

**Die Technik
der reduzierten Basis bei nichtlinearen
finiten Element-Berechnungen**

von

Dahong Tao

Bericht Nr. 9 (1989)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1989

Dieser Bericht wurde von der Autorin unter dem gleichnamigen Titel als
Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Januar 1989

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Luz

Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof

Berichte Können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Technik der reduzierten Basis dargestellt. Diese Technik ist eine Kombination des traditionellen Rayleigh-Ritz-Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente und ist effektiv zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems.

Die Grundkenntnisse der Technik der reduzierten Basis werden vorgestellt. Der Unterschied der Eigenschaften zwischen dem Unterraum und ganzen Raum wird ausführlich diskutiert. Zwei Konzepte der Basistechnik werden mit Beispielen dargestellt.

Die Technik der reduzierten Basis wird mit dem direkten Newton - Raphson - Verfahren und der Störungstechnik verglichen. Außerdem wird der Einfluß verschiedener Basisvektoren untersucht.

Summary

A reduced basis technique is presented. It is based on the combined use of classical Rayleigh-Ritz approximation with the finite element method and is effective to solve the nonlinear finite element problems.

Attention has been given to the background of the reduced basis technique. The different properties of the reduced subspace and the whole space are discussed. Two concepts of the reduced basis technique are described with examples.

The comparisons among the reduced basis technique, the direct Newton-Raphson method and the perturbation method are carried out. The effectiveness of different basis vectors is also tested.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	1
1.0 Einleitung	7
2.0 Vektorreihe, Raum und Basis	13
2.1 Die konjugierte Vektorreihe	14
2.2 Die Taylorsche Vektorreihe	18
2.3 Die Lagrangesche Vektorreihe	21
2.4 Die Newtonsche Vektorreihe	22
2.5 Die Vektorreihe der Eigenformen	23
2.6 Wahl der geeigneten Basis	23
3.0 Allgemeine Darstellung des inkrementellen Gleichgewichtes	26
3.1 Bezeichnungen für das inkrementelle Gleichgewicht	26
3.2 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	27
3.3 Einführung der Methode der finiten Elemente	30
4.0 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	32
4.1 Iterationsverfahren im ganzen Raum	32
4.2 Störungstechnik und andere Vektorüberlagerungsverfahren	35
4.3 Technik der reduzierten Basis	40
4.4 Zusammenfassung	42
5.0 Eigenschaften der Technik der reduzierten Basis	45
5.1 Eigenschaft der reduzierten Steifigkeitsmatrix	45
5.1.1 Symmetrie, Normalform	45
5.1.2 Positive Definitheit	46
5.1.3 Rang der reduzierten Matrix	50
5.1.4 Determinante	52
5.1.5 Eigenwert	58
5.2 Steifigkeitsparameter	60
5.3 Auffinden der kritischen Lasten	64
5.4 Äußere Arbeit	67
5.5 Umkehrbarkeit der Transformation	68

5.6	Konvergenzkriterium	71
5.7	Kriterium zur Beurteilung der Basis	72
6.0	Das erste reduzierte Konzept	74
7.0	Das zweite Konzept	85
7.1	Vorbemerkungen	85
7.2	Physikalische Bedeutung der Koeffizientenfelder	86
7.3	Bedingung zur Anwendung der Koeffizientenfelder	86
7.4	FE - Formulierung	87
7.4.1	Verschiebungen und Verzerrungen	87
7.4.2	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	91
7.4.3	Linearisierung der Gleichgewichtsgleichungen	94
7.4.4	Darstellung einiger Lösungsverfahren	97
7.4.5	Darstellung im Unterraum	100
7.5	Speichertechnik	101
7.6	Elementsteifigkeitsmatrix	103
7.6.1	Das dreidimensionale Fachwerkelement	103
7.6.1.1	Die geometrische Deutung der G.L.-Verzerrungen des Fachwerkelements mit linearem Ansatz	109
7.6.2	Das zweidimensionale Scheibenelement	111
7.6.3	Balken- und Schalenelement	116
7.6.4	Ableitungen nach dem Bahnparameter als Basis	117
7.7	Schematisches Vorgehen	120
8.0	Beispiele und Bewertung	126
8.1	Beispiel 8.1	123
8.2	Beispiel 8.2	142
8.3	Beispiel 8.3	146
8.4	Beispiel 8.4	150
9.0	Zusammenfassung	154
	Schrifttumsverzeichnis	157
	Anhang	165
A1.	Der nichtlineare Verzerrungsanteil des Scheibenelementes	166
A2.	Vektorableitungen nach der verallgemeinerten Bogenlänge	169

Bezeichnungen

Geometrie

mX_i	Kartesische Koordinate im Zustand m
r, s	lokale, natürliche Koordinaten
A	Querschnitt des Fachwerkelements
L	Länge des Fachwerkelements
V	Volumen des Elements
h	Elementdicke

Statische und kinematische Größen

mU_i	Verschiebungskomponente im Zustand m
U_i	Inkrement der Verschiebungskomponente
${}^m\tilde{U}_i, \tilde{U}_i$	Komponente im Unterraum
${}^mS_{ij}$	Komponente des Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art im Zustand m
${}^m\varepsilon_{ij}$	Komponente des Green - Lagrangeschen Verzerrungs- tensors im Zustand m
ε_{ij}	Inkrement des Green - Lagrangeschen Verzerrungstensors
e_{ij}	linearer Anteil des Inkrements ε_{ij}
η_{ij}	nichtlinearer Anteil des Inkrements ε_{ij}

Sonstige Bezeichnungen

Π	potentielle Energie
Φ	Interpolationsfunktionen
E	Elastizitätsmodul
ν	Querdehnzahl
${}^m C_{ijkl}$	konstitutiver Tensor im Zustand m
C_{ijkl}	inkrementeller konstitutiver Tensor
δ_{ij}	Kronecker - Symbol
λ	Eigenwerte; Lastfaktor
α_i, β_i	Koeffizienten
c_1, c_2, c_3	Richtungscosinus
$\det(\mathbf{K})$	Determinante der Matrix \mathbf{K}
$\det(\tilde{\mathbf{K}})$	Determinante der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ im Unterraum
d_{ak}	auf den Anfangswert bezogene aktuelle Determinante
\tilde{d}_{ak}	aktuelle Determinante im Unterraum
L_f, L_g, L_h	Anzahl der zu berechnenden Matrizenelemente
m	Freiheitsgrade im Unterraum
n	Freiheitsgrade im ganzen Raum
nI	Anzahl der linearen Verzerrungen

n_2	Anzahl der nichtlinearen Verzerrungen
O_d	Rechenoperationen der direkten Methode
O_r	Rechenoperationen der reduzierten Methode
$O_{\tilde{G}}$	Rechenoperationen für $\tilde{\mathbf{G}}$
$O_{\tilde{H}}$	Rechenoperationen für $\tilde{\mathbf{H}}$
r_k	Rang der Matrix \mathbf{K}
d_A	Rangabfall der Matrix \mathbf{A}
S_{ak}	aktueller bezogener Steifigkeitsparameter
\tilde{S}_{ak}	aktueller bezogener Steifigkeitsparameter im Unterraum
S_{sk}	Steifigkeitsparameter
$W_{(a)}$	äußere Arbeit
$W_{(i)}$	innere Arbeit

Matrizen und Vektoren

BL	lineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
BN	nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
C	Werkstoffmatrix
d_i	der i-te Korrekturvektor
$\epsilon^L,$	linearer Anteil der Verzerrungen
$\epsilon^N,$	nichtlinearer Anteil der Verzerrungen

F, G, H	Koeffizientenfelder 2., 3. bzw. 4. Stufe im ganzen Raum
f, g, h	Koeffizientenfelder 2., 3. bzw. 4. Stufe der Elemente
$\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}}$	Koeffizientenfelder 2., 3. bzw. 4. Stufe im Unterraum
\mathbf{g}_i	der i-te Gradient
J, J⁻¹	Transformationsmatrix bzw. ihre Inverse vom globalen zum lokalen Koordinatensystem
K_e	elastische Steifigkeitsmatrix
K_g	geometrische Steifigkeitsmatrix
K_u	Anfangsverschiebungsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix
L	Dreiecksmatrix nach dem Cholesky Verfahren
P	normierter konstanter Lastvektor
Q	Vektor der verallgemeinerten Knotenkräfte
R	Vektor der Ungleichgewichtskräfte
$\tilde{\mathbf{R}}$	Vektor der Ungleichgewichtskräfte im Unterraum
T	Transformationsmatrix zwischen ganzem Raum und Unterraum
t	Transformationsmatrix zwischen lokalem und globalem System
${}^m\mathbf{U}, \mathbf{U}$	Vektor der Knotenverschiebungen

$\Delta \mathbf{U}$	Vektor der Knotenverschiebungsänderungen
$\dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}^{(i)}$	Vektor der Knotenverschiebungsableitungen
${}^m\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{U}}$	Vektor der reduzierten Verschiebungen
$\hat{\mathbf{U}}$	Vektor der Abbildung von $\tilde{\mathbf{U}}$

Kopfzeiger

rechts

e	Elementebene
glo	globale Größe
(i)	i-te Ableitungen
L	linearer Anteil
lok	lokale Größe
N	nichtlinearer Anteil
S	Sekantenmatrix
t	transponierte Matrix
T	Tangentenmatrix

links

m	Wirkungszustand
---	-----------------

Fußzeiger

rechts

i, j, k Indizierung der Komponente der Vektoren oder der Koeffizienten

$i,j = \frac{\partial()_i}{\partial()_j}$ Ableitungen

links

n Bezugszustand

1.0 Einleitung und Zielsetzung

Seit langem ist das Rayleigh - Ritz - Verfahren ein grundlegendes Lösungskonzept in der Strukturanalyse. Die Lösung wird als Linearkombination der Ansatz- oder Formfunktionen angesetzt. Folgt man dem Prinzip von Dirichlet, wird das Minimum der potentiellen Energie gesucht. Die ersten partiellen Ableitungen nach den Koeffizienten der Formfunktionen müssen verschwinden. Dies liefert die Bedingungen für die zu bestimmenden Koeffizienten.

Die Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen hat es ermöglicht, das Tragverhalten mit der Methode der finiten Elemente zu untersuchen. Ihr liegt die Idee des Rayleigh-Ritz-Verfahrens zugrunde. Allerdings werden die Formfunktionen, die für das ganze System bei ursprünglichen Rayleigh-Ritz-Verfahren gewählt werden, durch Ansätze in Teilbereichen ersetzt. Eine wichtige Aufgabe bei der Methode der finiten Elemente ist die Entwicklung von Algorithmen zur Auflösung linearer Gleichungen mit vielen Unbekannten. Die große Anzahl von Lösungsverfahren kann in zwei Gruppen eingeteilt werden, in die exakten Methoden und die Iterationsmethoden.

In den letzten Jahren hat sich die Anwendung der Methode der finiten Elemente immer mehr in den nichtlinearen Bereich verlagert. Dabei wird normalerweise die inkrementell-iterative Lösungstechnik angewendet. Zu dieser Gruppe zählen u.a. das Standard - Newton - Raphson-, das modifizierte Newton - Raphson-, das Runge - Kutta-, das Quasi - Newton-, das konjugierte Newton-, das Sekanten - Newton - Verfahren. Jedes Verfahren hat seine Vorteile für einen bestimmten Problemtyp. In allen Verfahren spielt die Steifigkeitsmatrix eine zentrale Rolle. Sie muß wiederholt aufgestellt und das entstehende Gleichungssystem neu gelöst werden, was sehr aufwendig ist.

Heute ist die Berechnung von großen Systemen mit mehreren tausend Freiheitsgraden keine Seltenheit. Effiziente schnelle Gleichungslöser sind deshalb von großer Bedeutung.

Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie ist es jedoch möglich, beliebig komplizierte Belastungsfälle als eine Überlagerung einfacher Fälle

aufzufassen und zu berechnen. Diese Überlagerungsmöglichkeit gilt sowohl für die Spannungsverteilungen - wegen der linearen Beziehungen zwischen Kräften und Spannungen - als auch für die Verformungen - wegen der Linearität des Hookeschen Gesetzes. Bei der iterativen Auflösung linearer Gleichungssysteme können die Linearkombinationen von Vektoren verwendet werden. Das Verfahren der konjugierten Gradienten und das Verfahren des stärksten Abstiegs sind Beispiele hierfür.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems kann ebenfalls mittels einiger Vektoren dargestellt und als die Überlagerung dieser Vektoren betrachtet werden. Ein repräsentatives und überschaubares Beispiel ist der ebene Eulersche Druckstab (Bild 1.1). Die Bestimmung des Verformungszustandes $\mathbf{U}(x)$ kann mit der Methode der finiten Elemente behandelt werden. Der Stab wird in Elemente eingeteilt. Gesucht ist die Größe der Knotenvariablen. Nach der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors besteht die Aufgabe, das anfallende Gleichungssystem mehrerer Unbekannten zu lösen. Die Verformung kann auch als Linearkombination einiger bekannter Verformungszustände $\mathbf{U}(x)_i$ angesetzt werden: $\mathbf{U}(x) = \sum \alpha_i \mathbf{U}(x)_i$, worin die Koeffizienten α_i geeignet zu bestimmen sind. Bei diesem Beispiel können die Sinuskurven die Randbedingung erfüllen und als die zu addierenden bekannten Verformungszustände gewählt werden:

$$\mathbf{U}_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{L}$$

Diese Überlagerung wird durch folgendes Bild verdeutlicht:

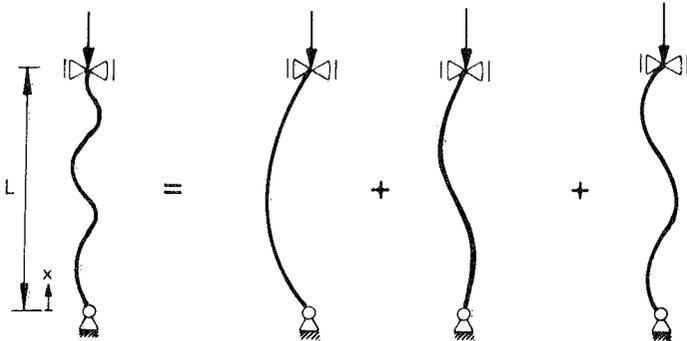


Bild 1.1 Beispiel der reduzierten Technik

Andere Gruppen der Verformungsfiguren können auch verwendet werden.

Bei dem Newton-Raphson-Verfahren ist die nichtlineare Lösung die Summation des linearen Lösungsvektors und der Korrekturvektoren; in der Störungstechnik verwendet man zur Lösung des nichtlinearen Systems die Taylorschen Entwicklungsvektoren, die Ableitungsvektoren nach dem Lastfaktor bzw. nach einer der Verschiebungen [22/, /53/, /54/]. Die Beulformüberlagerung kann auch zur Systemanalyse verwendet werden [32/]. Beim Verfahren der orthogonalisierten Lastverformungszustände wird die Gesamtverformung als eine Summe von Teilverformungen berechnet [48/]. Die Methode der Linearkombination der Vektoren führt zur Kopplung des herkömmlichen Ritz-Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente und stellt die Grundlage der Technik der reduzierten Basis dar.

Der Grundgedanke der reduzierten Technik besteht darin, die hohe Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern. Sie wird durch eine beschränkte Anzahl von Ritz-Vektoren, der Reduktionsbasis, ersetzt. Die Transformationsmatrix besteht aus diesen Ritz-Vektoren. Die Verschiebungen werden als Punkt im n -dimensionalen Verschiebungsraum betrachtet. Durch Reduktionstransformation wird ein Unterraum mit wesentlich weniger Freiheitsgraden erreicht. Die Lösung des Gleichungssystems wird im Unterraum vorgenommen. Die Lösungen im Unterraum sind dann nicht mehr die Verschiebungen, sondern die Koeffizienten der Ritz-Vektoren. Die Verschiebungen im gesamten Raum können als Bildpunkt betrachtet und durch Rücktransformation berechnet

werden. Mit geeigneter reduzierter Basis läßt sich der ganze Raum durch den Unterraum gut ersetzen. Mit einer speziellen Formulierung kann die Iteration direkt im Unterraum durchgeführt werden. Das ist der Vorzug der Technik der reduzierten Basis gegenüber den direkten Lösungsverfahren im ganzen Raum. Die grundlegende Idee von Ritz erweist sich in der modifizierten Version der Methode der reduzierten Basis als sehr zweckmäßig. So erlebt diese klassische Idee eine gewisse Renaissance.

Das Kernproblem ist die Bestimmung der Basis. A. K. Noor /37/, /39/ hat die Ableitungen des Verschiebungsvektors nach einem Bahnparameter als Basis benutzt. B. O. Almroth /2/ hat die Zwischenlösungsvektoren vorgeschlagen. A. S. L. Chan /12/ hat die lineare Lösung am Anfang jedes Schrittes und ihre Veränderungen während der Iteration verwendet. D. A. Nagy und M. König /32/ haben die niedrigsten Beulformen angewandt. Sedlacek /48/ u.a. haben die orthogonalisierten Lastverformungszustände genommen. Sie beschreiben das Tragverhalten einer Struktur durch eine Gruppe von Lastverformungszuständen, die den veränderlichen Steifigkeiten des Systems angepaßt und untereinander orthogonalisiert werden, damit sie zur Darstellung der Gesamtverformung summiert werden können.

Im Kapitel 2 werden einige Vektorreihen beschrieben. Diese aus der Reihenentwicklung erzeugten Vektoren können als reduzierte Basis verwendet werden.

Kapitel 3 befaßt sich mit der Herleitung der geometrisch nichtlinearen finiten Elementformulierung, die für Verschiebungselemente vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen ausgeht.

Im Kapitel 4 werden drei Lösungsprozesse dargestellt: das iterative Verfahren im ganzen Raum, die einfache Vektorüberlagerungstechnik und die Kombination davon, d.h. das iterative Verfahren mit Hilfe des Unterraums.

Im Kapitel 5 werden einige Eigenschaften des reduzierten Systems erläutert. Der Unterschied zwischen der positiven Definitheit, dem Rang, der Determinante, dem Eigenwert und dem Steifigkeitsparameter im ganzen Raum und im Unterraum wird beschrieben. Kriterien zur Beurteilung der Stabilität und der Konvergenz im Unterraum werden angegeben.

Im Kapitel 6 wird das erste Reduktionskonzept vorgestellt, was nur eine geringe Umstellung des Standard-Programmsystems der Methode der finiten Elemente erfordert. Die Effektivität dieses Konzepts hängt sehr stark von der Bandbreite der Steifigkeitsmatrix und von dem Verhältnis der Raumdimensionen ab. Die Anwendungsbedingungen werden untersucht und diskutiert.

Im Kapitel 7 wird das zweite Reduktionskonzept dargestellt. Da eine spezielle Formulierung erforderlich ist, werden der mathematische Hintergrund der Lagrangeschen Formulierung und die Elementsteifigkeitsbeziehungen allgemein dargestellt. Diese werden dann zusammen mit einigen numerischen Lösungsprozessen für spezielle Elemente, nämlich Fachwerke, Scheiben und Balken, hergeleitet und diskutiert. Um den Speicherplatz zu reduzieren, wird eine angepaßte Speichertechnik eingeführt.

Die Berechnung im reduzierten Lösungsraum erfolgt nach dem Standard- bzw. modifizierten Newton-Raphson-Iterationsverfahren mit Last-, Verschiebungs- bzw. Bogenlängensteuerung. Wenn eine geeignete Basis benutzt wird, ist das Systemverhalten im Unterraum und im gesamten Raum gleich.

Die Leistungsfähigkeit der Technik der reduzierten Basis wird durch die berechneten Anwendungsbeispiele im Kapitel 8 gezeigt und eingegrenzt. Das Tragverhalten wird unter großen Verformungen bis hin zum Nachdurchschlagsbereich rechnerisch verfolgt. Ferner werden Stabilitätsuntersuchungen sowie plastische Probleme betrachtet.

Hauptziel dieser Arbeit ist die Untersuchung des unterschiedlichen Systemverhaltens im ganzen Raum und im Unterraum, die Beurteilung der Effektivität der Technik der reduzierten Basis und die Angabe der Anwendungsbedingungen. Die reduzierte Technik wird mit dem direkten Newton-Raphson-Verfahren im Gesamtraum und mit der Störungstechnik verglichen. Außerdem wird der Einfluß verschiedener Basisvektoren untersucht.

In dieser Arbeit werden die Matrizen und Vektoren mit fettgedruckten Buchstaben geschrieben. Die Größen im Unterraum werden durch (\sim) gekennzeichnet.

Daneben wird die Indexschreibweise verwendet, was einfache und übersichtliche Herleitungen ermöglicht. Dabei treten folgende Fälle auf:

- Über zwei gleiche Indizes wird summiert. Falls über zwei gleiche Indizes ausnahmsweise nicht summiert werden soll, so wird ein Index eingeklammert.
- Durch Differentiation eines Koeffizientenfeldes m -ter Stufe nach den Koordinaten entsteht ein Feld $m + 1$ -ter Stufe.
- Das Produkt von zwei Koeffizientenfeldern m -ter und n -ter Stufe ergibt ein Feld $m + n$ -ter Stufe.

2.0 Vektorreihe, Raum und Basis

Ein beliebiges System von n linear unabhängigen Vektoren V_1, V_2, \dots, V_n bildet eine Basis des n - dimensionalen Raumes. Jeder Vektor V läßt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, also

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n \quad (2.1)$$

Die Koeffizienten in dieser Zerlegung sind eindeutig durch den Vektor V bestimmt und die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen die Koordinaten des Vektors V in bezug auf die Basis V_1, \dots, V_n .

Der von einem Teil dieser Vektoren aufgespannte Raum wird als Teilraum oder Unterraum bezeichnet. Die Gesamtheit dieses Vektorteils bildet die sogenannte reduzierte Basis. Wird die Anzahl der reduzierten Basisvektoren mit m bezeichnet, dann ist der mit einer Teilmenge definierte Näherungsvektor

$$\hat{V} = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_m V_m \quad (2.1a)$$

die Projektion des Vektors V in den Unterraum //11/, //18/. Sind die reduzierten Basisvektoren unter der Menge der ganzen Basis zur Bestimmung des Systemverhaltens dominierend, wird \hat{V} eine gute Näherung von V sein, d.h. die Ähnlichkeit des Vektors \hat{V} und V hängt von der Qualität der reduzierten Basis ab.

Der Vektor V beschreibt einen Punkt im n - dimensionalen Raum. Die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ bilden einen entsprechenden Punkt \tilde{V} im m - dimensionalen Raum, dem Koeffizientenraum der Basis. Die Basisvektoren bilden die Transformationsmatrix T , die die Beziehungen zwischen den Punkten V und \tilde{V} im n - und m - dimensionalen Raum darstellt:

$$V_i = T_{ij} \tilde{V}_j \quad (2.2)$$

Die Transformation vom Unterraum zum ganzen Raum wird als Abbildung der Räume bezeichnet. Bei dieser Abbildung wird jedem Originalpunkt im Unterraum $\tilde{\mathbf{V}}$ ein Raumpunkt \mathbf{V} als "Bildpunkt" im ganzen Raum zugewiesen. Werden die Komponenten des Bildpunktes \mathbf{V} linear aus denen des Originalpunktes $\tilde{\mathbf{V}}$ berechnet, dann ist diese Transformation eine lineare Abbildung. Sie wird auch als affine Abbildung bezeichnet. Die lineare Abbildung besitzt folgende Eigenschaften:

$$\lambda \mathbf{V} = \lambda \mathbf{T} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{T} \lambda \tilde{\mathbf{V}}$$
$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{V}}_a + \mathbf{T} \tilde{\mathbf{V}}_b = \mathbf{T} (\tilde{\mathbf{V}}_a + \tilde{\mathbf{V}}_b)$$

Die Proportionalität der Vektoren $\tilde{\mathbf{V}}$ und $\lambda \tilde{\mathbf{V}}$ soll auch in ihren Bildern gewahrt bleiben, und das Bild einer Vektorsumme soll stets gleich der Summe der Bilder sein. Diese Eigenschaften sind wichtig für die inkrementelle Iterationsrechnung.

Es liegt nahe, die aus der Reihenentwicklung erzeugten Vektoren als reduzierte Basis zu nehmen, weil die Reihenentwicklung ein wichtiges Hilfsmittel bei der Auflösung des linearen bzw. nichtlinearen Gleichungssystems ist. Wichtige Vektorreihen sind die konjugierte Vektorreihe, die Taylorsche Vektorreihe, die Lagrangesche Vektorreihe, die Newtonsche Vektorreihe, die Vektorreihe der Eigenformen, die Fourier - Vektorreihe usw.

Im folgenden soll eine Übersicht darüber gegeben werden.

2.1 Die konjugierte Vektorreihe

Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann als Linearkombination von einzelnen linear unabhängigen Vektoren betrachtet werden.

\mathbf{A} sei eine $n \times n$ symmetrische und positiv definite Matrix und \mathbf{b} sei ein gegebener Vektor. Das zu lösende lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} \tag{2.3}$$

stellt die notwendige Bedingung für die Minimierung eines quadratischen Funktionals dar. Die Lösung des Gleichungssystems ist daher äquivalent zur Aufgabe, direkt das Minimum des Funktionals

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{b}^t \mathbf{X} \quad (2.4)$$

zu bestimmen. $F(\mathbf{X})$ kann z. B. die potentielle Energie ausdrücken [18], [45]. Es wird versucht, eine Reihe von Vektoren $\{\mathbf{X}\}$ aufzubauen, die

$$F(\mathbf{X}_1) > F(\mathbf{X}_2) > \dots \dots > F(\mathbf{X}_i) > F(\mathbf{X}_{i+1}) \dots$$

liefert und zu dem gesuchten Minimum konvergiert.

Der $(i+1)$ -te Näherungsvektor \mathbf{X}_{i+1} wird aus dem i -ten Näherungsvektor \mathbf{X}_i und dem Korrekturvektor \mathbf{d}_i aufgebaut:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{d}_{(i)} \quad (2.5)$$

Hier ist α_i ein Koeffizient. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}_{i+1}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{d}_{(i)})^t \mathbf{A} (\mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{d}_{(i)}) - \mathbf{b}^t (\mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{d}_{(i)}) \\ &= F(\mathbf{X}_i) + \alpha_i (\mathbf{X}_i^t \mathbf{A} - \mathbf{b}^t) \mathbf{d}_{(i)} + \frac{1}{2} \alpha_i^2 \mathbf{d}_{(i)}^t \mathbf{A} \mathbf{d}_{(i)} \quad (2.6) \\ &= F(\mathbf{X}_i) + \alpha_i \mathbf{g}_i^t \mathbf{d}_{(i)} + \frac{1}{2} \alpha_i^2 \mathbf{d}_{(i)}^t \mathbf{A} \mathbf{d}_{(i)} \end{aligned}$$

Hierin ist $\mathbf{g}_i = \mathbf{A} \mathbf{X}_i - \mathbf{b}$ der Gradient. Durch die Minimierung des Funktionals F wird α_i bestimmt zu

$$\alpha_i = \frac{-\mathbf{g}_i^t \mathbf{d}_{(i)}}{\mathbf{d}_{(i)}^t \mathbf{A} \mathbf{d}_{(i)}} \quad (2.7)$$

Die Lösung des Gleichungssystems hat dann die Gestalt

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_0 + \sum_1^i \alpha_j \mathbf{d}_j \quad (2.8)$$

$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots$ sind Korrekturvektoren. \mathbf{X}_0 ist ein beliebiger Anfangsvektor. Je nach den Methoden werden Korrekturvektoren unterschiedlich definiert.

Die Vektoren $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots$ heißen paarweise \mathbf{A} - konjugiert (oder \mathbf{A} - orthogonal), wenn $\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0$ ist für $i \neq j$. Die konjugierten Vektoren sind linear unabhängig. n paarweise konjugierte Vektoren bilden eine Basis des n - dimensionalen Raumes. Jeder Vektor des Raumes läßt sich als Linearkombination der Vektoren der konjugierten Basis darstellen [18/, /29/.

Auf dieser Eigenschaft baut das Verfahren der konjugierten Gradienten auf, d.h. die Korrekturrichtungen \mathbf{d}_i werden so gewählt, daß sie paarweise \mathbf{A} - konjugiert sind. Der Anfangsvektor \mathbf{X}_0 ist im allgemeinen beliebig wählbar. Er wird gewöhnlich als Nullvektor genommen.

Der Lösungsvektor \mathbf{X}_i gehört dem Unterraum an, der von den Vektoren $\mathbf{X}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_i$ aufgespannt wird. \mathbf{X}_i minimiert die Funktion $F(\mathbf{X})$ in diesem affinen Unterraum. Der von $\mathbf{X}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots$ aufgespannte Raum wird als Raum des diskretisierten Minimums bezeichnet. Eine hinreichend gute Näherungslösung wird in jedem Fall spätestens beim n - ten Schritt erreicht. Dann stimmt der Unterraum mit dem ganzen Raum überein.

Um diese Methode zu illustrieren, betrachten wir das einfache Balkenelement.

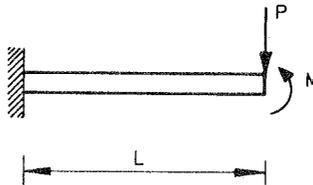


Bild 2.1 Balkenelement

Der Balken sei am linken Ende eingespannt, am rechten Ende frei, die Gleichgewichtsgleichungen sind:

$$\begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix}$$

Es seien $P = \frac{18EI}{L^2}$, $M = -\frac{10EI}{L}$ und $L = 1$, dann ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix}$$

Der Anfangspunkt \mathbf{X}_0 sei $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, der erste Korrekturvektor \mathbf{d}_1 sei der Gradient $\begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix}$. Damit folgt aus Gleichung (2.7) $\alpha_1 = 0.06576$, aus der Konjugiertheit wird der Faktor β des zweiten Korrekturvektors bestimmt, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1 + \beta \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -0.1449 \\ -0.2702 \end{bmatrix}$, dann gilt $\alpha_2 = 1.2673$, die Lösung hat die Darstellung:

$$\begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix} \cong \mathbf{X}_0 + \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2 \cong \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

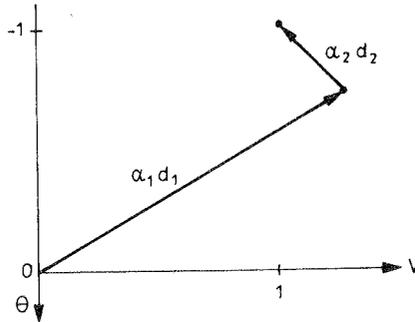


Bild 2.2 Überlagerung mit konjugierten Vektoren

2.2 Die Taylorsche Vektorreihe

Es sei ein von einem Parameter l abhängiger Vektor V gegeben, also $V = V(l)$. Seine n Komponenten seien stetige und differenzierbare Funktionen $v_1(l), v_2(l), \dots, v_n(l)$. Dann ist V ein nach dem Parameter l differenzierbarer Vektor. Der Begriff des Differentialquotienten läßt sich unmittelbar auf $V(l)$ übertragen als:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dl} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(l+h) - V(l)}{h} \quad (2.9)$$

\dot{V} wird als Ableitung oder Differentialquotient von V nach l definiert /25/, /26/. Geht man auf die Komponenten über, so ergibt sich aus Gleichung (2.9):

$$\dot{V} = (\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dots, \dot{V}_n) \quad (2.10)$$

Aus (2.10) folgt für die höheren Ableitungen:

$$V^{(i)} = (V_1^{(i)}, V_2^{(i)}, \dots, V_n^{(i)}) \quad (2.11)$$

Ist ein Vektor $\mathbf{V}(l)$ eine nicht konstante Funktion des Parameters l , so ist $\mathbf{V} = \mathbf{V}(l)$ eine Parameterdarstellung einer Kurve. Unter einer Kurve soll hier stets eine n -dimensionale Raumkurve verstanden werden. Die erste Ableitung nach l ist die Kurventangente $\dot{\mathbf{V}}(l)$. Sie hat die Richtung des Zuwachses der Raumkurve. Ist der Parameter l selbst mit der Bogenlänge s identisch, so ist der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{V}}(s)$ ein Einheitsvektor.

$$\dot{\mathbf{V}}_i(s) \dot{\mathbf{V}}_i(s) = 1 \quad (2.12)$$

Daraus folgt durch Differentiation nach s :

$$\dot{\mathbf{V}}_i(s) \ddot{\mathbf{V}}_i(s) = 0 \quad (2.13)$$

Dies zeigt, daß $\dot{\mathbf{V}}(s)$ und $\ddot{\mathbf{V}}(s)$ zueinander orthogonal sind. Man nennt $\ddot{\mathbf{V}}(s)$ die Krümmung der Kurve im Punkt $\mathbf{V}(s)$ /25/, /26/.

Entwickelt man die Gleichung $\mathbf{V} = \mathbf{V}(l)$ in der Umgebung eines Punktes $P(l = l_0)$ in eine Taylor Reihe, so erhält man:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \dot{\mathbf{V}}(l - l_0) + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{V}}(l - l_0)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{V}^{(3)}(l - l_0)^3 + \dots \quad (2.14)$$

Der Vektor läßt sich durch den Anfangsvektor $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(l_0)$ und seine Ableitungen, die Taylorsche Entwicklungsvektoren, darstellen. Sie bilden die Basis des Taylorsche Unterraumes.

Ist $l_0 = 0$, so lautet die Gleichung (2.14) in MacLaurin - Form:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \dot{\mathbf{V}} l + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{V}} l^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{V}^{(3)} l^3 + \dots \quad (2.15)$$

Die Taylorsche Formel erlaubt uns, das Verhalten eines Vektors $\mathbf{V}(l)$ in der Umgebung eines Punktes genauer zu untersuchen. Sie löst den Zuwachs des Vektors beim Übergang zu einer Nachbarstelle $l = l_0 + \delta l$ in eine Summe von Größen erster, zweiter, dritter usw. Ordnung auf.

Ob die ersten $m + 1$ Glieder der Taylorschen Formel tatsächlich eine hinreichend gute Annäherung an den Vektor ergeben, ist davon abhängig, ob das Restglied hinreichend klein bleibt. Die Aufmerksamkeit wird sich deshalb auf die Abschätzung dieses Restgliedes zu konzentrieren haben.

Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange hat das Restglied den Ausdruck:

$$\mathbf{R}_m = \frac{[l_0 + \xi(l - l_0)](l - l_0)^{m+1}}{(m + 1)!} \mathbf{V}^{(m+1)} \quad (2.16)$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Man sieht aus der Form des Restgliedes, daß es bei einer Entwicklung bis zu Gliedern m -ter Ordnung einen Fehler gibt, der mit der $(m + 1)$ -ten Ordnung von $(l - l_0)$ klein wird. Das Restglied strebt gegen Null für $m \rightarrow \infty$.

Sobald ein Vektor Ableitungen bis zur $(m + 1)$ -ten Ordnung besitzt, kann er in der Umgebung einer bestimmten Stelle mit einer Genauigkeit von höherer als m -ter Ordnung durch die Summe von m Vektoren, die Taylorsche Vektorreihe, approximiert werden. Das Restglied wird durch Gl. (2.16) abgeschätzt. Im folgenden wird als Beispiel der Kreis in der Ebene betrachtet. Die Koordinaten des Kreises x_1, x_2 werden wie folgt dargestellt:

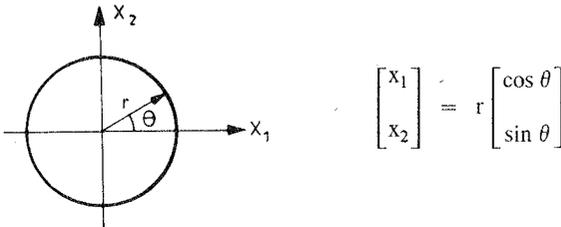


Bild 2.3 Kreis

Es wird mit den ersten vier Termen der Taylorschen Entwicklung nach θ angenähert. Für $\theta_0 = 0$ haben die Koordinaten die Darstellung:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Big|_{\theta_0=0} &= \left\{ r \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix} \theta + \frac{r}{2} \begin{bmatrix} -\cos \theta_0 \\ -\sin \theta_0 \end{bmatrix} \theta^2 + \frac{r}{6} \begin{bmatrix} \sin \theta_0 \\ -\cos \theta_0 \end{bmatrix} \theta^3 \right\} \Big|_{\theta_0=0} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \theta - \frac{\theta^3}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Der Fehler kann mit Gleichung (2.16) abgeschätzt werden.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{x_2} \end{bmatrix} < r \begin{bmatrix} \frac{\theta^4}{24} \\ \frac{|\theta|^5}{120} \end{bmatrix}$$

Falls $\theta < 1$ ist, sind die Beträge der Restglieder sehr klein.

2.3 Die Lagrangesche Vektorreihe

Die Interpolationsformel von Lagrange zur angenäherten Beschreibung einer Funktion durch ein Polynom wird hier verifiziert auf die Darstellung eines Vektors übertragen.

