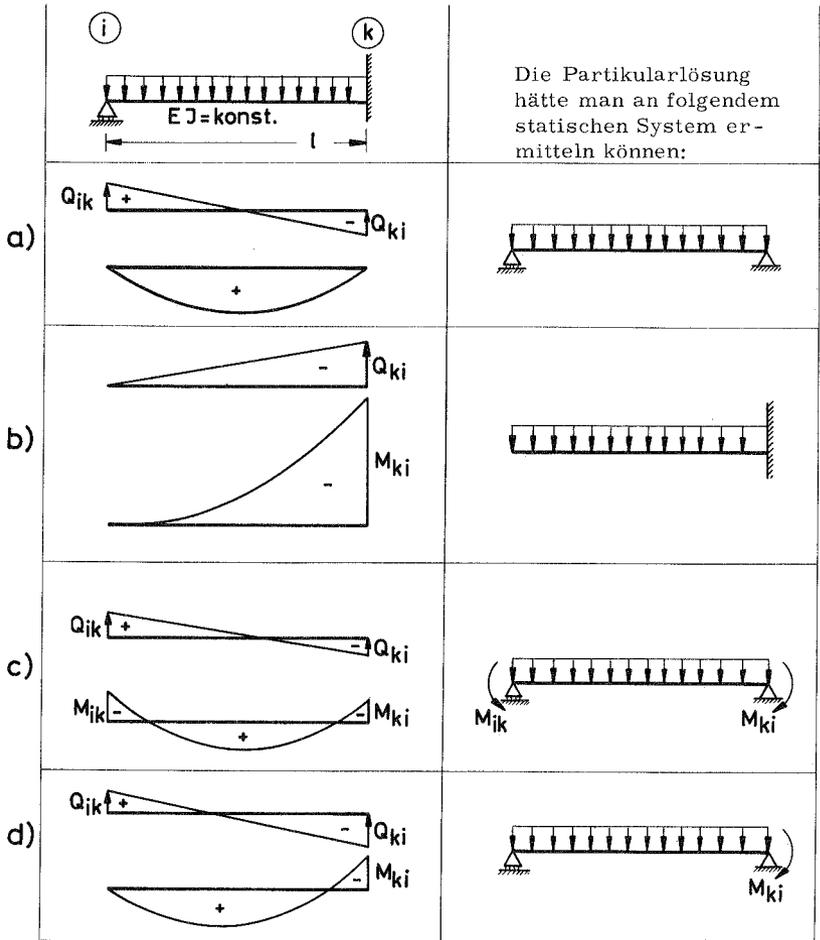


Bild 5.2

5.2 a erfüllt die Randbedingungen für die Kraftgrößen am linken Rand, jedoch nicht die am rechten. Die homogene Lösung muß daher der ersten Lösung nach Bild 5.1 b entsprechen.

Nach 5.2 b ist $M_{ik} = 0$. Ebenso ist aber auch $Q_{ik} = 0$. Da die homogene Lösung so zu wählen ist, daß $M_{ik} = 0$ erhalten bleibt, kommt nur dieselbe Lösung wie vorher in Frage. Durch diese homogene Lösung erhält man auch den Sprung um Q_{ik} am linken Rand.

Die Partikularlösung nach 5.2 c ist zwar grundsätzlich möglich, erfüllt aber nicht die vorher aufgestellte Forderung, so viele Randbedingungen wie möglich zu erfüllen. Um $M_{ik} = 0$ zu erhalten, muß die zweite homogene Lösung nach 5.1 b gewählt werden, deren Wert am Punkt i aber sofort angegeben werden kann. M_{ik} ist also keine echte - statisch unbestimmte unbekannte Sprunggröße.

Korrigiert man die Randbedingungen am linken Rand, so erhält man aus 5.2 c den Zustand 5.2 d. Dieser Zustand erfüllt nun alle Randbedingungen für die Kraftgrößen. Aber die Größe von M_{ki} und damit die Lage der Schlußlinie ist beliebig. Die Fälle 5.2 a und 5.2 b erscheinen somit als Sonderfälle von 5.2 d. Bei der Partikularlösung ist daher ein Wert M_{ki} festzulegen und außerdem wieder die erste homogene Lösung nach 5.1 b zu wählen, um damit die Sprunggröße M_{ki} unter Berücksichtigung aller Randbedingungen zu berechnen.

Es müßte nun untersucht werden, ob bei Einhaltung der Bedingungen $v_i = v_k = 0$ auch $\varphi_k = 0$ ist, bzw. mit welchem Faktor die gewählte homogene Lösung zu multiplizieren ist, damit $\varphi_k = 0$ wird.

Man müßte also Verformungsberechnungen durchführen, z. B. mit den bekannten anschaulichen statischen Methoden. Hier soll aber ein Weg besprochen werden, der sich von der Anschauung losmacht. Es bietet sich das Prinzip der virtuellen Kräfte an.

Ein im Gleichgewicht stehender virtueller Kraftzustand verrichtet an einem wirklichen Verformungszustand die Arbeit Null. Der wirkliche Verformungszustand setzt sich ganz allgemein zusammen aus der Partikularlösung und den mit einem Faktor zu multiplizierenden verschiedenen unabhängigen homogenen Lösungen:

$$v = v_p + \sum_j \chi_j v_{Hj} \quad (5.1)$$

Zur Vereinfachung sollen in Zukunft die homogenen Zustände nur noch mit dem Index j versehen werden.

Die Krümmung ergibt sich dann zu:

$$\kappa = \kappa_p + \chi_1 \kappa_1 + \chi_2 \kappa_2 + \dots + \chi_n \kappa_n \quad (5.2)$$

und mit (4.7) $\kappa = \frac{M}{EJ}$

$$\kappa = \frac{M_p}{EJ} + \chi_1 \frac{M_1}{EJ} + \chi_2 \frac{M_2}{EJ} + \dots + \chi_n \frac{M_n}{EJ} \quad (5.3)$$

Der zu wählende virtuelle Kraftzustand ist beliebig. Er muß nur im Gleichgewicht sein. Für jede unbekannte homogene Lösung benötigen wir eine linear unabhängige Bedingungsgleichung. Wir nehmen daher als virtuelle Zustände der Einfachheit halber homogene Lösungen, die aber nicht unbedingt die als Unbekannte gewählten homogenen Lösungen zu sein brauchen. Wählt man andere homogene Lösungen, geht die Symmetrie der Matrix verloren. Diese kann aber durch Zeilenmultiplikation wiederhergestellt werden. An die homogenen Lösungen müssen wir folgende Bedingungen stellen.

1. Die homogene Lösung muß so beschaffen sein, daß in ihr die unbekannte Sprungstelle in der Funktion der Kraftgrößen enthalten ist.
2. Sie muß im Gleichgewicht sein.
3. Sie muß innerhalb der einzelnen Integrationsbereiche eine konstante Querkraft haben.

Außerdem fordern wir noch, weil dies die Rechnung vereinfacht,

4. Sie muß so beschaffen sein, daß sie als virtueller Kraftzustand an dem wirklichen Verformungszustand keine äußeren Arbeiten verrichtet, es sei denn, es handelt sich um einen Zustand, der durch eine Lagerverschiebung oder -verdrehung entstanden ist.

Wir hätten also im vorliegenden Fall, wenn nur die inneren Arbeiten infolge der elastischen Krümmung berücksichtigt werden, die Verformungen nach (5.3) mit den Schnittkräften nach Bild 5.1 b zu multiplizieren und über die Trägerlänge zu integrieren.

$$-A_i = \int \frac{M_p}{EJ} M_1 ds + \chi_1 \int \frac{M_1}{EJ} M_1 ds \quad (5.4)$$

Mit den üblichen Bezeichnungen der Baustatik lautet diese Gleichung

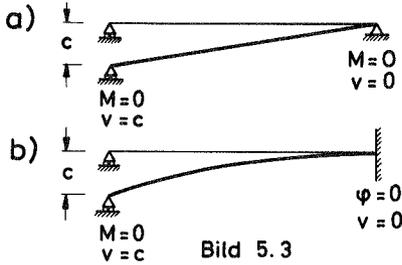
$$-A_i = \delta_{i0} + \chi_1 \delta_{i1}$$

Da im endgültigen Zustand $v_i = v_k = \varphi_k = 0$ ist, leisten Q_{ik} , Q_{ki} und M_{ki} keine Arbeit. Es ist also $A_a = 0$. Aus $A_a = -A_i$ erhält man die Elastizitätsgleichung

$$\delta_{i0} + \chi_1 \delta_{i1} = 0 \quad (5.5)$$

Dies ist dieselbe Elastizitätsgleichung wie sie im Kapitel 2 ermittelt wurde, nur mit dem Unterschied, daß die Partikularlösungen nach Bild 5.2 a, b oder d genommen werden können, während als homogene Lösung nur die erste nach Bild 5.1 b in Frage kommt.

Bei einer Lagerverschiebung, wie sie z. B. im Bild 5.3 dargestellt ist, haben wir eine homogene Differentialgleichung.



Im Falle des statisch bestimmten Trägers, Bild 5.3 a, hat die homogene Differentialgleichung der Kraftgrößen wegen der ebenfalls homogenen Randbedingungen die

triviale Lösung Null, während die Lösung der Differentialgleichung der Verformungen (4.4) wegen der nicht homogenen Randbedingungen linear ist. Im statisch unbestimmten Fall ist eine homogene Lösung für die Differentialgleichung 4. Ordnung (4.8) vorhanden.

Als homogene Lösung kommt nur die erste nach Bild 5.1 b in Frage.

Es ergibt sich entsprechend (5.4) für die innere Arbeit:

$$-A_i = \chi_1 \int \frac{M_1}{EJ} M_1 ds = \chi_1 \delta_{11} \quad (5.6)$$

Eine äußere Arbeit ist infolge der Stützensenkung an i vorhanden.

$$A_a = -Q_{ik} c_i = -\delta_{10} \quad (5.7)$$

Mit $A_a = -A_i$ erhält man

$$-Q_{ik} c_i = -\delta_{10} = \chi_1 \delta_{11}$$

und nach Umordnung wieder (5.5).

Es sollen nun einige Lösungsmöglichkeiten für den in Bild 5.4 dargestellten Träger angegeben werden.

Die Partikularlösungen 4 bis 7 enthalten die an den Mittelstützen erforderlichen Sprünge in der Querkraft, deren Größen aber beliebig sind. Es muß hier noch die homogene Lösung bestimmt werden, die im Fall 6 natürlich auch Null sein kann.