Es seien l_0, l_1, \dots, l_m paarweise verschiedene Stützstellen und $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m$ die zugehörigen Stützvektoren, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(l_0), \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(l_1), \dots$. Es soll ein Stützpolynom $\mathbf{V}_m(l)$ vom Grad m konstruiert werden, um $\mathbf{V}(l)$ mit diesen Stützvektoren zu approximieren /8/, /49/, /50/:

$$\mathbf{V}_m(l) = \lambda_0 \mathbf{V}_0 + \lambda_1 \mathbf{V}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{V}_m \quad (2.17)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ können durch die Bedingungen der Stützstellen $\mathbf{V}(l_i) = \mathbf{V}_i$ bestimmt werden zu

$$\lambda_i(l_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$$

Dann haben sie die Gestalt:

$$\begin{aligned} \lambda(l)_i &= \frac{(1-l_0)(1-l_1)\dots(1-l_{i-1})(1-l_{i+1})\dots(1-l_m)}{(l_i-l_0)(l_i-l_1)\dots(l_i-l_{i-1})(l_i-l_{i+1})\dots(l_i-l_m)} \\ &= \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^m (1-l_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^m (l_i-l_j)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bei der Auflösung des nichtlinearen Gleichungssystems bei Tragwerksberechnungen entspricht l einem Parameter (Lastfaktor, eine der Verschiebungen oder Bogenlänge), und V_0, V_1, \dots, V_m sind die berechneten Zwischenlösungen. Die Lösung $V(l)$ läßt sich mit Hilfe von Zwischenlösungen, der Lagrangeschen Vektorreihe, in einfacher Weise angeben.

Die Eindeutigkeit dieser Vektorreihe folgt aus dem Nichtverschwinden der Vandermondeschen Determinante paarweise verschiedener Zahlen.

2.4 Die Newtonsche Vektorreihe

Man geht von einem gegebenen Näherungsvektor $V_0(l_0)$ aus, führt die Korrektur Δl ein, linearisiert $V(l)$ in der Umgebung von l_0 und löst das entstehende lineare Gleichungssystem nach ΔV auf. Dies ist die bekannte Newtonsche Methode. Die korrigierten Werte $(l + \Delta l)$ und $(V + \Delta V)$ bilden den Ausgang für die nächste Näherung und so fort. Die Lösung hat die Darstellung:

$$V = V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots \quad (2.19)$$

Die Vektoren $V_0, \Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_{m-1}$ bilden die Newtonsche Reihe.

Die ersten zwei Vektoren der Newtonschen Reihe sind mit den ersten zwei Vektoren der Taylorschen Reihe identisch. Die Newtonschen Vektoren werden bei einer Tragwerksberechnung automatisch erzeugt. Die Ersetzung der Taylorschen Vektoren durch die Newtonschen Vektoren bei der Technik der reduzierten Basis ermöglicht eine Verringerung der Rechenzeit.

2.5 Die Vektorreihe der Eigenformen

Für jede Tangentensteifigkeitsmatrix existieren n Eigenvektoren $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n$, die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gehören. Es wird angenommen, daß diese Eigenwerte nach abnehmenden Beträgen geordnet sind.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_i sind linear unabhängig und bilden eine Basis. Die Lösung des Gleichungssystems kann auch nach den Eigenvektoren entwickelt werden. Man kann die Eigenvektoren vernachlässigen, deren Eigenwert λ_i viel kleiner als λ_1 ist:

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| \ll 1$$

D.h. nur die ersten Eigenvektoren sind bei der Bestimmung des Systemverhaltens und der nichtlinearen Lösung maßgebend. Den Beweis liefern Nagy und König u.a. in /32/, /33/. Sie bilden die Basis des Unterraums der Eigenvektoren.

Für dynamische Probleme ist die Vektorreihe der Eigenformen und der Lanczos Moden geeignet/56/. Auf diese Vektorreihen wird hier nicht im Detail eingegangen, da die Arbeit auf statische Probleme beschränkt ist.

2.6 Wahl der geeigneten Basis

Das entscheidende Problem der Technik ist die Wahl der geeigneten Reduktionsbasis, der Ritz - Vektoren. Der Erfolg dieser Methode hängt davon ab, wie gut die Basisvektoren in der Transformationsmatrix \mathbf{T} das gesamte Sy-

stem abbilden. Die Bedingungen für die Basis können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Sie müssen linear unabhängig sein.
- Sie müssen sich durch gutes Approximationsverhalten auszeichnen (Kapitel 5.7).
- Ihre Berechnung darf nicht zu aufwendig sein.

Das erste Kriterium ist eine notwendige Bedingung. Man muß auch die anderen beiden Voraussetzungen beachten, um die Effektivität des Reduktionsverfahrens zu sichern.

Alle zuvor beschriebenen Vektorreihen sowie Kombinationen daraus sind grundsätzlich als Basis verwendbar.

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems haben Nagy und König /32/, /33/ die Eigenformen als Basis genommen, da die Beulform häufig das Systemverhalten bei Verzweigungen und im Traglastbereich bestimmt. Die Eigenvektoren sind zueinander orthogonal. Diese Basis erfüllt die erste notwendige Bedingung. Bei zugbeanspruchten Konstruktionen hat die Beulform keine physikalische Bedeutung, so daß hier die Basis der Eigenformen versagt. Für allgemeine Probleme ist diese Basis daher ungeeignet.

Almroth /2/ hat die Zwischenlösung als Basis genommen. Die Grundidee seiner Methode ist, die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems mit Lagrangeschen Interpolationsvektoren zu approximieren.

Chan /12/ hat die Newtonsche Vektorreihen als Basis benutzt. Um die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren zu gewährleisten, werden die Basisvektoren zuerst orthogonalisiert und normiert.

Die Aufstellung der Lagrangeschen und Newtonschen Vektorreihe erfordert wenig Aufwand, in vielen Beispielen können sie gut verwendet werden.

Noor /37/, /38/, /39/ hat die Taylorschen Entwicklungsvektoren als Basis verwendet. Entspricht der Parameter l der Bogenlänge, dann ist $\dot{\mathbf{V}}$ zu \mathbf{V} und

zu \ddot{V} orthogonal. Die Taylorsche Basis ist wegen ihres guten Approximationsverhaltens sehr zu empfehlen, aber die Erzeugung dieser Basis benötigt eine spezielle Formulierung und ist aufwendig. Das Verfahren wird im Kapitel 7 ausführlich hergeleitet.

Für dynamische Probleme hat Wilson /56/ mit Erfolg die zur Massenmatrix konjugierte Vektorreihe angewendet, die der Lanczos Vektorreihe entspricht.

Bezüglich der Recheneffektivität muß man eine optimale Anzahl von Basisvektoren, i. a. zwischen 2 und 6, bestimmen. Dies ist jedoch problemabhängig. Je kleiner die Zahl der Basisvektoren ist, desto wirtschaftlicher ist die Rechnung.

3.0 Allgemeine Darstellung des inkrementellen Gleichgewichtes

Zur Beschreibung der Bewegungen eines Körpers werden die dreidimensionalen raumfesten Koordinaten verwendet. Die Herleitung der Grundgleichungen des inkrementellen Gleichgewichtes erfolgt weitgehend nach den Arbeiten von Bathe /4/ und Ramm /42/. Aus /42/ wurde auch die Schreibweise übernommen.

3.1 Bezeichnungen für das inkrementelle Gleichgewicht

Die Bewegung eines Körpers wird durch vier Zustände definiert. Dies sind:

1. der Ausgangszustand 0,
2. der bereits ermittelte Zustand 1 vor einem Inkrement,
3. der unbekannte Nachbarzustand 2 nach einem Inkrement,
4. der gesuchte unbekannte Endzustand m.

Der Verformungszustand m wird durch wiederholte Inkrementierung erreicht.

Linke Fuß- und Kopfzeiger werden nach /4/ und /42/ eingeführt, wobei die Fußzeiger die Bezugszustände und die Kopfzeiger die Wirkungszustände kennzeichnen. Inkremente besitzen keinen Kopfzeiger.

Beispiel

$${}^m S_{ij}$$

m: Wirkungszustand

n: Bezugszustand

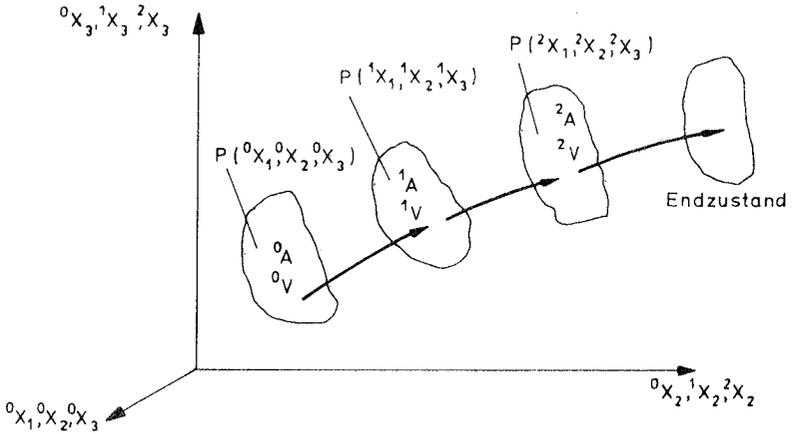


Bild 3.1 Bewegung eines Körpers im Raum

Als Bezugszustand kann alternativ der bekannte unverformte Zustand 0 und ein bekannter Deformationszustand 1 gewählt werden. Dies führt zu den zwei wesentlichen Darstellungen:

- der totalen Lagrange - Darstellung bei Bezug auf den Zustand 0 (T. L.),
- der mitgehenden ("updated") Lagrange - Darstellung bei Bezug auf den Zustand 1 (U. L.).

In /42/ wird gezeigt, daß beide Formen gleichwertig sind. Sie führen zu den gleichen Ergebnissen. Hier wird auf die totale Lagrange - Darstellung eingegangen. Der linke Fußzeiger n hat den unveränderlichen Wert 0 und die Formulierungen werden ohne linke Fußzeiger angegeben.

3.2 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Für die totale Lagrange - Formulierung wird der Green - Lagrange - Verzerrungstensor verwendet. Er ist definiert als:

$${}^2e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^2U_{i,j} + {}^2U_{j,i} + {}^2U_{k,i} {}^2U_{k,j}) \quad (3.1)$$

Nach Aufteilung der Verschiebungskomponenten ${}^2\mathbf{U} = {}^1\mathbf{U} + \mathbf{U}$ zerlegt man den Verzerrungstensor in:

$${}^2\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (3.2)$$

Das Verzerrungssinkrement ε_{ij} wird in einen linearen Anteil des Verschiebungssinkrements e_{ij} und einen nichtlinearen Anteil des Verschiebungssinkrements η_{ij} aufgespalten:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (3.3)$$

mit

$${}^1\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1U_{i,j} + {}^1U_{j,i} + {}^1U_{k,i} {}^1U_{k,j}) \quad (3.4)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j} + U_{k,i} {}^1U_{k,j}) \quad (3.5)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} U_{k,i} U_{k,j} \quad (3.6)$$

Die konstitutiven Gleichungen ergeben sich bei elastischem Werkstoff unter Annahme linearer Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungsgrößen zu:

$${}^mS_{ij} = {}^mC_{ijkl} {}^m\varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

bzw. in inkrementeller Form:

$$S_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.8)$$

mit der konstitutiven Matrix ${}^mC_{ijkl}$ und dem Vektor der Kirchhoff - Piola - Spannungen 2. Art ${}^mS_{ij}$.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den gesuchten Zustand 2 lautet:

$${}^2\delta W_{(i)} + {}^2\delta W_{(a)} = 0 \quad (3.9)$$

Die virtuelle äußere Arbeit ${}^2\delta W_{(a)}$ ist die Arbeit der äußeren Kräfte im Zustand 2 mit den virtuellen Verschiebungen, und die virtuelle innere Arbeit ${}^2\delta W_{(i)}$ ist die Arbeit der Spannungen im Zustand 2 an den virtuellen Verzerrungen.

$$-{}^2\delta W_{(i)} = \int {}^2S_{ij} \delta^2\varepsilon_{ij} dV \quad (3.10)$$

Unter Beachtung von $\delta^2\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}$ wird (3.9) wie folgt geschrieben:

$$\int ({}^1S_{ij} + S_{ij}) \delta\varepsilon_{ij} dV = {}^2\delta W_{(a)} \quad (3.11)$$

oder

$$\int S_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV + \int {}^1S_{ij} \delta\eta_{ij} dV = {}^2\delta W_{(a)} - \int {}^1S_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (3.12)$$

Das ist der virtuelle Arbeitsausdruck, der eine nichtlineare Beziehung in den unbekanntem Verschiebungsinkrementen U_i darstellt. Der erste Term $\int S_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV$ ist unter Verwendung von (3.8) eine Funktion dritter Ordnung von den Verschiebungsinkrementen. Zur Lösung des Gleichungssystems in den unbekanntem Verschiebungsinkrementen U_i wird die Gleichung (3.12) linearisiert und die Linearisierung wird durch den Übergang $\varepsilon_{ij} \rightarrow e_{ij}$ im ersten Term realisiert. Geht man von einer konstitutiven Gleichung (3.7) bzw. (3.8) aus, dann folgt für die T. L. -Darstellung:

$$\int C_{ijrs} e_{ij} \delta e_{rs} dV + \int {}^1S_{ij} \delta\eta_{ij} dV = {}^2\delta W_{(a)} - \int {}^1S_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (3.13)$$

Der Linearisierungsfehler von (3.12) zu (3.13) kann durch Iteration beseitigt werden. e_{ij} kann weiterhin in $e1_{ij}$ und $e2_{ij}$ aufgeteilt werden mit

$$e1_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$$

$$e2_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1U_{k,i}U_{k,j} + U_{k,i}{}^1U_{k,j})$$

Dann kann der erste Term von (3.13) in einen inkrementellen Anteil und einen Anfangsverschiebungsanteil zerlegt werden:

$$\int C_{ijrs} e1_{ij} \delta e1_{rs} dV + \int C_{ijrs} (e1_{ij} \delta e2_{rs} + e2_{ij} \delta e1_{rs} + e2_{ij} \delta e2_{rs}) dV$$

$$+ \int {}^1S_{ij} \delta \eta_{ij} dV = {}^2\delta W_{(a)} - \int {}^1S_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (3.13a)$$

3.3 Einführung der Methode der finiten Elemente

Durch Verwendung von Interpolationsfunktionen als bereichsweise Ritz - Ansätze wird das System diskretisiert. Beim isoparametrischen Konzept werden Geometrie und Verschiebungsfeld in gleicher Weise interpoliert. Bei dieser Diskretisierung führt Gl. (3.13a) im Sinn der Methode der finiten Elemente auf ein algebraisches Gleichungssystem:

$${}^1\mathbf{K}_e \mathbf{U} + {}^1\mathbf{K}_u \mathbf{U} + {}^1\mathbf{K}_g \mathbf{U} = {}^2\mathbf{Q} - {}^1\mathbf{F} \quad (3.14)$$

oder

$${}^1\mathbf{K} \mathbf{U} = {}^2\mathbf{Q} - {}^1\mathbf{F} \quad (3.14a)$$

mit

- ${}^1\mathbf{K}_e$ inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix
- ${}^1\mathbf{K}_u$ Anfangsverschiebungsmatrix
- ${}^1\mathbf{K}_g$ geometrische Steifigkeitsmatrix

${}^1\mathbf{K}$	Tangentensteifigkeitsmatrix
${}^2\mathbf{Q}$	Vektor der verallgemeinerten Knotenkräfte
${}^1\mathbf{F}$	Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte

${}^1\mathbf{K}_e$ ist bei elastischem Stoffgesetz unabhängig von bereits berechneten Verschiebungen ${}^1\mathbf{U}$. ${}^1\mathbf{K}_u$ ist eine Funktion der Verschiebungen ${}^1\mathbf{U}$; ${}^1\mathbf{K}_g$ und ${}^1\mathbf{F}$ hängen von den aus ${}^1\mathbf{U}$ erreichten Spannungen ab. ${}^2\mathbf{Q}$ wird ermittelt aus dem Anteil der virtuellen äußeren Arbeit ${}^2\delta W_{(a)}$ und ist entsprechend dem Vektor der Knotenverschiebungen definiert. Eine ausführliche Darstellung ist in /42/ enthalten. Wird eine Änderung der Last zwischen den Zuständen nur über einen Proportionalitätsfaktor ${}^m\lambda$ vorgenommen, kann Gl. (3.14a) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$${}^1\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^2\lambda\mathbf{P} - {}^1\mathbf{F} \quad (3.15)$$

oder

$${}^1\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.15a)$$

Hier ist \mathbf{P} ein konstanter Lastvektor. Für den Lastzustand gilt dann ${}^2\lambda\mathbf{P} = {}^2\mathbf{Q}$. \mathbf{R} sind die Ungleichgewichtskräfte. Gleichung (3.15) und (3.15a) sind die Ausgangsbeziehungen für ein sogenanntes inkrementell - iteratives Vorgehen.

4.0 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Geht man vom exakten virtuellen Arbeitsausdruck aus, führt die Diskretisierung der Struktur im Sinne der Methode der finiten Elemente auf ein algebraisches nichtlineares Gleichungssystem in den Verschiebungsinkrementen. Die Lösung davon kann im allgemeinen nicht in geschlossener Form durchgeführt werden. Man muß Näherungsmethoden verwenden. Die Lösungsverfahren sind im mathematischen und ingenieurmäßig orientierten Schrifttum zu finden [19], [42], [47]. In diesem Kapitel werden drei Typen von Verfahren dargestellt.

1. Iterationsverfahren im ganzen Raum [42], [46], [47]
2. Störungstechnik [15], [23], [54], Vektorüberlagerungsverfahren [32], [33] ohne Iteration
3. Technik der reduzierten Basis [2], [12], [37], [38], [39]

Bei allen diesen Verfahren werden die Vektoren addiert. Bei den Iterationsverfahren im ganzen Raum wird die Vektorüberlagerung so lange fortgesetzt, bis man eine hinreichend gute Näherungslösung erhält, d.h. die Anzahl der zu addierenden Vektoren ändert sich. Bei der Störungstechnik sind normalerweise die Koeffizienten der Vektoren von einem gemeinsamen Parameter abhängig. Die Anzahl der Vektoren sowie das Verhältnis der Vektoren untereinander bleiben konstant. Bei der Technik der reduzierten Basis bleiben die zu addierenden Vektoren, die die Basis bilden, wie bei der Störungstechnik unverändert, aber die Koeffizienten, die Amplituden der Vektoren, werden bestimmt. Die Koeffizienten können durch die Iteration im Unterraum verbessert werden.

4.1 Iterationsverfahren im ganzen Raum

Das Verfahren ist auf der Idee der sukzessiven Approximation aufgebaut, d.h. wenn man von einem gegebenen Wert ausgeht, gibt es eine Folge von Gesamtverschiebungen ${}^0\mathbf{U}$, ${}^1\mathbf{U}$, ..., ${}^i\mathbf{U}$, ${}^{i+1}\mathbf{U}$..., von der vorausgesetzt wird,

daß sie gegen die gesuchte Lösung ${}^m\mathbf{U}$ konvergiert. Für die Durchführung der Iteration stehen viele Verfahren zur Verfügung. Die wesentlichen Verfahren werden in /6/, /19/ diskutiert.

Man kann die komplizierte Verschiebungsfunktion lokal, d.h. innerhalb des Schritts, durch eine lineare Lösung approximieren. Die Kombination von Iteration und linearer Approximation führt zu einem oft benutzten und gewöhnlich schnell konvergierenden Verfahren, das als Newton - Raphson - Verfahren bezeichnet wird. Beim Newton - Raphson - Verfahren geht man von einem gegebenen Lösungspunkt ${}^1\mathbf{U}$ aus, linearisiert das System in der Umgebung ${}^1\mathbf{U}$ und löst das entstehende lineare Gleichungssystem für die Korrektur \mathbf{U} auf. Die korrigierten Werte (${}^1\mathbf{U} + \mathbf{U}$) bilden den Ausgang für die nächste Näherung und so weiter. Das Newtonsche Verfahren heißt oft auch Tangentenverfahren. Die Linearisierung bedeutet, die nichtlineare Verschiebungsfunktion durch die ersten zwei Terme ihrer Taylor - Entwicklung zu ersetzen.

Die linearisierten Gleichungen (3.14) und (3.15) stellen die Ausgangsbeziehungen für das Newton - Raphson - Verfahren dar; dabei ist zwischen dem Standard - Newton - Raphson - Verfahren mit variabler Steifigkeit und dem modifizierten Newton - Raphson - Verfahren mit konstanter Steifigkeit zu unterscheiden. Beim Standard - Newton - Raphson - Verfahren werden in jedem Iterationsschritt die Steifigkeitsmatrix sowie die verallgemeinerten inneren Kräfte für den eben erreichten Verschiebungszustand neu berechnet. Beim modifizierten Newton - Raphson - Verfahren wird während der Iteration innerhalb eines Lastinkrements die Steifigkeitsmatrix des Zustands 1 beibehalten. Die Iteration wird in jedem Schritt solange fortgeführt, bis die Ausdrücke der rechten Seite von Gl. (3.15) (Arbeit der Ungleichgewichtskräfte) im Rahmen der Toleranz verschwinden.

Es wird schrittweise iterativ vorgegangen, und die Iterationen können mit Last-, Verschiebungs- oder Bogenlängensteuerung durchgeführt werden /44/, /55/. Diese Verfahren werden hier kurz erläutert, da sie teilweise zur Entwicklung der reduzierten Basis verwendet werden.

Bei den Newton - Raphson - Verfahren mit Laststeuerung wird für einen vorgegebenen Lastzustand der zugehörige Verschiebungszustand iterativ ermittelt. Bei proportionaler Belastung erfolgt die Laststeuerung über den

Proportionalitätsfaktor ${}^m\lambda$. Die Schwäche aller Verfahren mit Laststeuerung liegt im Unvermögen, die Durchschlagspunkte zu überwinden, da Singularitäten in den Steifigkeitsmatrizen auftreten.

Bei den Newton - Raphson - Verfahren mit Verschiebungssteuerung wird eine einzelne Verschiebungskomponente als unabhängige Variable gewählt und der Proportionalitätsfaktor der Last als Unbekannte eingeführt.

Bei den Newton - Raphson - Verfahren mit Bogenlängensteuerung /44/ wird die Tangentenlänge der Last - Verschiebungskurve festgelegt. Die Ebene, auf der die Tangente senkrecht steht, wird als Iterationsebene gewählt. Varianten mit angepaßter Iterationsebene bzw. Iterationen auf eine Hyperkugel /46/ zeigen bei größeren Lastschritten bessere Konvergenz. Die Methode der Bogenlängensteuerung stellt ein gutes Mittel zur Überwindung von Durchschlagspunkten dar.

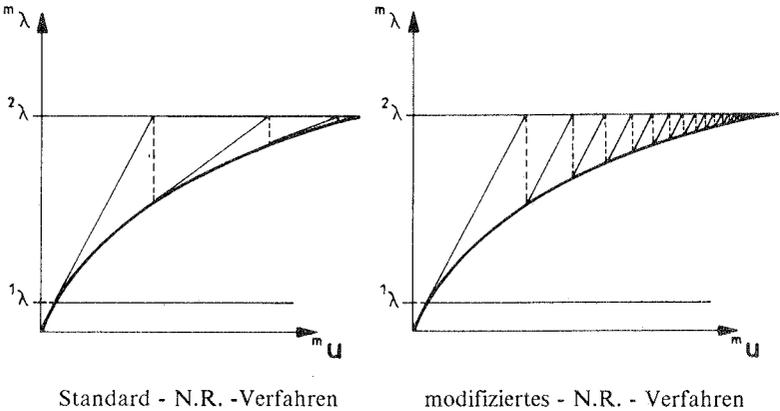


Bild 4.1 N. R. - Verfahren mit Laststeuerung

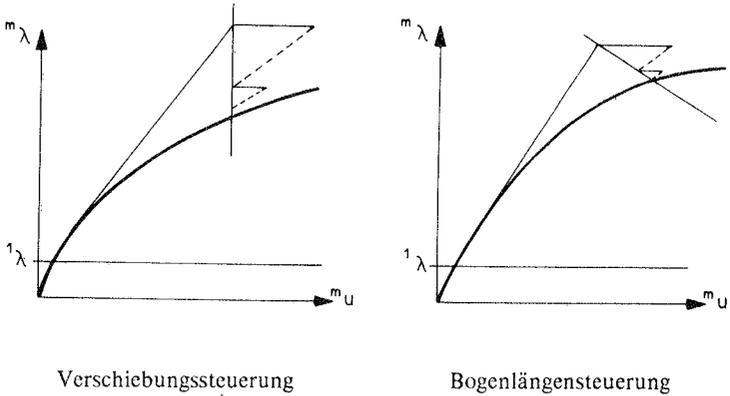


Bild 4.2 N. R. - Verfahren mit Verschiebungssteuerung und Bogenlängensteuerung

4.2 Störungstechnik und andere Vektorüberlagerungsverfahren

Die große Schwierigkeit bei nichtlinearen Problemen ist die Beschaffung der ersten Näherungswerte. Walker /54/, Hangai /23/, Connor und Morin /1:/ u.a. haben die Störungstechnik in der allgemeinen nichtlinearen Analyse verwendet, um eine bessere Anfangsnäherung bei jedem Schritt zu bekommen.

Beim Newton - Raphson - Verfahren wird das System lokal linearisiert. Die Linearisierung bedeutet, daß die nichtlineare Funktion durch die ersten zwei Terme ihrer Taylor - Entwicklung ersetzt wird. Bei der Störungstechnik wird am Anfang jedes Schritts die nichtlineare Funktion durch mehrere Terme ihrer Taylor - Entwicklung angenähert, d.h. es wird am Anfang statt einer linearen inkrementellen Formulierung eine nichtlineare inkrementelle Formulierung mit weiteren Taylorschen Entwicklungsvektoren verwendet. Die Extrapolation wird entlang einer nichtlinearen Kurve vorgenommen, die die gleiche Neigung, Krümmung bzw. höheren Ableitungen wie die exakte Lösungskurve hat. Dadurch erhält man einen besseren Anfangsiterationspunkt. Der weitere Iterationsprozeß kann gegebenenfalls linear wie beim Newton - Raphson - Verfahren vorgenommen werden.

Bei Systemen mit geringer Nichtlinearität gibt die Taylorsche Entwicklung schon eine hinreichend genaue Lösung, und die anschließende lineare Iteration ist nicht mehr erforderlich. Der Unterschied am Anfang eines Zeitschritts zwischen dem Newton-Raphson-Verfahren und der Störungstechnik ist im Bild 4.3 gezeigt.

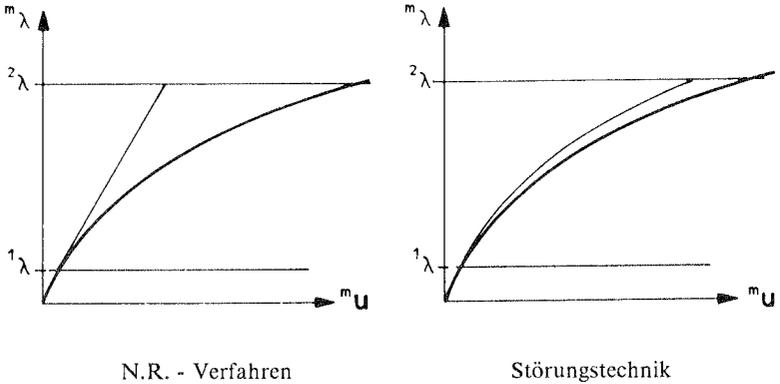


Bild 4.3 Der Unterschied am Anfang eines Zeitschritts

Als Parameter für die Reihenentwicklung haben Walker /51/ und Hangai /23/ den Lastfaktor oder eine der Verschiebungen benutzt. Die Schwäche des Lastfaktors ist, daß die Durchschlagpunkte nicht überwunden werden können, wenn Singularitäten in den Steifigkeitsmatrizen auftreten. Verschiebungsparameter stellen ein besseres Mittel zur Überwindung von Durchschlagpunkten dar. Jedoch ist in diesem Fall die Matrix zur Berechnung der Taylorschen Reihe nicht symmetrisch. Wird außerdem eine nicht dominante Verschiebung als Parameter genommen, kann auch dieses Verfahren bei Durchschlagpunkten versagen. Bei der Störungstechnik ist die Bogenlänge ein besserer Parameter.

Die Störungstechnik gehört zu den Vektorüberlagerungsverfahren, wobei versucht wird, die Lösung des nichtlinearen Systems durch die Summation einer Gruppe der Vektoren zu bekommen. Neben den Taylorschen Entwicklungsvektoren stehen noch die folgenden Vektorreihen zur Verfügung: die Eigenformen /32/, die Fourier - Reihe /36/, die orthogonal-

sierten Lastverformungszustände /27/, /28/, die Lagrangesche Reihe /2/, die Newtonsche Reihe /12/, die für dynamische Probleme angewandte, zur Massenmatrix konjugierte und normierte Vektorreihe /56/ usw.

Die Vektorüberlagerung wird im folgenden Beispiel dargestellt.

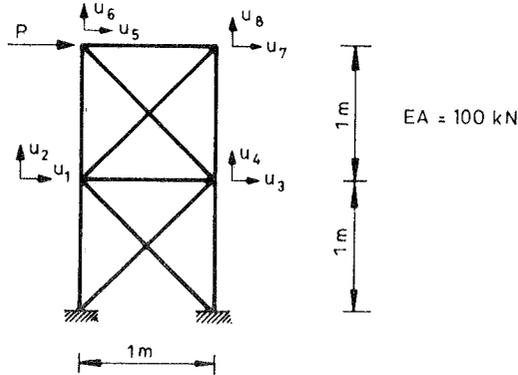


Bild 4.4 Fachwerkelemente

Zuerst wird eine Taylorsche Entwicklung nach dem Lastparameter λ vorgenommen. Die Formeln zur Berechnung der Verschiebungsableitungen werden im Kapitel 7 und im Anhang dargestellt. Die Anfangsverschiebung U_0 und die ersten drei Ableitungen sind:

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 2.93 \\ 1.49 \\ 2.94 \\ -1.51 \\ 8.05 \\ 2.05 \\ 7.60 \\ -1.95 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0.0978 \\ -0.0725 \\ -0.0130 \\ -0.157 \\ 0.248 \\ -0.276 \\ 0.079 \\ -0.389 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00484 \\ -0.00921 \\ -0.00525 \\ -0.00396 \\ -0.0125 \\ -0.0298 \\ -0.0249 \\ -0.0180 \end{bmatrix}$$

Dann gilt für einen Wert des Parameters λ , dessen Größe beschränkt sein soll:

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}_0 + \lambda \dot{\mathbf{U}} + \frac{\lambda^2}{2!} \ddot{\mathbf{U}} + \frac{\lambda^3}{3!} \mathbf{U}^{(3)}$$

Für $\lambda = 1$ gilt

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2.9357 \\ 1.4522 \\ 2.9326 \\ -1.5892 \\ 8.1719 \\ 1.9070 \\ 7.6354 \\ -2.1475 \end{bmatrix}$$

Wird die Vektorüberlagerung mit Lagrangescher Reihe vorgenommen, werden Zwischenlösungen benötigt. Es seien z.B. drei Zwischenlösungen für ${}^1\lambda = 0.29901$, ${}^2\lambda = 0.49744$, ${}^3\lambda = 0.79349$ ermittelt:

$${}^1\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.869 \\ 0.444 \\ 0.878 \\ -0.457 \\ 2.419 \\ 0.599 \\ 2.277 \\ -0.602 \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1.450 \\ 0.734 \\ 1.459 \\ -0.769 \\ 4.036 \\ 0.983 \\ 3.792 \\ -1.020 \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2.325 \\ 1.162 \\ 2.326 \\ -1.245 \\ 6.466 \\ 1.534 \\ 6.057 \\ -1.674 \end{bmatrix}$$

Dann kann die Verschiebung als Polynom von λ dargestellt werden

$$\mathbf{U} \cong \frac{(\lambda - {}^2\lambda)(\lambda - {}^3\lambda)}{({}^1\lambda - {}^2\lambda)({}^1\lambda - {}^3\lambda)} {}^1\mathbf{U} + \frac{(\lambda - {}^1\lambda)(\lambda - {}^3\lambda)}{({}^2\lambda - {}^1\lambda)({}^2\lambda - {}^3\lambda)} {}^2\mathbf{U} + \frac{(\lambda - {}^1\lambda)(\lambda - {}^2\lambda)}{({}^3\lambda - {}^1\lambda)({}^3\lambda - {}^2\lambda)} {}^3\mathbf{U}$$

Die Extrapolation für $\lambda = 1$ führt auf:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2.9407 \\ 1.4570 \\ 2.9305 \\ -1.5864 \\ 8.1724 \\ 1.9025 \\ 7.6393 \\ -2.1514 \end{bmatrix}$$

Dieses Ergebnis stimmt fast mit dem überein, welches mit der Taylorschen Reihe ermittelt wurde. Die Annäherung der Lösung mit der Lagrangeschen Reihe wird im folgenden Bild dargestellt.

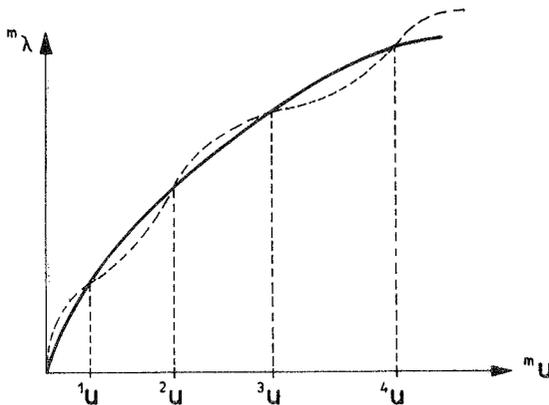


Bild 4.5 Annäherung der Lösung mit Lagrangescher Reihe

Beim normalen Iterationsverfahren bekommt man nur einige Lösungspunkte, die Störungstechnik liefert dagegen die ganze Last - Verschiebungskurve. Dies ist einer der Vorteile dieser Technik. Bei der Störungstechnik bleibt das Verhältnis zwischen den zu addierenden Vektoren fest. In diesem Beispiel sind die Koeffizienten der zu addierenden Vektoren Funktionen des Parameters P . Hier ist allerdings zu beachten, daß das Ergebnis bei einem größeren Schritt erheblich beeinträchtigt oder gar unbrauchbar werden kann. Walker /54/, Hangai /23/ haben die Vektorüberlagerung nur am Anfang jedes Schritts benutzt. Die Verbesserung des Ergebnisses wird durch mehrere lineare Iterationsschritte vorgenommen. Das Ergebnis kann auch durch die

Modifikation der Koeffizienten der Lösungsvektoren verbessert werden. Das führt zur Technik der reduzierten Basis.

4.3 Technik der reduzierten Basis

Die Technik der reduzierten Basis ist eine Kombination von Iterationsverfahren und der Vektorüberlagerungstechnik.

Es sei \mathbf{T} eine $n \times m$ Transformationsmatrix ($m < n$), die aus m globalen Basisvektoren besteht. Die Gleichung (3.15a) kann unter Verwendung von

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (4.2)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{T}^t \mathbf{R} \quad (4.3)$$

auf folgende Form reduziert werden:

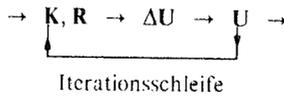
$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}} \quad (4.4)$$

Hierin ist:

- $\tilde{\mathbf{K}}$ reduzierte Koeffizientenmatrix m -ter Ordnung
- $\tilde{\mathbf{R}}$ reduzierter Ungleichgewichtsvektor (die rechte Seite)
- $\tilde{\mathbf{U}}$ reduzierter Lösungsvektor mit m Unbekannten

\mathbf{U} bzw. $\tilde{\mathbf{R}}$ werden von den Spalten bzw. Zeilen von \mathbf{T} aufgespannt. Sie werden auch als Spaltenraum bzw. Zeilenraum von \mathbf{T} bezeichnet, da sie eine lineare Kombination der Spalten bzw. Zeilen von \mathbf{T} sind. Die Gleichungen (4.1), (4.2), (4.3) stellen die Beziehungen der Matrizen und Vektoren zwischen dem ganzen Raum und dem Unterraum dar.

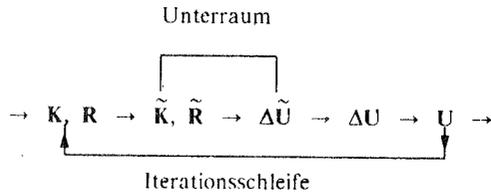
Die Lösung des nichtlinearen Systems wird iterativ vorgenommen. Das Iterationsverfahren im ganzen Raum läßt sich schematisch wie folgt zusammenfassen:



Zyklus 1. Iteration im ganzen Raum (direktes Iterationsverfahren)

Die Iteration kann auch mit Hilfe der reduzierten Basis durchgeführt werden. Es gibt zwei Konzepte, sie unterscheiden sich wesentlich durch unterschiedliche Iterationsschleifen.

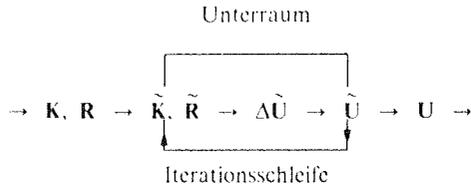
Beim ersten Konzept der reduzierten Basistechnik (Kapitel 6) wird die Iteration im ganzen Raum und im Unterraum durchgeführt. Die rechte Seite und die Tangentensteifigkeitsmatrix werden nach der Aufstellung zuerst nach den Gleichungen (4.3) und (4.2) in einen Unterraum transformiert. Die Lösung des Gleichungssystems, d.h. die Dreieckszerlegung sowie das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, werden im reduzierten Unterraum vorgenommen. Durch Rücktransformation nach Gl. (4.1) wird die Lösung im gesamten Raum erreicht. Der Fehler wird im ganzen Raum kontrolliert. Der Ablauf der Iteration hat die Gestalt:



Zyklus 2. Iteration beim ersten Konzept der reduzierten Basistechnik

A. K. L. Chan /12/ hat diese Methode vorgeschlagen.

Beim zweiten Konzept (Kapitel 7) werden die Matrizen bzw. Vektoren zunächst reduziert und die Iteration wird dann direkt im Unterraum durchgeführt. Der Iterationszyklus lautet:



Zyklus 3. Iteration im Unterraum beim zweiten Konzept der reduzierten Basistechnik

B. O. Almroth /2/ und A. K. Noor /39/ haben diesen Zyklus empfohlen.

Beim Ritz - Verfahren werden die Koeffizienten der Formfunktionen durch die Minimierung der potentiellen Energie gesucht; bei der Technik der reduzierten Basis werden die Koeffizienten der Basisvektoren durch Iteration im Unterraum verbessert. Dies ist der Unterschied zwischen dem Ritz - Verfahren und der Technik der reduzierten Basis.

4.4 Zusammenfassung

Die Methoden zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems werden im folgenden klassifiziert.

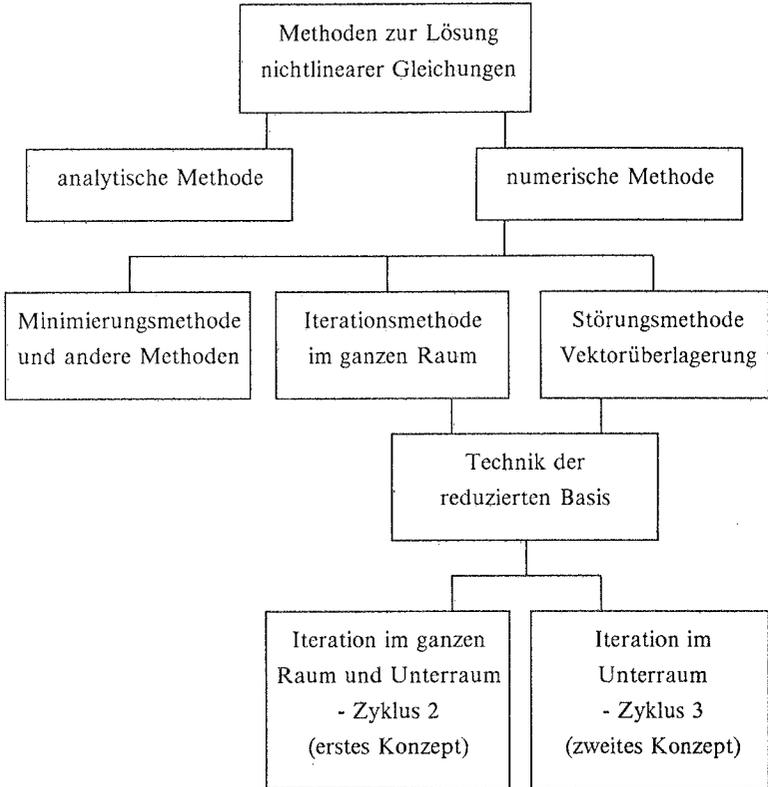


Bild 4.6 Klassifikation der Methoden

Ein Überblick über die Vektorüberlagerungsverfahren und die beiden reduzierten Konzepte wird in Tafel 4.1 gegeben.

	Vektorüberlagerung	erstes Konzept	zweites Konzept
Lagrange-Reihe	•	•	Methode von Almroth /2/ •
Newton-Reihe	•	Methode von Chan /12/ •	•
Eigenformen	Methode von Nagy /33/ u.a.	•	•
Taylor-Reihe	Störungstechnik /54/ •		Methode von Noor /39/ •
konjugierte Reihe	•	•	•

Tafel 4.1 Vektorüberlagerung und die beiden reduzierten Konzepte

In dieser Arbeit werden die mit (•) bezeichneten Kombinationsmöglichkeiten untersucht. Die Kombination der Taylorschen Reihe mit dem ersten Konzept ist nicht sinnvoll, da die Erzeugung der Taylorschen Reihe die im zweiten Konzept dargestellte Formulierung benötigt (Kapitel 7).

5.0 Eigenschaften der Technik der reduzierten Basis

Im folgenden werden die Eigenschaften dieser Technik untersucht. Im Zentrum steht die Frage, inwieweit die reduzierte Matrix noch die wesentlichen Eigenschaften der ursprünglichen Matrix besitzt.

5.1 Eigenschaften der reduzierten Steifigkeitsmatrix

5.1.1 Symmetrie, Normalform

Durch die vorher beschriebene Transformation erhält man die reduzierte Steifigkeitsmatrix:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (5.1)$$

Die transponierte Matrix $\tilde{\mathbf{K}}^t$ ist definiert als:

$$\tilde{\mathbf{K}}^t = (\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^t = \mathbf{T}^t \mathbf{K}^t \mathbf{T} \quad (5.2)$$

Ist \mathbf{K} symmetrisch und $\mathbf{K} = \mathbf{K}^t$, gilt $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^t$, und $\tilde{\mathbf{K}}$ ist dann symmetrisch; ist \mathbf{K} antimetrisch und $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^t$, gilt $\tilde{\mathbf{K}} = -\tilde{\mathbf{K}}^t$, und $\tilde{\mathbf{K}}$ ist dann antimetrisch, d.h. die hinreichende Bedingung für die Symmetrie der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ ist, daß \mathbf{K} symmetrisch ist. Dies ist eine der wichtigsten Eigenschaften. Aus Gl. (5.1) werden die Diagonalelemente der reduzierten Matrix durch die Formel

$$\tilde{K}_{\alpha(\alpha)} = T_{i\alpha} K_{ij} T_{j(\alpha)} \quad (5.3)$$

bestimmt. Ist die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K} symmetrisch und positiv-definit, dann sind alle Diagonalelemente $\tilde{K}_{\alpha(\alpha)}$ der reduzierten Matrix positiv.

Wenn \mathbf{K} eine Einheitsmatrix ist und die Basisvektoren normiert und zueinander orthogonalisiert sind, dann ist $\tilde{\mathbf{K}}$ auch eine Einheitsmatrix. Sind die Basisvektoren paarweise konjugiert, gilt:

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta \quad (5.4)$$

Damit wird $\tilde{\mathbf{K}}$ auf eine diagonale Normalform gebracht. Bei der nichtlinearen Rechnung ändert sich die Tangentmatrix \mathbf{K} ständig. Es ist nicht empfehlenswert, für jedes \mathbf{K} eine konjugierte Transformationsmatrix zu berechnen, da dies zu aufwendig ist.

5.1.2 Positive Definitheit

Für einen beliebigen von Null verschiedenen reduzierten Vektor $\tilde{\mathbf{U}}$ gilt die quadratische Form:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta &= K_{ij} T_{i\alpha} T_{j\beta} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta \\ &= K_{ij} U_i U_j \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ist \mathbf{K} positiv definit, dann gilt $K_{ij} U_i U_j > 0$, und auch $\tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta > 0$, d.h. die hinreichende Bedingung für die positive Definitheit der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ ist, daß \mathbf{K} positiv definit ist. Aber die Umkehrung gilt jedoch nicht, weil $\tilde{\mathbf{U}}$ nicht durch $\mathbf{U} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}}$ analytisch bestimmt werden kann (Kapitel 5.4). Wenn $\tilde{\mathbf{K}}$ positiv definit ist, kann \mathbf{K} trotzdem singulär wie z.B.

$$[1] = [1, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.6a)$$

oder indefinit sein wie z.B.

$$[2] = [1, 1] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.6b)$$

Die positive Definitheit der Matrix \mathbf{K} ist eine strengere Bedingung als die der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$.

Die quadratische Form folgt aus Gl. (5.5) und hat im ganzen Raum und im Unterraum den gleichen Wert.

Eine nm -Matrix wird als zeilenregulär bzw. spaltenregulär /58/ bezeichnet, wenn ihre Zeilen (für $n < m$) oder Spalten (für $n > m$) linear unabhängig sind. Eine nm -Matrix wird als zeilensingulär bzw. spaltensingulär bezeichnet wenn ihre Zeilen (für $n < m$) oder Spalten (für $n > m$) linear abhängig sind. Die Transformationsmatrix \mathbf{T} besteht aus m linear unabhängigen Vektoren, sie ist also spaltenregulär.

Die Matrix \mathbf{K} wird nach dem Cholesky - Verfahren zerlegt in

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^t \mathbf{L} \quad (5.7)$$

\mathbf{L} ist eine obere Dreiecksmatrix, so wird

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \mathbf{L}^t \mathbf{L} \mathbf{T} = \mathbf{Z}^t \mathbf{Z} \quad (5.8)$$

mit

$$\mathbf{L} \mathbf{T} = \mathbf{Z} \quad (5.9)$$

Im stabilen Bereich ist \mathbf{K} positiv definit, die Matrix \mathbf{L} ist regulär, \mathbf{Z} ist spaltenregulär und $\tilde{\mathbf{K}}$ ist positiv definit; beim Erreichen der kritischen Last ist \mathbf{K} positiv semidefinit, die Matrix \mathbf{L} ist reell und singulär, \mathbf{Z} ist reell und $\tilde{\mathbf{K}}$ ist mindestens positiv semidefinit; im labilen Zustand ist \mathbf{K} indefinit, \mathbf{L} ist imaginär, $\tilde{\mathbf{K}}$ kann positiv definit, positiv semidefinit oder indefinit sein. Im folgenden wird ein Überblick gegeben.

K	positiv definit	positiv semidefinit		indefinit		
L	regulär	singulär, reell		imaginär		
Z	spaltenregulär	reell		reell		imag.
		spalt. reg.	spal. sing.	spalt. reg.	spalt. sing.	
\tilde{K}	pos. def.	pos. def.	pos. semid.	pos. def.	pos. semid.	indef.

Tafel 5.1 Merkmale der Matrizen

Eine positiv semidefinite Matrix ist nach der Transformation entweder positiv definit oder positiv semidefinit wie z. B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine indefinite Matrix kann nach der Transformation positiv definit, positiv semidefinit oder indefinit sein wie z. B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ist die Transformationsmatrix \mathbf{T} spaltenregulär kann die Definitheit der Matrizen \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ aus folgender Tabelle entnommen werden:

\mathbf{K}		$\tilde{\mathbf{K}}$
positiv definit	→	positiv definit
positiv semidefinit	→	positiv definit positiv semidefinit
indefinit	→	positiv definit positiv semidefinit indefinit
positiv definit positiv semidefinit indefinit	←	positiv definit
positiv semidefinit indefinit	←	positiv semidefinit
indefinit	←	indefinit

Tafel 5.2 Zusammenhang der Definitheit zwischen \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$

Hier muß auf die Richtung des Pfeiles geachtet werden. Der Pfeil bedeutet: ist () → dann folgt (). Ist im Sonderfall \mathbf{T} quadratisch und nichtsingulär, dann sind \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ kongruent und haben die gleiche Definitheit.

5.1.3 Rang der reduzierten Matrix

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren einer Matrix \mathbf{A} wird Rang der Matrix genannt und mit $r_{\mathbf{A}}$ bezeichnet. Bei einer nichtsingulären quadratischen Matrix stimmt die Rangzahl mit der Dimension der Matrix überein. Der Rang einer singulären Matrix ist kleiner als ihre Dimension. Die Rangzahl ist ein wichtiger Maßstab zur Beurteilung der Singularität der Tangentenmatrix. Hier wird über den Rang von Matri-

zenprodukten diskutiert, damit die Beziehung zwischen den Rangzahlen der Tangentenmatrix \mathbf{K} und der reduzierten Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ untersucht werden kann.

Ist \mathbf{A} eine $n \times m$ - Matrix vom Rang r , so wird für $n > m$ der Defekt oder Rangabfall d_A definiert durch $d_A = n - r$ /24/.

Der Rang eines Matrizenproduktes $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ läßt sich, wenn die Rangzahlen r_A und r_B der beiden Faktoren \mathbf{A} und \mathbf{B} bekannt sind, in Schranken einschließen /58/:

$$r_{\min} - d_{\min} \leq r_C \leq r_{\min} \quad (5.10)$$

d.h. der Rang r_C der Produktmatrix \mathbf{C} ist höchstens gleich der kleinsten der beiden Rangzahlen und mindestens gleich dem kleinsten Rang, vermindert um den kleinsten Defekt. Dies ist der Inhalt eines Satzes, der unter dem Namen Sylvester's Law of Nullity bekannt ist. Im Sonderfall wird die Bestimmung des Ranges des Matrizenproduktes nach folgenden Sätzen vorgenommen /24/, /58/:

1. Ist \mathbf{A} eine $n \times m$ - Matrix vom Rang r und \mathbf{B} eine quadratische nichtsinguläre Matrix n -ter Ordnung, so hat auch die Produktmatrix \mathbf{BA} den gleichen Rang r .
2. Die symmetrische definite Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ hat den gleichen Rang wie die $n \times n$ Matrix \mathbf{A} .

Im stabilen Bereich ist \mathbf{K} positiv definit, $r_k = n$, und \mathbf{L} in Gleichung (5.7) ist nichtsingulär. Folgt aus dem ersten Satz, daß \mathbf{Z} in Gleichung (5.9) den Rang m hat, so ergibt sich mit dem zweiten Satz, daß $r_k^- = m$ ist. An kritischen Punkten wird \mathbf{K} singulär und $r_k = l < n$. Für $l \geq m$ kann, gemäß Sylvester's Law, die reduzierte Matrix regulär bleiben, d.h. $r_k^- = m$. Hier ist zu beachten, daß $r_k^- = m$ eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Stabilität ist, und die Singularität kann nicht mehr mit $r_k^- < m$ beurteilt werden.

Ist der Rang von \mathbf{T} $r_T < m$, dann gilt $r_k^- \leq r_T < m$, und die reduzierte Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ ist singulär. Als notwendige Bedingung muß \mathbf{T} spaltenregulär sein.

5.1.4 Determinante

Zur Ermittlung der Stabilität der Struktur im ganzen Raum ist die Auswertung der Determinante der Steifigkeitsmatrix möglich. Im stabilen Bereich ist die Matrix positiv definit und ihre Determinante ist positiv. Im kritischen Zustand verschwindet die Determinante. Hier soll der Zusammenhang zwischen den Determinanten der Matrix \mathbf{K} und der reduzierten Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ angegeben werden.

Zuerst wird die Determinante des Matrizenproduktes behandelt. Einige Begriffe werden wiederum benötigt.

1. Major:

Major der $n \times m$ - Matrix ist irgendeine größte mögliche Determinante der Matrix. Zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

ist ein Major von

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

aber nicht von

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Die Determinante der quadratischen Matrix ist ihr einziger Major. Der Major einer $n \times m$ - bzw. $m \times n$ - Matrix \mathbf{A} ($m \leq n$) wird mit $A_{(p_1, p_2, \dots, p_m)}$ bezeichnet. p_1, p_2, \dots, p_m sind die Indizes der Zeilen für die $n \times m$ - Matrix bzw. der Spalten für die $m \times n$ - Matrix.

2. Minor

Minor der quadratischen nn - Matrix \mathbf{A} ist eine beliebige Unterdeterminante der Matrix \mathbf{A} und wird mit $A_{(p_1 \dots p_m, r_1 \dots r_m)}$ bezeichnet. $p_1 \dots p_m$ bzw. $r_1 \dots r_m$ sind die Indizes der Zeilen bzw. Spalten.

3. Entsprechender Major:

\mathbf{A} bzw. \mathbf{B} sei von Ordnung (m,n) bzw. (n,m) , und es gelte $m \leq n$. Die Majors von \mathbf{A} bzw. von \mathbf{B} entsprechen sich, wenn der Spaltenindex des Majors von \mathbf{A} gleich dem Zeilenindex des Majors von \mathbf{B} ist.

4. Entsprechender Minor

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ seien von Ordnung (m,n) bzw. (n,m) , und es gelte $m \leq n$, \mathbf{A} sei eine nn - Matrix. Der Minor von \mathbf{A} entspricht den Majors von \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 , wenn die Zeilen- bzw. Spaltenindizes von \mathbf{A} gleich den Zeilenindizes von \mathbf{B}_1 bzw. Spaltenindizes von \mathbf{B}_2 sind.

Nach dem Satz der Multiplikation ist die Determinante der Multiplikation der mn - Matrix \mathbf{A} mit der nm - Matrix \mathbf{B} ($n \geq m$) die Summation der Produkte aller entsprechender Majors von Matrix \mathbf{A} und \mathbf{B} /58/. Z.B.

$$\det \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ & & & b_{31} & b_{32} \end{array} \right) = A_{(12)}B_{(12)} + A_{(13)}B_{(13)} + A_{(23)}B_{(23)} \quad (5.11)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

Sind im Sonderfall \mathbf{A} und \mathbf{B} quadratisch und von n - ter Ordnung, dann gilt:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (5.12)$$

Es ist also die Determinante von $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ positiv, wenn die Matrix \mathbf{A} spaltenregulär ist.

Im stabilen Bereich ist \mathbf{Z} in Gleichung (5.8) spaltenregulär, dann gilt nach dem Satz der Multiplikation $\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0$. Beim Erreichen der ersten kritischen Last ist die Matrix \mathbf{K} positiv semidefinit, $\det(\mathbf{K}) = 0$, und \mathbf{L} in Gleichung (5.7) ist singular. $\det(\tilde{\mathbf{K}}) = 0$ bzw. $\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0$, wenn $r_z < m$ bzw. $r_z = m$ ist. Im allgemeinen ist Determinante $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ die Summation aller möglichen Produkte der zwei Majors von \mathbf{T} mit dem entsprechenden Minor von \mathbf{A}

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}) = \sum |T_{(p_1 \dots p_m)}| |K_{(p_1 \dots p_m, r_1 \dots r_m)}| |T_{(r_1 \dots r_m)}| \quad (5.13)$$

Es ist noch anzumerken, daß $\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0$ auch nur eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Stabilität ist. Die Singularität kann nicht mehr mit $\det(\tilde{\mathbf{K}}) = 0$ beurteilt werden. Der Unterschied der Determinanten im ganzen Raum und Unterraum wird im folgenden Beispiel des ebenen Fachwerks gezeigt.

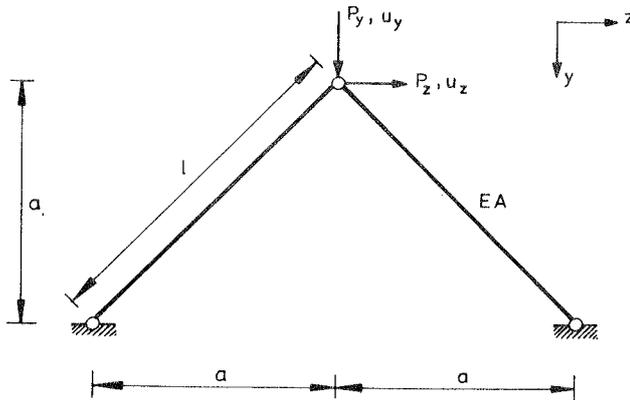


Bild 5.1 Beispiel des ebenen Fachwerks

Der inkrementelle Gleichgewichtszustand für einen beliebigen deformierten Zustand I mit 1u_y und 1u_z hat die Darstellung:

$$\frac{EA}{I^3} \begin{bmatrix} 2a^2 - 6a^1u_y + 3^1u_y^2 + ^1u_z^2 & -2a^1u_z + 2^1u_z^1u_y \\ -2a^1u_z + 2^1u_z^1u_y & 2a^2 - 2a^1u_y + 3^1u_z^2 + ^1u_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Ist das System symmetrisch belastet, d. h. $p_z = 0$, dann gilt $^1u_z = 0$. Die Determinante im ganzen Raum liefert dann:

$$\det(\mathbf{K}) = \frac{EA}{I^3} (2a^2 - 6a^1u_y + 3^1u_y^2) (2a^2 - 2a^1u_y + ^1u_y^2) \quad (5.15)$$

Die erste Nullstelle liegt bei $u_y = 0.793a$. Wird das System mit einem Vektor $\mathbf{T}^t = [T_1, T_2]$ auf einen Freiheitsgrad reduziert, dann ist die Determinante des Symmetriefalles im Unterraum:

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}) = \frac{EA}{I^3} [T_1^2(2a^2 - 6a^1u_y + 3^1u_y^2) + T_2^2(2a^2 - 2a^1u_y + ^1u_y^2)] \quad (5.16)$$

Für verschiedene \mathbf{T} hat $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ verschiedene Werte. Bei $\mathbf{T}^t = [T_1, T_2] = [1, 0]$, führt die Transformation mit \mathbf{T} zur aktuellen Verformungsfigur. Dann hat $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ die Darstellung

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}) = \frac{EA}{I^3} (2a^2 - 6a^1u_y + 3^1u_y^2) \quad (5.16a)$$

$\det(\tilde{\mathbf{K}})$ hat zwei gleiche Nullpunkte wie $\det(\mathbf{K})$; umgekehrt kann $\mathbf{T}^t = [0, 1]$ die Verformungsfigur nicht repräsentieren. Dann ergibt sich

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}) = \frac{EA}{I^3} (2a^2 - 2a^1u_y + ^1u_y^2) > 0 \quad (5.16b)$$

$\det(\tilde{\mathbf{K}})$ hat keine Nullstellen; beim dazwischenliegenden Vektor $\mathbf{T}^t = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ hat $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ die Gestalt

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}) = \frac{EA}{l^3} 2\sqrt{2} (a^2 - 2a^1u_y + {}^1u_y^2) \quad (5.16c)$$

$\det(\tilde{\mathbf{K}})$ hat dann am Punkt ${}^1u_y = a$ eine einzige Nullstelle.

Bei der kritischen Last ist die Matrix \mathbf{K} positiv semidefinit und $\det(\mathbf{K}) = 0$. An dieser Stelle ist die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ entweder positiv definit wie hier für $\mathbf{T}^t = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ und $\mathbf{T}^t = [0, 1]$, oder positiv semidefinit wie im Fall $\mathbf{T}^t = [1, 0]$, und es gilt $\det(\tilde{\mathbf{K}}) \geq 0$, d.h. die kritische Last im ganzen Raum ist nicht größer als die im Unterraum.

Bei der Technik der reduzierten Basis wird die Darstellung der Bewegungsmöglichkeit des Systems durch zusätzliche Zwangsbedingungen, die Form der reduzierten Basis, beschränkt. Der Freiheitsgrad des Systems reduziert sich. Wenn die reduzierte Basis nicht von guter Qualität ist, paßt die Form der reduzierten Basis nicht zu den wirklichen Bewegungen. Das reduzierte System im Unterraum wird durch solche Beschränkungen stark versteift, das Ergebnis davon wird somit erheblich beeinträchtigt. Wenn die reduzierte Basis von guter Qualität ist, ergibt sich für das reduzierte System dann die gleiche kritische Last wie für den ganzen Raum.

Der Unterschied zwischen $\det(\mathbf{K})$ und $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ beim obigen Beispiel wird im Bild 5.2 verdeutlicht.

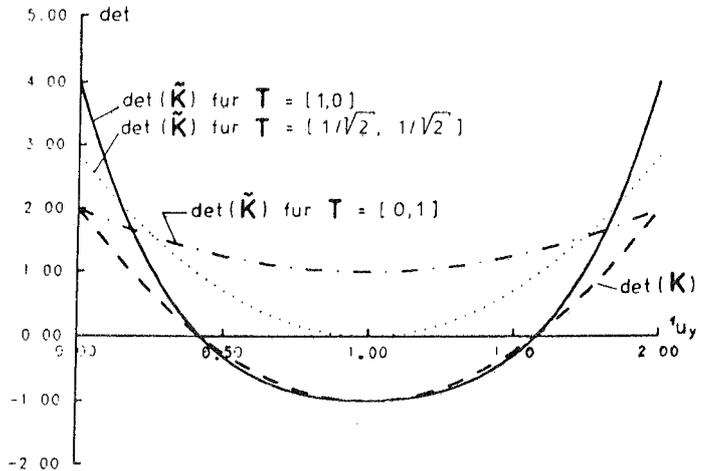


Bild 5.2 Unterschied der Determinante des ebenen Fachwerks im ganzen Raum und im Unterraum

Wenn die Transformationsmatrix \mathbf{T} aus vielen Basisvektoren besteht, gibt es mehr Bewegungsmöglichkeiten, die zusätzliche Beschränkung lockert sich. Im Extremfall ist \mathbf{T} eine quadratische Matrix, \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ sind kongruent, das reduzierte System hat den gleichen Freiheitsgrad wie das ganze System, es gibt keine zusätzliche Beschränkung mehr, und aus Gl. (5.12) folgt

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\mathbf{K}}) &= \det(\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^t) \det(\mathbf{K}) \det(\mathbf{T}) \end{aligned}$$

dann haben $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ und $\det(\mathbf{K})$ die gleiche Nullstelle, für das ganze und das reduzierte System ergibt sich die gleiche kritische Last.

5.1.5 Eigenwert

Brendel /4/ hat eine ausführliche Diskussion über die Auswertung der Stabilität mit Eigenwertproblemen für den Lastparameter vorgenommen. Eine Version wird definiert als:

$$[\mathbf{K}_e + \lambda (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g)] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Wegen der Lösbarkeitsbedingung für das homogene System muß die charakteristische Determinante verschwinden:

$$\det [\mathbf{K}_e + \lambda (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g)] = 0 \quad (5.17a)$$

Entsprechend für den Unterraum:

$$\det [\tilde{\mathbf{K}}_e + \tilde{\lambda} (\tilde{\mathbf{K}}_u + \tilde{\mathbf{K}}_g)] = 0 \quad (5.17b)$$

Die Gleichung (5.17a) bzw. (5.17b) kann zu einem Polynom n-ten Grades bzw. m - ten Grades in λ bzw. $\tilde{\lambda}$ entwickelt werden. Die Lösungen für λ in Gl. (5.17a) bzw. $\tilde{\lambda}$ in Gl. (5.17b) sind nicht gleichwertig. Zur Beurteilung der Stabilität ist Gleichung (5.17b) nicht direkt verwendbar, weil am kritischen Punkt die Determinante der reduzierten Matrix nicht unbedingt gleich Null sein muß. Das wird im obigen Beispiel des ebenen Fachwerks veranschaulicht. Unter symmetrischer Belastung ist das lineare Eigenwertproblem von folgender Form:

$$\left\{ \frac{EA}{l^3} \begin{bmatrix} 2a^2 & 0 \\ 0 & 2a^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{EA}{l^3} \begin{bmatrix} -6a^1 u_y + 3^1 u_y^2 & 0 \\ 0 & -2a^1 u_y + 1^1 u_y^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Für $^1 u_y = 0.4a$ ist das charakteristische Polynom

$$(2a^2 - \lambda \cdot 1.92a^2)(2a^2 - \lambda \cdot 0.64a^2) = 0 \quad (5.19)$$

daraus folgt:

$$\lambda_1 = 1.042, \quad \lambda_2 = 3.125 \quad (5.20)$$

Wird das System mit Vektor $\mathbf{T}^t = [T_1, T_2]$ reduziert, gilt für ${}^1u_y = 0.4a$:

$$2a^2(T_1^2 + T_2^2) + \tilde{\lambda} \cdot (-1.92a^2T_1^2 - 0.64a^2T_2^2) = 0 \quad (5.21)$$

und:

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(T_1^2 + T_2^2)}{1.92T_1^2 + 0.64T_2^2} = (T_1^2 + T_2^2) \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1T_2^2 + \lambda_2T_1^2} \quad (5.22)$$

$\tilde{\lambda}$ ist von dem Verhältnis der Vektorkomponenten T_1, T_2 abhängig. Es wird im Bild 5.3 dargestellt:

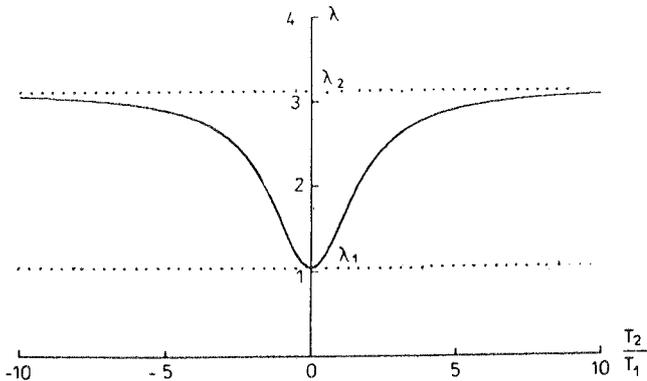


Bild 5.3 Verhältnis von $\tilde{\lambda}$ zu $\frac{T_2}{T_1}$ am Beispiel des Fachwerks

Wenn \mathbf{T} die Verformungsfigur gut repräsentiert und $|T_1| \gg |T_2|$, dann ist $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda_1 = 1.042$; umgekehrt ist für $|T_1| \ll |T_2|$ $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda_2 = 3.125$. Neben diesen zwei extremen Fällen hat $\tilde{\lambda}$ im allgemeinen einen Wert zwischen λ_1 und λ_2 .

Der erste Eigenwert im ganzen Raum bzw. im Unterraum wird mit λ_1 bzw. $\tilde{\lambda}_1$ bezeichnet. Beim Lastniveau $\lambda = \lambda_1$ ist $\det(\mathbf{K}) = 0$, die Matrix \mathbf{K} ist positiv semidefinit; aber im Unterraum hat die Determinante einen nicht negativen Wert $\det(\tilde{\mathbf{K}}) \geq 0$ und die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ ist mindestens positiv semidefinit. Es kann sein, daß $\det(\tilde{\mathbf{K}})$ erst bei einem höheren Lastniveau den Wert Null hat, d.h.

$$\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \quad (5.23)$$

Die kritische Last im reduzierten System ist im günstigsten Fall identisch mit der kritischen Last des gesamten Systems, meist ist sie jedoch größer und liegt damit auf der unsicheren Seite. $\tilde{\lambda}_1$ wird auch von der Anzahl der Basisvektoren beeinflusst. Wenn \mathbf{T} quadratisch ist und \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ kongruent sind, dann haben \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ die gleichen Eigenwerte, und es gilt

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 \quad (5.23a)$$

5.2 Steifigkeitsparameter

P.G.Bergan /6/ hat in seinem Aufsatz den Steifigkeitsparameter S_{sk} zur Auffindung des Durchschlagpunktes eingeführt. Der Parameter wird aus der Beziehung zwischen dem Inkrement des Lastfaktors $d\lambda$ und einem Energiewert der Skalarmultiplikation des Verschiebungsincrementes $d\mathbf{U}$ mit dem Lastvektor \mathbf{P} ermittelt:

$$S_{sk} = \frac{d\lambda}{\{d\mathbf{U}\}^t \{\mathbf{P}\}} \quad (5.24)$$

Die Steifigkeit eines Systems kann mit diesem Skalarwert beurteilt werden. Mit der Anfangssteifigkeit kann man den aktuellen Steifigkeitsparameter in folgende Form bringen:

$$S_{ak} = \frac{\frac{d\lambda}{\{d\mathbf{U}\}^t \{\mathbf{P}\}}}{\frac{d\lambda_0}{\{d\mathbf{U}_0\}^t \{\mathbf{P}\}}} \quad (5.25)$$

Beim Verfahren mit Laststeuerung und gleichem Lastinkrement in jedem Schritt gilt $d\lambda = d\lambda_0$. Dann hat S_{ak} die Form:

$$S_{ak} = \frac{\{d\mathbf{U}_0\}^t \{\mathbf{P}\}}{\{d\mathbf{U}\}^t \{\mathbf{P}\}} \quad (5.25a)$$

Am Anfang ist der aktuelle Steifigkeitsparameter 1. Bei einem linearen System ist er konstant. Im stabilen Bereich ist er positiv. Er ist größer bzw. kleiner als 1, wenn das System steifer bzw. weicher wird. Die Durchschlagspunkte lassen sich mit der Nullstelle des Steifigkeitsparameters feststellen. Bei Durchschlagspunkten wechselt er das Vorzeichen; beim "snap-back" Problem besitzt die Kurve Pole im Unendlichen. Die aktuellen Steifigkeitsparameter bei den Punkten a, b, c, d im Bild 5.4 werden in Tafel 5.3 angegeben.

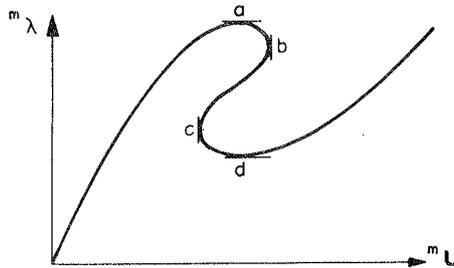


Bild 5.4 Verschiebung - Lastfaktor - Diagramm

Position	a^-	a^+	b^-	b^+	c^-	c^+	d^-	d^+
S_{ak}	0^+	0^-	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0^-	0^+

Tafel 5.3 Aktueller Steifigkeitsparameter

Der $U - S_{ak}$ - Verlauf hat dann die Gestalt:

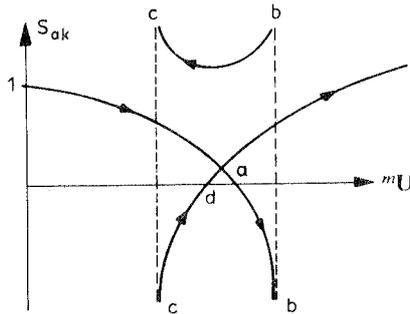


Bild 5.5 Verschiebungs - Steifigkeitsparameter - Diagramm

Im Unterraum ist der aktuelle Steifigkeitsparameter \tilde{S}_{ak} ebenso als Hilfsmittel benutzbar. Die Abbildung von \tilde{U} wird hier mit \hat{U} bezeichnet zur Unterscheidung von der direkten Lösung U im gesamten Raum. Unter Beachtung von $d\hat{U} = T d\tilde{U}$ und $\tilde{P} = T^t P$ folgt aus Gl. (5.24):

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{sk} &= \frac{d\lambda}{\{d\tilde{U}\}^t \{\tilde{P}\}} \\
 &= \frac{d\lambda}{\{d\tilde{U}\}^t \mathbf{T}^t \{P\}} \\
 &= \frac{d\lambda}{\{d\hat{U}\}^t \{P\}}
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

Die Güte der Näherung des Steifigkeitsparameters ist von der Qualität und Vollständigkeit der Basis abhängig. Im Verlauf des Programms wird \mathbf{T} modifiziert und erneuert, um die wirklichen Verformungsfiguren anzupassen. Dann kann $d\hat{U}$ das Verschiebungsinkrement gut repräsentieren, und es gilt $\tilde{S}_{sk} = S_{sk}$. Die aktuellen Steifigkeitsparameter im gesamten Raum und Unterraum sind dann gleichwertig. Das reduzierte System ist im allgemeinen aufgrund der geringeren Anzahl der Freiheitsgrade steifer. Für eine beliebige Transformationsmatrix \mathbf{T} gilt im stabilen Bereich

$$\tilde{S}_{sk} \geq S_{sk} > 0
 \tag{5.27}$$

$\tilde{S}_{sk} > 0$ ist auch nur eine notwendige Bedingung für Stabilität.

Im folgenden ist ein Beispiel aufgeführt.

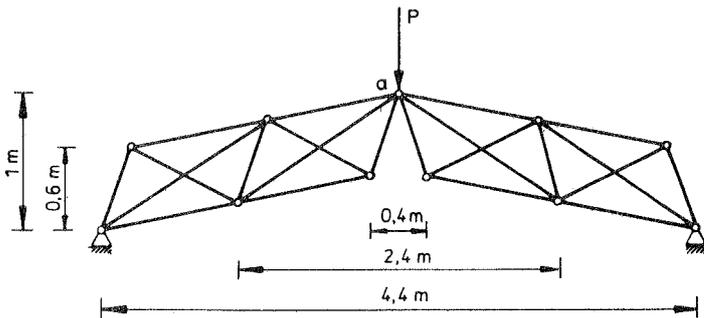


Bild 5.6 Beispiel eines ebenen Fachwerks

Bei diesem Beispiel werden 3 Basisvektoren der Newtonschen Reihe verwendet. Zuerst wird der Steifigkeitsparameter im Unterraum \tilde{S}_{ak} ohne Basismodifikation berechnet. Vor dem Durchschlagspunkt stimmt S_{ak} fast mit dem Steifigkeitsparameter im ganzen Raum S_{ak} überein. Danach zweigt \tilde{S}_{ak} nach oben ab. Werden die Basisvektoren in der Nähe des Durchschlagspunktes einmal modifiziert, dann sind \tilde{S}_{ak} und S_{ak} fast gleichwertig. Die Ergebnisse werden im Bild 5.7 gezeigt.