Es sind zwei unabhängige homogene Lösungen möglich und erforderlich, um die Größe der beiden statisch unbestimmten Sprunggrößen zu bestimmen. Aus diesen beiden lassen sich andere Lösungen zusammensetzen, die dann natürlich nicht mehr unabhängig sind. Welche Lösungen man als unabhängig und welche man als zusammengesetzt bezeichnet, ist natürlich gleichgültig. Bezeichnet man z. B. die homogenen Lösungen 1 und 2 als unabhängig, so sind 3 und 4 zusammengesetzt. Man könnte auch 1 und 3 oder 1 und 4 als unabhängige Lösungen ansehen, die übrigen sind dann zusammengesetzt. Man wählt für die praktische Rechnung natürlich solche unabhängigen Lösungen, die eine möglichst geringe Zahl von δ -Werten mit möglichst überwiegender Hauptdiagonalen der Matrix ergeben.

Für die dargestellten Partikular- und homogenen Lösungen kann der Ingenieur statisch bestimmte Systeme angeben. Man sieht aus dem Beispiel, daß man für die Partikularlösung wie auch für jede der homogenen Lösungen ein anderes statisch bestimmtes System wählen kann. Hierauf hat auch Braun [3, 4] hingewiesen.

Man kann die dargestellte Art des Vorgehens an den Zwischenstützen auch anders definieren.

a) Homogene Lösungen

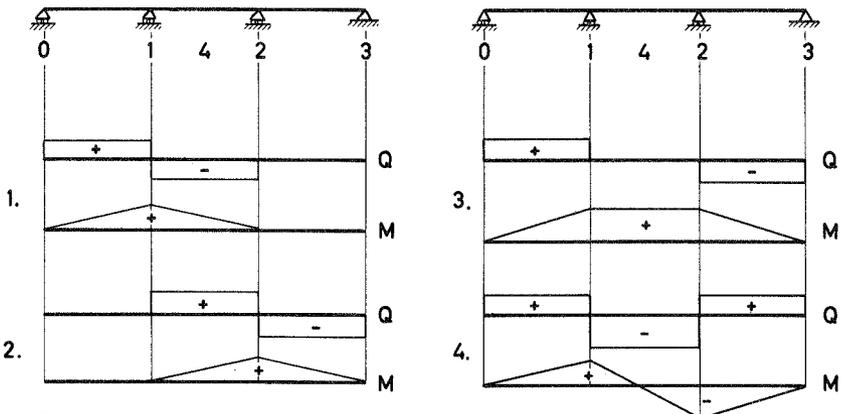


Bild 5.4a

b) Partikularlösungen

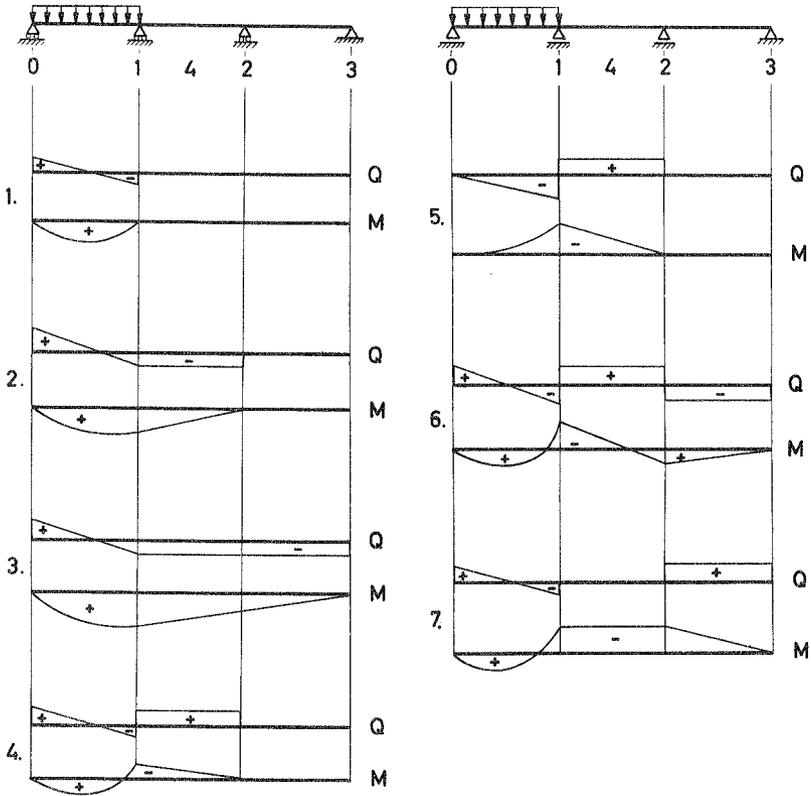


Bild 5.4 b

An die Stelle der Übergangsbedingungen treten feste Bedingungen in den Kraftgrößen.

Bei den Partikularlösungen im Bild 5.4 wurden beispielsweise folgende Bedingungen gewählt: Im 1. Fall: $M_1 = 0$; im 2. Fall: $M_2 = 0$ und keine Sprunggröße in Q an der Stelle 1; in 6 und 7: für M_1 und M_2 jeweils eine Konstante ungleich Null; oder in 6: $M_1 = c \neq 0$, $M_4 = 0$ bzw. in 7: $Q_4 = 0$. In den Fällen 6 und 7 sind also Bedingungen für den Nulldurchgang der Kraftgrößen in den Feldern gewählt worden. Man erkennt aber, daß diese Fälle auch durch Bedingungen für M_1 und M_2 beschrieben werden können. Übrigens sind 3 und 7 nur Sonderfälle von 6. - Im Fall 5 lauten die Bedingungen $Q_0 = 0$, $M_2 = 0$.

Bei den homogenen Lösungen müssen die Bedingungen an den Unstetigkeitsstellen der Querkraft lauten: $M = c \neq 0$. Die triviale Lösung $M_1 = M_k = 0$ ist auszuschließen, da sich hierfür nur die triviale homogene Lösung Null ergibt. Bei der dritten homogenen Lösung nach Bild 5.4 kann man auch die Bedingung stellen $Q_4 = 0$ und bei der vierten die Bedingung $M_4 = 0$. Aber hier kann man diese Zustände ja nicht nur durch bestimmte feste Werte für M_1 und M_2 erhalten, sondern noch allgemeiner durch Bilden einer neuen abhängigen homogenen Lösung aus den beiden unabhängigen Lösungen 1 und 2.

Allgemein kann man also sagen:

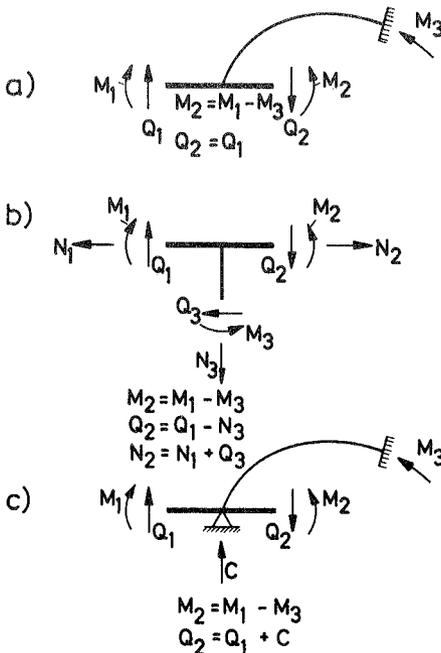
Beim Kraftgrößenverfahren arbeitet man mit der Differentialgleichung 2. Ordnung für die Kraftgrößen. Die Randbedingungen werden so abgeändert, daß sie mit dieser Differentialgleichung erfüllt werden können. An die Stelle der Übergangsbedingungen in den Kraftgrößen werden feste Werte für die Kraftgrößen gesetzt, die aber nicht im Widerspruch zu den Übergangsbedingungen stehen dürfen. Diese brauchen für die Partikularlösung und die homogenen Lösungen nicht übereinzustimmen. Sie müssen bei den homogenen Lösungen aber so beschaffen sein,

daß keine triviale Lösung entsteht und daß keine lineare Abhängigkeit besteht.

Die endgültige Lösung setzt sich zusammen aus der Partikularlösung und den mit jeweils einem Faktor X zu multiplizierenden n unabhängigen homogenen Lösungen. Die Faktoren X werden aus einem Gleichungssystem berechnet, das man mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte gewinnt. Dabei werden als virtuelle Kraftzustände n unabhängige homogene Lösungen gewählt und die Arbeit berechnet, die diese an dem wirklichen endgültigen Verformungszustand verrichten.

Abschließend sollen noch einige Bemerkungen zur Behandlung von Rahmen-ecken gemacht werden.

In Bild 5.5 a ist ein Knoten mit einer Drehfeder dargestellt. Die Übergangs-



bedingungen, die identisch sind mit den Gleichgewichtsbedingungen für den abgeschnittenen Trägerteil, sind angegeben. Die Momentenfläche hat an dieser Stelle eine Unstetigkeit, nämlich den Sprung um M_3 . Es muß also hierfür ein Wert bei der Partikularlösung festgelegt werden, beispielsweise Null. Ebenso ist eine homogene Lösung zu wählen, die für M_3 einen beliebigen Wert haben kann, beispielsweise 3. M_1 und M_2 müssen nun die Übergangsbedingungen erfüllen. Es ist also möglich - vorausgesetzt, daß das Tragwerk so gelagert ist, daß die angenommenen Werte auch realisiert werden

Bild 5.5

können -, $M_1 = 3$ und $M_2 = 0$ oder aber $M_1 = 2$, $M_2 = -1$ anzusetzen.

In Bild 5.5 b ist ein Rahmenknoten dargestellt. Außer dem Sprung in der Momentenfläche ist hier auch noch ein Sprung in der Querkraft- und Normalkraftfläche, und somit eine Koppelung mit der Differentialgleichung des längsbelasteten Stabes.

Werden die Normalkraftverformungen nicht berücksichtigt und ist die Rahmenecke horizontal unverschieblich, so kann man den Rahmenknoten auch nach Bild 5.5 c darstellen. Nun ist eine Berechnung nur mit der Differentialgleichung des querbelasteten Trägers möglich. Entsprechend den beiden unbekannt Sprüngen um C und M_3 sind zwei unabhängige homogene Lösungen erforderlich.

5.2 Das Formänderungsgrößenverfahren

Analog zum Kraftgrößenverfahren-wird nun das Formänderungsgrößenverfahren definiert.

Beim Formänderungsgrößenverfahren arbeitet man mit der Differentialgleichung 4. Ordnung für die Formänderungsgrößen $EJ v''''(x) = q(x)$. Die Randbedingungen werden so abgeändert, daß sie nur in den Formänderungsgrößen gegeben sind. An die Stelle der Übergangsbedingungen in den Formänderungsgrößen treten feste Werte für die Formänderungsgrößen, die aber nicht im Widerspruch zu den Übergangsbedingungen stehen dürfen. Sie brauchen für die Partikularlösung und die homogenen Lösungen nicht übereinzustimmen. Sie müssen bei den homogenen Lösungen aber so beschaffen sein, daß keine triviale Lösung entsteht und daß keine lineare Abhängigkeit besteht.