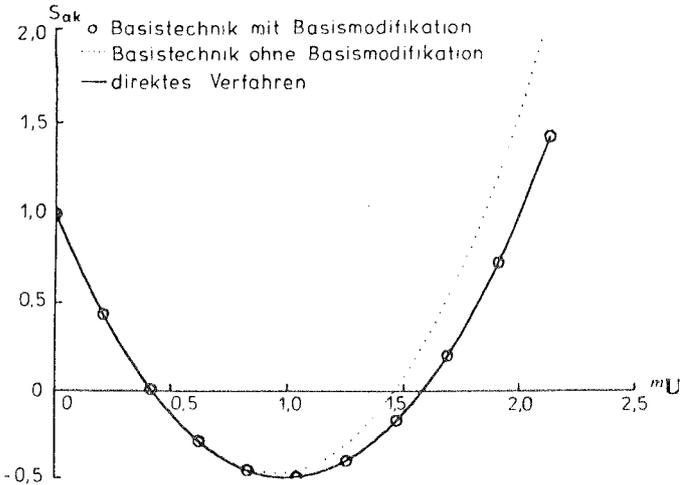


Bild 5.7 Steifigkeitsparameter im ganzen Raum und im Unterraum

Dieses Beispiel zeigt, daß Nullstellen des S_{ak} die Durchschlagspunkte ergeben. Wenn die Basis gut ist, ist der Steifigkeitsparameter im Unterraum \tilde{S}_{ak} eine gute Näherung von S_{ak} , $\tilde{S}_{ak} \cong S_{ak}$, die Beurteilung der Durchschlagspunkte kann durch \tilde{S}_{ak} ersetzt werden; wenn die Basis die Verformungsfigur nicht gut repräsentiert, wird das reduzierte System versteift, es gilt dann $\tilde{S}_{ak} > S_{ak}$.

5.3 Auffinden der kritischen Lasten

Zur Auswertung des Stabilitätszustandes des Systems sind einige Wege möglich, d.h. über

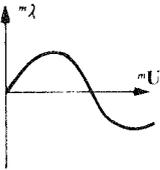
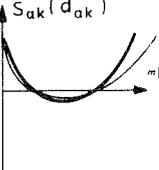
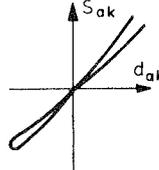
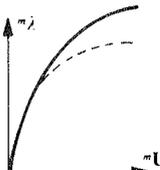
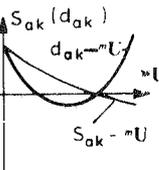
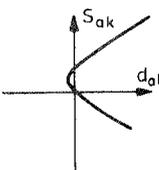
1. den Rang der Steifigkeitsmatrix,
2. die Determinante,
3. den Steifigkeitsparameter (für Durchschlagspunkt),
4. einen Eigenwert für den Lastparameter.

Der Unterschied der ersten drei Kriterien im ganzen Raum und im Unterraum wird in folgender Tabelle dargestellt:

		im ganzen Raum	im Unterraum
stabil		$\det(\mathbf{K}) > 0 \quad r_{\mathbf{K}} = n$ $S_{ak} > 0$	$\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0 \quad r_{\tilde{\mathbf{K}}} = m$ $\tilde{S}_{ak} > 0$
kritisch	Durchschlag	$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad r_{\mathbf{K}} < n$ $S_{ak} = 0$	$\det(\tilde{\mathbf{K}}) \geq 0 \quad r_{\tilde{\mathbf{K}}} \leq m$ $\tilde{S}_{ak} \geq 0$
	Verzweigung	$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad r_{\mathbf{K}} < n$ $S_{ak} \neq 0$	
labil		$\det(\mathbf{K}) \neq 0 \quad r_{\mathbf{K}} = n$	$\det(\tilde{\mathbf{K}}) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad r_{\tilde{\mathbf{K}}} \leq m$

Tafel 5.4 Kriterien zur Beurteilung der Stabilität

Wird die auf den Anfangswert bezogene aktuelle Determinante mit $d_{ak}(\mathbf{K}) = \det({}^m\mathbf{K}) / \det({}^0\mathbf{K})$ bezeichnet, können die Instabilitätserscheinungen im folgenden angegeben werden.

Typ des Problems	$\lambda - \mathbf{u}$ - Diag.	$S_{ak} - \mathbf{u}$ - Diag. $d_{ak} - \mathbf{u}$ - Diag.	$S_{ak} - d_{ak}$ - Diag.
Durchschlagen			
Verzweigungen			

Tafel 5.5 Instabilitätserscheinungen

Beim Durchschlagsproblem in Tafel 5.5 haben d_{ak} und S_{ak} die gleichen Vorzeichen, der $d_{ak} - S_{ak}$ - Verlauf ist nur im ersten und dritten Quadrant zu finden, die Kurve und die Koordinatenachse schneiden sich nur im Ursprung. Beim Verzweigungsproblem hat d_{ak} nach dem Verzweigungspunkt einen negativen Wert, aber S_{ak} kann trotzdem positiv sein. Dann könnte der $d_{ak} - S_{ak}$ - Verlauf auch im zweiten oder vierten Quadrant auftauchen.

Für eine beliebige Transformationsmatrix \mathbf{T} kann die Singularität nicht mit reduzierten Größen direkt beurteilt werden. Die Bedingungen der Stabilität werden wie folgt zusammengefaßt:

	notw. u. hinreich.	notwendig	hinreichend
stabil	\mathbf{K} positiv definit	$\tilde{\mathbf{K}}$ positiv definit $\det(\mathbf{K}) > 0$ $\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0$ $r_{\mathbf{K}} = n$ $r_{\tilde{\mathbf{K}}} = m$ $S_{ak} > 0$ $\tilde{S}_{ak} > 0$	
kritisch	$\det(\mathbf{K}) = 0$ $r_{\mathbf{K}} < n$	$\det(\tilde{\mathbf{K}}) \geq 0$	$S_{ak} = 0$

Tafel 5.6 Bedingung der Stabilität

Die Qualität der Lösung ist von der Qualität der Basis abhängig, je besser die Basisvektoren die Verformungsfiguren annähern, desto besser arbeitet die Technik. Die Basisvektoren werden im Verlauf des Programms modifiziert und erneuert, um sie den wirklichen Verschiebungen anzupassen. Dann kann über die Singularität mit reduzierten Größen, d.h. mit $\det(\tilde{\mathbf{K}}) = 0$, $r_{\tilde{\mathbf{K}}} < m$ oder $\tilde{S}_{ak} = 0$ direkt entschieden werden.

5.4 Äußere Arbeit

Die äußere Arbeit $\tilde{W}_{(a)}$ im Unterraum hat die Darstellung:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{(a)} &= \int \lambda \tilde{\mathbf{P}}^t d\tilde{\mathbf{U}} \\ &= \int \lambda \mathbf{P}^t \mathbf{T} d\tilde{\mathbf{U}} \\ &= \int \lambda \mathbf{P}^t d\hat{\mathbf{U}} \\ &\cong W_{(a)}\end{aligned}\tag{5.28}$$

Analog zum Steifigkeitsparameter ist die Qualität der äußeren Arbeit mit reduzierten Größen von der Qualität der Basisvektoren abhängig. Wenn die Basis die Verformungsfigur gut repräsentiert, kann die äußere Arbeit mit reduzierten Größen direkt ausgedrückt werden.

5.5 Umkehrbarkeit der Transformation

Bei der Technik der reduzierten Basis wird für jeden Vektor $\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum ein Vektor \mathbf{U} im ganzen Raum durch die Transformation (Gl. (4.1)) zugeordnet. Es erhebt sich die Frage, ob das Verhältnis umkehrbar ist, d.h. ob jedem Vektor des ganzen Raumes \mathbf{U} ein Vektor $\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum zugeordnet werden kann.

Die Transformationsmatrix \mathbf{T} ($n \times m$) hat normalerweise mehr Zeilen als Spalten, d.h. $n > m$. Eine lineare Abbildung ist in diesem Fall nicht eindeutig umkehrbar.

Mittels der Gleichung (4.1) ist jedem Punkt $\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum mit den Koordinaten $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m$ direkt und eindeutig ein Abbildungspunkt \mathbf{U} mit den Koordinaten u_1, u_2, \dots, u_n im gesamten Raum zugeordnet. Aber es ist schwierig, für einen gegebenen Punkt \mathbf{U} im gesamten Raum einen Bildungspunkt $\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum zu finden. Da es mehr Gleichungen als Unbekannte gibt und die Gleichungen sich widersprechen, haben wir ein überbestimmtes System, d.h. die Transformation ist im allgemeinen nicht umkehrbar. Zur Beseitigung der Widersprüche ist es sinnvoll, eine Näherungslösung zu betrachten. Dabei wird hier die Methode der verallgemeinerten Inversen verwendet.

Der Begriff der verallgemeinerten Inversen ermöglicht es, in allen Fällen die Lösung linearer Gleichungssysteme im Sinne kleinster Fehlerquadrate explizit als Produkt der Transformationsmatrix mit dem gegebenen Vektor und der Koeffizientenmatrix so auszudrücken, wie dies im Fall nichtsingulärer quadratischer Koeffizientenmatrizen durch Inverse geschieht /11/, /49/.

Das Residuum sei

$$\mathbf{Re} = \mathbf{U} - \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} \quad (5.29)$$

Je kleiner die euklidische Norm von \mathbf{Re} ist, desto kleiner wird \mathbf{Re} ausfallen, d.h. die Ersatzaufgabe lautet: "Bestimme $\tilde{\mathbf{U}}$ so, daß die euklidische Norm des Residuums minimal wird." Diese Methode entspricht dem Fehlerquadratminimum - Verfahren. Die ausführlichen Herleitungen und die Beweise sind in /11/ zu finden. Hier wird nur eine allgemeine Beschreibung vorgenommen.

Der Fehler wird gleich Null angenommen. Die Gleichung (4.1) wird mit der transponierten Transformationsmatrix von links multipliziert:

$$\mathbf{T}^t \mathbf{U} = \mathbf{T}^t \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} \quad (5.30)$$

$\mathbf{T}^t \mathbf{T}$ ist symmetrisch. Durch geeignete Wahl linear unabhängiger Basisvektoren ist $\mathbf{T}^t \mathbf{T}$ nicht singulär, und es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung von Gl. (5.30):

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{T}^t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t \mathbf{U} \quad (5.31)$$

Hier ist $\mathbf{T}^t \mathbf{T}$ positiv definit, d.h. es gilt $\tilde{\mathbf{U}}^t \mathbf{T}^t \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} > 0$ für alle $\tilde{\mathbf{U}} \neq 0$. In Gleichung (5.31) ist $(\mathbf{T}^t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t$ die allgemeine Darstellung der verallgemeinerten Inverse nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Sie wird auch als Pseudoinverse, Moore - Penrose - Inverse oder verallgemeinerte J - Inverse bezeichnet.

Im Sonderfall besteht die Transformationsmatrix \mathbf{T} aus zueinander orthogonalen Vektoren. $\mathbf{T}^t \mathbf{T}$ ist dann eine Einheitsmatrix, und die Umkehrung der Transformation kann durch

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T}^t \mathbf{U} \quad (5.32)$$

dargestellt werden.

Im Kapitel 7 wird der Zusammenhang zwischen $\tilde{\mathbf{U}}$ und \mathbf{U} benötigt. Die Anfangspunkte im Unterraum und im ganzen Raum sind die Ursprünge. Nach gewissen Schritten werden die Basisvektoren erneuert. Dadurch wird ein neuer Unterraum bestimmt. Zu diesem Zeitpunkt sind die Verschiebungen im alten Unterraum schon berechnet. Sie vermitteln zuerst einen Bildungspunkt, d.h. die Verschiebungen im ganzen Raum. Dann wird ein Punkt vom ganzen Raum in den neuen Unterraum transformiert. Die abgebildeten Verschiebungen im ganzen Raum \mathbf{U} werden als die erste Spalte der neuen Transformationsmatrix \mathbf{T}_{neu} gesetzt, damit die ursprüngliche Lösung mit der neuen Startlösung übereinstimmt. Der neue Vektor $\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum wird dazu als Einheitsvektor $[1, 0, 0, \dots]$ gesetzt. Im diesen Fall entspricht er der exakten und eindeutigen Lösung von Gl. (4.1).

Die Ungleichgewichtskräfte im Unterraum $\tilde{\mathbf{R}}$ können durch \mathbf{R} im ganzen Raum (Gl. (4.3)) bestimmt werden. In diesem Fall ist die Umkehrung $\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ nicht mehr eindeutig. Hat \mathbf{T}^t mehr Spalten als Zeilen, gibt es in Gl. (4.3) mehr Unbekannte als Gleichungen, und wir haben somit ein nicht bestimmtes System. Dann ist wegen der Singularität von $\mathbf{T} \mathbf{T}^t$ auch die Methode des Fehlerquadratminimums nicht anwendbar. Die Mehrdeutigkeit der Umkehrung $\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ wird im folgenden Beispiel gezeigt:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Für linear unabhängige Basisvektoren werden die möglichen Transformationen zwischen \mathbf{U} und $\tilde{\mathbf{U}}$ bzw. zwischen \mathbf{R} und $\tilde{\mathbf{R}}$ wie folgt zusammengefaßt:

$\tilde{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{U}$	eindeutig	Gleichung (4.1)
$\mathbf{U} \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}$	eindeutig	Fehlerquadratminimum
$\mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}$	eindeutig	Gleichung (4.3)
$\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$	nicht eindeutig (für $m < n$)	

Tafel 5.7 Mögliche Transformation

5.6 Konvergenzkriterien

Für Iterationsverfahren ist ein Kriterium zur Beurteilung der Konvergenz erforderlich. Dabei liegt es nahe, das Kriterium auf die Norm des Ungleichgewichtes \mathbf{R} oder Verschiebungszuwachses $\Delta\mathbf{U}$ im ganzen Raum anzuwenden. Die Frage ist, ob die Norm von $\tilde{\mathbf{R}}$ oder $\Delta\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum ebenfalls verwendet werden kann.

Wie oben erwähnt, läßt sich der Verschiebungszuwachs im ganzen Raum $\Delta\mathbf{U}$ eindeutig durch $\Delta\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum darstellen, aber die Transformation $\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ ist nicht eindeutig. Die Norm von $\tilde{\mathbf{R}}$ kann den Gleichgewichtsfehler im gesamten Raum nicht repräsentieren. Dies ist ein Nachteil der Methode der reduzierten Basis. Zur Beurteilung der Konvergenz mit reduzierten Größen ist der Zuwachs $\Delta\tilde{\mathbf{U}}$ deshalb im Prinzip ein sinnvollerer Maßstab als das Ungleichgewicht $\tilde{\mathbf{R}}$. Numerische Erfahrungen zeigen allerdings, daß die Norm von $\tilde{\mathbf{R}}$ in vielen Fällen doch brauchbare Ergebnisse anzeigt.

Die Norm von $\Delta\tilde{\mathbf{U}}$ im Verhältnis zu der von $\Delta\mathbf{U}$ ist:

$$\Delta\mathbf{U}^t \Delta\mathbf{U} = \Delta\tilde{\mathbf{U}}^t (\mathbf{T}^t \mathbf{T}) \Delta\tilde{\mathbf{U}} \quad (5.33)$$

Sind die Vektoren in \mathbf{T} zueinander orthogonalisiert, so liefert:

$$\Delta \mathbf{U}^t \Delta \mathbf{U} = \sum_{i=1}^m (\Delta \tilde{\mathbf{U}}_i^2 \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{ji}^2) \quad (5.34)$$

Werden die Vektoren in \mathbf{T} noch normiert, ist damit $\mathbf{T}^t \mathbf{T}$ eine Einheitsmatrix, und es gilt:

$$\Delta \tilde{\mathbf{U}}^t \Delta \tilde{\mathbf{U}} = \Delta \mathbf{U}^t \Delta \mathbf{U} \quad (5.35)$$

Dann ist die Norm von $\Delta \tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum identisch mit der Norm von $\Delta \mathbf{U}$ im gesamten Raum.

5.7 Kriterium zur Beurteilung der Basis

Wie oben gesagt, ist die Basis von guter Qualität, dann ist die Lösung mit Hilfe der Technik der reduzierten Basis eine gute Näherung der exakten Lösung. Was ist das Kriterium zur Beurteilung der Qualität der Basis und welche Bedingung soll eine gute Basis erfüllen?

Die direkte Lösung im ganzen Raum von Gleichung (3.15a) bzw. die Lösung im Unterraum von Gleichung (4.4) ist

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} \quad (5.36)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} \\ &= (\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t \mathbf{R} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$\hat{\mathbf{U}}$ ist die Abbildung von $\tilde{\mathbf{U}}$ in (5.37) und hat die Darstellung

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T} (\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t \mathbf{R} \quad (5.38)$$

Wenn $\hat{\mathbf{U}}$ eine gute Näherung von \mathbf{U} ist, gilt

$$\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U} = [\mathbf{T}(\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t - \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{R} \cong \mathbf{0} \quad (5.39)$$

d.h. die Zeilenvektoren von $[\mathbf{T}(\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t - \mathbf{K}^{-1}]$ sollen möglichst orthogonal zur rechten Seite \mathbf{R} sein. Um dieses Kriterium zu überprüfen wird hier wieder das Beispiel 5.1 genommen. Die Matrix $[\mathbf{T}(\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t - \mathbf{K}^{-1}]$ hat folgende Form:

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} -(K_{12}T_1 + K_{22}T_2)^2 & (K_{11}T_1 + K_{12}T_2)(K_{12}T_1 + K_{22}T_2) \\ (K_{11}T_1 + K_{12}T_2)(K_{12}T_1 + K_{22}T_2) & -(K_{11}T_1 + K_{12}T_2)^2 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Dabei wird \mathbf{C} als gemeinsamer Faktor vor die Matrix gestellt. Erfüllt der Basisvektor $\mathbf{T}^t = [T_1, T_2]$ die obige Orthogonalitätsbedingung, gilt

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{K_{11}P_z - K_{12}P_y}{K_{11}P_z - K_{22}P_y} \quad (5.41)$$

Unter symmetrischer Belastung sind $P_z = 0$, und $K_{12} = 0$. Gl. (5.41) liefert dann $T_2/T_1 = 0$. Dies stimmt mit der Verformungsfigur überein.

6.0 Das erste reduzierte Konzept

Das erste reduzierte Konzept basiert auf dem zweiten Iterationszyklus im Kapitel 4.3. Die Chan - Methode ist eine Kombination dieses Zyklus mit der Newtonschen Reihe /12/. Im wesentlichen wird hierbei die Dreieckszerlegung und das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen im gesamten Raum vermieden.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems kann mit der Newtonschen Reihe, der Summation der Anfangsverschiebungen \mathbf{U}_0 mit den Korrekturvektoren $\Delta\mathbf{U}_1, \Delta\mathbf{U}_2, \dots, \Delta\mathbf{U}_{m-1}$, dargestellt werden (Kapitel 2.4). Im reduzierten Konzept wird ausgehend vom Punkt \mathbf{U}_0 am Anfang jedes Schritts die Lösung des nichtlinearen Systems zuerst im ganzen Raum vorgenommen, um $m-1$ Korrekturvektoren $\Delta\mathbf{U}_1, \Delta\mathbf{U}_2 \dots \Delta\mathbf{U}_{m-1}$ zu bekommen, die mit \mathbf{U}_0 nach der Normierung und Orthogonalisierung die Transformationsmatrix \mathbf{T} bilden. Im weiteren Verlauf werden die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R} , beim Standard - Newton - Raphson - Verfahren auch die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , bei jeder Iteration aufgebaut. \mathbf{K} bzw. \mathbf{R} wird nach Gl. (4.2) bzw. (4.3) zur $\tilde{\mathbf{K}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{R}}$ reduziert. Man löst zuerst das reduzierte Gleichungssystem (4.4) und bekommt damit die Korrektur $\tilde{\Delta\mathbf{U}}$ im Unterraum. Der Korrekturvektor $\Delta\mathbf{U}$ wird durch Abbildung (Gl. (4.1)) bestimmt. Beim modifizierten Newton - Raphson - Verfahren ist die Reduktion der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K} bei einem Schritt nur einmal erforderlich. Die Iteration wird so lange fortgeführt, bis der Fehler kleiner als eine vorgegebene Toleranz ist. Die Fehlerkontrolle wird im ganzen Raum vorgenommen.

Chan schlägt vor, die Taylorsche Reihe durch die Newtonsche Reihe zu ersetzen, da die Erzeugung der Newtonschen Reihe viel einfacher ist. Er nimmt folgende Beziehung zwischen Newtonscher und Taylorscher Reihe an /12/

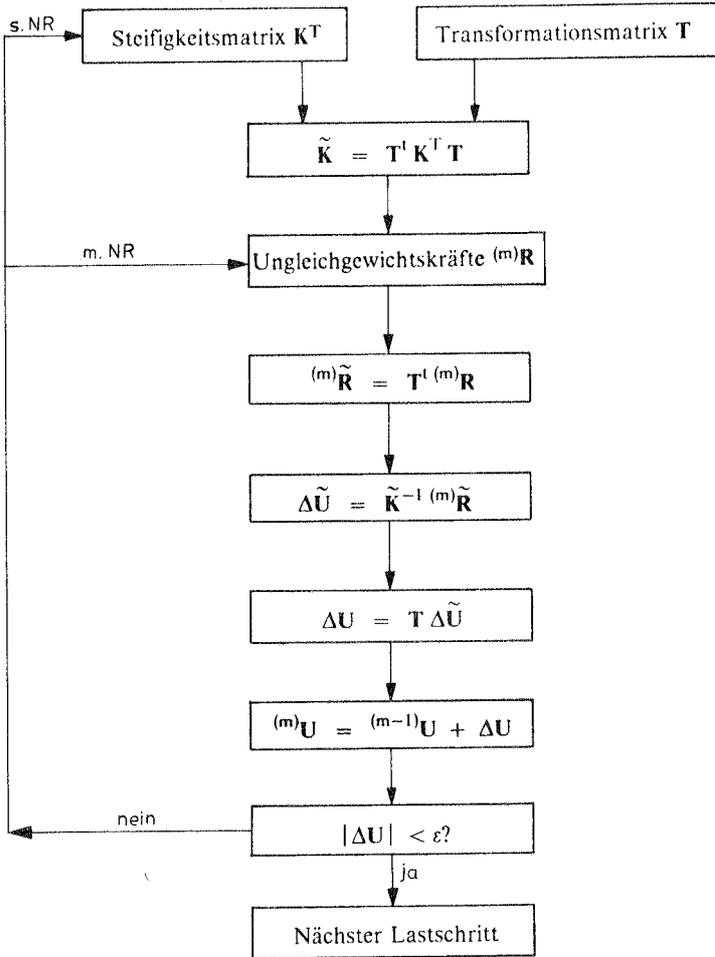
$$\Delta\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^{(i)} \frac{(1 - l_0)^i}{i!}$$

Dies ist aber nur eine grobe Näherung, da nur die ersten zwei Terme der Newtonschen und der Taylorschen Reihe identisch sind. Im allgemeinen handelt es sich um zwei verschiedene Reihen.

Bei dieser Methode sind wenige Umstellungen in einem Rechenprogramm zur Lösung der nichtlinearen Probleme nötig. Das Verfahren ist nicht auf nicht-lineare Berechnungen oder die Methode der finiten Elemente beschränkt. Alle Systemanalysen, die die Lösung von Gleichungssystemen enthalten, können mit dieser Methode behandelt werden.

Neben der Newtonschen Reihe kann der zweite Iterationszyklus auch mit anderen Vektorreihen kombiniert werden, d. h. dieses Konzept ist nicht auf die Chan - Methode beschränkt. Alle im Kapitel 3 beschriebenen Vektorreihen sind im Prinzip bei diesem Konzept verwendbar. Ist die reduzierte Basis bekannt, liegt die Transformationsmatrix \mathbf{T} vor. Die Lösung des Gleichungssystems wird mit Hilfe der Gleichungen (4.1) - (4.3) vorgenommen. Die Newtonsche Reihe von Chan /12/ und die Lagrangesche Reihe von Almroth /2/ werden im üblichen Lösungsablauf automatisch erzeugt, so daß nur eine geringe Veränderung des Programms erforderlich ist. Um eine lineare Abhängigkeit zu vermeiden, sind im allgemeinen Normierung und Orthogonalisierung erforderlich. Werden die Beulformen als Basis gewählt, ist die Orthogonalität automatisch eingeschlossen; für die Ermittlung der Beulformen wird allerdings mehr Rechenaufwand benötigt. Die Taylorsche Reihe ist auch für das erste Konzept geeignet.

Im folgenden wird der Programmablauf dargestellt.



Schema 6.1 Programmablauf des ersten Konzeptes

Bei diesem Konzept wird die Reduktion des Rechenaufwands von der Anzahl der Freiheitsgrade und der Anzahl der Basisvektoren beeinflusst. Die Effek-

tivität dieses Konzepts ist auch sehr stark von der Bandbreite der Steifigkeitsmatrix abhängig. Unter der Bandbreite einer Matrix \mathbf{K} versteht man die kleinste Zahl b , so daß $K_{ij} = 0$ für alle i, j mit $|i - j| \geq b$ gilt. Die reduzierte Matrix hat normalerweise keine Bandstruktur. Ihre Bandbreite ist dann gleich die Anzahl der Basisvektoren.

Die Anzahl der Freiheitsgrade bzw. der Basisvektoren wird mit n bzw. m bezeichnet. Die benötigten numerischen Operationen können wie folgt berechnet werden. Nur die zeitaufwendigen Multiplikationen und Divisionen werden gezählt.

$$\text{Dreieckszerlegung im gesamten Raum : } \frac{1}{2} nb^2 - \frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{2} nb + \frac{1}{3} b$$

$$\text{Dreieckszerlegung im Unterraum : } \frac{1}{6} (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

$$\text{Vorwärts - und Rückwärtseinsetzen im gesamten Raum: } 2nb - b^2 + b$$

$$\text{Vorwärts - und Rückwärtseinsetzen im Unterraum: } m(m + 1)$$

$$\text{Reduktion der Tangentensteifigkeitsmatrix: } 2bnm - mb^2 + \frac{nm(m + 1)}{2}$$

$$\text{Reduktion der rechten Seite: } m n$$

$$\text{Rücktransformation des Ergebnisses: } m n$$

Die gesamten Rechenoperationen bei der Lösung des Gleichungssystems pro Iteration mit dem Standard - Newton - Raphson - Verfahren sind:

$$O_d^s = \frac{1}{2} nb^2 - \frac{1}{3} b^3 + \frac{5}{2} nb - b^2 + \frac{4}{3} b \quad (6.1a)$$

$$O_r^s = \frac{1}{6} (m^3 + 9m^2 + 8m) + 2mn + 2bnm - b^2m + \frac{nm(m + 1)}{2} \quad (6.1b)$$

Hier sind O_d^s und O_r^s die Rechenoperationen der direkten Methode und des reduzierten Konzepts.

Die gesamten Rechenoperationen pro Schritt zur Lösung des Gleichungssystems mit dem modifizierten Newton - Raphson - Verfahren sind:

$$O_d^m = \frac{1}{2} nb^2 - \frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{2} nb + \frac{1}{3} b + L(2nb - b^2 + b) \quad (6.2a)$$

$$O_r^m = \frac{1}{6} (m^3 + 3m^2 + 2m) + 2bmn - b^2m + \frac{nm(m+1)}{2} + L[m(m+1) + 2mn] \quad (6.2b)$$

Hier ist L die Anzahl der durchschnittlichen Iterationen pro Schritt beim modifizierten Newton - Raphson - Verfahren. Die Bilder 6.1 und 6.2 veranschaulichen das Verhältnis von m/n zu O_r^s/O_d^s bzw. zu O_r^m/O_d^m für die Tangentensteifigkeitsmatrix mit voller Bandbreite. Die Kurve mit $L = 1$ im Bild 6.2 entspricht der Kurve im Bild 6.1. Mit dem Anwachsen des Parameters L verschiebt sich die Kurve nach rechts. Es gibt keine großen Unterschiede zwischen den Kurven der zwei verschiedenen Verfahren.

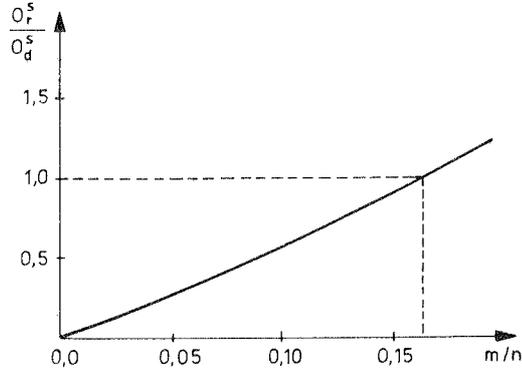


Bild 6.1 Verhältnis von m/n zu O_r^s/O_d^s für die Tangentensteifigkeitsmatrix mit voller Bandbreite

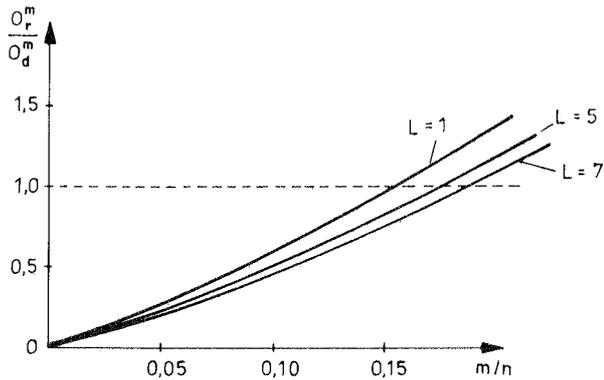


Bild 6.2 Verhältnis von m/n zu O_r^m/O_d^m für die Tangentensteifigkeitsmatrix mit voller Bandbreite

Die Kurven sind im interessierenden Bereich fast linear. Aus den Bildern kann man sehen, daß O_r/O_d größer als 1 ist, wenn m/n größer als 17% ist. In diesem Fall kann der Rechenaufwand beim System mit voller Bandbreite theoretisch nicht mehr reduziert werden.

Chan meint, daß der Erfolg dieses Konzept wesentlich von der Dimension des Gleichungssystems abhängig ist [12]. Die Formeln (6.1) und (6.2) zeigen aber, daß die Bandbreite ein wichtigeres Maß für die Effektivität dieses Konzeptes ist. Das Verhältnis O_r/O_d ist sehr stark von der Bandbreite abhängig. Im Bild 6.3 werden 4 Kurven mit $b = 0.1n$, $b = 0.25n$, $b = 0.5n$ und $b = n$ gezeigt.

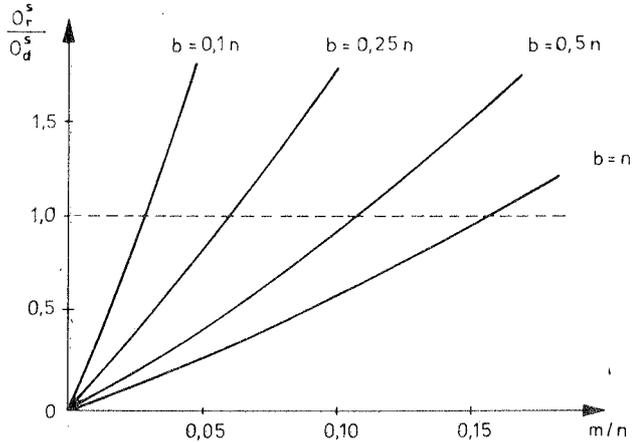


Bild 6.3 Verhältnis von m/n zu O_r^s/O_d^s für das System mit Bandstruktur

Dieses Konzept ist nur im Bereich $O_r/O_d < 1$ sinnvoll. Bei der Tangentensteifigkeitsmatrix mit voller Bandbreite ist der m/n kritische Punkt ungefähr 0.17, aber beim Bandstruktur mit $b = 0.1$ ist er nur 0.03. Der Unterschied ist sehr groß. Die Effektivität dieses Konzepts für verschiedene Basisvektoren und Bandbreite wird in Tafel 6.1 dargestellt.

$\begin{matrix} b/n \\ O_r/O_d \\ m/n \end{matrix}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.020	0.637	0.360	0.256	0.201	0.168	0.147	0.132	0.122	0.116	0.114
0.040	1.333	0.740	0.522	0.409	0.341	0.297	0.267	0.247	0.235	0.230
0.060	2.090	1.138	0.797	0.623	0.518	0.450	0.405	0.374	0.356	0.349
0.080	2.908	1.557	1.083	0.843	0.700	0.608	0.545	0.504	0.479	0.470
0.100	3.790	1.996	1.380	1.070	0.887	0.769	0.689	0.637	0.605	0.593
0.120	4.734	2.455	1.687	1.304	1.078	0.933	0.836	0.772	0.734	0.719
0.140	5.744	2.936	2.004	1.545	1.275	1.102	0.987	0.911	0.865	0.847
0.160	6.820	3.438	2.333	1.792	1.476	1.275	1.140	1.052	0.999	0.978
0.180	7.964	3.961	2.673	2.047	1.683	1.451	1.297	1.196	1.135	1.112

Tafel 6.1 Effektivität des ersten Konzepts für verschiedene Basisvektoren und Bandbreiten, gemessen mit O_r/O_d

Die Basisvektoren müssen darüber hinaus normiert, zueinander orthogonalisiert und auch erneuert werden. Das kostet zusätzliche Rechenzeit. Die Erneuerung der Basisvektoren benötigt $nm(m+1)$ Rechenoperationen. Werden die Basisvektoren bei jedem Schritt erneuert, so wird die Rechnung zuerst wie beim direkten Verfahren vorgenommen, bis m Basisvektoren $U, \Delta U_1, \Delta U_2, \dots, \Delta U_{m-1}$ erzeugt sind. Ist die Zahl der durchschnittlichen Iterationen pro Schritt L kleiner als $m-1$, kann der Rechenaufwand nicht reduziert werden, d.h. die Anzahl der Basisvektoren soll möglicherweise kleiner als $L+1$ sein. In diesem Fall sind die Rechenoperationen pro Schritt beim Standard - Newton - Raphson - Verfahren:

$$O_d = L O_d^s \quad (6.3a)$$

$$O_r = (m - 1) O_d^s + (L - m + 1) O_r^s + nm(m + 1) \quad (6.3b)$$

Es sei $L = m + 1$, dann wird das Verhältnis von O_r/O_d in Tafel 6.2 gezeigt:

$\begin{matrix} b/n \\ m/n \end{matrix} \quad O_r/O_d$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.020	0.786	0.583	0.509	0.471	0.448	0.433	0.423	0.416	0.412	0.410
0.040	1.190	0.914	0.818	0.769	0.741	0.722	0.709	0.701	0.696	0.694
0.060	1.396	1.067	0.956	0.901	0.869	0.848	0.834	0.825	0.819	0.817
0.080	1.537	1.160	1.037	0.977	0.942	0.919	0.905	0.895	0.889	0.887
0.100	1.648	1.227	1.092	1.028	0.990	0.966	0.950	0.940	0.934	0.932
0.120	1.744	1.279	1.134	1.065	1.025	1.000	0.983	0.972	0.966	0.963
0.140	1.830	1.322	1.167	1.093	1.052	1.025	1.008	0.997	0.990	0.987
0.160	1.911	1.360	1.194	1.117	1.073	1.046	1.028	1.016	1.009	1.006

Tafel 6.2 Effektivität des ersten Konzepts für verschiedene Basisvektoren und Bandbreiten mit Erneuerung der Basisvektoren bei jedem Schritt, gemessen mit O_r/O_d

Für verschiedene Bandbreiten gibt es verschiedene kritische Punkte. Die Verbindung dieser Punkte ergibt eine kritische Kurve. Im Bild 6.4 sind zwei kritische Kurven dargestellt, eine ohne Erneuerung der Basisvektoren, die andere mit Erneuerung in jedem Schritt. Werden die Basisvektoren nicht in

jedem Schritt erneuert, liegt die kritische Kurve zwischen diesen beiden Grenzkurven. Nur der Bereich unterhalb der kritischen Kurve ist für die praktische Verwendung interessant. Der Bereich, der am weitesten von der kritischen Kurve entfernt ist, ist zur Anwendung dieses Konzepts optimal.

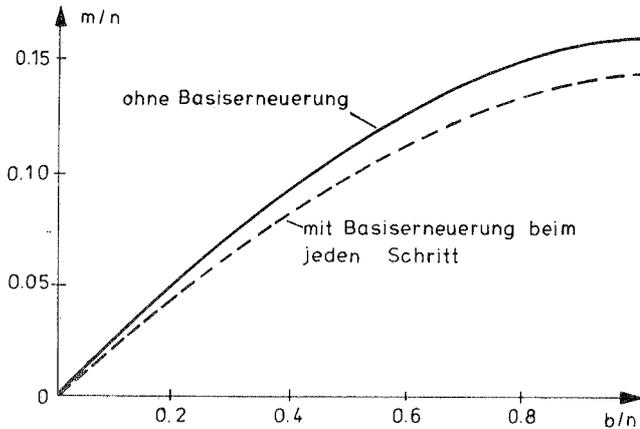


Bild 6.4 m/n kritische Kurve für das System mit Bandstruktur

Die Steifigkeitsmatrix und die Ungleichgewichtskräfte sind Funktionen der eben erreichten Verschiebungen im gesamten Raum. Sie können nicht unmittelbar aus den reduzierten Verschiebungen ermittelt werden. Es muß deshalb in jedem Iterationsvorgang zum gesamten Raum zurückgegangen werden.

Nach einer bestimmten Anzahl von Schritten wird der Fehler im gesamten Raum mit der Norm der Ungleichgewichtskräfte oder des Zuwachses der Verschiebungen überprüft. Ist der Fehler größer als die vorgegebene Toleranz, kann die Basis erneuert und durch den neuen Lösungsvektor und die Korrekturvektoren ersetzt werden.

Die wichtigsten Eigenschaften dieses Konzepts werden wie folgt zusammengefaßt:

1. Es erfordert eine geringe Programmänderung.

2. Es wird wenig zusätzlicher Speicherplatz benötigt.
3. Es ist sowohl für elastische als auch für plastische Probleme geeignet, unabhängig von der Art der Linearität.
4. Es ist sowohl für die T. L. - Formulierung als auch für die U. L. - Formulierung verwendbar, unabhängig von der Formulierung.
5. Es ist sowohl für klassische als auch für degenerierte Elemente passend, unabhängig vom Elementtyp.
6. Die Effektivität dieses Konzepts ist stark von der Bandbreite der Tangentenmatrix b abhängig. Je größer der Wert b/n ist, desto effektiver ist dieses Konzept.
7. Die Effektivität dieses Konzepts ist auch von der Anzahl der Basisvektoren m abhängig. Je kleiner der Wert m/n ist, um so wirtschaftlicher ist dieses Konzept.
8. Beim modifizierten Newton - Raphson - Verfahren kann der Rechenaufwand stärker reduziert werden als beim Standard - Newton - Raphson - Verfahren.
9. Bei jeder Iteration muß zum gesamten Raum zurückgegangen werden.

7.0 Das zweite Konzept

7.1 Vorbemerkungen

Das zweite Konzept basiert auf dem im Kapitel 4.3 vorgestellten dritten Iterationszyklus. Die wesentliche Idee liegt in der Iteration im Unterraum. Die Methode nach Noor ist eine Kombination dieses Zyklus mit der Taylorschen Reihe.

Bei der nichtlinearen Formulierung sind die Tangentensteifigkeitsmatrix bzw. der Vektor der Ungleichgewichtskräfte nichtlineare Funktionen der Verschiebungen. Sie sind üblicherweise implizite Funktionen der Verschiebungen und werden nicht durch den Verschiebungsvektor direkt ausgedrückt. Um dieses jedoch zu erreichen, ist eine andere Betrachtungsweise erforderlich.

Im zweiten Konzept wird angenommen, daß sich die potentielle Energie Π wie bei geometrischen nichtlinearen Problemen durch eine Funktion 4. Grades in den Verschiebungen mU_i ausdrücken läßt:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} F_{ij} {}^mU_i {}^mU_j + \frac{1}{3} G_{ijk} {}^mU_i {}^mU_j {}^mU_k + \frac{1}{4} H_{ijkl} {}^mU_i {}^mU_j {}^mU_k {}^mU_l \\ & - {}^m\lambda P_i {}^mU_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die Koeffizientenfelder 2., 3. bzw. 4. Stufe F_{ij} , G_{ijk} , bzw. H_{ijkl} charakterisieren die Geometrie des Systems. Mit dieser Formulierung kann der Iterationsvorgang direkt im Unterraum ablaufen. Erstmals hat Wissman /57/ 1965 empfohlen, die Nichtlinearität der Struktur mit Feldern höherer Stufe zu beschreiben. Das Feld 2. Stufe F_{ij} entspricht dem linearen Anteil der Steifigkeitsmatrix. Die Produkte des Feldes 3. bzw. 4. Stufe mit einem bzw. zwei Verschiebungsvektoren $G_{ijk} {}^mU_k$ und $H_{ijkl} {}^mU_k {}^mU_l$ liefern die nichtlinearen Anteile der Steifigkeitsmatrix. Thompson /52/ und Walker /54/ haben diese Formulierung in der Störungstechnik benutzt. Almroth /2/ bzw. Noor /39/ verwenden dieses Vorgehen kombiniert mit der Lagrange-schen bzw. Taylorschen Reihe im Sinne der Technik der reduzierten Basis.

7.2 Physikalische Bedeutung der Koeffizientenfelder

Was ist die physikalische Bedeutung der Koeffizientenfelder F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} ? Für ein konservatives Problem existiert für das diskrete System eine skalare Potentialfunktion Π (Gl. (7.1)). Die erste partielle Ableitung liefert die Gleichgewichtsbedingungen. Die zweite partielle Ableitung bestimmt die Tangentensteifigkeitsmatrix. Wie man aus den Differentiationen sofort erkennen kann, ergeben sich die Koeffizientenmatrizen aus dem Potential Π zu /31/:

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial^m U_i \partial^m U_j} \Big|_{m_u=0} \quad (7.1a)$$

$$G_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial^m U_i \partial^m U_j \partial^m U_k} \Big|_{m_u=0} \quad (7.1b)$$

$$H_{ijkl} = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \Pi}{\partial^m U_i \partial^m U_j \partial^m U_k \partial^m U_l} \quad (7.1c)$$

F_{ij} ist die Anfangstangentensteifigkeitsmatrix, $2G_{ijk}$ das Anfangskrümmungsfeld der räumlichen Kurve und $6H_{ijkl}$ das Gradientenfeld der Krümmungen. F_{ij} , G_{ijk} and H_{ijkl} sind von der Geometrie der Struktur, aber nicht von den Deformationen abhängig. Da bei der totalen Lagrangeschen Formulierung sämtliche Größen auf die unverformte Lage bezogen sind, sind bei elastischen Problemen die von den aktuellen Verschiebungen unabhängigen Koeffizientenfelder F_{ij} , G_{ijk} and H_{ijkl} konstant /19/. Bei geometrisch linearen Problemen verschwinden die Felder G_{ijk} and H_{ijkl} . Bei plastischen Problemen sind die Koeffizientenfelder Funktionen der Verschiebungen und damit nicht mehr konstant.

7.3 Bedingung zur Anwendung der Koeffizientenfelder

Eine notwendige Bedingung, um diese Formulierung anwenden zu können, ist, daß die Gleichgewichtsbedingungen in Verschiebungsvektoren und von den Verschiebungen unabhängigen Koeffizientenfeldern getrennt dargestellt werden können. Dazu sind zusätzliche Beschränkungen erforderlich:

1. Die Werkstoffmatrix muß von den Verschiebungen unabhängig sein (linear elastisches Stoffverhalten).
2. Das Bezugskordinatensystem muß fest bleiben (totale Lagrange - Formulierung).
3. Die Interpolationsfunktionen müssen von den Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen unabhängig sein. Die Verschiebungsgrößen eines beliebigen Punktes sind dann lineare Funktionen in den Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen.

Mit Koeffizientenfeldern können die symmetrischen Eigenschaften des nicht-linearen Systems durch die Indizes der Feldelemente anschaulich gemacht werden. Die Tangentensteifigkeitsmatrix und die Ungleichgewichtskräfte können dann als Summe des festen Felds 2. Stufe und der Produkte des Verschiebungsvektors mit den ständigen Feldern 3. bzw. 4. Stufe ausgedrückt werden. Nach der Transformation lassen sich Tangentensteifigkeitsmatrix und Ungleichgewichtskräfte im Unterraum als Summe der Produkte des reduzierten Verschiebungsvektors mit ständigen reduzierten Feldern explizit darstellen. Nun kann die Iteration direkt im Unterraum durchgeführt werden. Im folgenden wird diese Formulierung hergeleitet.

7.4 FE - Formulierung

Hier wird die totale Lagrange - Formulierung dargestellt. Die sämtliche Größen werden auf die unverformte Lage bezogen.

7.4.1 Verschiebungen und Verzerrungen

Die Diskretisierung der Verschiebungen ${}^m\mathbf{U}(x)$ und der Geometrie ${}^m\mathbf{X}$ erfolgt mit dem isoparametrischen Verschiebungsmodell, bei welchem sowohl die Geometrie als auch das Verschiebungsfeld in gleicher Weise interpoliert werden:

$${}^m\mathbf{X}_i = \sum \Phi^k {}^m\mathbf{X}_i^k \quad (7.2a)$$

$${}^mU_i = \sum \Phi^k {}^mU_i^k \quad (7.2b)$$

Hierin sind:

- Φ^k die Interpolationsfunktionen
- ${}^mX^k$ die Koordinaten des Knotenpunktes k im Zustand m
- ${}^mU^k$ die Verschiebungen des Knotenpunktes k im Zustand m

Der Verzerrungstensor ${}^m\varepsilon_{ij}$ ist definiert als

$${}^m\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^mU_{i,j} + {}^mU_{j,i} + {}^mU_{k,i} {}^mU_{k,j}) \quad (7.3)$$

Er läßt sich weiterhin in lineare und nichtlineare Teile aufspalten:

$${}^m\varepsilon_{ij} = {}^m\varepsilon_{ij}^L + {}^m\varepsilon_{ij}^N \quad (7.4)$$

Dabei sind:

$${}^m\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} ({}^mU_{i,j} + {}^mU_{j,i}) \quad (7.4a)$$

$${}^m\varepsilon_{ij}^N = \frac{1}{2} {}^mU_{k,i} {}^mU_{k,j} \quad (7.4b)$$

Nach Aufteilung der Verschiebungskomponenten ${}^2U = {}^1U + U$ zerlegt man die Verzerrungstensoren im Zustand 2 in:

$$\begin{aligned} {}^2\varepsilon_{ij}^L &= \frac{1}{2} ({}^2U_{i,j} + {}^2U_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2} ({}^1U_{i,j} + {}^1U_{j,i}) + \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \\ &= {}^1\varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^L \end{aligned} \quad (7.5a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^N &= \frac{1}{2} \varepsilon_{k,i}^2 \varepsilon_{k,j}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{k,i}^1 + \varepsilon_{k,i}) (\varepsilon_{k,j}^1 + \varepsilon_{k,j}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{k,i}^1 \varepsilon_{k,j}^1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{k,i}^1 \varepsilon_{k,j} + \varepsilon_{k,i} \varepsilon_{k,j}^1 + \varepsilon_{k,i} \varepsilon_{k,j}) \\ &= \varepsilon_{ij}^N + \varepsilon_{ij}^N \end{aligned} \tag{7.5b}$$

mit

$$\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{j,i}) \tag{7.6a}$$

$$\varepsilon_{ij}^N = \frac{1}{2} (\varepsilon_{k,i}^1 \varepsilon_{k,j}^1 + \varepsilon_{k,i}^1 \varepsilon_{k,j} + \varepsilon_{k,i} \varepsilon_{k,j}^1) \tag{7.6b}$$

Das Verzerrungssinkrement ist definiert als:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^N \tag{7.7}$$

Mit Gleichung (3.3) gilt

$$\varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^N = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \tag{7.8}$$

aber

$$\varepsilon_{ij}^L \neq \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}^N \neq \eta_{ij}$$

Die Verzerrungen werden in Vektorform

$$\varepsilon^1 = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]$$

geschrieben und als Produkt der Knotenverschiebungsvektoren ${}^m\mathbf{U}$ mit den konstanten Feldern \mathbf{BL} bzw. \mathbf{BN} ausgedrückt. Es sei darauf hingewiesen, daß die Elemente der Verzerrungsvektoren ${}^m\varepsilon_\alpha$ damit einfache Indizes haben. Die Anteile ${}^m\varepsilon^L$ bzw. ${}^m\varepsilon^N$ sind linear bzw. quadratisch von den Knotenverschiebungen abhängig. Sie sind definiert als :

$${}^m\varepsilon_\alpha^L = \mathbf{BL}_{\alpha i} {}^m\mathbf{U}_i \quad (7.9a)$$

$${}^m\varepsilon_\beta^N = \mathbf{BN}_{\beta ij} {}^m\mathbf{U}_i {}^m\mathbf{U}_j \quad (7.9b)$$

$$\begin{aligned} i, j &= 1, \dots, n \\ \alpha &= 1, \dots, n1 \\ \beta &= 1, \dots, n2 \end{aligned}$$

n ist die Anzahl der Freiheitsgrade des Elements. $n1$ bzw. $n2$ entspricht der Anzahl der linearen bzw. nichtlinearen Verzerrungen. Sie sind im allgemeinen gleich, können jedoch bei speziellen Tragwerken, z.B. Platten, verschieden sein.

\mathbf{BL} bzw. \mathbf{BN} ist ein Koeffizientenfeld 2. bzw. 3. Stufe. In der Matrix \mathbf{BL} sind nur die Ableitungen der Interpolationsfunktionen enthalten; die Matrix \mathbf{BN} besteht aus entsprechenden quadratischen Termen. Sowohl \mathbf{BL} als auch \mathbf{BN} sind vom aktuellen Verschiebungszustand unabhängige, d.h. konstante Koeffizientenfelder. Hierbei ist zu beachten, daß ${}^m\varepsilon^N$ quadratische Funktionen der Knotenverschiebungen sind und $\mathbf{BN}_{\beta ij}$ bezüglich der Indizes i, j symmetrisch ist. Sind \mathbf{V} und \mathbf{W} zwei Vektoren, dann gilt: $\mathbf{BN}_{\beta ij} V_i W_j = \mathbf{BN}_{\beta ji} V_j W_i$.

Beim Fachwerkelement wird nur eine nichtlineare Verzerrung betrachtet, $n2 = 1$. Dadurch wird \mathbf{BN} auf ein Koeffizientenfeld 2. Stufe reduziert.

Der lineare Anteil des Verzerrungsinkrements ε^L (Gl. (7.6a)) ist nur eine Funktion der inkrementellen Knotenverschiebungen.

$$\varepsilon_\alpha^L = \mathbf{BL}_{\alpha i} U_i \quad (7.10a)$$

Das Inkrement ε^N (Gl. (7.6b)) besteht aus den quadratischen Termen der Verschiebungsinkremente und den bekannten Verschiebungen des Zustandes I:

$$\varepsilon_{\beta}^N = \text{BN}_{\beta ij}(U_i U_j + U_i^1 U_j + U_i U_j) = \text{BN}_{\beta ij}(2^1 U_i U_j + U_i U_j) \quad (7.10b)$$

Die Variationen von m_{ε}^L und m_{ε}^N lassen sich ausdrücken durch:

$$\delta^m \varepsilon_{\alpha}^L = \text{BL}_{\alpha i} \delta^m U_i \quad (7.11)$$

$$\delta^m \varepsilon_{\beta}^N = \text{BN}_{\beta ij}^m U_i \delta^m U_j + \text{BN}_{\beta ij} \delta^m U_i^m U_j = 2\text{BN}_{\beta ij}^m U_i \delta^m U_j \quad (7.12)$$

Das Werkstoffgesetz in Matrixschreibweise lautet

$${}^m S_i = {}^m C_{ij} {}^m \varepsilon_j \quad (7.13)$$

mit der konstitutiven Matrix des Elements ${}^m C_{ij}$, dem Vektor der Piola - Kirchhoffschen Spannungen 2. Art ${}^m S_i$ und dem Vektor der Green-Lagran geschen Verzerrungen ${}^m \varepsilon_j$.

7.4.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für einen beliebigen Zustand m lautet:

$$\begin{aligned} & \int \delta^m \varepsilon {}^m C {}^m \varepsilon \, dV \\ &= \int \delta ({}^m \varepsilon^L + {}^m \varepsilon^N) {}^m C ({}^m \varepsilon^L + {}^m \varepsilon^N) \, dV \quad (7.14) \\ &= \int \delta^m \varepsilon^L {}^m C {}^m \varepsilon^L \, dV + \int (\delta^m \varepsilon^L {}^m C {}^m \varepsilon^N + \delta^m \varepsilon^N {}^m C {}^m \varepsilon^L) \, dV + \int \delta^m \varepsilon^N {}^m C {}^m \varepsilon^N \, dV \\ &= \delta^m \mathbf{U}^t {}^m \lambda \mathbf{P} \end{aligned}$$

Durch Einführung der Gleichungen (7.9a), (7.9b), (7.12a), (7.12b) in (7.14) gilt für das Gleichgewicht im Zustand m:

$$\begin{aligned}
 & \int \text{BL}_{\alpha i} \text{}^m C_{\alpha\beta} \text{BL}_{\beta j} dV \text{}^m U_j \\
 & + \int (\text{BL}_{\alpha i} \text{}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j k} + 2 \text{BN}_{\alpha i j} \text{}^m C_{\alpha\beta} \text{BL}_{\beta k}) dV \text{}^m U_j \text{}^m U_k \quad (7.15) \\
 & + \int 2 \text{BN}_{\alpha i j} \text{}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta k l} dV \text{}^m U_j \text{}^m U_k \text{}^m U_l = \text{}^m \lambda P_i
 \end{aligned}$$

Wie Mallett und Marcal /30/ beschrieben haben, werden hier drei Terme geliefert. Der erste Term ist der lineare Anteil des Systems. Der zweite ist quadratisch und der dritte kubisch von den Verschiebungen abhängig. Das Koeffizientenfeld des zweiten Terms in Gl. (7.15) ist bezüglich der Indizes i, j und k unsymmetrisch, d.h. die Indizes i, j und k sind nicht beliebig vertauschbar, das des dritten Terms ist nur bezüglich der Indizes i und j oder k und l symmetrisch. Connor und Morin /15/ haben auf die Asymmetrie hingewiesen, Rajasekaran und Murray /40/ haben gezeigt, daß diese Formulierung nicht eindeutig ist, da die einzelnen Ausdrücke in verschiedener Weise aus Einzeltermen zusammengesetzt werden können. Eine symmetrische Form ist sicherlich günstig, da sie den großen Speicherbedarf vermeidet (Kapitel 7.5).

Die Fußzeiger j,k des zweiten Terms bzw. j,k,l des dritten Terms sind "stumme Indizes", da sie nach außen nicht in Erscheinung treten (das Ergebnis ist ein Vektor mit Indizes i). Stumme Indizes dürfen umbenannt werden.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $C_{\alpha\beta}$ eine symmetrische Matrix ist und $\text{BN}_{\beta ij}$ bezüglich der Indizes i,j symmetrisch ist, werden die stummen Indizes umbenannt, um die Symmetrie der Formulierung zu verdeutlichen. Gl. (7.15) lautet dann:

$$\begin{aligned}
 & \int \text{BL}_{\alpha i} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BL}_{\beta j} dV {}^m U_j \\
 & + \int (\text{BL}_{\alpha i} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j k} + \text{BL}_{\alpha j} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta i k} + \text{BL}_{\alpha k} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta i j}) dV {}^m U_j {}^m U_k \\
 & + \frac{2}{3} \int (\text{BN}_{\alpha i j} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta k l} + \text{BN}_{\alpha i k} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j l} + \text{BN}_{\alpha i l} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j k}) dV {}^m U_j {}^m U_k {}^m U_l \\
 & = {}^m \lambda P_i
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

oder:

$$F_{ij} {}^m U_j + G_{ijk} {}^m U_j {}^m U_k + H_{ijkl} {}^m U_j {}^m U_k {}^m U_l = {}^m \lambda P_i \tag{7.17}$$

wobei:

$$F_{ij} = \int \text{BL}_{\alpha i} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BL}_{\beta j} dV \tag{7.18a}$$

$$G_{ijk} = \int (\text{BL}_{\alpha i} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j k} + \text{BL}_{\alpha j} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta i k} + \text{BL}_{\alpha k} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta i j}) dV \tag{7.18b}$$

$$H_{ijkl} = \frac{2}{3} \int (\text{BN}_{\alpha i j} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta k l} + \text{BN}_{\alpha i k} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j l} + \text{BN}_{\alpha i l} {}^m C_{\alpha\beta} \text{BN}_{\beta j k}) dV \tag{7.18c}$$

Für linear elastische Probleme sind F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} von den Knotenverschiebungen unabhängige Felder 2., 3. bzw. 4. Stufe. Sie sind die Koeffizientenmatrizen für die linearen, quadratischen bzw. kubischen Potenzen der Knotenverschiebungen in den Gleichgewichtsgleichungen. Dabei besitzen F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} bezüglich der Vertauschung beliebiger Indizes eine symmetrische Form. F_{ij} stellt die lineare Beziehung der Verschiebungen und Knotenkräfte dar. G_{ijk} koppelt die nichtlinearen und linearen Verzerrungen, H_{ijkl} wird nur von nichtlinearen Anteilen beeinflusst.

F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} werden im globalen Koordinatensystem von Koeffizientenfeldern der Elemente aufgebaut, die mit kleinen Buchstaben f_{ij} , g_{ijk} und h_{ijkl} geschrieben werden. Nach der Aufstellung müssen f_{ij} , g_{ijk} und h_{ijkl} zuerst vom lokalen zum globalen Koordinatensystem mit Hilfe der Transformationsmatrix t , die aus den Richtungscosinus besteht, transformiert werden:

$$f_{\alpha\beta}^{glo} = f_{ij}^{lok} t_{i\alpha} t_{j\beta} \quad (7.19a)$$

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{glo} = g_{ijk}^{lok} t_{i\alpha} t_{j\beta} t_{k\gamma} \quad (7.19b)$$

$$h_{\alpha\beta\gamma\delta}^{glo} = h_{ijkl}^{lok} t_{i\alpha} t_{j\beta} t_{k\gamma} t_{l\delta} \quad (7.19c)$$

d.h. F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} sind von dem Bezugskordinatensystem abhängig.

7.4.3 Linearisierung der Gleichgewichtsgleichungen

Mit der Aufteilung von 2U bzw. ${}^2\lambda$ in die bekannten Werte 1U bzw. ${}^1\lambda$ des Zustands 1 und die unbekanntten inkrementellen Größen U bzw. λ folgt aus Gl. (7.17)

$$\begin{aligned} F_{ij} ({}^1U_j + U_j) + G_{ijk} ({}^1U_j + U_j) ({}^1U_k + U_k) \\ + H_{ijkl} ({}^1U_j + U_j) ({}^1U_k + U_k) ({}^1U_l + U_l) = ({}^1\lambda + \lambda) P_i \end{aligned} \quad (7.20)$$

Der bekannte Zustand 1 ist ein Gleichgewichtszustand.

$$F_{ij} {}^1U_j + G_{ijk} {}^1U_j {}^1U_k + H_{ijkl} {}^1U_j {}^1U_k {}^1U_l = {}^1\lambda P_i \quad (7.21)$$

Die linke Seite in (7.21) entspricht dem Term $\int {}^1S_{ij} \delta e_{ij} dv$ in Gleichung (3.12). Dies sind die inneren Kräfte im Zustand 1. Damit reduziert sich Gl. (7.20) auf:

$$\begin{aligned} (F_{ij} + 2 G_{ijk} {}^1U_k + 3 H_{ijkl} {}^1U_k {}^1U_l) U_j \\ + G_{ijk} U_j U_k + 3 H_{ijkl} {}^1U_j U_k U_l + H_{ijkl} U_j U_k U_l = \lambda P_i \end{aligned} \quad (7.22)$$

Gleichung (7.22) ist die exakte Darstellung des inkrementellen Gleichgewichts für die totale Lagrange - Formulierung. Sie ist quadratisch von den bekannten Verschiebungen im Zustand I abhängig und stellt die Beziehung zwischen den Verschiebungsinkrementen und dem Inkrement des Lastfaktors dar. Sie ist ein Gleichungssystem dritter Ordnung in den Verschiebungsinkrementen, deren direkte Lösung im allgemeinen nicht möglich ist. Ist eine Beschränkung auf kleine Verschiebungsinkremente gegeben, können die quadratischen und kubischen Terme der Inkremente der Verschiebungen vernachlässigt werden. Für nichtlineare Berechnungen mit dem Newton-Raphson-Verfahren wird das Gleichungssystem zuerst linearisiert, und der Linearisierungsfehler wird dann iterativ beseitigt. Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizientenfelder und der Lastvektor unabhängig von den Verschiebungen sind, liefert die linearisierte Form:

$$(F_{ij} + 2 G_{ijk} {}^1U_k + 3 H_{ijkl} {}^1U_k {}^1U_l) U_j = \lambda P_i \quad (7.23)$$

Was ist der Zusammenhang zwischen Gl. (3.14) und Gl. (7.23)? Der erste Term in Gl. (7.23) F_{ij} entspricht der inkrementellen elastischen Steifigkeitsmatrix 1K_e in Gl. (3.14). Es kann gezeigt werden

$$({}^1K_u)_{ij} = 2 \int (BL_{\alpha i} C_{\alpha\beta} BN_{\beta jk} + BL_{\alpha j} C_{\alpha\beta} BN_{\beta ik}) dV {}^1U_k \quad (7.23a)$$

$$+ 4 \int BN_{\alpha ik} C_{\alpha\beta} BN_{\beta jl} dV {}^1U_k {}^1U_l$$

$$({}^1K_g)_{ij} = 2 \int BL_{\alpha k} C_{\alpha\beta} BN_{\beta ij} dV {}^1U_k + 2 \int BN_{\alpha ij} C_{\alpha\beta} BN_{\beta kl} dV {}^1U_k {}^1U_l \quad (7.23b)$$

Es ergibt dann

$$({}^1K_u)_{ij} + ({}^1K_g)_{ij} = 2G_{ijk} {}^1U_k + 3H_{ijkl} {}^1U_k {}^1U_l \quad (7.23c)$$

Gleichung (7.23) ergibt die Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^1K_{ij}^T$:

$${}^1K_{ij}^T = F_{ij} + 2G_{ijk} {}^1U_k + 3H_{ijkl} {}^1U_k {}^1U_l \quad (7.24)$$

Die Koeffizientenfelder F_{ij} , G_{ijk} und H_{ijkl} bieten auch die Möglichkeit, die Sekantensteifigkeitsmatrix ${}^1K_{ij}^S$, die Ungleichgewichtskräfte und einige Lösungsverfahren elegant zu formulieren. Dies ist ein wesentlicher Vorteil.

Es seien 0U , 1U zwei bekannte Verschiebungen. Die Sekantenmatrix wird durch den Differenzenquotienten gebildet:

$$\begin{aligned} {}^1K_{ij}^S &= [(F_{ij} {}^1U_j + G_{ijk} {}^1U_j {}^1U_k + H_{ijkl} {}^1U_j {}^1U_k {}^1U_l) \\ &\quad - (F_{ij} {}^0U_j + G_{ijk} {}^0U_j {}^0U_k + H_{ijkl} {}^0U_j {}^0U_k {}^0U_l)] / ({}^1U_j - {}^0U_j) \quad (7.24a) \\ &= F_{ij} + G_{ijk} ({}^1U_k + {}^0U_k) + H_{ijkl} ({}^1U_k {}^1U_l + {}^1U_k {}^0U_l + {}^0U_k {}^0U_l) \end{aligned}$$

Ist 0U der Ursprung, d.h. daß Bezugszustand gleich Ausgangszustand ist, gilt:

$${}^1K_{ij}^S = F_{ij} + G_{ijk} {}^1U_k + H_{ijkl} {}^1U_k {}^1U_l \quad (7.24b)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist der Grenzwert der Sekantensteifigkeitsmatrix. Sie kann unter der Annahme von ${}^1U \rightarrow {}^0U$ von der Sekantenmatrix abgeleitet werden.

$${}^1K_{ij}^T = \lim_{{}^0U \rightarrow {}^1U} {}^1K_{ij}^S \quad (7.24c)$$

Die Ungleichgewichtskräfte haben die Darstellung

$$R_i = {}^2\lambda P_i - F_{ij} {}^1U_j - G_{ijk} {}^1U_j {}^1U_k - H_{ijkl} {}^1U_j {}^1U_k {}^1U_l \quad (7.25)$$

7.4.4 Darstellung einiger Lösungsverfahren

Ramm /42/ hat einige numerischen Lösungsverfahren gegenübergestellt. Neben dem Newton - Raphson - Verfahren können die anderen Methoden auch mit diesen Koeffizientenfeldern deutlich dargestellt werden. Die Rekursionsformeln sind folgendermaßen zusammengefaßt:

- Euler - Verfahren

$${}^m K_{ij} = F_{ij} + 2 G_{ijk} {}^m U_k + 3 H_{ijkl} {}^m U_k {}^m U_l$$

$$\Delta U_i = ({}^m K_{ij})^{-1} {}^m (\Delta \lambda) P_j$$

$${}^{m+1} U_i = {}^m U_i + \Delta U_i$$

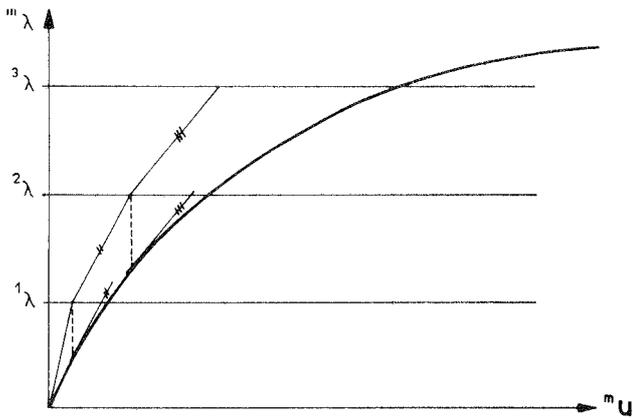


Bild 7.1 Euler - Verfahren

- Mittelpunktssteifigkeitsmethode

$${}^m K_{ij} = F_{ij} + 2 G_{ijk} [{}^m U_k + \frac{1}{2} ({}^m U_k - {}^{m-1} U_k)]$$

$$+ 3 H_{ijkl} [{}^m U_k + \frac{1}{2} ({}^m U_k - {}^{m-1} U_k)] [{}^m U_l + \frac{1}{2} ({}^m U_l - {}^{m-1} U_l)]$$

$$\Delta U_i = ({}^m K_{ij})^{-1} {}^m (\Delta \lambda) P_j$$

$${}^{m+1} U_i = {}^m U_i + \Delta U_i$$

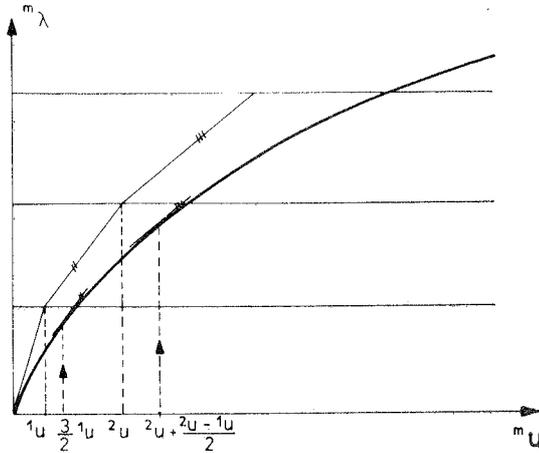


Bild 7.2 Mittelpunktssteifigkeitsmethode

- Euler - Verfahren mit Rückwärtseinsetzen

$${}^m K_{ij} = F_{ij} + 2 G_{ijk} {}^m U_k + 3 H_{ijkl} {}^m U_k {}^m U_l$$

$$R_i = {}^{m+1} \lambda P_i - F_{ij} {}^m U_j - G_{ijk} {}^m U_j {}^m U_k - H_{ijkl} {}^m U_j {}^m U_k {}^m U_l$$

$$\Delta U_i = ({}^m K_{ij})^{-1} R_j$$

$${}^{m+1} U_i = {}^m U_i + \Delta U_i$$

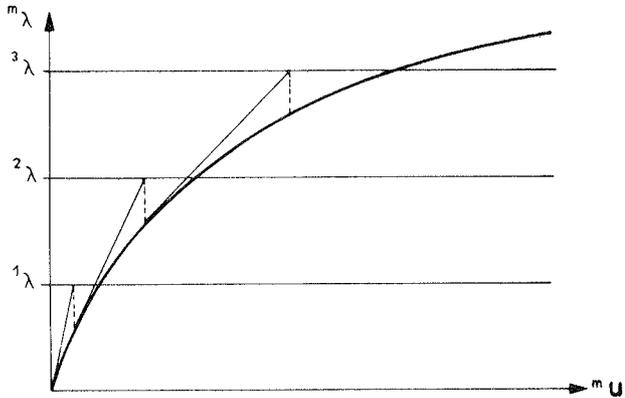


Bild 7.3 Euler - Verfahren mit Rückwärtseinsetzen

- Sukzessives Einsetzen

$${}^m K_{ij}^S = F_{ij} + G_{ijk} {}^m U_k + H_{ijkl} {}^m U_k {}^m U_l$$

$${}^{m+1} U_i = ({}^m K_{ij}^S)^{-1} P_j$$

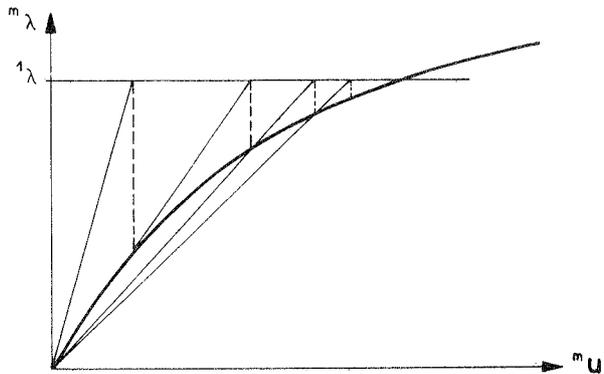


Bild 7.4 Sukzessives Einsetzen

7.4.5 Darstellung im Unterraum

Gelingt es, geeignete Basisvektoren zu finden und eine Transformationsmatrix \mathbf{T} aufzubauen, so läßt sich Gleichung (7.23) durch den genäherten Ausdruck:

$$(\tilde{F}_{\alpha\beta} + 2\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma} {}^1\tilde{U}_\gamma + 3\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^1\tilde{U}_\gamma {}^1\tilde{U}_\delta) \tilde{U}_\beta = \lambda \tilde{P}_\alpha \quad (7.26)$$

ersetzen. Dabei sind:

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = F_{ij} T_{i\alpha} T_{j\beta} \quad (7.27)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma} = G_{ijk} T_{i\alpha} T_{j\beta} T_{k\gamma} \quad (7.28)$$

$$\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} = H_{ijkl} T_{i\alpha} T_{j\beta} T_{k\gamma} T_{l\delta} \quad (7.29)$$

$$\tilde{P}_\alpha = T_{i\alpha} P_i \quad (7.30)$$

Die transformierten Koeffizientenfelder $\tilde{F}_{\alpha\beta}$, $\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma}$ und $\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind nur von der Basis abhängig. Die Tangentenmatrix und die Ungleichgewichtskräfte im reduzierten System lassen sich in jedem Iterationslösungsvorgang wie folgt ausdrücken:

$${}^1\tilde{K}_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta} + 2\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma} {}^1\tilde{U}_\gamma + 3\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^1\tilde{U}_\gamma {}^1\tilde{U}_\delta \quad (7.31a)$$

$$\tilde{R}_\alpha = {}^2\lambda \tilde{P}_\alpha - \tilde{F}_{\alpha\beta} {}^1\tilde{U}_\beta - \tilde{G}_{\alpha\beta\gamma} {}^1\tilde{U}_\beta {}^1\tilde{U}_\gamma - \tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^1\tilde{U}_\beta {}^1\tilde{U}_\gamma {}^1\tilde{U}_\delta \quad (7.31b)$$

Man braucht nicht in jedem Lastschritt zum gesamten System zurückzugehen. Die nichtlineare Berechnung über Iterationen kann in einem Unterraum, der wesentlich weniger Freiheitsgrade hat, durchgeführt werden. Nach bestimmten Schritten wird der Fehler direkt im Unterraum kontrolliert. Ist der Fehler größer als die vorgegebene Toleranz, kann die Transformationsmatrix \mathbf{T} modifiziert und das neue reduzierte System aufgebaut werden.

7.5 Speichertechnik

Die Koeffizientenfelder 3. bzw. 4. Stufe G_{ijk} bzw. H_{ijkl} haben n^3 bzw. n^4 Terme und brauchen einen sehr großen Speicherplatz. Das ist ein entscheidender Nachteil.

Bei der obigen Darstellung wird der gleiche Verschiebungsvektor für die linearen und nichtlinearen Anteile verwendet. Diese Formulierung heißt "konsistent". Um den Speicherplatz zu reduzieren, hat R. H. Gallagher /19/ eine "inkonsistente" Methode vorgeschlagen. Dabei verwendet er zur Bestimmung von G_{ijk} und H_{ijkl} einfachere Verschiebungsfelder als für F_{ij} . Die Untersuchungen von Haisler, Stricklin und Stebbins /22/, Bergan und Clough /7/ und Colville, Becker und Furlong /14/ zeigen, daß durch diese Vereinfachung die Genauigkeit der Lösung für kleine Verschiebung im Lastschritt nicht wesentlich beeinträchtigt wird. Allerdings ist die Lösung nicht mehr ein strenges Minimum der potentiellen Energie.

Miehe /31/ hat versucht, eine spezielle Elementformulierung zu benutzen. Bei ihm werden die Felder G_{ijk} und H_{ijkl} weder für das ganze System noch auf Elementebene aufgebaut und abgespeichert, sondern wiederholt gerechnet, um großen Speicherbedarf zu vermeiden. Zur Berechnung der reduzierten Koeffizientenfelder $\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma}$ und $\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ werden hier die Gleichungen (7.28) und (7.29) nicht direkt benutzt, sondern es wird zunächst von einer Formulierung auf Elementebene ausgegangen:

$$\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{e=1}^L g_{ijk}^e T_{i\alpha}^e T_{j\beta}^e T_{k\gamma}^e \quad (7.32a)$$

$$\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{e=1}^L h_{ijkl}^e T_{i\alpha}^e T_{j\beta}^e T_{k\gamma}^e T_{l\delta}^e \quad (7.32b)$$

Hierbei ist L die gesamte Anzahl der Elemente. Der rechte Kopfzeiger e deutet auf Elementebene hin. Die Matrix T^e besteht aus den entsprechenden Zeilen der Transformationsmatrix T des ganzen Systems.