Die endgültige Lösung setzt sich zusammen aus der Partikularlösung und den mit jeweils einem Faktor ξ zu multiplizierenden

n unabhängigen homogenen Lösungen. Die Faktoren ξ werden aus einem Gleichungssystem berechnet, das man mit dem Prinzip der virtuellen Verformungen gewinnt. Dabei werden als virtuelle Verformungszustände n unabhängige homogene Lösungen gewählt und die Arbeit berechnet, die diese an dem wirklichen endgültigen Kraftzustand leisten.

Das Rechnen mit dem Formänderungsgrößenverfahren bedeutet also immer ein statisch unbestimmtes Rechnen.

Zur Erfüllung der Randbedingungen wird das Formänderungsgrößenverfahren in der Statik fast nie verwendet.

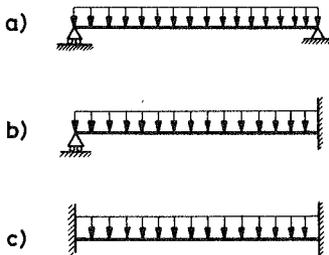


Bild 5.6

Im Bild 5.6 sind 3 verschiedene Fälle dargestellt. 5.6 a ist ein statisch bestimmter Träger, der nach dem Formänderungsgrößenverfahren mit 2 Unbekannten berechnet werden müsste, was wenig sinnvoll ist. 5.6 b ist einfach statisch

unbestimmt. Nach dem Formänderungsgrößenverfahren müsste eine Unbekannte berechnet werden. Der dritte Träger, 5.6 c, ist zweifach statisch unbestimmt. Mit der speziellen Partikularlösung ($\varphi(0) = v(0) = \varphi(l) = v(l) = 0$) wird die homogene Lösung Null. Es ist also nach dem Formänderungsgrößenverfahren keine Unbekannte zu berechnen. Das Tragwerk ist geometrisch bestimmt.

In der Statik ist es üblich - wegen der damit verbundenen Verringerung der Zahl der Unbekannten - das Formänderungsgrößenverfahren nicht auf die Randbedingungen, sondern nur auf die Übergangsbedingungen anzuwenden. Bei einem Randfeld nach 5.6 b müssen Partikular- und homogene Lösung die Randbedingung der Kraftgröße $M(0) = 0$ erfüllen. Lässt

man dies als Sonderfall zu, so ist der Träger nach 5.6 b auch geometrisch bestimmt.

Die Anwendung soll nun an einem Beispiel gezeigt werden,

Im Bild 5.7 a ist ein Träger dargestellt, der einfach geometrisch unbestimmt ist. An die Stelle der Übergangsbedingung $\varphi_l = \varphi_r$ wird für die Partikularlösung $\varphi = 0$ gesetzt (Bild 5.7 b). Die homogene Lösung wird so gewählt, daß an der Mittelstütze φ den Wert $c \neq 0$ hat.

In der Statik wird die Größe von ξ , dem Faktor, mit dem die homogene Lösung zu multiplizieren ist, aus der Bedingung berechnet, daß die Momentensumme an der Mittelstütze Null sein muß. Hier soll diese Gleichung aber wieder ohne die Anschauung formal mit dem Prinzip der virtuellen Verformungen gewonnen werden.

Der wirkliche Kraftzustand setzt sich ganz allgemein zusammen aus der Partikularlösung und den mit einem Faktor zu multiplizierenden verschiedenen unabhängigen homogenen Lösungen. Für eine Schnittkraft S beispielsweise:

$$S = S_p + \sum_j \xi_j S_{Hj} \quad (5.8)$$

Zur Vereinfachung sollen in Zukunft die homogenen Zustände nur noch mit dem Index j versehen werden.

Als virtuelle Verformungszustände sollen nun wieder unabhängige homogene Lösungen gewählt werden. Die Biegelinie nach Bild 5.7 c ist aber hierfür nur schlecht geeignet, da sowohl die Arbeit der Gleichstreckenlast als auch die Arbeit der Momente nicht ohne Mühe zu berechnen ist.

Der geübte Statiker wird erkennen, daß für $\varphi = 1$ die Biegelinie im linken Feld gleich der Einflußlinie für das rechte Einspannmoment des beidseitig eingespannten Trägers ist, sich die äußere Arbeit also doch einfach bestimmen läßt. Sie beträgt im Beispiel $-\frac{q l^2}{12} c$. Dasselbe gilt für die

innere Arbeit. Teilt man nämlich die Momentenfläche nach Bild 5.7 c, die ja ähnlich der κ -Fläche ist, in zwei Dreiecke auf und betrachtet diese nun als virtuellen Kraftzustand - den wirklichen Kraftzustand

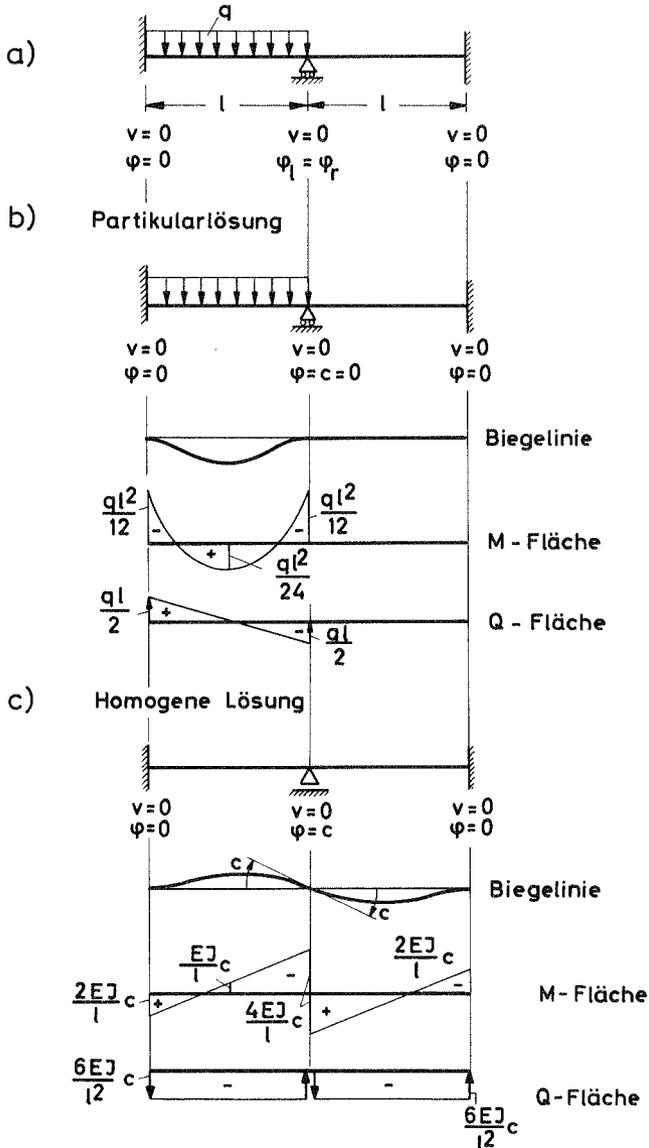


Bild 5.7

als Verformungszustand - , so wird mit diesem virtuellen Kraftzustand die Verdrehung am linken bzw. rechten Trägerende berechnet. Es muß sich also nach Voraussetzung für die Partikularlösung jedesmal Null ergeben, für die homogene Lösung am linken Trägerende Null und am rechten der $\frac{4EJ}{l}$ c-fache Wert der eingeleiteten Verdrehung c. Diese Überlegungen setzen aber schon vertiefte Statikkenntnisse voraus und sind deshalb nicht als Grundlage eines einfachen allgemeinen Verfahrens geeignet.

Nach dem Prinzip der virtuellen Verformungen ist der zu wählende virtuelle Verformungszustand beliebig. Er muß nicht einmal mit den Bindungen verträglich sein, d. h. wir können beliebig viele Sprünge und Knicke an beliebigen Stellen anordnen. Da an diesen Stellen aber die inneren Kräfte Arbeit verrichten, ist es zweckmäßig, die Knicke und Sprünge an den Stellen anzuordnen, an denen die Schnittkräfte nicht besonders berechnet werden müssen, also an den Trägerenden. Damit wir die Gewähr unabhängiger Lösungen haben, nehmen wir die Randbedingungen analog denen der homogenen Lösungen. Die virtuellen Verformungszustände wählen wir nun so, daß die Träger stückweise gerade sind.

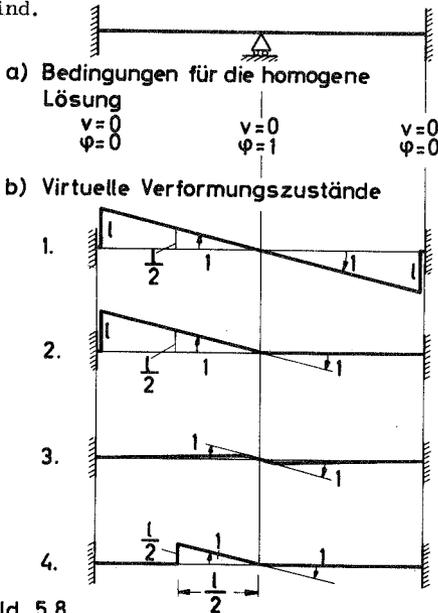


Bild 5.8

In Bild 5.8 sind für das Beispiel von Bild 5.7 verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des virtuellen Verformungszustandes angegeben, die alle die Randbedingungen für die homogene Lösung erfüllen, wobei - wie auch schon beim Kraftgrößenverfahren - $c = 1$ gesetzt wird. Die einzelnen Möglichkeiten sollen nun durchgesprochen und die Zwangskräfte berechnet werden.

Im ersten Fall werden Sprünge dicht neben den äußeren Lagern angeordnet.