Da die Elementmatrizen f_{ij} , g_{ijk} und h_{ijkl} auch symmetrisch sind, läßt sich eine reduzierte Speichertechnik verwenden. Nur die Ausdrücke der Elementmatrizen, die folgende Bedingungen erfüllen, werden gerechnet:

$$\begin{aligned} &\text{für } f_{ij}, && i \leq j \\ &\text{für } g_{ijk}, && i \leq j \leq k \\ &\text{für } h_{ijkl}, && i \leq j \leq k \leq l \end{aligned}$$

Wird mit n die Anzahl der Elementfreiheitsgrade bezeichnet, so folgt für die Anzahl der zu berechnenden Matrizelemente von f_{ij} , g_{ijk} bzw. h_{ijkl} :

$$L_f = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n (n + 1) \quad (7.33a)$$

$$L_g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} i (i + 1) = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 2) \quad (7.33b)$$

$$L_h = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} i (i + 1) (i + 2) = \frac{1}{24} n (n + 1) (n + 2) (n + 3) \quad (7.33c)$$

Für ein Fachwerkelement ist beispielsweise $n = 6$. Auf Elementebene umfassen die Matrizen f_{ij} , g_{ijk} und h_{ijkl} im zwei-, drei-, bzw. vierdimensionalen Fall insgesamt $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ bzw. $6^4 = 1296$ Matrizelemente. Mit obiger Technik reduziert sich die Anzahl der zu berechnenden Matrizelemente auf 21, 56 bzw. 126.

Es empfiehlt sich, die reduzierten Felder $\tilde{F}_{\alpha\beta}$, $\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ vollständig aufzubauen, da die Anzahl der Freiheitsgrade im reduzierten Raum sehr klein ist. Für die Berechnung der Koeffizienten kann dabei die Symmetrie ausgenutzt werden.

Nach den Gleichungen (7.32a) und (7.32b), ohne Beachtung der Randbedingungen, bestimmt man die Anzahl der Multiplikationsoperationen zur Berechnung der Koeffizientenfelder $\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma}$ und $\tilde{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aus:

$$O_{\tilde{G}} = L \left[m n^3 + n^2 m^2 + \frac{n m (m + 1)(m + 2)}{6} \right] \quad (7.34a)$$

$$O_{\tilde{H}} = L \left[mn^4 + m^2n^3 + m^3n^2 + \frac{nm(m+1)(m+2)(m+3)}{24} \right] \quad (7.34b)$$

Hier ist m die Anzahl der Freiheitsgrade des reduzierten Systems.

7.6 Elementsteifigkeitsmatrix

7.6.1 Das dreidimensionale Fachwerkelement

Beim Fachwerkelement wird nur eine Verzerrung betrachtet. Für die folgenden Überlegungen wird die lineare Ansatzfunktion verwendet.

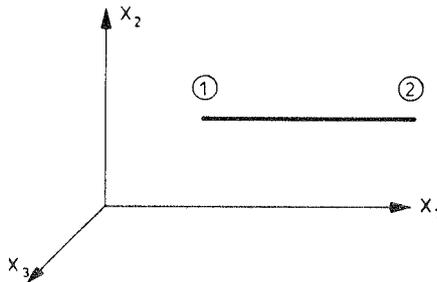


Bild 7.5 3D - Fachwerkelement im lokalen System

Die Verschiebungskomponenten im lokalen Koordinatensystem lauten:

$$\begin{bmatrix} m_{U_1} \\ m_{U_2} \\ m_{U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1-r & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{U_1^1} \\ m_{U_2^1} \\ m_{U_3^1} \\ m_{U_1^2} \\ m_{U_2^2} \\ m_{U_3^2} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Die Ableitungen nach 0X_1 werden ausgedrückt durch:

$$\begin{bmatrix} m_{U_{1,l}} \\ m_{U_{2,l}} \\ m_{U_{3,l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{U_{1,r}} \\ m_{U_{2,r}} \\ m_{U_{3,r}} \end{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial {}^0X_1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{U_1^1} \\ m_{U_2^1} \\ m_{U_3^1} \\ m_{U_1^2} \\ m_{U_2^2} \\ m_{U_3^2} \end{bmatrix} \quad (7.35a)$$

Für den linearen bzw. nichtlinearen Verzerrungsanteil gilt dann:

$${}^m\varepsilon_{11}^L = {}^mU_{1,1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1}, & 0, & 0, & \frac{1}{1}, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^mU_1^1 \\ {}^mU_2^1 \\ {}^mU_3^1 \\ {}^mU_1^2 \\ {}^mU_2^2 \\ {}^mU_3^2 \end{bmatrix} = BL_i {}^mU_i \quad (7.36)$$

$${}^m\varepsilon_{11}^N = \frac{1}{2} ({}^mU_{1,1} {}^mU_{1,1} + {}^mU_{2,1} {}^mU_{2,1} + {}^mU_{3,1} {}^mU_{3,1})$$

$$= \frac{1}{2!} [{}^mU_1^1 {}^mU_2^1 {}^mU_3^1 {}^mU_1^2 {}^mU_2^2 {}^mU_3^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^mU_1^1 \\ {}^mU_2^1 \\ {}^mU_3^1 \\ {}^mU_1^2 \\ {}^mU_2^2 \\ {}^mU_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= BN_{ij} {}^mU_i {}^mU_j \quad (7.37)$$

Die lokale Matrix f_{ij} erhält folgende Form:

Die Elemente in h_{ijkl} , die die Bedingung $i \leq j \leq k \leq l$ erfüllen, sind:

3 0 0 -3 0 0 1 0 0 -1 0 1 0 0 -1 3 0 0 1 0 1	0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 -1 0 0 0 0 1 0 0 0	-3 0 0 -1 0 -1	0 0 0	0	j=1
	3 0 0 -3 0 1 0 0 -1 1 0 0 3 0 1	0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0	0 -1 0 0 0 0	-3 0 -1	0	j=2
		3 0 0 -3 1 0 0 1 0 3	0 0 -1 0 0 0	0 -1 0	-3	j=3
			3 0 0 1 0 1	0 0 0	0	j=4
				3 0 1	0	j=5
					3	j=6
i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	

Tafel 7.2 Elemente ($i \leq j \leq k \leq l$) im lokalen Koeffizientenfeld h_{ijkl} für das dreidimensionale Fachwerkelement. Faktor $\frac{EA}{6l^3}$

Die Matrizen f_{ij} , g_{ijk} und h_{ijkl} werden von den lokalen Koordinaten in die globalen Koordinaten mit Hilfe der Transformationsmatrix t , die aus den Richtungscosinus c_1, c_2 und c_3 besteht, transformiert. Die globalen Elementmatrizen lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$f_{ij}^{glo} = f_{\alpha\beta}^{lok} t_{i\alpha} t_{j\beta} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 & -c_1c_1 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2c_2 & c_2c_3 & -c_1c_2 & -c_2c_2 & -c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3c_3 & -c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_3c_3 \\ -c_1c_1 & -c_1c_2 & -c_1c_3 & c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ -c_1c_2 & -c_2c_2 & -c_2c_3 & c_1c_2 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ -c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_3c_3 & c_1c_3 & c_2c_3 & c_3c_3 \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{glo} = g_{ijk}^{lok} t_{\alpha i} t_{\beta j} t_{\gamma k}$$

Hieraus ergibt sich:

$-3c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$3c_1$	c_2	c_3					
$-c_1$	0	c_2	c_1	0	$-3c_2$	$-c_3$	c_1	$3c_2$	c_3	
$-c_1$	c_3	0	c_1		$-c_2$	0	c_3	c_2	$-3c_3$	c_1
$-3c_1$	$-c_2$	$-c_3$			$-c_2$	$-c_1$	0	$-c_3$	0	$-c_1$
$-c_1$	0				$-3c_2$	$-c_3$		$-c_3$	$-c_2$	c_1
$-c_1$					$-c_2$			$-3c_3$		c_1
									c_1	c_2
										$3c_3$
$i=1$			$i=2$				$i=3$		$i=4$	$i=5$
										$i=6$

Tafel 7.3 Elemente ($i \leq j \leq k$) im globalen Koeffizientenfeld g_{ijk}^{glo} für das dreidimensionale Fachwerkelement. Faktor $\frac{EA}{2l^2}$

c_1, c_2 und c_3 sind die Richtungscosinus. Die ursprünglich kubischen Ausdrücke reduzieren sich nach der Transformation, so daß nur noch lineare Terme in c_j verbleiben.

Es gibt 126 Elemente im Koeffizientenfeld 4. Stufe h_{ijkl} , die die Bedingung $i \leq j \leq k \leq l$ erfüllen, davon sind 84 Elemente Null. Bemerkenswert ist, daß h_{ijkl} vor und nach der Transformation identisch ist. Dies bedeutet, daß der kubische Anteil vom Koordinatensystem unabhängig ist:

$$h^{glo} = h^{lok}$$

Die Erklärung wird im folgenden angegeben.

7.6.1.1 Die geometrische Deutung der G.L. - Verzerrungen des Fachwerkelements mit linearem Ansatz

Die Position der zwei Knoten eines Elements liegt am Anfang ${}^0p^1 ({}^0X_1, {}^0X_2, {}^0X_3)$ und ${}^0p^2 ({}^0X_1^2, {}^0X_2^2, {}^0X_3^2)$. Die Endlagen sind ${}^mp^1 ({}^mX_1, {}^mX_2, {}^mX_3)$ und ${}^mp^2 ({}^mX_1^2, {}^mX_2^2, {}^mX_3^2)$. Der Punkt P' wird durch Parallelverschiebung eingeführt, damit das Viereck ${}^mp^1 P' {}^0p^1 {}^0p^2$ ein Parallelogramm bildet. Die Länge vom Vektor $P' {}^mp^2$ wird mit Δ bezeichnet.

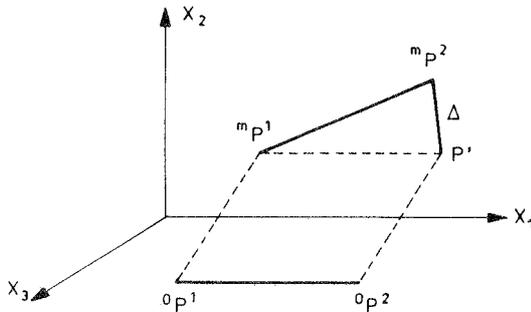


Bild 7.6 Geometrische Deutung der Green - Lagrangeschen Verzerrungen des Fachwerkelements mit linearem Ansatz

Die nichtlineare Verzerrung hat die Darstellung:

$$\varepsilon^N = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_{U_1^2} - m_{U_1^1}}{1} \right)^2 + \left(\frac{m_{U_2^2} - m_{U_2^1}}{1} \right)^2 + \left(\frac{m_{U_3^2} - m_{U_3^1}}{1} \right)^2 \right] \quad (7.42)$$

$$= \frac{\Delta^2}{2l^2}$$

ε^N ist eine Funktion der Länge der Strecke $P' m P^2$. Dies ist eine objektive Größe und unabhängig vom Koordinatensystem. Die Verschiebungen werden allgemein mit U_i oder U_j bezeichnet. In einem anderen lokalen System sind die Bezeichnungen der Verschiebungen U_α oder U_β . $t_{i\alpha}$ ist die Transformationsmatrix und

$$U_i = t_{i\alpha} U_\alpha$$

Aus der Objektivität der ε^N :

$$\begin{aligned} \mathbf{BN}_{ij} U_i U_j &= \mathbf{BN}_{ij} t_{i\alpha} t_{j\beta} U_\alpha U_\beta \\ &= \mathbf{BN}_{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta \end{aligned}$$

Aus der Definition von \mathbf{BN} im lokalen Koordinatensystem:

$$\mathbf{BN}_{ij} = \mathbf{BN}_{\alpha\beta}$$

So gilt:

$$\mathbf{BN}_{ij} = \mathbf{BN}_{ij} t_{i\alpha} t_{j\beta}$$

Die Koordinatentransformation hat keine Wirkung für \mathbf{BN} . Beim Fachelement mit linearer Ansatzfunktion sind \mathbf{BN} bzw. h_{ijkl} objektiv und vom Koordinatensystem unabhängig.

Im lokalen System ist die Anfangslage ${}^0P^1 {}^0P^2$ parallel zur Achse $O X^1$. Werden die Projektionen von $P^m P^2$ bezüglich der drei Achsen mit Δ_1, Δ_2 und Δ_3 bezeichnet, dann gilt:

$$U_{1,1} = \frac{\Delta_1}{1}$$

$$U_{2,1} = \frac{\Delta_2}{1}$$

$$U_{3,1} = \frac{\Delta_3}{1}$$

Die Verschiebungsableitungen sind vom Koordinatensystem abhängig.

7.6.2 Das zweidimensionale Scheibenelement

Die kartesischen Koordinaten ${}^mX_1, {}^mX_2$ eines beliebigen Scheibenpunktes werden ausgedrückt durch:

$${}^mX_1 = \sum_{k=1}^M \Phi^k(r, s) {}^mX_1^k \quad (7.43a)$$

$${}^mX_2 = \sum_{k=1}^M \Phi^k(r, s) {}^mX_2^k \quad (7.43b)$$

Hierin sind $\Phi^k(r, s)$ die Interpolationsfunktionen entsprechend zum Knoten k . Sie sind nur von den lokalen Koordinaten r und s abhängig. Die Koordinaten r und s decken im Element den Bereich -1 bis $+1$ ab.

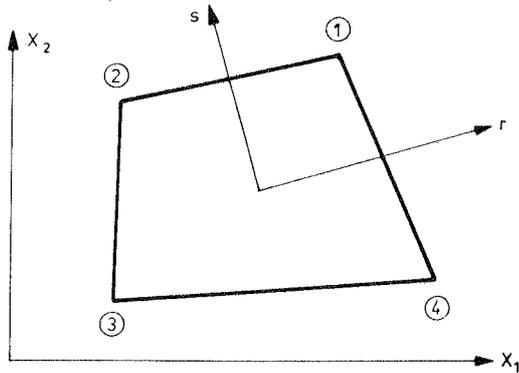


Bild 7.7 2D - Scheibelement

Knoten K	lokale Koord.		Φ^k	$\Phi_{,r}^k$	$\Phi_{,s}^k$
	r	s			
1	1	1	$1/4(1+r)(1+s)$	$1/4(1+s)$	$1/4(1+r)$
2	-1	1	$1/4(1-r)(1+s)$	$-1/4(1+s)$	$1/4(1-r)$
3	-1	-1	$1/4(1-r)(1-s)$	$-1/4(1-s)$	$-1/4(1-r)$
4	1	-1	$1/4(1+r)(1-s)$	$1/4(1-s)$	$-1/4(1+r)$

Tafel 7.5 Bilineare Ansatzfunktionen für das zweidimensionale Scheibenelement

Die Ableitungen der Koordinaten X_1 , X_2 nach r und s lauten:

$${}^mX_{1,r} = \sum_{k=1}^M \Phi_{r}^k(r, s) {}^mX_1^k \quad (7.44a)$$

$${}^mX_{1,s} = \sum_{k=1}^M \Phi_{s}^k(r, s) {}^mX_1^k \quad (7.44b)$$

$${}^mX_{2,r} = \sum_{k=1}^M \Phi_{r}^k(r, s) {}^mX_2^k \quad (7.44c)$$

$${}^mX_{2,s} = \sum_{k=1}^M \Phi_{s}^k(r, s) {}^mX_2^k \quad (7.44d)$$

Die Jakobi - Matrix besteht aus den Termen der Gleichung (7.44):

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} {}^mX_{1,r} & {}^mX_{2,r} \\ {}^mX_{1,s} & {}^mX_{2,s} \end{vmatrix} \quad (7.45)$$

Die Inversion der Jakobi - Matrix ergibt:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{vmatrix} r_{,1} & s_{,1} \\ r_{,2} & s_{,2} \end{vmatrix} \quad (7.46)$$

Die Ableitungen der Interpolationsfunktionen nach X_1 bzw. X_2 werden ausgedrückt durch:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{,1}^k \\ \Phi_{,2}^k \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{r}^k \\ \Phi_{s}^k \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Die linearen Verzerrungen lauten:

$$\begin{aligned}
 {}^m \varepsilon^L &= \begin{bmatrix} {}^m \varepsilon_{11}^L \\ {}^m \varepsilon_{22}^L \\ 2 {}^m \varepsilon_{12}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m U_{1,1} \\ {}^m U_{2,2} \\ {}^m U_{1,2} + {}^m U_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{,1}^k {}^m U_1^k \\ \Phi_{,2}^k {}^m U_2^k \\ \Phi_{,2}^k {}^m U_1^k + \Phi_{,1}^k {}^m U_2^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi_{,1}^1 & 0 & \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{,2}^1 & 0 & \Phi_{,2}^2 & 0 & \Phi_{,2}^3 & 0 & \Phi_{,2}^4 \\ \Phi_{,2}^1 & \Phi_{,1}^1 & \Phi_{,2}^2 & \Phi_{,1}^2 & \Phi_{,2}^3 & \Phi_{,1}^3 & \Phi_{,2}^4 & \Phi_{,1}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m U_1^1 \\ {}^m U_2^1 \\ {}^m U_1^2 \\ {}^m U_2^2 \\ {}^m U_1^3 \\ {}^m U_2^3 \\ {}^m U_1^4 \\ {}^m U_2^4 \end{bmatrix} \quad (7.48) \\
 &= BL_{\alpha i} {}^m U_i
 \end{aligned}$$

Der nichtlineare Verzerrungsanteil ist:

$${}^m \varepsilon^N = \begin{bmatrix} {}^m \varepsilon_{11}^N \\ {}^m \varepsilon_{22}^N \\ 2 {}^m \varepsilon_{12}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (({}^m U_{1,1})^2 + ({}^m U_{2,1})^2) \\ \frac{1}{2} (({}^m U_{1,2})^2 + ({}^m U_{2,2})^2) \\ {}^m U_{1,1} {}^m U_{1,2} + {}^m U_{2,1} {}^m U_{2,2} \end{bmatrix} = BN_{\alpha ij} {}^m U_i {}^m U_j \quad (7.49)$$

Die ausführliche Darstellung ist im Anhang 1 enthalten.

Der Piola - Kirchhoffsche Spannungstensor wird mit dem Green - Lagrangeschen Verzerrungstensor über die konstitutive Matrix \mathbf{C} verbunden.

Für den ebenen Spannungszustand gilt:

$$\begin{bmatrix} {}^mS_{11} \\ {}^mS_{22} \\ {}^mS_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m\varepsilon_{11} \\ {}^m\varepsilon_{22} \\ 2 {}^m\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

Für den ebenen Verzerrungszustand gilt:

$$\begin{bmatrix} {}^mS_{11} \\ {}^mS_{22} \\ {}^mS_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m\varepsilon_{11} \\ {}^m\varepsilon_{22} \\ 2 {}^m\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Allgemein:

$${}^mS_\alpha = {}^mC_{\alpha\beta} {}^m\varepsilon_\beta \quad (7.52)$$

Werden die Dicke des Elements mit h und die Determinante der Jakobi-Matrix mit $|\mathbf{J}|$ bezeichnet, haben die Koeffizientenfelder aus den Gleichungen (7.18a), (7.18b) und (7.18c) die Gestalt:

$$f_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 BL_{\alpha i} {}^mC_{\alpha\beta} BL_{\beta j} |\mathbf{J}| h \, d r \, ds \quad (7.53)$$

$$g_{ijk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (BL_{\alpha i} {}^mC_{\alpha\beta} BN_{\beta jk} + BL_{\alpha j} {}^mC_{\alpha\beta} BN_{\beta ik} + BL_{\alpha k} {}^mC_{\alpha\beta} BN_{\beta ij}) |\mathbf{J}| h \, d r \, ds \quad (7.54)$$

$$h_{ijkl} = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (BN_{\alpha ij}^m C_{\alpha\beta} BN_{\beta kl} + BN_{\alpha jk}^m C_{\alpha\beta} BN_{\beta li} + BN_{\alpha ik}^m C_{\alpha\beta} BN_{\beta jl}) |J| \text{hdrds} \quad (7.55)$$

Mit Hilfe der Gauß - Integration werden die Elementsteifigkeitsmatrizen numerisch integriert.

7.6.3 Balken- und Schalenelement

In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl von Balken- und Schalenelementen entwickelt. Diese Elemente können in zwei Gruppen eingeteilt werden, in klassische und degenerierte Elemente. Die Vor- und Nachteile dieser zwei Elemente werden in /42/ gegenübergestellt.

Das klassische Element wird aus der Balken- bzw. Schalentheorie hergeleitet. Das eigentliche dreidimensionale dünne Tragwerk wird durch das Verhalten der Mittelfläche beschrieben. Die statischen Größen werden zuerst über die Tragwerksdicke integriert, die Ordnung wird vom Drei- zum Zweidimensionalen reduziert, dann zu Knotengrößen diskretisiert.

Das degenerierte Element wurde von Ahmad, Irons und Zienkiewicz /1/ für lineare Berechnungen eingeführt und von Ramm /41/ und Bathe /5/ auf nichtlineare Berechnungen erweitert. Dabei werden die balken- bzw. schalentypischen Annahmen direkt mit dem finiten Elementansatz eingebracht. Die Geometrie und das Verschiebungsfeld werden vom Anfang an auf die Knotenwerte der Mittelfläche hin vollständig diskretisiert. Die Integration wird über das Elementvolumen vorgenommen.

Bei der Anwendung der Koeffizientenfelder für degenerierte Elemente treten Schwierigkeiten auf. Die Verschiebungen eines beliebigen Punktes werden mit den Verschiebungen des Mittelpunktes und den Winkeländerungen der Normalen beschrieben.

$${}^m U_i = \sum \Phi^k {}^m U_i^k + \frac{1}{2} t \sum \Phi^k h^k (\cos {}^m \psi_i^k - \cos {}^0 \psi_i^k) \quad (7.56)$$

wobei t die entsprechende lokale Koordinate der Normalen ist, ${}^m\psi_k^l$ die Winkel der Normalen zu den Koordinatenachsen und h die Elementdicke ist. Der Vektor der unbekanntem Verschiebungsgrößen enthält neben den Knotenverschiebungen auch die trigonometrischen Funktionen der Winkeländerungen der Normalen und kann deshalb nicht einfach matriziell von dem konstanten Anteil abgetrennt werden. Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, daß das degenerierte Element unter der Annahme formuliert wurde, daß die Normale ihre Länge nicht ändert. Diese Annahme wird durch Festlegung eines anisotropen Werkstoffgesetzes realisiert. Die Werkstoffmatrix enthält damit trigonometrische Funktionen in der 4. Potenz. Das widerspricht der Forderung nach konstanten Koeffizientenfeldern. Eine Verwendung des Verfahrens im Zusammenhang mit degenerierten Elementen ist daher in dieser Form nicht möglich.

7.6.4 Ableitungen nach dem Bahnparameter als Basis

Mit den Koeffizientenfeldern kann die Tangentmatrix explizit mit den Verschiebungsvektoren dargestellt werden. Das ermöglicht die Generierung der Taylorschen Vektorreihe. In der Störungstechnik zeigt die Taylorsche Reihe ${}^0\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$, ... schon gutes Approximationsverhalten. Es bietet sich somit die Möglichkeit an, die Taylorsche Reihe als Transformationsmatrix \mathbf{T} zu benutzen.

Zur Berechnung der Vektorableitungen für die Taylorreihe wird ein Parameter benötigt. Neben dem Lastfaktor λ kann auch eine einzelne Verschiebungskomponente als unabhängige Variable benutzt werden. Die Herleitung ist in /20/ und /23/ zu finden. A. K. Noor /39/ hat eine verallgemeinerte Bogenlänge s als Parameter eingeführt, der in der Bedingungsgleichung definiert wird als:

$$\alpha \left\{ \frac{\partial^m \mathbf{U}}{\partial s} \right\}^t \left\{ \frac{\partial^m \mathbf{U}}{\partial s} \right\} + \beta \left(\frac{\partial^m \lambda}{\partial s} \right)^2 = 1 \quad (7.57)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

Die ausführliche Herleitung der ersten acht Ableitungen nach der verallgemeinerten Bogenlänge wird im Anhang dargestellt. Zur Berechnung der rechten Seite in den Gleichungen (A2.1a) bis (A2.8a) werden die folgenden beiden Formeln benötigt:

$$G_{ijk} X_j Y_k = \sum_{e=1}^L g_{\alpha\beta\gamma}^e x_{\beta}^e y_{\gamma}^e \quad (7.59a)$$

$$H_{ijkl} X_j Y_k = \sum_{e=1}^L h_{\alpha\beta\gamma\delta}^e x_{\beta}^e y_{\gamma}^e z_{\delta}^e \quad (7.59b)$$

Hierbei sind \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} Vektoren auf Systemebene, und L ist die gesamte Anzahl der Elemente. Die Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} auf Elementebene bestehen aus den entsprechenden Komponenten der Vektoren \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} . Ohne Beachtung der Randbedingungen sind die benötigten Multiplikationsoperationen zur Berechnung der Gleichungen (7.59a) und (7.59b):

$$O_G = L(n^3 + n^2) \quad (7.60a)$$

$$O_H = L(n^4 + n^3 + n^2) \quad (7.60b)$$

Hierbei ist n die Anzahl der Elementfreiheitsgrade.

Die Ableitungen des Verschiebungsvektors ${}^m\mathbf{U}$ bzw. des Lastfaktors ${}^m\lambda$ werden mit ${}^m\dot{\mathbf{U}}$, ${}^m\ddot{\mathbf{U}}$, ... ${}^m\mathbf{U}^{(i)}$... bzw. ${}^m\dot{\lambda}$, ${}^m\ddot{\lambda}$, ... ${}^m\lambda^{(i)}$... bezeichnet. Unter Beachtung von

$${}^m\mathbf{U}^{(i)} = {}^1\mathbf{U}^{(i)} + \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} \quad (7.61a)$$

$${}^m\lambda^{(i)} = {}^1\lambda^{(i)} + \lambda^{(i)} = \lambda^{(i)} \quad (7.61b)$$

werden $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$, ... $\mathbf{U}^{(8)}$ und $\dot{\lambda}$, $\ddot{\lambda}$, ... $\lambda^{(8)}$ in den Gleichungen (A2.1) - (A2.8) des Anhangs direkt verwendet. Der Wert $\dot{\lambda}$ stellt auch ein sinnvolles Maß zur Unterscheidung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten dar. Am kritischen Punkt verschwindet die Determinante der Tangentensteifigkeitsmatrix. Hat $\dot{\lambda}$ dabei den Wert Null, so handelt es sich um einen Durchschlags-

punkt. Hat λ einen von Null verschiedenen Wert, dann liegt ein Verzweigungspunkt vor.

7.7 Schematisches Vorgehen

Der Rechenverlauf wird wie folgt dargestellt:

1. Aufstellung der Elementfelder \mathbf{f} , \mathbf{g} und \mathbf{h} .
2. Aufstellung der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K} im gesamten Raum.
3. Berechnung der Basisvektoren und der Transformationsmatrix \mathbf{T} . Bei der Anwendung der Lagrangeschen bzw. Newtonschen Reihe müssen die Basisvektoren zuerst normiert und orthogonalisiert werden, um die Singularität der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ zu vermeiden.
4. Transformation in den Unterraum, d.h. Berechnung von $\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ und $\tilde{\mathbf{P}}$.
5. Festlegung des Vektors ${}^0\tilde{\mathbf{U}}$ im Unterraum. Für den ersten Schritt ist ${}^0\tilde{\mathbf{U}}$ ein Nullvektor, da es am Anfang keine Verschiebung gibt. Wird die Transformationsmatrix \mathbf{T} modifiziert und dadurch eine neue reduzierte Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ berechnet, so muß der neue Anfangspunkt des Verschiebungsvektors im Unterraum mit der im Kapitel 5 dargestellten Methode der verallgemeinerten Inversen neu gebildet werden.
6. Iteration im Unterraum nach dem Newton-Raphson-Verfahren. Die Iterationen können mit Last-, Verschiebungs- bzw. Bogenlängensteuerung durchgeführt werden.
7. Fehlerkontrolle im gesamten Raum nach bestimmten Schritten. Ist der Fehler größer als die vorgegebene Toleranz, geht das Programm zurück zu 2., um eine neue Tangentensteifigkeitsmatrix erstellen und damit auch eine neue Transformationsmatrix und einen neuen Unterraum berechnen zu können. Ansonsten läuft das Programm weiter.

Noor hat das zweite Konzept mit der Taylorschen Reihe kombiniert benutzt. Bei ihm werden nach der Aufstellung der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K} die Verschiebungsableitungen berechnet (Anhang 2). Diese Verschiebungsableitungen können nur mit den Koeffizientenfeldern \mathbf{F} , \mathbf{G} und \mathbf{H} ermittelt wer-

den. Die Iteration im Unterraum wird mit Bogenlängensteuerung durchgeführt und die Schrittgrößen werden mit der Änderung des aktuellen Steifigkeitsparameters ΔS_{ak} kontrolliert. Wird ΔS_{ak} vorgegeben, dann hat die Änderung der Bogenlänge Δl die Darstellung

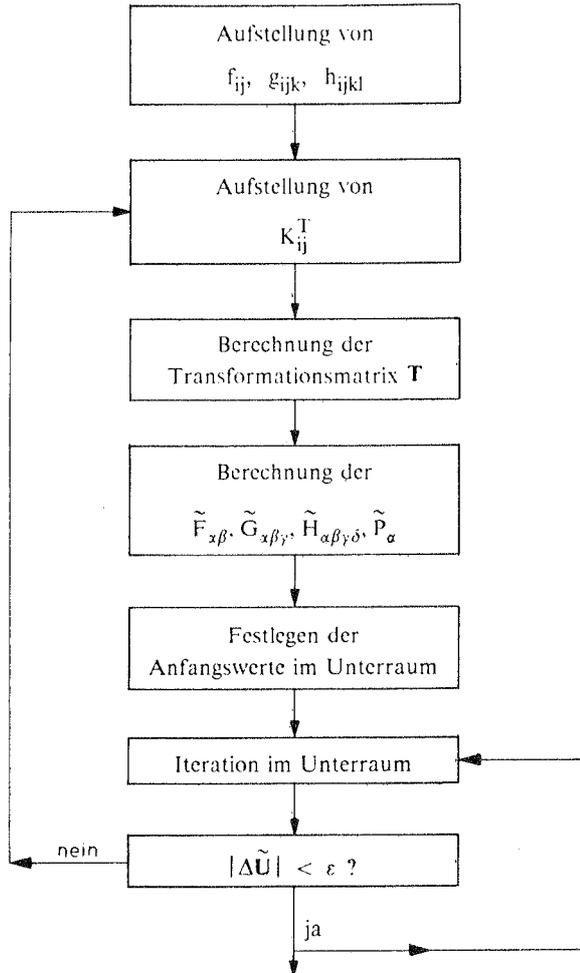
$$\Delta l = (\mathbf{P}^t \mathbf{0} \dot{\mathbf{U}}) \Delta S_{ak} / \left[\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \dot{\lambda}} (\mathbf{P}^t \mathbf{0} \dot{\mathbf{U}}) - (1 + \Delta S_{ak}) (\mathbf{P}^t \mathbf{0} \ddot{\mathbf{U}}) \right] \quad (7.62)$$

Hierin sind $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$ und $\dot{\lambda}$, $\ddot{\lambda}$ die Ableitungen nach der Bogenlänge. Das Lastinkrement ist dann

$$\Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta l \quad (7.63)$$

Die genaue Beschreibung ist in /6/, /39/ zu finden. Almroth hat das zweite Konzept zusammen mit der Lagrangeschen Reihe verwendet. Bei Almroth wird die Iteration zuerst im ganzen Raum vorgenommen, bis einige Zwischenlösungen bestimmt sind, die dann normiert und orthogonalisiert werden. Daraus wird dann die Transformationsmatrix \mathbf{T} aufgebaut.

Die anderen im Kapitel 3 beschriebenen Basisvektoren sind ebenfalls verwendbar.



Schema7.1 Programmablauf des zweiten Konzeptes

8.0 Beispiele und Bewertung

Die Leistungsfähigkeit der Technik der reduzierten Basis wird an folgenden Beispielen gezeigt.

8.1 Beispiel 8.1

Als Beispiel wird ein 3 - dimensionales Kuppel - Fachwerk von Hangai /23/ genommen. Das Fachwerk ist gelenkig gelagert und enthält 24 Elemente und 21 Freiheitsgrade (Bild 8.1). Im Lastfall A, wird das System am Mittelpunkt 1 belastet, beim Lastfall B wird es mit mehreren Knotenlasten vertikal belastet. Die Koordinaten des Systems und die Lastverteilungen sind in den Tafeln 8.1 und 8.2 angegeben.

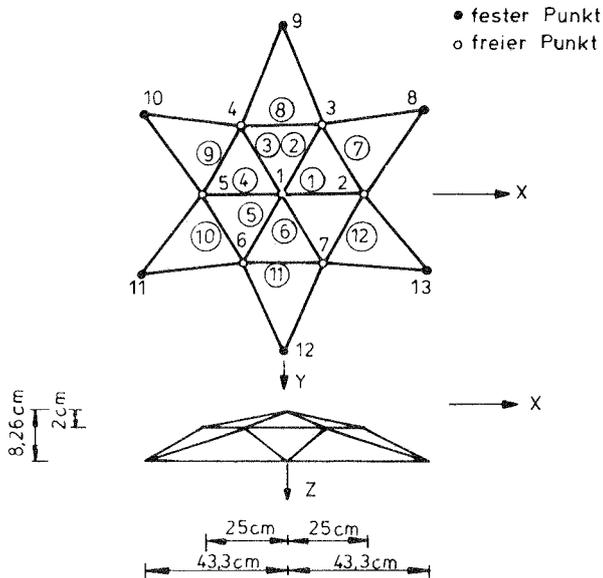


Bild 8.1 Beispiel des räumlichen Fachwerks

Knoten	X	Y	Z	Z (geo.imp)
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	25.0	0.0	2.0	1.8
3	12.5	-21.65	2.0	2.0
4	-12.5	-21.65	2.0	2.0
5	-25	0.0	2.0	1.8
6	-12.5	21.65	2.0	2.0
7	12.5	21.65	2.0	2.0
8	43.30	-25.0	8.216	8.216
9	0.0	-50.0	8.216	8.216
10	-43.30	-25.0	8.216	8.216
11	-43.30	25.0	8.216	8.216
12	0.0	50.0	8.216	8.216
13	43.30	25.0	8.216	8.216

Tafel 8.1 Koordinaten der Knoten [cm]

Knoten	Lastfall A	Lastfall B	
		perf. Last	imp. Last
1	1.0	1.0	1.0
2	0.0	2.0	2.0
3	0.0	2.0	2.0
4	0.0	2.0	1.5
5	0.0	2.0	2.0
6	0.0	2.0	2.0
7	0.0	2.0	1.5

Tafel 8.2 Verteilung der vertikalen Lasten [kN]

Zuerst wird das perfekte System für den Lastfall A behandelt. Die Berechnung wird mit dem direkten Newton - Raphson - Verfahren (Programm NISA), der Methode der Vektorüberlagerung bzw. der Technik der reduzierten Basis vorgenommen.

Bei der Vektorüberlagerungsmethode mit Taylorschen Reihen sind die Ableitungen des Verschiebungsvektors ${}^m\mathbf{U}$ und des Lastfaktors ${}^m\lambda$ nötig. Sie werden nach dem Parameter der verallgemeinerten Bogenlänge S abgeleitet. Für eine gegebene Bogenlänge S können ${}^m\mathbf{U}$ und ${}^m\lambda$ direkt ermittelt werden:

$${}^m\mathbf{U} \cong {}^0\mathbf{U} + S\dot{\mathbf{U}} + \frac{S^2}{2}\ddot{\mathbf{U}} + \frac{S^3}{6}\mathbf{U}^{(3)} \dots$$
$${}^m\lambda \cong {}^0\lambda + S\dot{\lambda} + \frac{S^2}{2}\ddot{\lambda} + \frac{S^3}{6}\lambda^{(3)} \dots$$

Keine Iteration ist erforderlich. Die Ableitungen des Verschiebungsvektors bzw. des Lastfaktors sind im Anhang 2 zu finden.

Die Ergebnisse für eine verschiedene Anzahl von Taylorschen Basisvektoren werden in den Bildern 8.2 und 8.3 angegeben. Die Kurve des Last - Verschiebungsverlaufs mit zwei Taylorschen Vektoren zweigt schon vor dem Durchschlagspunkt nach unten ab. Die Last - Verschiebungsdiagramme mit drei, vier bzw. fünf Vektoren verzweigen sich nacheinander von dem Ergebnis des direkten Verfahrens in der Nähe des Durchschlagpunktes, die Verzweigungsstellen liegen jedoch näher beieinander. In meisten Fällen sind die ersten drei Basisvektoren der Taylorschen Reihe, d.h. die Anfangsverschiebung, die Ableitung und die Krümmung der räumlichen Last - Verschiebungskurve, zur Bestimmung der Verformungsfiguren entscheidend, da die Beträge dieser drei Vektoren viel größer als die Beiträge der anderen Glieder am gesamten Tragverhalten sind. Diese Eigenschaft der Taylorschen Vektorreihe ist wichtig für die Bestimmung der Anzahl der Basisvektoren. Für einen begrenzten Wert der Bogenlänge S gibt die Vektorüberlagerungsmethode mit der Taylorschen Reihe eine gute Schätzung der Verschiebungen an. Dies ist wichtig für die praktische Anwendung.