Virtuelle Arbeit der Partikularlösung:

$$A_{aP} = -q l \frac{l}{2} = -\frac{q l^2}{2}$$

$$-A_{iP} = +\frac{q l^2}{12} \cdot 1 - \frac{q l}{2} \cdot l$$

$$A_P = -\frac{q l^2}{2} - \frac{q l^2}{12} + \frac{q l^2}{2} = -\frac{q l^2}{12} = -Z_{10}$$

Virtuelle Arbeit der homogenen Lösung:

$$-A_{iH} = \left(-\frac{2EJ}{l} c \cdot l + \frac{6EJ}{12} c \cdot l - \frac{2EJ}{l} c \cdot l + \frac{6EJ}{12} c \cdot l \right) \xi_1$$

$$-A_{iH} = \left(+\frac{4EJ}{l} c + \frac{4EJ}{l} c \right) \xi_1 \quad ; \quad A_{aH} = 0$$

$$A_H = -\frac{8EJ}{l} c \cdot \xi_1 = -Z_{11} \xi_1$$

Beim zweiten im Bild 5.8 b dargestellten virtuellen Verformungszustand bleibt das linke Feld unverändert und damit auch A_P . Im rechten Feld wurde gleich neben der Stütze ein Knick um $+1$ angeordnet. Für die homogene Lösung ergibt sich im rechten Feld:

$$-A_{iH_{\text{rechts}}} = +\frac{4EJ}{l} c \cdot 1 \cdot \xi_1$$

also dieselbe Größe wie vor.

Beim dritten Zustand sind gleich links und rechts neben der Mittelstütze Gelenke angeordnet, die so dicht beieinander liegen, daß die Verdrehung des Verbindungsstückes um 1 keine Durchbiegungen hervorruft. Bei den Traglastverfahren nennt man ein solches Gebilde einen Knotenmechanismus. Es ergeben sich die virtuellen Arbeiten

$$A_{dP} = 0 \quad ; \quad -A_{iP} = + \frac{q l^2}{12}$$

$$A_P = - \frac{q l^2}{12}$$

$$A_{dH} = 0 \quad ; \quad -A_{iH} = + \frac{4EJ}{l} c \cdot \xi_1 + \frac{4EJ}{l} c \cdot \xi_1$$

$$A_H = - \frac{8EJ}{l} c \cdot \xi_1$$

In Bild 5.8 b ist an letzter Stelle eine unzweckmäßige Möglichkeit dargestellt, die zwar auch zum richtigen Ergebnis führt, für die aber wegen des Knicks und des Sprungs in $\frac{b}{2}$ des linken Feldes an dieser Stelle die Schnittkräfte berechnet werden müssen, was in Bild 5.7 bereits geschehen ist.

Es ergeben sich:

$$A_{dP} = -q \frac{l}{2} \frac{l}{4} = - \frac{q l^2}{8}$$

$$-A_{iP} = - \frac{q l^2}{24} \cdot 1$$

$$A_P = - \frac{q l^2}{8} + \frac{q l^2}{24} = - \frac{q l^2}{12}$$

$$A_{dH} = 0 \quad ; \quad -A_{iH} = \left(+ \frac{EJ}{l} c \cdot 1 + \frac{6EJ}{l^2} c \frac{l}{2} + \frac{4EJ}{l} c \cdot 1 \right) \xi_1$$

$$= \left(+ \frac{4EJ}{l} c + \frac{4EJ}{l} c \right) \xi_1$$

$$A_H = - \frac{8EJ}{l} c \cdot \xi_1$$

Bei mehrfach geometrisch unbestimmten Tragwerken lassen sich entsprechend viele unabhängige homogene Lösungen angeben, aus denen man wieder vorteilhafte Kombinationen bilden kann. Für die praktische Rechnung wird dies aber nicht ganz so einfach wie beim Kraftgrößenverfahren sein, da die Berechnung der zugehörigen Schnittkräfte etwas umfangreicher ist.

Ahnlich wie beim Kraftgrößenverfahren lassen sich bestimmte Bedingungen aufstellen.

Die Partikularlösung soll soweit wie nur eben möglich dem endgültigen Funktionsverlauf angepaßt sein, d. h. sie ist so zu wählen, daß sie möglichst viele Rand- und Übergangsbedingungen erfüllt. Sie darf unter Berücksichtigung der vorhandenen Bindungen (Lager, Gelenke) keine Diskontinuitäten in der Biegelinie erzeugen. Die Partikularlösung bezieht sich auf die Differentialgleichung 2. Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2} = -\kappa + C_1x + C_2$, d. h. auf alle Krümmungen, die durch äußere Einwirkungen entstehen, also nicht nur Krümmungen infolge der Belastung, sondern auch infolge ungleicher Erwärmung, Stützensenkung und durch Herstellungsfehler entstandene Knicke oder Sprünge im Träger. Die Konstanten C_1 und C_2 werden zur Erfüllung der Randbedingungen benötigt und sind darin begründet, daß die beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung (4.1) und (4.4) nicht entkoppelt sind, daß also in jedem Fall eine statisch unbestimmte Rechnung durchzuführen ist.

Die homogene Lösung muß für die Differentialgleichung 4. Ordnung $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ gefunden werden, da sonst keine 4 Randbedingungen erfüllt werden können. Für die homogenen Lösungen gilt:

1. Die homogenen Lösungen müssen so beschaffen sein, daß sich mit ihnen die Verformungen an den Übergangsstellen berechnen lassen.
2. Sie müssen verträglich sein.
3. Sie müssen innerhalb der einzelnen Integrationsbereiche eine konstante Querkraft haben.

Außerdem fordern wir noch, weil dies die Rechnung vereinfacht:

4. Die virtuellen Verformungszustände sollen die Bedingungen der homogenen Lösungen erfüllen. Da sie nicht verträglich zu sein brauchen, wählt man sie zweckmäßigerweise so, daß die Krümmung bis auf einzelne Unstetigkeiten Null ist. Außerdem ist es vorteilhaft, sie so festzulegen, daß äußere Arbeiten nur infolge der Belastung entstehen.

6. Zahlenbeispiele

6.1 Einfach statisch und einfach geometrisch unbestimmtes System

Das in Bild 6.1 a dargestellte Tragwerk ist einfach statisch und einfach geometrisch unbestimmt.

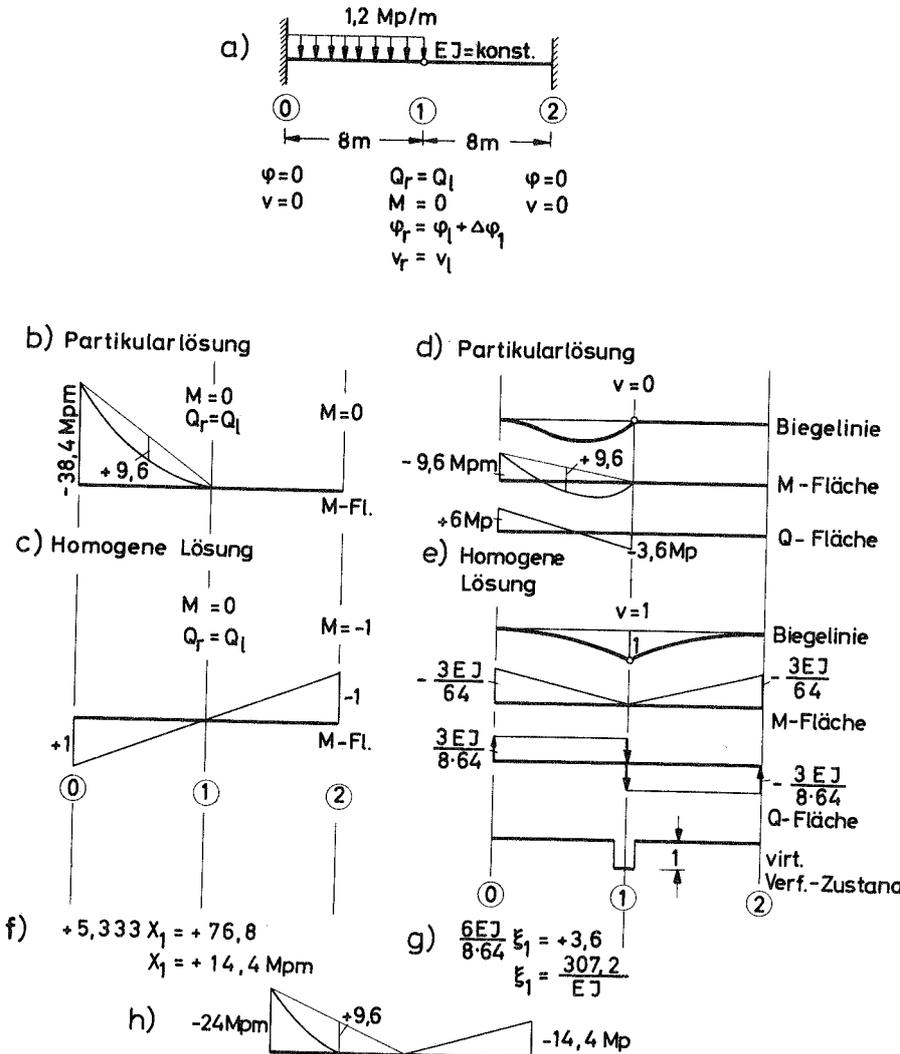


Bild 6.1

Mit den Bedingungen nach 6.1 b erhält man die Partikularlösung und mit denjenigen nach 6.1 c die homogene Lösung nach dem Kraftgrößenverfahren. Die entsprechenden Lösungen für das Formänderungsgrößenverfahren sind im Bild 6.1 d und 6.1 e angegeben. Mit den Gleichungen nach Bild 6.1 f bzw. 6.1 g ergibt sich der endgültige in Bild 6.1 h dargestellte Zustand.

6.2 Kombinierte Anwendung des Kraftgrößen- und des Formänderungsgrößenverfahrens

Im Bild 6.2 a ist ein Tragwerk dargestellt, das dreifach statisch und vierfach geometrisch unbestimmt ist.

Bei einer Lösung nach dem Kraftgrößenverfahren könnte man beispielsweise in den Punkten 3, 4 und 5 Gelenke anbringen, nach dem Formänderungsgrößenverfahren könnte man in den Punkten 1, 3 und 4 eine Einspannung und im Punkt 2 ein Lager anbringen.

Im vorliegenden Fall soll eine Lösung gewählt werden, bei der das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren gleichzeitig angewandt werden. Dadurch, daß im Punkt 3 ein Gelenk angebracht wird, ist der linke Teil statisch bestimmt. Durch eine Einspannung im Punkt 4 wird der rechte Teil geometrisch bestimmt. Damit gelingt es also, die Zahl der Überzähligen auf 2 herabzusetzen.

In Bild 6.2 b ist die Partikularlösung und in Bild 6.2 c sind die homogenen Lösungen angegeben.

Zur Ermittlung der beiden Arbeitsgleichungen sind nun ein virtueller Kraftzustand und ein virtueller Verformungszustand zu wählen, die unabhängig voneinander sein müssen. Sie sind im Bild 6.2 d dargestellt. Die Wahl des virtuellen Verformungszustandes ist im Abschnitt 5.2

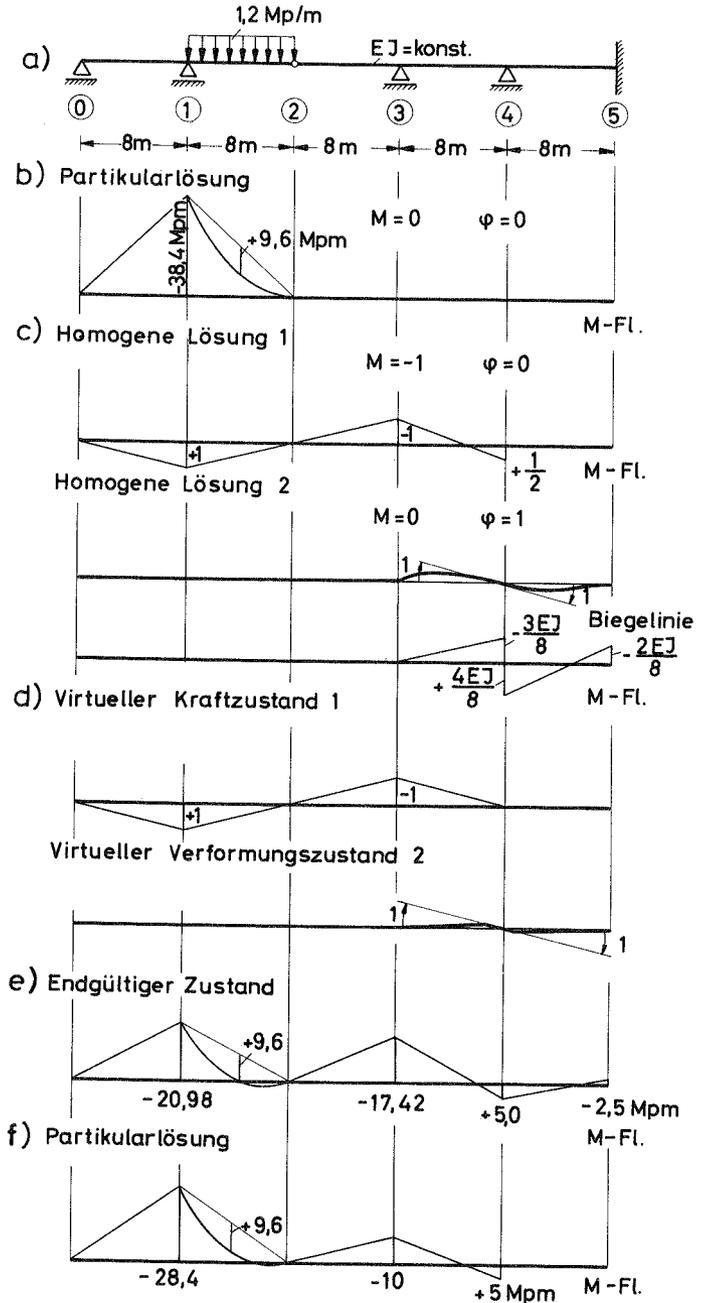


Bild 6.2

ausführlich behandelt worden. Beim virtuellen Kraftzustand muß vereinbarungsgemäß die Bedingung $M_3 = -1$ erfüllt sein. Außerdem muß dieser Zustand im Gleichgewicht sein. Will man hierbei vermeiden, daß mit dem wirklichen Verformungszustand äußere Arbeiten entstehen, so muß M_4 Null sein. Es ergibt sich der dargestellte virtuelle Kraftzustand. - Bei den statischen Methoden erlaubt der Reduktionssatz den gewählten virtuellen Kraftzustand.

Es ergeben sich die folgenden Arbeiten.

Arbeit des virtuellen Kraftzustandes:

$$-A_{i1P} = \frac{1}{EJ} \left(-2 \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot 38,4 + \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot 9,6 \right) = - \frac{8}{3} \frac{67,2}{EJ}$$

$$-A_{i11} = \frac{1}{EJ} \left(4 \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{8}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) X_1 = + \frac{10}{EJ} X_1$$

$$-A_{i12} = \frac{1}{EJ} \frac{8}{6} \cdot 1 \cdot \frac{3EJ}{8} \xi_1 = + \frac{1}{2} \xi_1$$

Arbeit des virtuellen Verformungszustandes:

$$A_{2P} = 0$$

$$-A_{i21} = - \frac{1}{2} X_1 = - \frac{1}{2} X_1$$

$$-A_{i22} = \left(+1 \frac{3EJ}{8} + 1 \frac{4EJ}{8} \right) \xi_1 = + \frac{7EJ}{8} \xi_1$$

Arbeitsgleichungen:

$$+ \frac{10}{EJ} X_1 + \frac{1}{2} \xi_1 = \frac{8}{3} \frac{67,2}{EJ}$$

$$- \frac{1}{2} X_1 + \frac{7EJ}{8} \xi_1 = 0$$

Lösung:

$$X_1 = + 17,42$$

$$\xi_1 = + \frac{10}{EJ}$$

Die sich daraus ergebende Momentenfläche ist in Bild 6.2 e dargestellt.

Mit einer Partikularlösung $M_3 = -10 \text{ Mpm}$ (Bild 6.2 f) hätte man erhalten:

$$A_{i1P} = -\frac{8}{3} \frac{29,7}{EJ} ; \quad A_{i2P} = -5$$

und daraus

$$X_1 = +7,45 \quad \text{und} \quad \xi_1 = +\frac{10}{EJ}$$

und somit dieselbe Momentenfläche wie vorher.

6.3 Durchlaufträger nach dem Kraftgrößenverfahren. Änderung der Belastung und der Systemwerte des Tragwerks.

Das in Bild 6.3 a dargestellte fünffach statisch unbestimmte Tragwerk soll nach dem Kraftgrößenverfahren berechnet werden. Es sollen die in der Statik üblichen Partikular- und homogenen Lösungen gewählt werden (Bild 6.3 b). Mit der in Bild 6.4 als Matrix dargestellten inhomogenen Form des linearen Gleichungssystems erhält man als Lösung die Momentenfläche nach Bild 6.3 c.

Hätte man die Partikular- und homogenen Lösungen nach Bild 6.5 gewählt, so hätte man mit den homogenen Lösungen als virtuellen Kraftzuständen ein Gleichungssystem nach Bild 6.6 erhalten. In diesem System sind nur noch 2 Kopplungen vorhanden. Es hat für die dritte Gleichung und das System der vierten und fünften Gleichung die trivialen Lösungen $B_3 = B_4 = B_5 = 0$. Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man die erwarteten Ergebnisse $B_1 = B_2 = 1$.

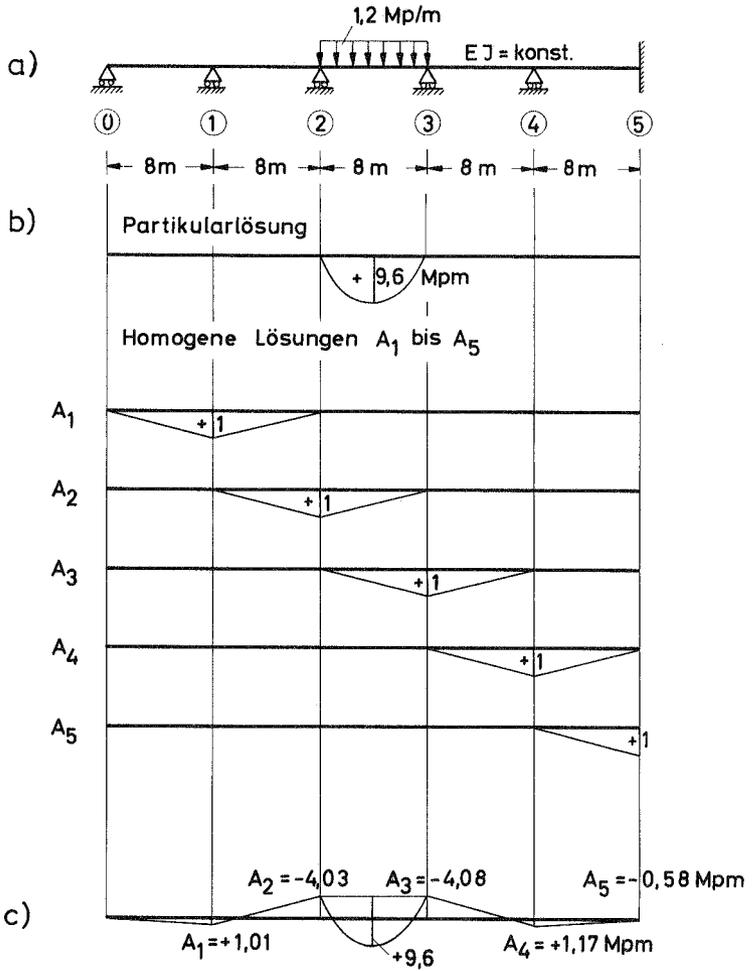


Bild 6.3

5,333	1,333				
1,333	5,333	1,333			- 25,6
	1,333	5,333	1,333		- 25,6
		1,333	5,333	1,333	
			1,333	2,667	

Bild 6.4

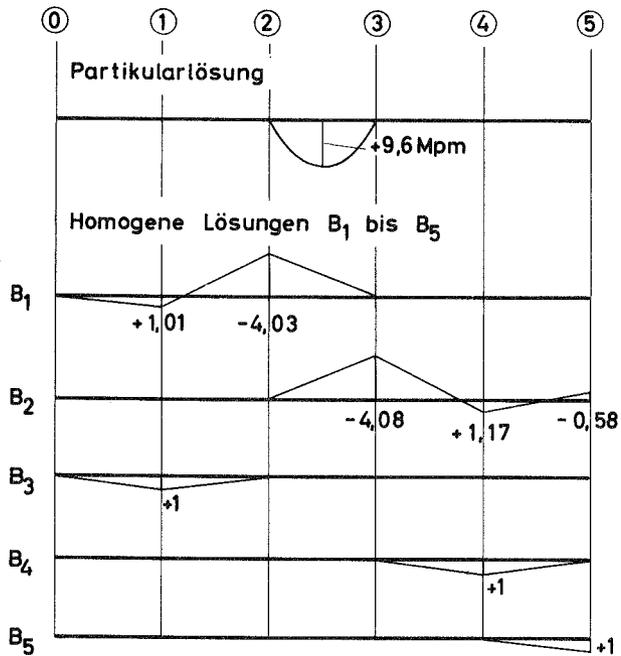


Bild 6.5

81,20	21,92				+103,17
21,92	82,44				+104,45
		5,333			
			5,333	1,333	
			1,333	2,667	

Bild 6.6

Mit den virtuellen Zuständen nach Bild 6.7 erhält man die un-symmetrische Matrix nach Bild 6.8.