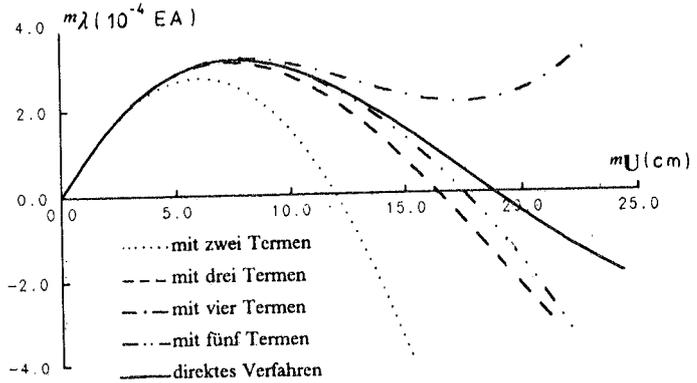


Bild 8.2 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts bei der Vektorüberlagerungsmethode mit Taylorschen Basisvektoren

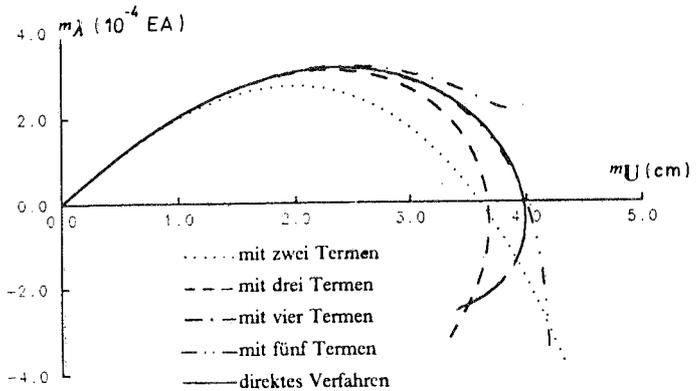


Bild 8.3 Radiale Verschiebung der Knoten 2-7 bei der Vektorüberlagerungsmethode mit Taylorschen Basisvektoren

Die Taylorschen Basisvektoren werden in Technik der reduzierten Basis eingeführt. Drei Vektoren \dot{U} , \ddot{U} , $U^{(3)}$ werden als Basis genommen und die Iteration wird nach dem zweiten reduzierten Konzept im Unterraum durchgeführt. Dabei werden die Basisvektoren in einem späteren Lastschritt nicht erneuert.

Der Verlauf der vertikalen Verschiebung des Mittelpunktes und der radialen Verschiebungen der Knoten 2-7 werden in Bildern 8.4 und 8.5 dargestellt.

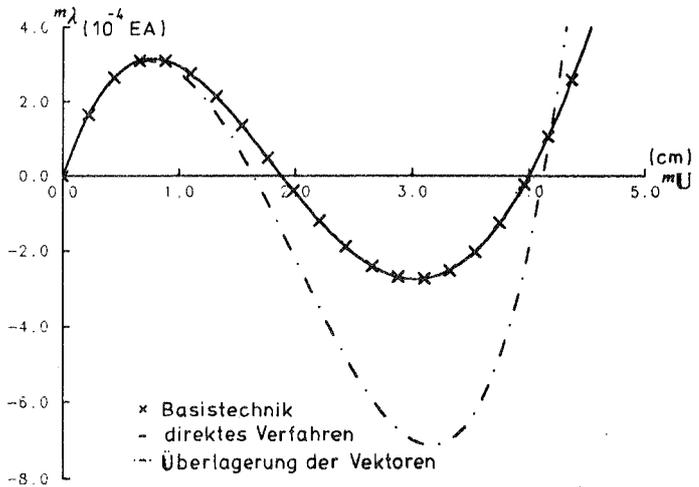


Bild 8.4 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts für den Lastfall A

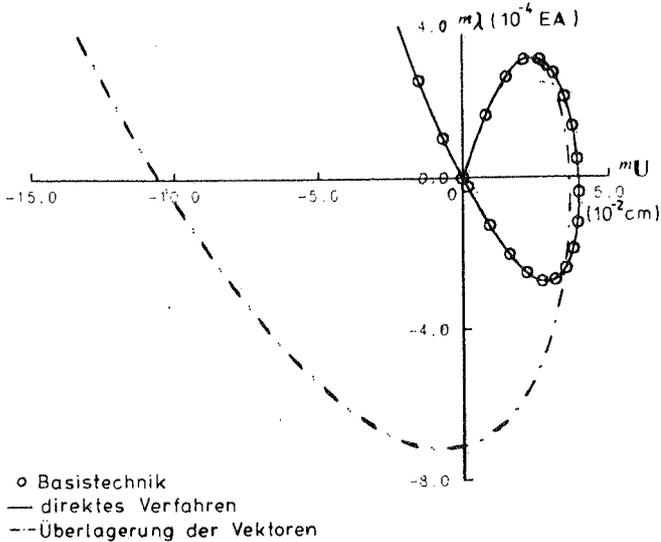


Bild 8.5 Radiale Verschiebung der Knoten 2-7 für den Lastfall A

Obwohl bei der Vektorüberlagerungsmethode und bei der Technik der reduzierten Basis drei gleiche Basisvektoren verwendet werden, ist der Unterschied der Ergebnisse sehr groß. Bei der Überlagerungsmethode ist das Ergebnis vor dem Durchschlagspunkt relativ gut, danach nimmt der Fehler mehr und mehr zu. Der Last-Verschiebungsverlauf verzweigt sich nach dem Durchschlagspunkt von dem Ergebnis des direkten Newton - Raphson - Verfahrens. Bei der Technik der reduzierten Basis wird das Ergebnis durch die Iteration im Unterraum, d.h. durch die Modifikation der Koeffizienten, deutlich verbessert. Die Lösung stimmt dabei mit der des direkten Newton - Raphson - Verfahrens fast überein.

Es wurde auch versucht, das System mit Lagrangeschen Vektoren zu behandeln. 3 Lagrangesche Vektoren werden sowohl in der Überlagerungsmethode als auch in der Basistechnik verwendet. Die Ergebnisse werden im Bild 8.6 dargestellt. Bei der Überlagerungsmethode ist der Last - Verschiebungsverlauf zwischen den Stützpunkten b und c eine gute Näherung für das Ergebnis aus der normalen Iterationsmethode. Abweichungen bestehen zwischen den Stützpunkten a und b. Sie verschärfen sich zwischen dem Ursprung und dem Punkt a. Die Anwendung der Lagrangeschen Vektorreihe in der Überlage-

der Überlagerungsmethode ist demnach unsicher. Bei der Basistechnik verschwindet diese Abweichung. Das Ergebnis stimmt mit dem des direkten Verfahrens überein.

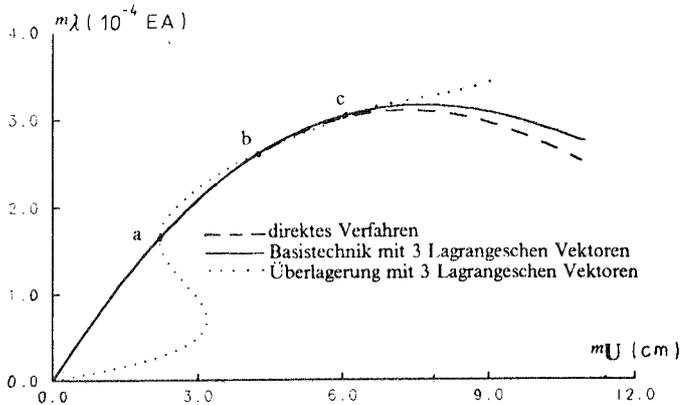


Bild 8.6 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts bei der Anwendung der Lagrangeschen Basisvektoren

Bei der Basistechnik, werden die Freiheitsgrade von 21 im ganzen Raum zu 3 im Unterraum reduziert. Die durchschnittliche Rechenzeit pro Schritt im ganzen bzw. reduzierten Gleichungssystem beträgt 0.042 Sekunden bzw. knapp 0.013 Sekunden. Die CPU-Zeit je Schritt ist bei der reduzierten Methode wegen der viel geringeren Anzahl der Freiheitsgrade deutlich weniger. Um aber die Koeffizientenfelder und die Basisvektoren aufzustellen, wird am Anfang zusätzlicher Rechenaufwand benötigt. Am Anfang der Iteration des ersten Schrittes hat der Parameter $m\lambda$ den Wert $2 \times 10^{-4}EA$, dann wird die weitere Iteration mit Bogenlängensteuerung fortgesetzt. Das Rechenzeit - Lastschritt - Diagramm beim direkten Newton - Raphson - Verfahren bzw. bei der reduzierten Technik des zweiten Konzepts mit 3 Taylorschen Basisvektoren wird im Bild 8.7 angegeben.

Falls die reduzierte Basis erneuert wird, erfordert die Berechnung einer neuen Basis und eines neuen Unterraums weitere Rechenzeit. Im Bild 8.8 wird das Schritt - Zeit - Diagramm dargestellt. Die Kurven zeigen den Aufwand für das normale Newton - Raphson - Verfahren und die Technik der reduzierten Basis. Die Basisvektoren werden nach dem fünften Lastschritt einmal erneuert, dies erfordert zusätzliche Rechenzeit. Zwar ist die direkte Iteration im Unterraum beim zweiten Reduktionskonzept viel schneller als im ganzen Raum, aber die Erneuerung der Basisvektoren und des Unterraums ist aufwendig, deswegen darf die Erneuerung nicht zu häufig gemacht werden.

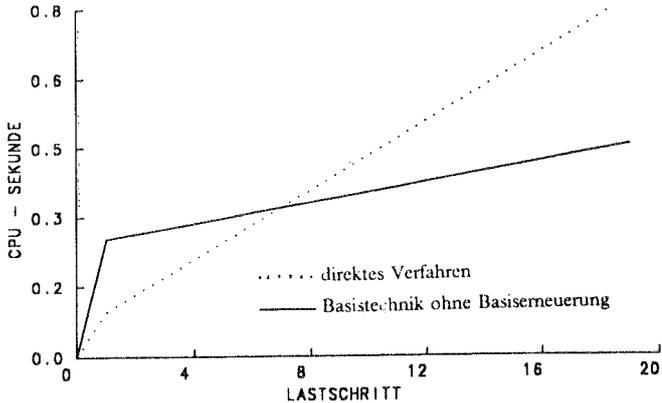


Bild 8.7 Vergleich der Rechenzeit des Beispiels für Lastfall A (ohne Basiserneuerung)

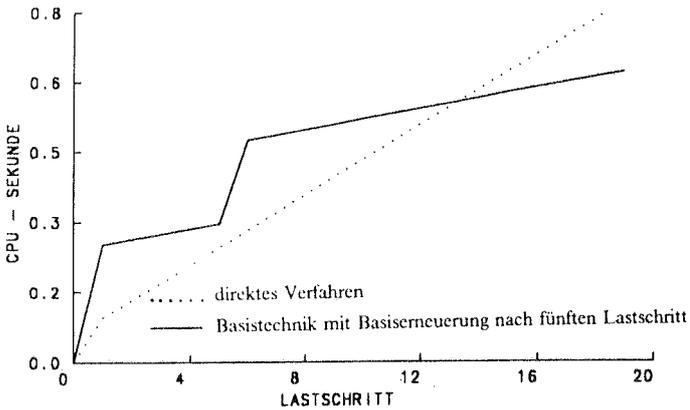


Bild 8.8 Vergleich der Rechenzeit des Beispiels für Lastfall A (mit Basiserneuerung)

Bei diesem Beispiel ist das Ergebnis von 3 Taylorschen Basisvektoren gleich mit dem von 4, 5 bzw. 6 Basisvektoren, der Unterschied des Rechenaufwands pro Lastschritt ist auch nicht sehr groß, aber die Rechenzeit zur Erzeugung der Taylorschen Reihe und Reduktion des ganzen Systems am Anfang ist fast proportional zum Quadrat der Anzahl der Basisvektoren. Ein Rechenzeitvergleich wird im Bild 8.9 gegeben. Die Anzahl der Basisvektoren beim zweiten Konzept sollte deshalb nicht größer als 6 sein. In vielen Fällen ist die optimale Anzahl der Basisvektoren 3.

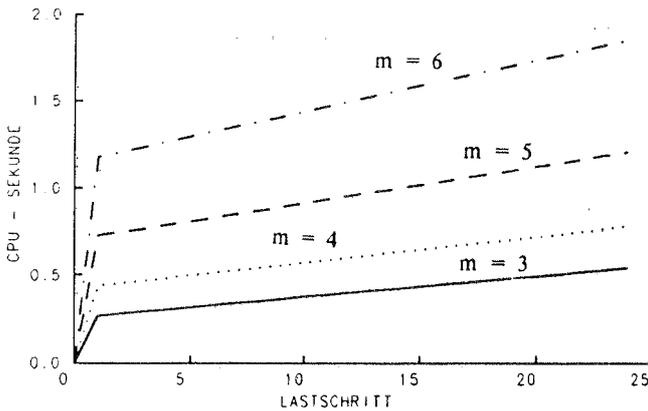


Bild 8.9 Rechenzeit für verschiedene Anzahl der Taylorschen Basisvektoren

Statt mit Taylorschen Basisvektoren kann hier die Rechnung mit der Newtonschen Reihe durchgeführt werden. Die ersten zwei Terme der Newtonschen bzw. der Taylorschen Reihe sind identisch. Der Einsatz der Newtonschen Reihe ermöglicht eine geringe Zeitersparnis gegenüber der Taylorschen Reihe, da die Newtonsche Reihe im Ablauf des Programms automatisch erzeugt wird. Die Iteration wird zuerst im ganzen Raum vorgenommen, bis die Newtonsche Vektorreihe ermittelt wird, dann wird das System von ganzem Raum in den Unterraum transformiert, was sehr aufwendig ist. Die weitere Iteration wird dann direkt im Unterraum durchgeführt. Die Rechenzeiten für die Taylorsche und für die Newtonsche Reihe werden im Bild 8.10 gegenübergestellt.

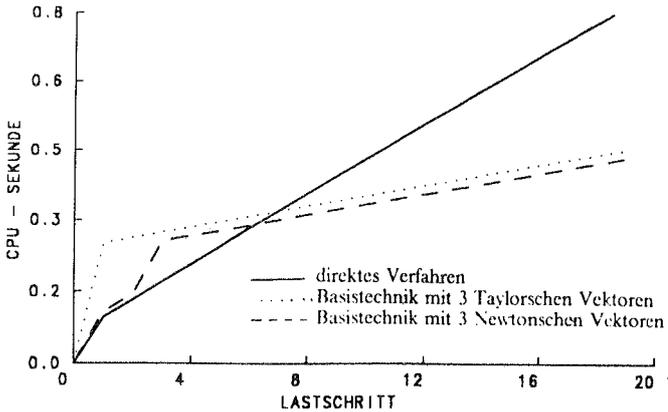


Bild 8.10 Rechenzeitvergleich des Beispiels mit Taylorscher und Newtonscher Reihe

Als Basisvektoren wurden auch Beulformen einer Anfangsbeulanalyse eingesetzt. Wird eine Beulform, kombiniert mit zwei Taylorschen Vektoren, als Basis benutzt, stimmt das Ergebnis mit dem des direkten Verfahrens sehr gut überein. Bei der Verwendung von zwei Beulformen und einem Taylorschen Vektor, wird das reduzierte System versteift. Die Versteifung des reduzierten Systems verschärft sich, wenn alle drei Basisvektoren aus Beulformen bestehen. Dieses Ergebnis wird im Bild 8.11 deutlich gezeigt. Beim Durchschlagsproblem kann die Basis der Taylorschen Vektoren meistens die Verformungsfiguren besser repräsentieren als die Basis einer gleichen Anzahl von Beulformen.

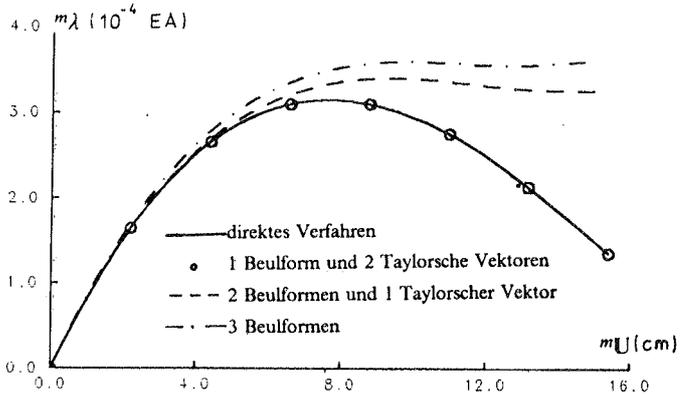


Bild 8.11 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts für den Lastfall A bei der Basistechnik mit Beulformen

Da die ersten Vektoren der Taylorschen Reihe, der Newtonschen Reihe bzw. der Beulformen zur Bestimmung des Systemverhaltens entscheidend sind, kann das System mit 3-6 Basisvektoren gut reduziert werden. Bei der Anwendung der konjugierten Basisvektoren ist das nicht der Fall. Die konjugierten Vektoren sind von dem Ausgangspunkt und der Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix abhängig. Meistens sind mehr konjugierte Basisvektoren erforderlich, um die Verformungsfigur zu repräsentieren. Dies ist ungünstig und widerspricht der Forderung nach einer begrenzten Anzahl von Basisvektoren. Bei diesem kleinen Beispiel mit 21 Freiheitsgraden wird kein brauchbares Ergebnis erzielt, selbst wenn 9 Vektoren der konjugierten Basis benutzt werden. Bei der Technik der reduzierten Basis sollten die konjugierten Basisvektoren möglichst vermieden werden.

Die Beurteilung des kritischen Punktes kann hier direkt im Unterraum mit der aktuellen Determinante $\tilde{d}_{ak} = \det(\tilde{m}\tilde{K}) / \det(\tilde{K})$ bzw. dem aktuellen Steifigkeitsparameter \tilde{S}_{ak} vorgenommen werden, da die Berechnung der Determinante und des Steifigkeitsparameters im Unterraum wegen weniger Freiheitsgraden viel einfacher ist. Für 3 Taylorsche Basisvektoren ist der \tilde{d}_{ak} –

bzw. \tilde{S}_{ak} - Verschiebungs - Verlauf zusammen mit der Last - Verschiebungskurve im Bild 8.12 eingetragen. Die Nullstellen der aktuellen Determinante zeigen sowohl die obere als auch die untere Durchschlagslast des Systems exakt an, da die Transformation das exakte Verschiebungsverhalten gut annähert. An diesen Nullstellen ist die Bedingung für Durchschlagspunkte mit $\tilde{S}_{ak} = 0$, gültig. Bild 8.13 zeigt den gleichen Determinanten- bzw. Steifigkeitsparameterverlauf als Funktion des Lastfaktors $m\lambda$. Der $\tilde{d}_{ak} - \tilde{S}_{ak}$ - Verlauf wird im Bild 8.14 dargestellt. Die Spannungen der Element 1 ~ 6 bzw. 7 ~ 12 von dem direkten Verfahren bzw. der Technik der reduzierten Basis werden in den Bildern 8.15 und 8.16 dargestellt. Die Ergebnisse beider Verfahren sind nahezu identisch.

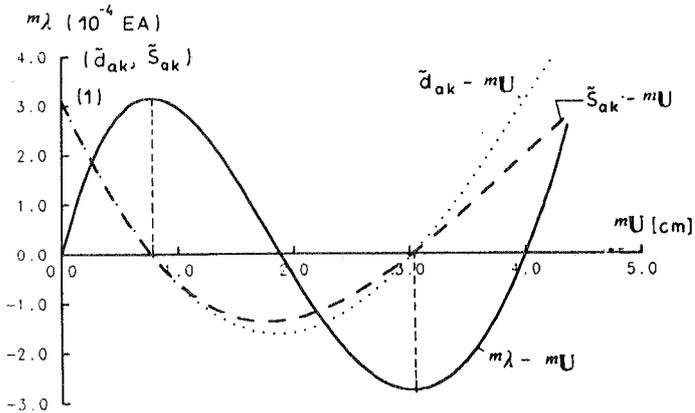


Bild 8.12 Beurteilung des kritischen Punktes mit \tilde{d}_{ak} und \tilde{S}_{ak}

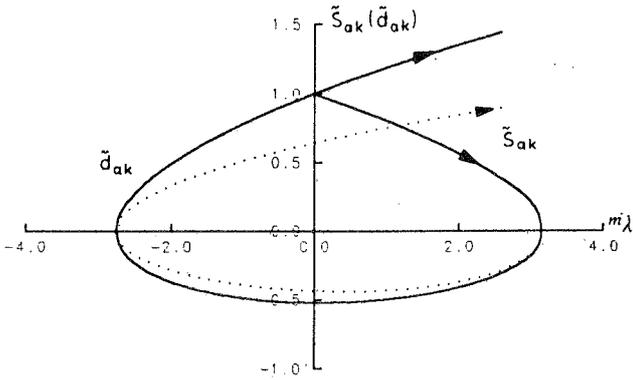


Bild 8.13 Verlauf von \tilde{d}_{ak} bzw. \tilde{s}_{ak} als Funktion des Lastfaktors $m\lambda$

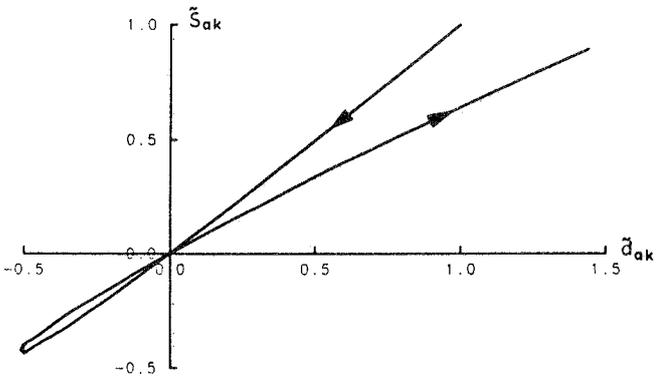


Bild 8.14 $\tilde{d}_{ak} - \tilde{s}_{ak}$ - Verlauf

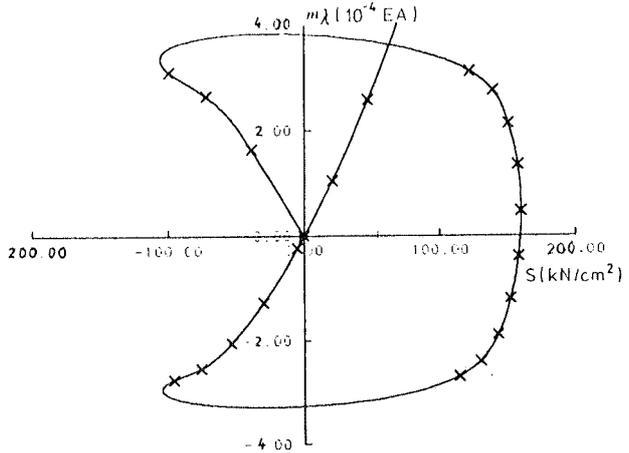


Bild 8.15 Spannungen der Elemente 1 ~ 6 [kN/cm^2]

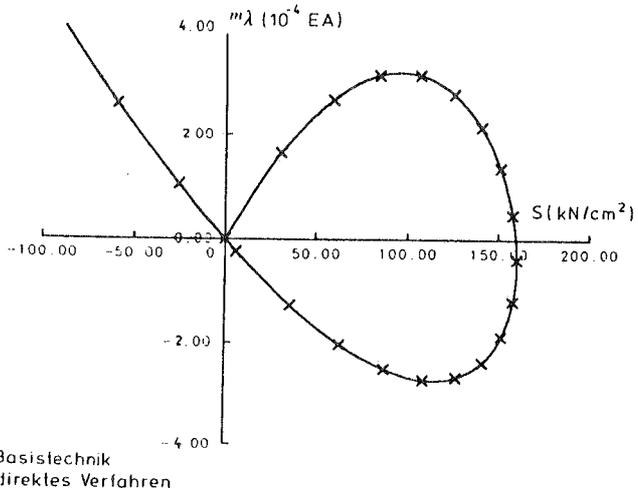


Bild 8.16 Spannungen der Elemente 7 ~ 12 [kN/cm^2]

Die Ergebnisse für den Lastfall B mit bzw. ohne geometrische Imperfektion sowie mit Lastimperfektion werden im Bild 8.17 bzw. 8.18 dargestellt.

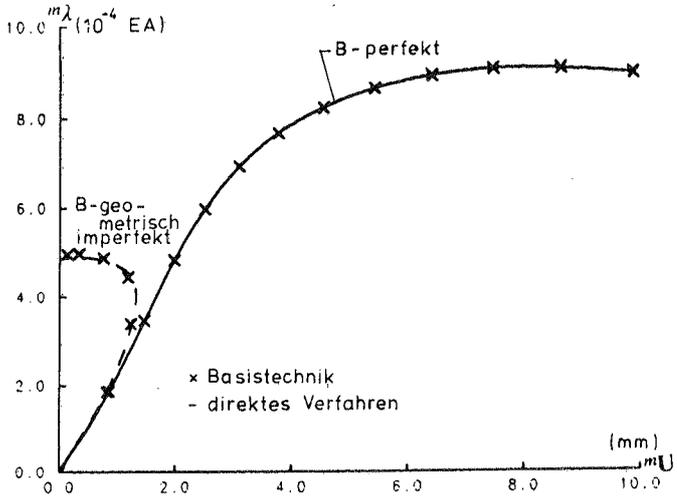


Bild 8.17 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts für den Lastfall B

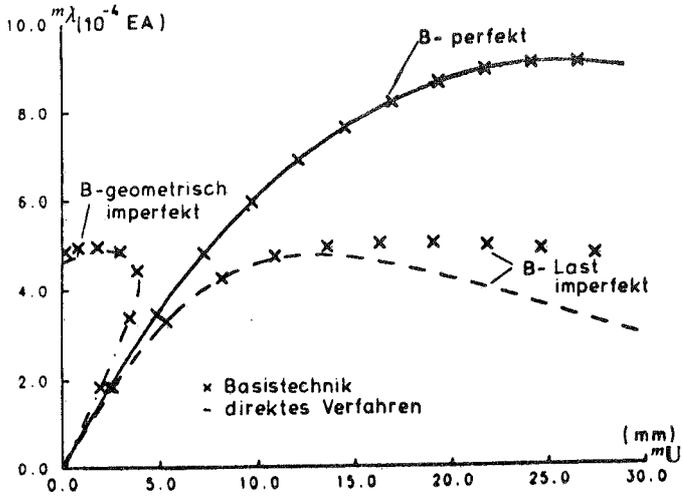


Bild 8.18 Radiale Verschiebung der Knoten 2-7 für den Lastfall B

Bild 8.19 zeigt die Last - Verschiebungskurve des Knotens 2 zusammen mit dem d_{ak} - bzw. S_{ak} - Verlauf. Am kritischen Punkt gilt $d_{ak} = 0$, aber $S_{ak} \neq 0$. Daher handelt es sich hier um ein Verzweigungsproblem.

Das System wird mit 3 verschiedenen Gruppen von Basisvektoren reduziert, d.h. mit 3 Taylorschen Vektoren, mit 2 Taylorschen Vektoren und 1 Beulform bzw. mit 1 Taylorschem Vektor und 2 Beulformen. Die entsprechenden Ergebnisse von 3 verschiedenen Unterräumen werden in den Bildern 8.20, 8.21 bzw. 8.22 dargestellt. Die Last - bzw. \tilde{S}_{ak} - Verschiebungskurven in diesen 3 Bildern stimmen mit dem Ergebnis des direkten Verfahrens im Bild 8.19 fast überein. Der Durchschlagspunkt kann in allen 3 Unterräumen mit reduzierten Größen direkt beurteilt werden; Die \tilde{d}_{ak} - Verschiebungsdiagramme haben jedoch einen anderen Verlauf.

Bei der Anwendung der Taylorschen Vektoren, enthält die Basis die Verzweigungsform nicht. Es ist deshalb nicht möglich, mit \tilde{d}_{ak} und \tilde{S}_{ak} den Verzweigungspunkt zu bestimmen. Dies beweist, daß die kritische Last auf der unsicheren Seite liegen kann, wenn sie aus den reduzierten Größen ermittelt wird.

Bilder 8.21 und 8.22 zeigen, daß man den Verzweigungspunkt im Unterraum mit reduzierten Größen nur dann bestimmen kann, wenn die Basisvektoren die Verzweigungsform enthalten.

Im Bild 8.19 hat d_{ak} - u - Verlauf einen schleifenden Schnitt mit der Abszisse. Es liefert eine unklare Aussage über den kritischen Punkt. Dies wird im Unterraum verbessert. Der Verzweigungspunkt wird an der Stelle $\tilde{d}_{ak} = 0$ und $\tilde{S}_{ak} \neq 0$ deutlich angegeben. Wenn die Basisvektoren von guter Qualität sind, können die kritischen Punkte mit reduzierten Größen bestimmt werden (Bilder 8.21 und 8.22).

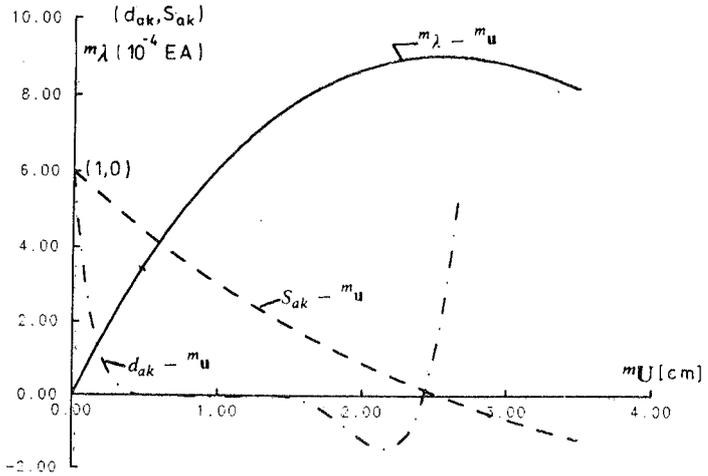


Bild 8.19 Beurteilung des kritischen Punktes mit d_{ak} und S_{ak} im ganzen Raum

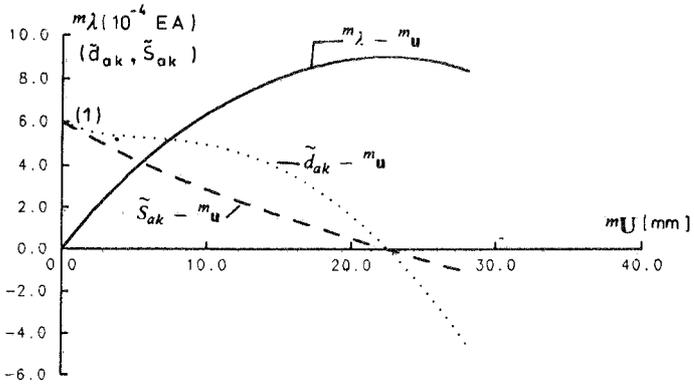


Bild 8.20 Beurteilung des kritischen Punktes mit \tilde{d}_{ak} und \tilde{S}_{ak} ; die Basis besteht aus 3 Taylorschen Vektoren.

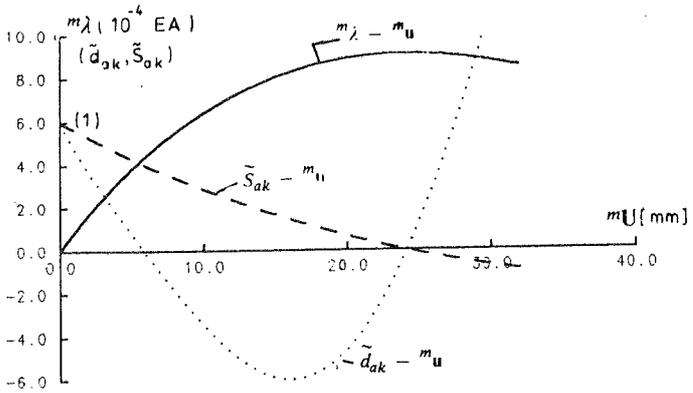


Bild 8.21 Beurteilung des kritischen Punktes mit \tilde{d}_{ak} und \tilde{S}_{ak} ; die Basis besteht aus 2 Taylorschen Vektoren und einer Beulform.

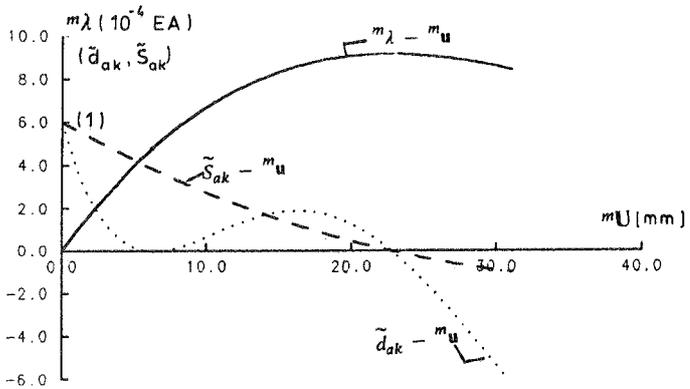


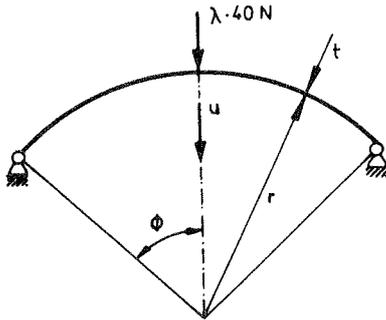
Bild 8.22 Beurteilung des kritischen Punktes mit \tilde{d}_{ak} und \tilde{S}_{ak} ; die Basis besteht aus 1 Taylorschen Vektor und 2 Beulformen.

8.2 Beispiel 8.2

Hier wird ein Kreisbogen (Bild 8.23) mit Scheibenelementen behandelt. Das System ist gelenkig gelagert und enthält 160 Elemente und 320 Freiheitsgrade. Es wird im Mittelpunkt belastet. Beim ersten Lastschritt hat der Lastfaktor λ den Wert 1. Die Iterationsmethode mit Bogenlängensteuerung wird verwendet.

Die Berechnung wird zunächst mit dem ersten Reduktionskonzept vorgenommen. 3 Newtonsche Vektoren, d.h. der gerade ermittelte Verschiebungsvektor, der lineare Anteil des Verschiebungsinkrements und der erste Korrekturvektor werden als Basis benutzt. Die Basis wird in jedem Lastschritt erneuert. Das Ergebnis stimmt mit dem des direkten Verfahrens überein. Die gebrauchte Zeit für 17 Lastschritte bei dem direkten Verfahren bzw. der Basistechnik ist 10.36 bzw. 9.68 CPU - Sekunden. Der Unterschied ist nicht groß, da die Steifigkeitsmatrix eine Bandstruktur mit $b/n = 0.025$ hat (Kapitel 6). Das System wird auch mit dem zweiten Reduktionskonzept behandelt. 3 Taylorsche Basisvektoren werden verwendet. Die Ergebnisse ohne bzw. mit Basiserneuerung werden im Bild 8.24 dargestellt. Ohne Basiserneuerung weicht der Last - Verschiebungs - Verlauf nach dem siebten Lastschritt von dem des direkten Verfahrens ab. Werden die Basisvektoren im siebten Lastschritt erneuert, wird das Ergebnis deutlich verbessert. Die Erneuerung der Basisvektoren ist eine notwendige Maßnahme, um die Richtigkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, aber sie ist auch aufwendig.

Die gebrauchte Rechenzeit wird im Bild 8.25 und 8.26 angegeben. Die durchschnittliche Rechenzeit pro Schritt im ganzen bzw. reduzierten Gleichungssystem ist 0.69 bzw. 0.02 CPU - Sekunden. Der Unterschied ist sehr groß. Für die Ermittlung der Koeffizientenfelder beim zweiten reduzierten Konzept ist am Anfang zusätzliche Rechenzeit nötig. Die Erneuerung der Basisvektoren kostet etwa 1.89 CPU - Sekunden. Die Effektivität des zweiten reduzierten Konzeptes ist von der Anzahl der Elemente, der Freiheitsgrade, der Basisvektoren und vom Typ des Elementes abhängig. Die Häufigkeit der Erneuerung der Basisvektoren ist auch für die Effektivität von großer Bedeutung.