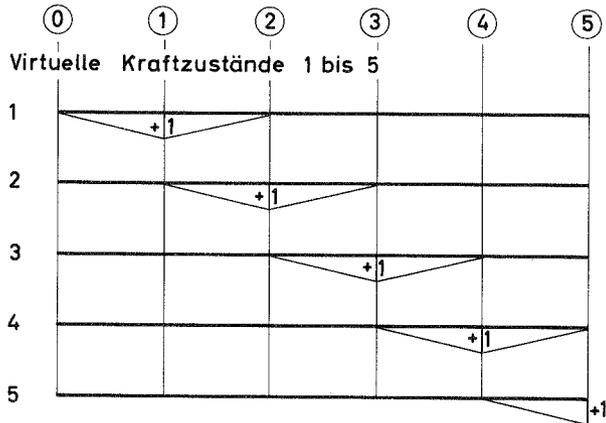


Bild 6.7

-20,143	-5,44	+1,333			- 25,6
- 5,373	-20,2		+1,333		- 25,6
		+5,333			
			+5,333	+1,333	
			+1,333	+2,667	

Bild 6.8

Aus den drei letzten Gleichungen ergibt sich $B_3 = B_4 = B_5 = 0$. Berücksichtigt man dieses Ergebnis in den beiden ersten Gleichungen, so erkennt man, daß die Werte δ_{13} und δ_{24} keine Bedeutung haben und daher auch Null gesetzt werden können. Die Symmetrie stellt man dadurch her, daß man die erste Gleichung mit $-4,03$, die zweite mit $-4,08$ multipliziert. So erhält man dieselben Elemente wie in Bild 6.6.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß das Rechnen mit statisch unbestimmtem Grundsystem ein Sonderfall des beschriebenen Vorgehens ist.

Ändert sich die Belastung entsprechend Bild 6.9, so würde man in den in den Bildern 6.4 und 6.6 dargestellten Matrizen neue Lastglieder erhalten.

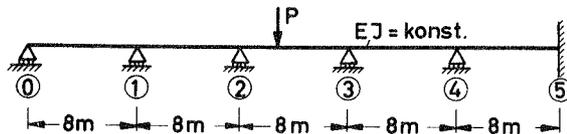


Bild 6.9

Die Lösung des Gleichungssystems würde aber bei den homogenen Lösungen nach Bild 6.3 umfangreicher sein, als bei den homogenen Lösungen nach Bild 6.5. Es würde sich also sicher lohnen, auf dieses System überzugehen.

Ändern sich aber die Systemwerte des Tragwerks im Feld 2-3, also die Stützweite oder, wie in Bild 6.10 dargestellt, das Trägheitsmoment, so

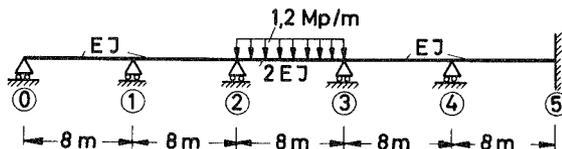


Bild 6.10

ändern sich im Bild 6.4 die Werte δ_{22} , δ_{23} und δ_{33} und damit ist eine neue Lösung des Gleichungssystems erforderlich. Eine nachträgliche

Korrektur, wie man sie entsprechend [7, Seite 350] vornehmen könnte, bringt gegenüber einer Neuberechnung zwar Vorteile, ist aber im vorliegenden Fall immer noch recht umfangreich. In der Matrix nach Bild 6. 6 ändert sich dagegen nur das aus den beiden ersten Gleichungen bestehende Gleichungssystem, das heißt, es sind nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen. Das neue Gleichungssystem und die Lösung sind im Bild 6. 11 dargestellt.

59,7	10,98	51,5
10,98	60,27	52,2

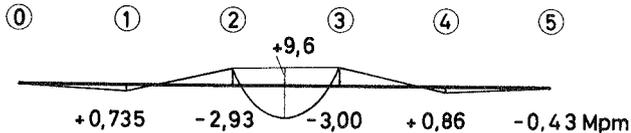


Bild 6.11

Bei einer Änderung des Tragwerks entsprechend Bild 6. 12 a kann man unter der Voraussetzung, daß die in Bild 6. 3 c dargestellte Momentenfläche bekannt ist, die Partikular- und homogenen Lösungen nach Bild 6. 12 b wählen und so wieder mit nur zwei Unbekannten (Bild 6. 13) die Lösung nach Bild 6. 12 c gewinnen. Zur Aufstellung der Arbeitsgleichungen wählt man wieder virtuelle Kraftzustände analog den im Bild 6. 3 b dargestellten. Im vorliegenden Fall wurde darauf verzichtet, durch Multiplikation der ersten Zeile mit $-4,03$ und der zweiten mit $+1,17$ die Symmetrie des Gleichungssystems herzustellen, da diese bei der Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten noch keine Arbeitersparnis bringt.

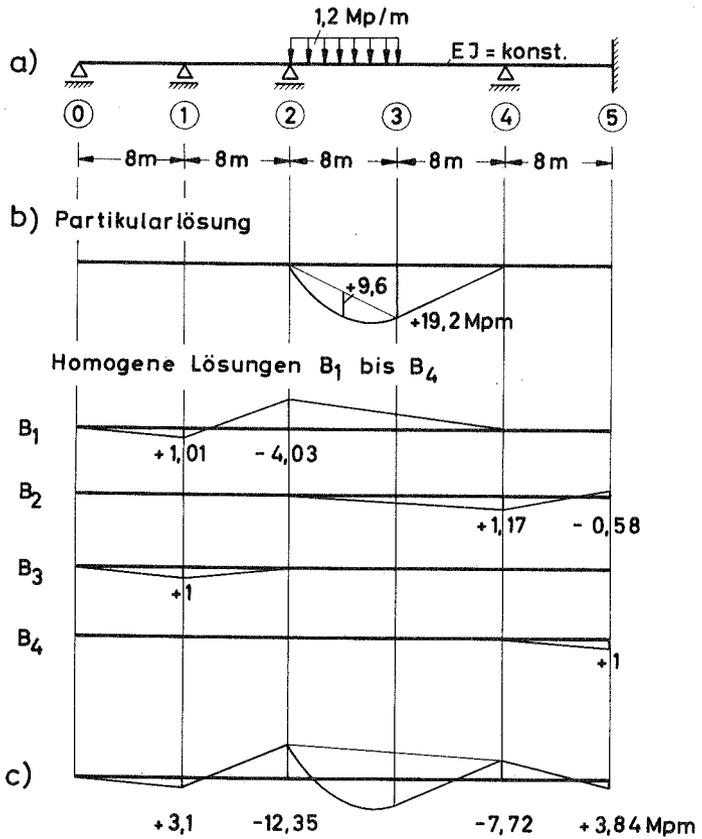


Bild 6.12

-30,89	+3,12	+1,333		-115,2
-10,75	+8,59		+1,333	- 89,6
		+5,333		
			+2,667	

Bild 6.13

Das im Abschnitt 6.2 behandelte Tragwerk (Bild 6.2 a) kann man nun, da die Lösung 6.3 c des Tragwerks 6.3 a bekannt ist, mit nur einer Unbekannten berechnen. Mit den in Bild 6.14 dargestellten Zuständen erhält man das Gleichungssystem

$$15,735 X = + \frac{8}{3} 67,4$$

Die Lösung $X = + 4,28$ ergibt die im Bild 6.2 e dargestellte Momentenfläche.

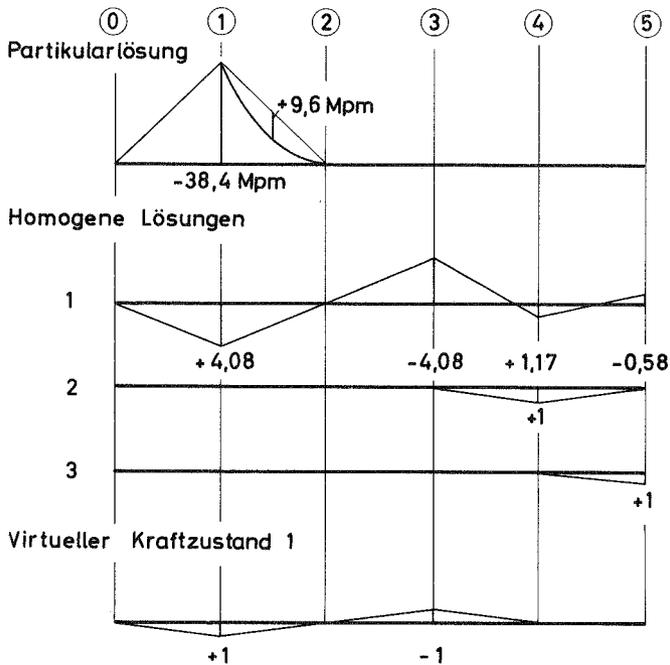
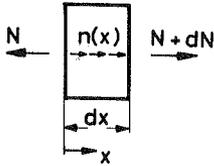


Bild 6.14

7. Anwendung auf die Differentialgleichung des längsbelasteten Stabes

Mit den Bezeichnungen nach Bild 7. 1 lauten die Differentialgleichungen:



$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \quad (7.1)$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \epsilon(x) \quad (7.2)$$

Bei Hookeschem Werkstoffverhalten

$$\epsilon = \frac{N}{EF} \quad (7.3)$$

ergibt sich für konstantes EF

$$EF u' = -n(x) \quad (7.4)$$

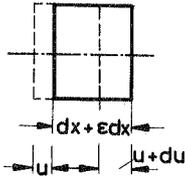


Bild 7.1

Es handelt sich hier um eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Kraftgröße (7.1) und eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Verformungsgröße (7.4). Sind die Differentialgleichungen (7.1) und (7.2) in den Randbedingungen entkoppelt, d. h. kann man die Kraftgröße ohne Kenntnis der Verformungsgröße berechnen, so ist das Tragwerk statisch bestimmt.

Da die Randbedingung $N = u = 0$ physikalisch nicht möglich ist, liegt für (7.4) immer ein Randwertproblem vor.

Als homogene Lösung kommt immer nur eine stückweise konstante Normalkraft in Frage.

Die Anwendung soll nun an einigen Beispielen erläutert werden.

In Bild 7.2 a ist ein statisch bestimmter Träger dargestellt. Der Träger nach Bild 7.2 b ist einfach statisch unbestimmt, gleichzeitig jedoch geometrisch bestimmt, also ein Grundlastfall des Formänderungsgrößenverfahrens.

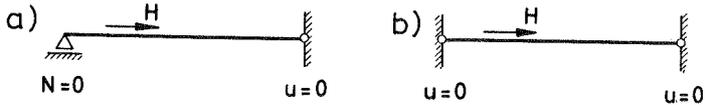


Bild 7.2

Der im Bild 7.3 dargestellte Träger ist zweifach statisch und einfach geometrisch unbestimmt.

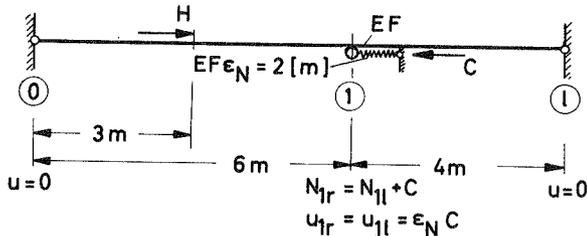


Bild 7.3

Er soll sowohl nach dem Kraftgrößenverfahren als auch nach dem Formänderungsgrößenverfahren berechnet werden.

Für das Kraftgrößenverfahren wurden die in Bild 7.4 a angegebenen Bedingungen gewählt. Mit ihnen läßt sich nach (7.1) die Normalkraftfläche berechnen, wobei vereinbarungsgemäß bekannte Sprunggrößen - hier die Horizontalkraft H - berücksichtigt werden. - In Bild 7.4 b und c sind zwei Möglichkeiten dargestellt, wie die beiden unabhängigen homogenen Lösungen gewählt werden können.

Für beide Möglichkeiten wird das Beispiel durchgerechnet.

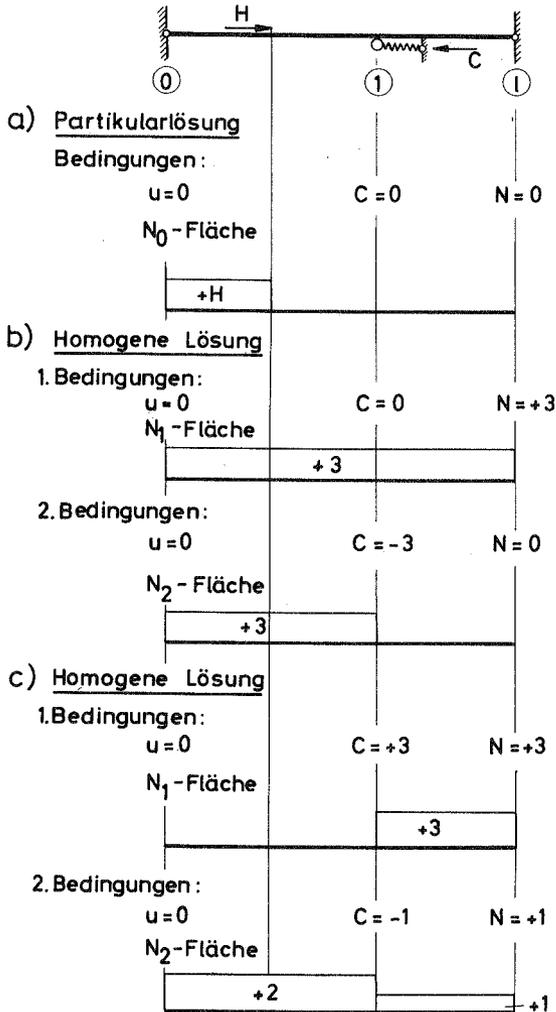


Bild 7.4

Mit den homogenen Lösungen nach Bild 7.4 b erhält man mit der 1. homogenen Lösung als virtueller Belastung

$$-A_{iP} = \int \frac{N_0}{EF} N_1 ds = 3 \cdot 3 \frac{H}{EF} = 9 \frac{H}{EF}$$

$$\begin{aligned} -A_{iH} &= \int \frac{X_1 N_1}{EF} N_1 ds + \int \frac{X_2 N_2}{EF} N_1 ds = \\ &= (10 \cdot 3 \cdot 3 X_1 + 6 \cdot 3 \cdot 3 X_2) \frac{1}{EF} = \\ &= \frac{90}{EF} X_1 + \frac{54}{EF} X_2 \end{aligned}$$

Mit der 2. homogenen Lösung als virtueller Belastung ergibt sich entsprechend

$$-A_{iP} = + \frac{9H}{EF}$$

$$-A_{iH} = (6 \cdot 3 \cdot 3 X_1 + 6 \cdot 3 \cdot 3 X_2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 X_2) \frac{1}{EF}$$

$$-A_{iH} = + \frac{54}{EF} X_1 + \frac{72}{EF} X_2$$

Aus den Arbeitsgleichungen

$$\frac{90}{EF} X_1 + \frac{54}{EF} X_2 = - \frac{9H}{EF}$$

$$\frac{54}{EF} X_1 + \frac{72}{EF} X_2 = - \frac{9H}{EF}$$

berechnet man

$$X_1 = - \frac{H}{22} \quad ; \quad X_2 = - \frac{2H}{22}$$

und damit folgende Kräfte

$$N(0) = +H - \frac{3}{22}H - \frac{3 \cdot 2}{22}H = \frac{13}{22}H$$

$$N(1l) = -\frac{3}{22}H - \frac{3 \cdot 2}{22}H = -\frac{9}{22}H$$

$$N(1) = -\frac{3}{22}H = -\frac{3}{22}H$$

$$C = +\frac{3 \cdot 2}{22}H = +\frac{6}{22}H$$

Mit den homogenen Lösungen nach Bild 7.4 c erhält man mit der 1. homogenen Lösung als virtueller Belastung

$$-A_{iP} = 0$$

$$-A_{iH} = (4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3) \frac{X_1}{EF} + (4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1) \frac{X_2}{EF}$$

$$-A_{iH} = +\frac{54}{EF}X_1 + \frac{6}{EF}X_2$$

Mit der 2. homogenen Lösung als virtueller Belastung ergibt sich

$$-A_{iP} = 3 \cdot H \cdot 2 \frac{1}{EF} = \frac{6H}{EF}$$

$$-A_{iH} = (4 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3) \frac{X_1}{EF} + (6 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1) \frac{X_2}{EF}$$

$$-A_{iH} = +\frac{6}{EF}X_1 + \frac{30}{EF}X_2$$

Aus den Arbeitsgleichungen

$$\frac{54}{EF}X_1 + \frac{6}{EF}X_2 = 0$$

$$\frac{6}{EF}X_1 + \frac{30}{EF}X_2 = -\frac{6H}{EF}$$

berechnet man

$$X_1 = +\frac{H}{44}; \quad X_2 = -\frac{9H}{44}$$

und erhält wie vor

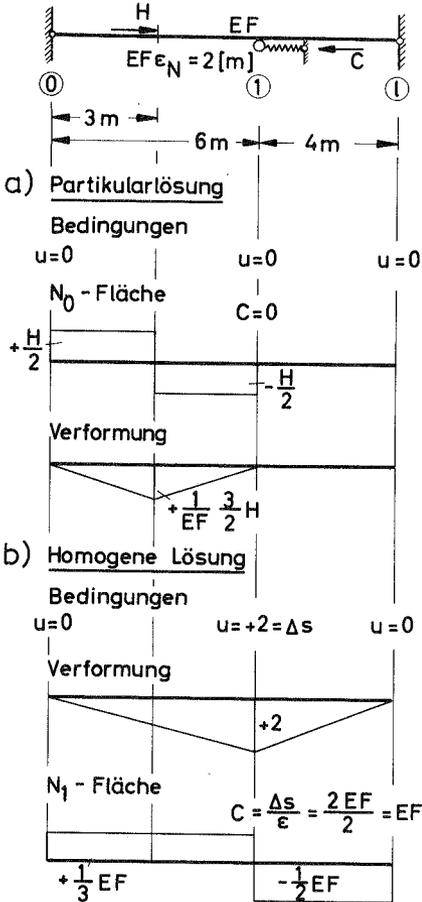
$$N(0) = \frac{13}{22} H$$

$$N(l) = -\frac{3}{22} H$$

$$N(1) = -\frac{9}{22} H$$

$$C = +\frac{6}{22} H$$

Für das Formänderungsgrößenverfahren wurden die in Bild 7.5 gezeigten Zustände gewählt.



c) Virtueller Verformungszustand

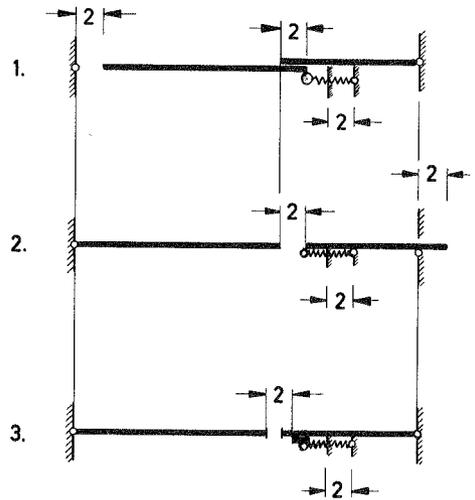


Bild 7.5

Bei der homogenen Lösung ergeben sich aus $\Delta s = \frac{N}{EF} s$ mit $\Delta s = 2$ die Normalkräfte $N = \frac{\Delta s EF}{s}$ und aus $\Delta s = \epsilon_N C$ die Lagerreaktion $C = \frac{\Delta s}{\epsilon_N}$.

Auch hier werden wieder nicht die homogenen Lösungen als virtuelle Verformungszustände genommen, sondern solche Zustände, die die Bedingungen erfüllen, ohne daß dabei elastische Dehnungen entstehen. Drei verschiedene Möglichkeiten sind in Bild 7.5 c dargestellt. Mit diesen sollen nun die Arbeiten ermittelt werden.

Man erhält für die verschiedenen virtuellen Verformungszustände nach Bild 7.5 c

	1.	2.	3.
$A_{aP} =$	$+ 2 H$		
$- A_{iP} =$	$+ 2 \frac{H}{2}$	$- 2 \frac{H}{2}$	$- 2 \frac{H}{2}$
$A = A_a + A_i =$	$+ H$	$+ H$	$+ H$
$A_{aH} =$	$- 2 EF$	$- 2 EF$	$- 2 EF$
$- A_{iH} =$	$+ 2 \frac{1}{3} EF + 2 \frac{1}{2} EF$	$+ 2 \frac{1}{3} EF + 2 \frac{1}{2} EF$	$+ 2 \frac{1}{3} EF + 2 \frac{1}{2} EF$
$A = A_a + A_i =$	$- \frac{11}{3} EF$	$- \frac{11}{3} EF$	$- \frac{11}{3} EF$

Die Arbeitsgleichung lautet in allen drei Fällen

$$-EF \frac{11}{3} \xi_1 = -H$$

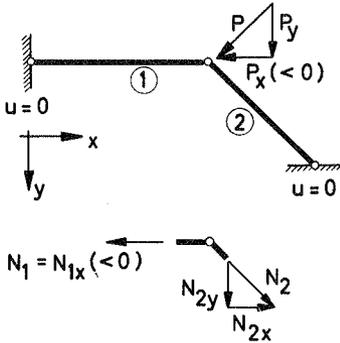
Mit der Lösung

$$\xi_1 = + \frac{3 H}{11 EF}$$

erhält man dieselben Schnittkräfte wie beim Kraftgrößenverfahren.

Abschließend sollen auch hier noch einige Bemerkungen zu Rahmenecken gemacht werden. Dabei sollen Rahmenecken betrachtet werden, bei denen keine Koppelung mit der Differentialgleichung des querbelasteten Trägers besteht. Rahmenecken, bei denen die beiden Differentialgleichungen gekoppelt sind, können leicht aus den Grundfällen zusammengesetzt werden.

Die Entkoppelung bedingt, daß in den an den Rahmenecken angreifenden Stäben nur Normalkräfte herrschen. Dies läßt sich durch die Anordnung von Gelenken in den Rahmenecken realisieren.

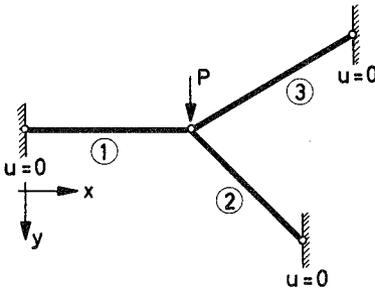


Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned} N_{1x} + N_{2x} + P_x &= 0 \\ N_{2y} + P_y &= 0 \end{aligned}$$

Bild 7.6

In Bild 7.6 ist eine solche Ecke dargestellt. Die Partikularlösung für die einzelnen Stäbe ist Null. Vereinbarungsgemäß sollen aber die bekannten oder ohne Kenntnis der Verformungen berechenbaren Sprunggrößen auch in der Partikularlösung berücksichtigt werden. So betrachtet ist der in Bild 7.6 dargestellte Träger statisch bestimmt, da sich mit den 2 Übergangsbedingungen die beiden unbekannt Stabkräfte berechnen lassen.



Übergangsbedingungen (allgemein):

$$\begin{aligned} N_{1x} + N_{2x} + N_{3x} + P_x &= 0 \\ N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} + P_y &= 0 \end{aligned}$$

Bild 7.7

In Bild 7.7 ist ein einfach statisch unbestimmtes System dargestellt. Zur Berechnung der 3 Stabkräfte stehen nur 2 Übergangsbedingungen in den Kraftgrößen zur Verfügung. Man könnte nun als Partikularlösung das in Bild 7.6 dargestellte Tragwerk wählen, als Partikularlösung in dem Sinne, daß die Wirkung der äußeren Belastung berücksichtigt ist. Als homogene Lösung kommt ein Zustand in Frage mit stabweise

konstanter Normalkraft, der die Übergangsbedingungen erfüllt. Man wählt also einen Wert für N_3 und berechnet mit den Übergangsbedingungen N_1

und N_2 . Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte mit der homogenen Lösung als virtuellem Kraftzustand berechnet man den Faktor X , mit dem die frei gewählte homogene Lösung zu multiplizieren ist. Das Vorgehen unterscheidet sich also grundsätzlich nicht von dem beim querbelasteten Biegeträger.

Verbindet man nun mehrere Tragwerke nach Bild 7.6 und 7.7 miteinander, so entsteht ein Fachwerk, für das man in derselben Weise Partikularlösungen und homogene Lösungen finden kann. Es ist also auch bei einem Fachwerk möglich, für die einzelnen Einheitslastzustände verschiedene statisch bestimmte Zustände zu wählen.

8. Zusammenfassung

Den Statiker interessiert im allgemeinen nicht die analytische Darstellung der Funktionen der Schnittkräfte und Verformungen. Man begnügt sich damit, die Werte bereitzustellen, die erforderlich sind, um die einzelnen Funktionen möglichst unabhängig voneinander im Bedarfsfall aufzeichnen zu können. Es genügt dabei meist, die Funktionen der Schnittkräfte zu kennen, da man aus diesen z. B. mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte die gewünschten Verformungen berechnen kann.

Die mathematische Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen und der Verträglichkeitsbedingungen nach der baustatischen Theorie 1. Ordnung führt bei dem Hookeschen Kraft-Verformungsgesetz zu linearen Differentialgleichungen zweiter oder vierter Ordnung bzw. zu einem System von Differentialgleichungen erster oder vierter Ordnung. Bei der Lösung dieser Differentialgleichungen für die verschiedenen Stetigkeitsbereiche muß man im allgemeinen eine größere Anzahl von Konstanten bestimmen. Aus diesem Grunde wird dieser Weg vom Statiker nur selten beschritten.

Aufgrund ingenieurmäßiger Überlegungen sind einfachere Verfahren entwickelt worden. Zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke handelt es sich hier vor allem um das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren. Untersucht man den mathematischen Gehalt dieser Verfahren, so kommt man zu folgendem Ergebnis.

Beim Kraftgrößenverfahren arbeitet man mit den Differentialgleichungen für die Kraftgrößen, beim querbelasteten Biegebalken also mit $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$. Die Randbedingungen und Übergangsbedingungen werden so abgeändert, daß an diesen Stellen so viele feste Werte in den Kraftgrößen gefordert werden, wie man zur Bestimmung der Konstanten in der Lösungsfunktion der Differentialgleichung in den einzelnen Integrationsbereichen benötigt. Beim querbelasteten Biegebalken müssen es also für jeden Integrationsbereich zwei Werte sein.

Beim Formänderungsgrößenverfahren arbeitet man mit den Differentialgleichungen für die Formänderungsgrößen, beim querbelasteten Biegebalken also mit $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EJ}$. Die Randbedingungen und Übergangsbedingungen werden so abgeändert, daß an diesen Stellen so viele feste Werte in den Formänderungsgrößen gefordert werden, wie man zur Bestimmung der Konstanten in der Lösungsfunktion der Differentialgleichung in den einzelnen Integrationsbereichen benötigt. Beim querbelasteten Biegebalken müssen es also für jeden Integrationsbereich vier Werte sein. In der Statik wird allerdings immer auf die Änderung der Randbedingungen verzichtet.

Bei beiden Verfahren sind die O-(Last-) Zustände Partikularlösungen. Diese Partikularlösungen sind so zu wählen, daß sie diejenigen Übergangsbedingungen erfüllen, die sich aus der Änderung der Lastfunktion über die Trägerlänge ergeben. Die 1-(Einheits-) Zustände sind homogene Lösungen. Sie werden durch eine Änderung der an die Stelle der Rand- und Übergangsbedingungen getretenen festen Bedingungen gewonnen. Sie sind so zu wählen, daß keine lineare Abhängigkeit besteht.

Bei der anschaulichen Herleitung der beiden Verfahren in der Statik werden durch den Einbau zusätzlicher Mechanismen die Rand- und Übergangsbedingungen geändert. Für die Partikularlösung sind es Null-Bedingungen. Bei den homogenen Lösungen wird i. a. jeweils an einer dieser Stellen die Null in eine Eins abgeändert. Diese Einschränkungen sind mathematisch nicht erforderlich. Es können also sowohl bei der Partikularlösung als auch bei den homogenen Lösungen jeweils beliebige Werte gewählt werden. Es muß nur darauf geachtet werden, daß die homogenen Lösungen voneinander unabhängig sind. Die Wahl beliebiger Bedingungen kann bedeuten, daß jedem Zustand ein anderes statisch oder geometrisch bestimmtes oder unbestimmtes System zugrunde liegt. Für das Kraftgrößenverfahren hat dies schon Braun [4] festgestellt.

Die Gleichungen zur Berechnung der Konstanten, mit denen die homogenen

Lösungen zu multiplizieren sind, lassen sich dann nicht mehr als Formänderungs- oder Gleichgewichtsbedingungen anschreiben. Sie werden mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gewonnen. Damit die Gleichungen linear unabhängig voneinander sind, müssen die virtuellen Zustände ebenfalls linear unabhängig sein. Es ist daher angebracht, die linear unabhängigen homogenen Lösungen als virtuelle Zustände zu nehmen, was aber nicht immer zweckmäßig ist. Mit anderen virtuellen Zuständen ist evtl. weniger Rechenarbeit verbunden. Die Anwendung des Reduktionssatzes bei der Berechnung der δ_{jk} -Werte ist ein Sonderfall des beschriebenen Vorgehens.

Durch die mathematische Formulierung sind das Kraftgrößen- und das Formänderungsgrößenverfahren nicht mehr an die Anschauung gebunden und haben so eine größere Allgemeinheit erlangt. Die in der Statik übliche Darstellung dieser Verfahren, das Rechnen mit Gruppenlasten, mit dem elastischen Schwerpunkt oder mit einem statisch unbestimmtem Hauptsystem sind Sonderfälle der allgemeinen Verfahren.

In der vorliegenden Arbeit wurde bei der mathematischen Darstellung des Kraftgrößen- und des Formänderungsgrößenverfahrens bewußt auf die Anschauung verzichtet. Natürlich empfiehlt sich das für die Ingenieurpraxis nicht. Man wird beim Kraftgrößenverfahren auch weiterhin ein statisch bestimmtes System wählen, an dem die Einheitszustände (die homogenen Lösungen) bestimmt werden. Dann prüft man, ob durch eine geschickte Kombination dieser Zustände das Gleichungssystem vereinfacht werden kann, wobei man sich keine Gedanken darüber zu machen braucht, wie das zugehörige statisch bestimmte oder unbestimmte System aussieht. - Bei einem einfach statisch unbestimmtem System ist nur ein einziger homogener Zustand möglich, ganz gleich, wie man das Tragwerk statisch bestimmt macht.

Für jeden einzelnen Lastfall wählt man dann das statisch bestimmte System so, daß sich ein möglichst einfacher Zustand (Partikularlösung)

ergibt.

Man kann das Gleichungssystem auch dadurch vereinfachen, daß man schon vorher gefundene Lösungen verwendet, wie es in Beispiel 6.3 dargestellt ist.

Werden bei der Aufstellung des Gleichungssystems zur Berechnung der Konstanten, mit denen die Einheitszustände zu multiplizieren sind, nicht die homogenen Zustände verwandt, die der Berechnung zugrunde liegen, so kann es sein, daß das Gleichungssystem unsymmetrisch wird. Durch Zeilenmultiplikation kann die Symmetrie hergestellt werden.

Ähnlich verfährt man beim Formänderungsgrößenverfahren und bei einer kombinierten Anwendung beider Verfahren.