$r = 1000 \text{ cm}$
 $t = 1 \text{ cm}$
 $b = 2 \text{ cm}$
 $E = 1.5 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$
 $\Phi = 10^\circ$

Bild 8.23 Beispiel des Kreisbogens mit Scheibenelementen

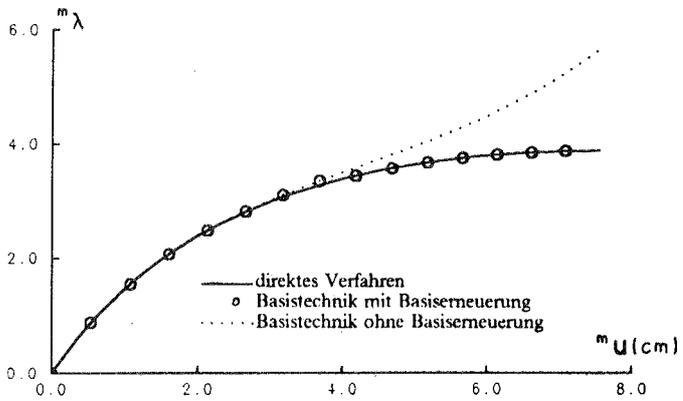


Bild 8.24 Vertikale Verschiebung des Mittelpunkts

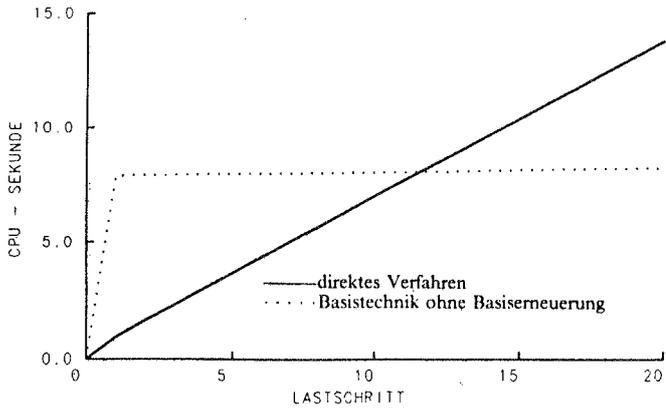


Bild 8.25 Vergleich der Rechenzeit des Beispiels (ohne Basiserneuerung)

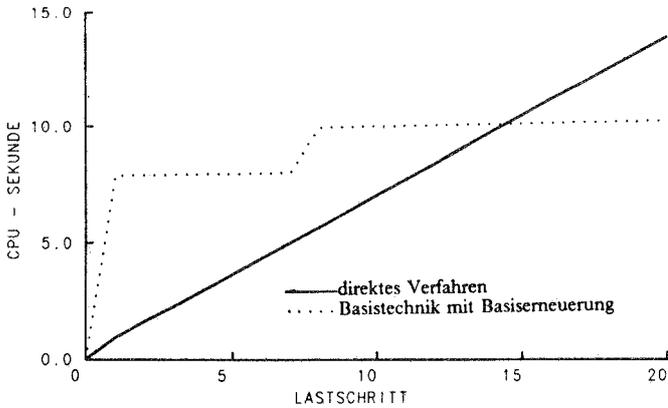


Bild 8.26 Vergleich der Rechenzeit des Beispiels (mit Basiserneuerung)

Die Iteration im Unterraum werde mit L Lastschritten ohne Basiserneuerung vorgenommen. Die gebrauchte Zeit wird für einen Schritt im reduzierten

Unterraum bzw. gesamten Raum mit Z_{r1} bzw. Z_d und für die Erneuerung der Basisvektoren und des Unterraumes mit Z_{r2} bezeichnet. Dieses Konzept ist nur sinnvoll, wenn L die folgende Bedingung erfüllt

$$L Z_{r1} + Z_{r2} < L Z_d$$

oder

$$L > \frac{Z_{r2}}{Z_d - Z_{r1}}$$

Der minimale Wert von L , der die obige Bedingung erfüllt, wird als L_{\min} bezeichnet. L_{\min} ist von der Anzahl der Freiheitsgrade und der Basisvektoren abhängig. Für das System mit 21, 41, 81 bzw. 161 Scheibenelementen und Freiheitsgraden $n = 40, 80, 160$ bzw. 320 wird die Anzahl der Basisvektoren m variiert, um L_{\min} zu berechnen. Die Ergebnisse werden in Bildern 8.24 und 8.25 dargestellt.

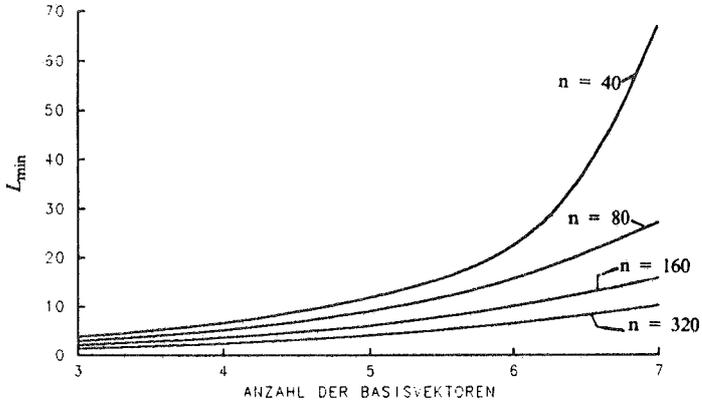


Bild 8.27 L_{\min} als Funktion der Anzahl der Basisvektoren m

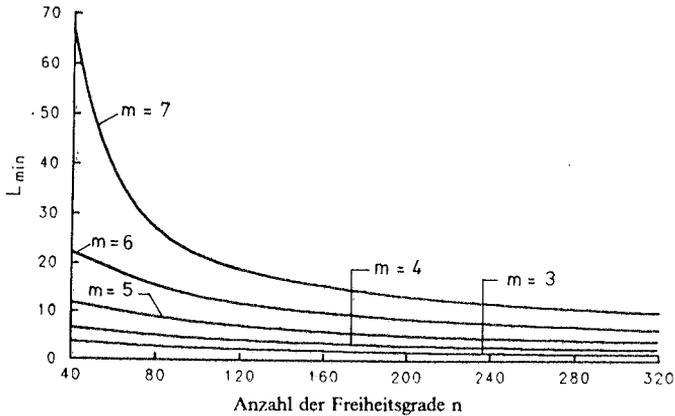


Bild 8.28 L_{\min} als Funktion der Anzahl der Freiheitsgrade n

L_{\min} nimmt mit dem Zuwachs der Anzahl der Basisvektoren m zu, und reduziert sich, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade zunimmt. Je mehr Freiheitsgrade das System hat und je weniger Basisvektoren verwendet werden, um so günstiger ist die Anwendung dieses Konzepts. Falls 7 Basisvektoren angewendet werden, ist L_{\min} größer als 60 für das System mit 40 Freiheitsgraden und 10 für das System mit 320 Freiheitsgraden. Für das System mit 40 Freiheitsgraden muß, um die Rechenzeit zu reduzieren, die direkte Iteration im Unterraum mindestens 60 Lastschritte ohne Basiserneuerung vorgenommen werden. Für das System mit 320 Freiheitsgraden mindestens 10 Schritte. Falls 3 Basisvektoren verwendet werden, ist der entsprechende Wert für das System mit 40 bzw. 320 Freiheitsgraden nur 4 bzw. 2. Die Rechenzeit für die Basiserneuerung und für die Reduktion vom ganzen Raum in den Unterraum ist stark von der Anzahl der Basisvektoren abhängig. Numerische Erfahrungen zeigen, daß die Anzahl der Basisvektoren nicht größer als 6 sein sollte.

8.3 Beispiel 8.3

Hier wird ein geometrisch nichtlineares plastisches Problem mit der Fließbedingung nach von Mises behandelt.

Eine ebene Platte mit einem Loch in der Mitte ist am Rand symmetrisch belastet (Bild 8.29). Das Material ist elastoplastisch mit einer Streckgrenze von 24.5 kN/cm^2 . Aus Symmetriegründen wird hier ein Viertelsystem betrachtet. Die Unterteilung in Elemente wird im Bild 8.30 dargestellt.

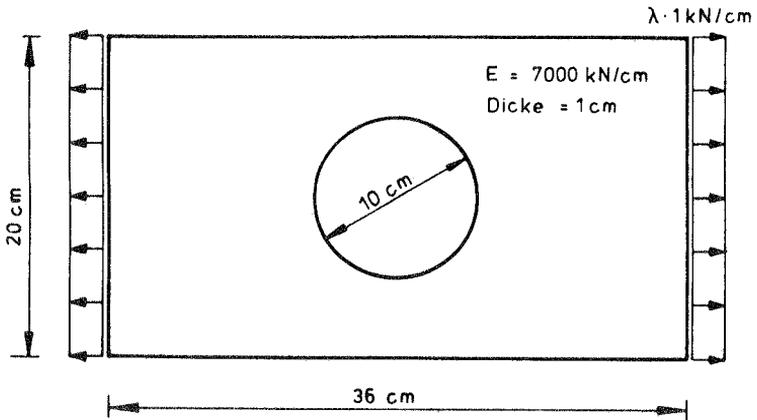


Bild 8.29 Beispiel der ebenen Platte

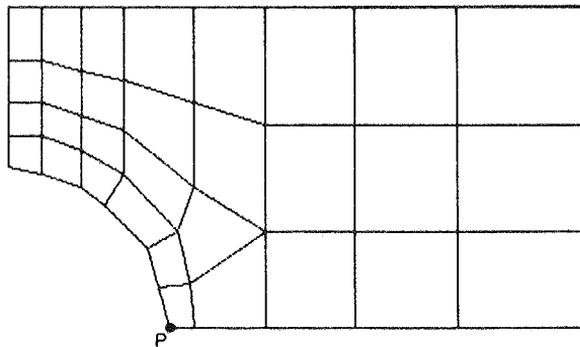


Bild 8.30 Unterteilung der Platte

Für plastische Probleme ist das zweite Konzept der reduzierten Technik nicht geeignet. Die Berechnung wird dann mit dem ersten Konzept der reduzierten Technik vorgenommen. Dadurch kann die Taylorsche Basis nicht ermittelt werden. Die Platte ist unter Zugbelastung, in diesem Fall ist die Basis der Eigenformen auch nicht sinnvoll.

Die Iteration wird mit Laststeuerung vorgenommen. Der Zuwachs für einen Lastschritt ist $\lambda = 0.35$. 3 Vektoren von der Newtonschen bzw. Lagrange-schen Reihe werden als Basis benutzt. Bei der Anwendung der Newtonschen Reihe werden die Basisvektoren bei jedem Schritt neu berechnet, d. h. am Anfang jedes Schritts werden 2 Iterationen wie beim direkten Newton - Raphson - Verfahren vorgenommen. Die Ergebnisse davon und die Anfangsverschiebung bilden die Basisvektoren. Die weiteren Iterationen werden mit der reduzierten Technik berechnet. Bei der Anwendung der Lagrange-schen Vektoren werden 3 Zwischenlösungen ${}^{m-3}\mathbf{U}$, ${}^{m-2}\mathbf{U}$, ${}^{m-1}\mathbf{U}$ als Basis verwendet, um die Lösung des nächsten Lastschrittes ${}^m\mathbf{U}$ zu ermitteln. Die Basisvektoren werden am Ende jedes Lastschrittes erneuert. Die Ergebnisse der Newtonschen Basisvektoren sind fast identisch mit den Ergebnissen des NR - Verfahrens ohne Reduktion. Im elastischen Bereich ermittelt die Reduktionstechnik mit der Lagrangeschen Basisvektoren ebenfalls gute Ergebnisse. Im plastischen Bereich können die berechneten Zwischenlösungen die Verformungsfiguren nicht mehr repräsentieren. Das reduzierte System wird versteift. Die Verschiebung des Punktes P wird im Bild 8.31 angegeben. Für das System mit größeren Verformungen sind die Newtonschen Basisvektoren günstiger als die Lagrangeschen Basisvektoren. Die elastische bzw. plastische Zone am Ende der Rechnung sind bei der reduzierten Technik mit Newton-schen Basisvektoren und beim direkten Verfahren fast gleich und werden im Bild 8.32 angegeben.

Bei diesem System ist die Anzahl der Freiheitsgrade 79 und die Bandbreite 16. Wird das System mit drei Basisvektoren reduziert, gilt $m/n \cong 0.04$, $b/n \cong 0.2$. Nach Tafel 6.2 ist $O_r/O_d \cong 0.9$. Der Unterschied des Rechenauf-wands ist nicht sehr groß. Die CPU - Zeit für sechs Schritte beim direkten bzw. reduzierten Verfahren ist 95.19 bzw. 88.64 Sekunden.

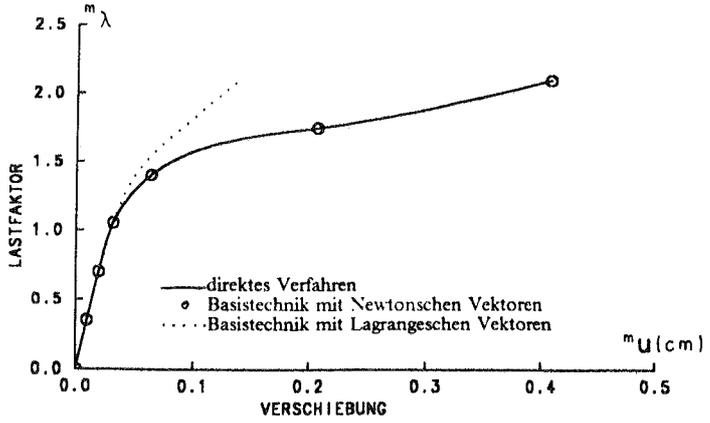


Bild 8.31 Horizontale Verschiebung des Punktes P

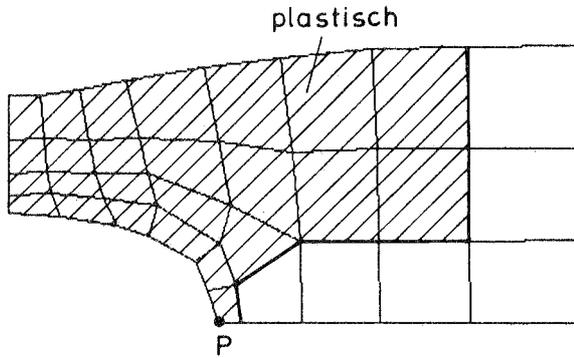


Bild 8.32 Elastische bzw. plastische Zonen

8.4 Beispiel 8.4

Hier wird eine Zylinderschale behandelt. Sie hat einen Radius von 291,6, eine Höhe von 323,68 und eine Dicke von 0,810mm. Sie ist am Rand gelenkig gelagert und gleichmäßig in der axialen Richtung mit $q = m\lambda \cdot 89,59 \text{ N/mm}$ belastet. 40 Rechtecksteifen mit einer Höhe von 323,68, einer Breite von 4,86 und einer Dicke von 0,810mm haben die Zylinderschale in der axialen Richtung verstärkt. Das Material ist elastisch. Wegen Symmetrie wird hier nur ein Vierzigstel dieser Zylinderschale betrachtet (Bild 8.33). Dieser Sektor wird in 49 Schalenelemente unterteilt. Davon sind 21 Elemente auf 3 Steifen und 28 Elemente auf die Schale verteilt. Ein degeneriertes 8 - Knoten Schalenelement wird verwendet. Mit 5 Freiheitsgraden für jeden Knotenpunkt ergeben sich insgesamt 632 Unbekannte.

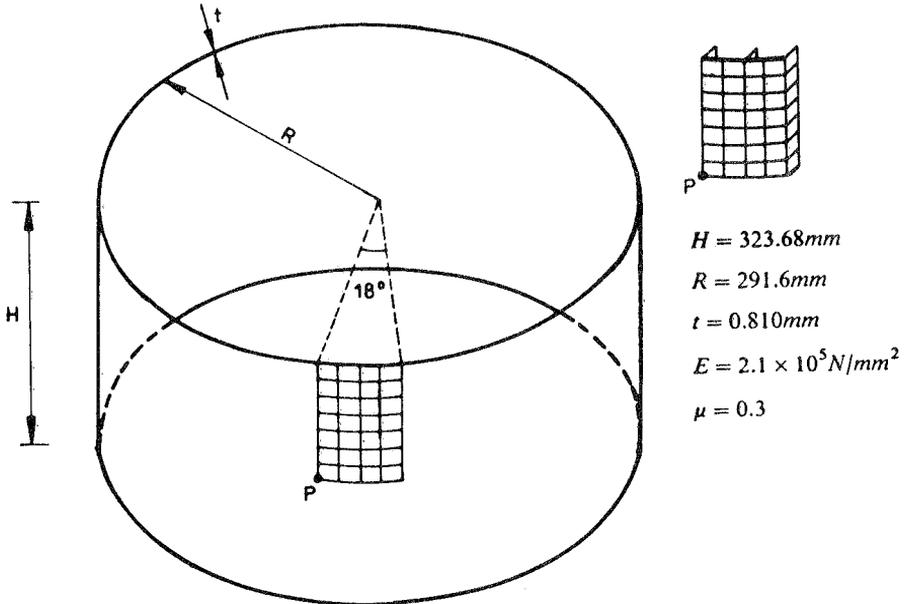


Bild 8.33 Beispiel der Zylinderschale

Die Berechnung wird im direkten Verfahren bzw. in der reduzierten Technik des ersten Konzeptes mit Bogenlängensteuerung vorgenommen. Der An-

fangswert des Lastfaktors $m\lambda$ ist 1. Bei der reduzierten Technik werden 3 Vektoren der Newtonschen Reihe, der Lagrangeschen Reihe bzw. der Kombination einer Eigenform und zwei Newtonschen Vektoren als Basis benutzt. Die Basisvektoren werden in jedem Lastschritt erneuert. Das Last - Verschiebungsdiagramm für die radiale Verschiebung des Punktes P wird im Bild 8.34 gegeben. Die Ergebnisse der Newtonschen Reihe stimmen mit dem des direkten Verfahrens fast überein. Die Ergebnisse von 3 Lagrangeschen Vektoren bzw. die der Kombination einer Eigenform mit zwei Newtonschen Vektoren sind vor dem Durchschlagspunkt fast identisch mit dem des direkten Verfahrens. Nach dem Durchschlagspunkt ist die Lösung der Lagrange-schen Reihe divergent, da die berechneten Zwischenlösungen die Verformungsfiguren nicht mehr repräsentieren können; die Ergebnisse der Kombination einer Eigenform mit zwei Newtonschen Vektoren weichen auch von denen des direkten Verfahrens ab. Es wird gezeigt, daß die Ergebnisse der reduzierten Technik im günstigen Fall mit dem des direkten Verfahrens übereinstimmen. Für gleiches Lastniveau, können die mit der reduzierten Technik ermittelten Verschiebungen kleiner als die Ergebnisse des direkten Verfahrens sein, d.h. das reduzierte System versteift sich. Der Endzustand der Verschiebung ist im Bild 8.35 dargestellt.

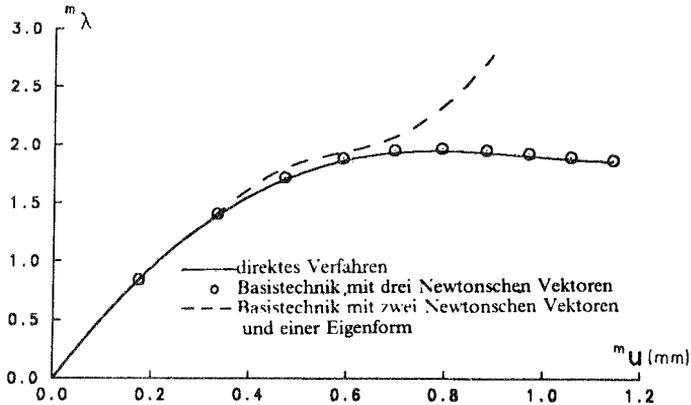


Bild 8.34 Radiale Verschiebung des Punktes P

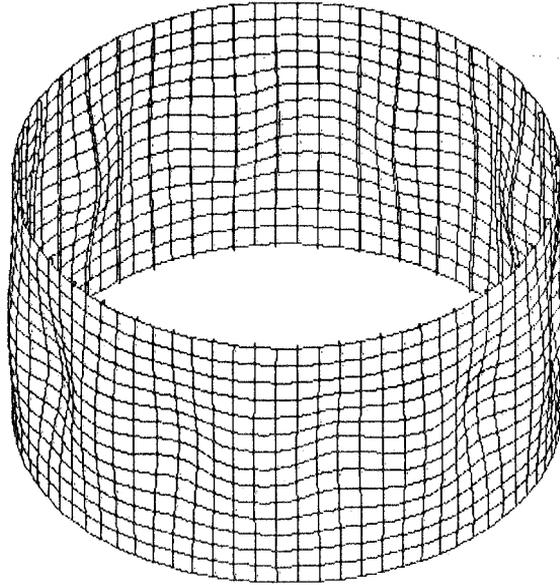


Bild 8.35 Endzustand der Zylinderschale

Es wird versucht, die Rechnung mit bzw. ohne Optimierung der Bandbreite der Steifigkeitsmatrix vorzunehmen. Vor der Optimierung hat die Tangensteifigkeitsmatrix eine Bandbreite b von 592, nach der Optimierung ist $b = 117$. Die Ergebnisse vor und nach der Optimierung sind gleich. Die Rechenzeit wird in der folgenden Tafel gegeben.

b	b/n	Rechenzeit pro Schritt		
		direktes Verf.	Basistechnik	
			ohne Erneuer.	mit Erneuer.
592	0.937	115.2	28.1	76.1
117	0.183	26.8	14.1	21.3

Tafel 8.3 Vergleich der CPU - Zeit

Vor der Optimierung der Bandbreite braucht das direkte Verfahren für einen Lastschritt durchschnittlich 115 CPU - Sekunden; beim ersten Konzept werden nur 28 CPU - Sekunden für einen Schritt ohne Basiserneuerung bzw. 76 CPU - Sekunden für einen Schritt mit Basiserneuerung benötigt. Der Rechenaufwand wird durch Anwendung dieser Technik stark reduziert. Nach der Optimierung braucht das direkte Verfahren für einen Schritt durchschnittlich 26.78 CPU - Sekunden; beim ersten Konzept werden für einen Schritt mit Basiserneuerung 21.33 bzw. ohne Basiserneuerung 14.11 CPU - Sekunden benötigt. Die Zeitreduktion ist sehr stark von der Bandbreite der Steifigkeitsmatrix abhängig.

Bei diesem Beispiel ergibt die Anwendung des ersten reduzierten Konzepts ein sehr gutes Ergebnis, weil das System 672 Freiheitsgrade hat und m/n relativ klein ist.

9.0 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit läßt sich folgenderweise zusammenfassen:

- Zwei wesentliche Konzepte wurden zur Arbeit mit reduzierten Basis vorgestellt. In Tafel 8.4 sind die Möglichkeiten der Kombination dieser zwei Konzepte mit den verschiedenen Vektorreihen dargestellt.

	erstes Konzept	zweites Konzept
Lagrangesche Vektorreihe	ja	ja
Newtonsche Vektorreihe	ja	ja
Eigenformen	ja	ja
Kombination der obigen Vektorreihen	ja	ja
Taylorische Vektorreihe	nein	ja

Tafel 9.1 Mögliche Verwendung der Vektorreihen bei den zwei Konzepten

- Die Eigenschaften dieser zwei Konzepte werden in folgender Tafel zusammengefaßt:

	erstes Konzept	zweites Konzept
wenige Programmänderungen	ja	nein
weniger zusätzlicher Speicherplatz	ja	nein
Abtrennung der Verschiebungsvektoren vom permanenten Anteil	nein	ja
gültig für T. L. Formulierung	ja	ja
gültig für U. L. Formulierung	ja	nein
direkte Iteration im Unterraum	nein	ja
Lösung von elastischen Problemen	möglich	möglich
Lösung von plastischen Problemen	möglich	unmöglich
Generierung der Taylorschen Reihe	nein	ja
gültig für alle Elemente	ja	nein

Tafel 9.2 Vergleich zwischen den beiden Konzepten

- Die Fähigkeit der Technik der reduzierten Basis ist mehr von der Qualität als von der Anzahl der Basisvektoren abhängig. Eine empirisch ermittelte optimale Anzahl der Basisvektoren ist $3 \sim 4$. Die Anzahl der Basisvektoren sollte nicht größer als 6 sein.
- Die ersten Vektoren der Taylorschen Reihe, der Newtonschen Reihe bzw. der Beulformen sind zur Bestimmung des Systemverhaltens überwiegend. Diese Eigenschaft bietet die Möglichkeit, das System mit einem begrenzten Anzahl der Basisvektoren zu behandeln. Bei Anwendung der konju-

gierten Reihe werden mehr Basisvektoren erforderlich. Bei der Basistechnik sollten die konjugierten Basisvektoren möglichst vermieden werden.

- Wenn die Basisvektoren die Verformungsfigur gut repräsentieren können, kann die kritische Last mit reduzierten Größen direkt beurteilt werden; sonst wird das reduzierte System versteift, und die im Unterraum berechnete kritische Last liegt auf der unsicheren Seite.
- Im Verlauf des Programms sollen die Basisvektoren erneuert werden, um die Richtigkeit des Ergebnisses zu gewährleisten.
- Das erste Konzept der reduzierten Basistechnik ist sehr effektiv, besonders zur Lösung eines größeren nichtlinearen Gleichungssystems mit voller Bandbreite. Für ein System, dessen Freiheitsgrade n größer als 100 und b/n größer als 0.5 sind, ist das erste Konzept sehr zu empfehlen. Für die Anwendung dieses Konzepts können die Basisvektoren in jedem Lastschritt erneuert werden.
- Beim zweiten Reduktionskonzept wird die Iteration direkt im Unterraum vorgenommen. Dies ist sehr günstig, aber die Erneuerung der Basisvektoren ist aufwendig. Um die Rechenzeit zu reduzieren, sollte die Erneuerung nicht zu häufig vorgenommen werden.
- In der Methode der Überlagerung sind die Taylorsche Vektoren besser geeignet als die Lagrangeschen Vektoren. Werden gleiche Basisvektoren verwendet, sind die Ergebnisse der Basistechnik viel besser als diejenigen der Methode der Vektorüberlagerung.

Schrifttumsverzeichnis

- /1/ Ahmad, S.,
Irons, B. M.,
Zienkiewicz, O. C.: Elements with Particular Reference
to Axi-Symmetric Problems.
Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct.
Mech., Wright-Patterson A. F. Base,
Ohio, 1968.
- /2/ Almroth, B. O.,
Stehlin, P.,
Brogan, F. A.: Automatic Choice of Global Shape
Functions in Structural Analysis.
AIAA J. (1978) 525-528.
- /3/ Argyris, J. H.,
Scharpf, D. W.: Matrix Displacement Analysis of Shells
and Plates Including Transverse Shear
Strain Effects.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972)
81-139.
- /4/ Bathe, K. J.: Finite Element Procedures in Engineering
Analysis.
Prentice-Hall Inc., Englewood
Cliffs, New Jersey 1982.
- /5/ Bathe, K.-J.,
Bolourchi, S.: A Geometric and Material Nonlinear
Plate and Shell Element.
Computers & Structures 11 (1980) 23-48.
- /6/ Bergan, P. G.: Solution Algorithms for Nonlinear Struc-
tural Problems.
Computers & Structures 12 (1980) 497-509.
- /7/ Bergan, P. C.,
Clogh, R. W.: Large Deflection Analysis of Plates and
Shallow Shells Using the Finite Element
Method.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 5, No. 4, 1973
543-556.

- /8/ Björck, A.,
Dahlquist, G.: Numerische Methode.
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien,
1972.
- /9/ Brendel, B.: Zur geometrisch nichtlinearen Elasto-
stabilität.
Dissertation Uni. Stuttgart 1979.
- /10/ Bufler, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie
Vorlesungsreihe, Institut für Mechanik B,
Uni. Stuttgart.
- /11/ Bunse, W.,
Bunse-Gerstner, A.: Numerische lineare Algebra.
Teubner, Studienbücher, 1985.
- /12/ Chan, A. S. L.,
Hsiao, K., M.: Nonlinear Analysis Using a Reduced
Number of Variables.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 52 (1985)
899-913.
- /13/ Chang, S. C.: Lanczos Algorithm with Selective Reortho-
gonalization for Eigenvalue Extrapolation in
Structural Dynamic and Stability Analysis.
Computers & Structures 23 (1986) 121-128.
- /14/ Colville, J.,
Becker, E.,
Furlong, R. W.: Large Displacement Analysis of Thin Plates.
J. of the Struct. Div., ASCE, Vol. 99,
No. ST3,
3 (1973) 349-364.
- /15/ Connor, J. J.,
Morin, N.: Perturbation Techniques in the Analysis of
Geometrically Nonlinear Shells.
Proc. of Symp. on High Speed Computing
of Elastic Structures, Liege, 1970.
- /16/ Dawe, D. J.: Numerical Studies Using Circular Arch
Finite Elements.
Computers & Structures 4 (1974) 729-740.

- /17/ Dawe, D. J.: Curved Finite Elements for the Analysis of Shallow and Deep Arches. Computers & Structures 4 (1974) 559-580.
- /18/ Faddejew, D. K.,
Faddejewa, W. N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. R. Oldenbourg Verlag München Wien 1964.
- /19/ Gallagher, R. H.: Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems. In: Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis. University of Tokyo Press, 1973, 109-123.
- /20/ Gallagher, R. H.: Perturbation Procedures in Nonlinear Finite Element Structural Analysis. In: Computational Mechanics, Int. Conf. on Comp. Methods in Nonl. Mech. Austin, Texas, 1974.
- /21/ Gallagher, R. H.: Geometrically Nonlinear Shell Analysis. In: Finite Elements in Nonlinear Mechanics. Vol. 1, eds. P. Bergan, H. Petterson, A. Samuelsson, T. S. Soreide and N. Wiberg, Tapir Press, Trondheim, Norway, 1978, 243-263.
- /22/ Haisler, W.,
Stricklin, J.,
Stebbins, F.: Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis. AIAA J., Vol. 10, No. 3, 3 (1972) 264-272.

- /23/ Hangai, Y.,
Kawamata, S.: Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems.
In: Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design.
Eds. J. T. Oden, et al., UAH Press, University of Alabama, Huntsville, 1972, 473-492.
- /24/ Hohn, F. E.: Elementary Matrix Algebra.
MacMillan Company, New York, 1964.
- /25/ Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie.
Springer-Verlag, Wien, 1957.
- /26/ Laugwitz, D.,
Krabs, W.: Differentialgeometrie.
B.G. Teubner, Stuttgart, 1960.
- /27/ Lopetegui, J.: Verfahren der orthogonalisierten Last - Verformungszustände zur Lösung nichtlinearer Probleme der Stabstatik.
Dissertation, TH Aachen, 1983.
- /28/ Lopetegui, J.,
Sedlacek, G.: Zur Lösung von Gleichungssystemen der Baumechanik mittels Last - Verformungszuständen.
Bauingenieur 61 (1986) 259-266.
- /29/ Luenberger, D. G.: Linear and Nonlinear Programming
Addison Wesley Publishing Company, 1984.
- /30/ Mallett, R.,
Marcal, P.: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures.
J. of the Struct. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST9, Sept. 1968, 2081-2105.

- /31/ Miehe, Ch.: Reduzierte Ansatzräume.
FE-Seminar im Söllerhause, 1985.
- /32/ Nagy, D. A.,
König, M.: Geometrically Nonlinear Finite Element
Behaviour Using Buckling Mode Superpo-
sition.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 19 (1979)
447-484.
- /33/ Nagy, D. A.: Model Representation of Geometrically
Nonlinear Behaviour by the Finite Element
Method.
Computers & Structures 10 (1979) 683-688.
- /34/ Noor, A. K.,
Peters, J. M.: Mixed Models and Reduced/Selective
Integration Displacement Models for
Nonlinear Analysis of Curved Beams.
Int. J. Num. Meth. Eng. 17 (1981) 615-631.
- /35/ Noor, A. K.,
Andersen, C. M.: Mixed Models and Reduced/Selective
Integration Displacement Models for
Nonlinear Shell Analysis.
Int. J. Num. Meth. Eng. 18 (1982)
1429-1454.
- /36/ Noor, A. K.,
Hartley, S. J.: Nonlinear Shell Analysis via Mixed Isopa-
rametric Elements.
Computers & Structures 7 (1977) 615-626.
- /37/ Noor, A. K.: Recent Advances in Reduction Methods for
Nonlinear Problems.
Computers & Structures 13 (1971) 31-44.
- /38/ Noor, A. K.,
Peters, J. M.: Reduced Basis Technique for Nonlinear
Analysis of Structures.
AIAA J. (1980) 455-462.

- /39/ Noor, A. K., Peters, J. M.: Tracing Post-Limit-Point Paths with Reduced Basis Technique. .
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 28 (1972) 217-240.
- /40/ Rajasekaran, S., Murray, D. W.: Incremental Finite Element Matrices.
J. of the Struct. Div., ASCE, 12 (1973) 2423-2438.
- /41/ Ramm, E.: A Plate / Shell Element for Large Deflections and Rotations.
In "Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis".
U. S. - Germany Symp., eds. K. J. Bathe, J. T. Oden and W. Wunderlich, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1977.
- /42/ Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
Habilitation, Uni. Stuttgart, 1976.
- /43/ Ramm, E.: Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points.
In: Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics.
Eds., W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe Springer, New York, 1981, 63-89.
- /44/ Rijs, E.: An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems.
Int. J. Solids Structures, Vol. 15 (1979) 529-551.
- /45/ Schwarz, H. R.: Methode der finiten Elemente.
Teubner, Studienbücher, 1980.

- /46/ Schweizerhof, K.,
Wriggers, P.: Consistent Linearization for Path Following
Methods in Nonlinear FE Analysis.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 59 (1986)
261-279.
- /47/ Schweizerhof, K.: Nichtlineare Berechnung von Tragwerken
unter verformungsabhängiger Belastung
mit finiten Elementen.
Dissertation, Uni. Stuttgart, 1982.
- /48/ Sedlacek, G.,
Lopetegui, J.,
Stutzki, C.,
Saleh, A.: Ein Computerorientiertes Verfahren zur
Statischen Berechnung räumlicher Stab-
werke unter Berücksichtigung nichtlinearer
Effekte.
Bauingenieur 60 (1985) 297-305.
- /49/ Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik.
Teubner, Stuttgart, 1965.
- /50/ Stummel, F.,
Hainer, K.: Praktische Mathematik.
Teubner, Stuttgart, 1971.
- /51/ Thompson, J. M. T.,
Walker, A. C.: The Nonlinear Perturbation Analysis of
Discrete Structural Systems.
Int. J. Solids Structures, Vol. 4, 1968,
757-768.
- /52/ Vos, R. G.,
Vann, W. P.: A Finite Element Tensor Approach to
Plate Buckling and Postbuckling.
Int. J. Num. Meth. Eng. 5 (1973) 351-365.
- /53/ Walker, A. C.: An Analytical Study of the Rotationally
Symmetric Nonlinear Buckling of a
Complete Spherical Shell under External
Pressure.
Int. J. Mechanical Science, Pergamon
Press, 10 (1968) 695-710.

- /54/ Walker, A. C.: A Non-Linear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches. Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969, 97-107.
- /55/ Wempner, G. A.: Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1971, 1581-1599.
- /56/ Wilson, E. L.: A New Method of Dynamic Analysis for Linear and Nonlinear Systems. Finite Element in Analysis and Design 1 (1985) 21-23.
- /57/ Wissmann, J. S.: Nonlinear Structural Analysis; Tensor Formulation. Conference on Matrix Methods in Structural Analysis, Wright-Patterson Air Force Base, Oct. 1965, 679-696.
- /58/ Zurmühl, R.,
Falk, S.: Matrizen und ihre Anwendungen. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

Anhang

A1. Der nichtlineare Verzerrungsanteil des Scheibelementes

$$m_{\varepsilon_1^N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^1 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^1 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^4 \\ \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^2 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^4 \\ \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^3 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^4 \\ \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^4 \Phi_{,1}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{,1}^1 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^2 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^3 \Phi_{,1}^4 & 0 & \Phi_{,1}^4 \Phi_{,1}^4 \end{bmatrix} m_{\bar{U}_i} m_{\bar{U}_j}$$

$$E_{12}^N = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^1 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^1 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^4 \\ \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^2 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^4 \\ \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^3 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^4 \\ \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^4 \Phi_{2,2}^4 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2}^1 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^2 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^3 \Phi_{2,2}^4 & 0 & \Phi_{2,2}^4 \Phi_{2,2}^4 \end{bmatrix} n_{U_i}^m n_{U_j}$$

$2\Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^1$	0	$\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^2$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^4$	0
0	$2\Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^1$	0	$\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^2$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^4$
$\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^2$	0	$2\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^2$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^4$	0
0	$\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^2$	0	$2\Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^2$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^4$
$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^3$	0	$2\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^3 + \Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^4$	0
0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^3$	0	$2\Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^3$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^3 + \Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^4$
$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^4$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^4$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^3 + \Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^4$	0	$2\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^4$	0
0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^1 + \Phi_{1,2}^1\Phi_{1,2}^4$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,2}^2\Phi_{1,2}^4$	0	$\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^3 + \Phi_{1,2}^3\Phi_{1,2}^4$	0	$2\Phi_{1,2}^4\Phi_{1,2}^4$

$$m_{E_3} = \frac{1}{2}$$

 $m_{U_1} m_{U_2}$

A2. Vektorableitungen nach verallgemeinerter Bogenlänge

Durch sukzessive Differentiation der Gleichungen (7.17) und (7.61) und anschließende Lösung können die Ableitungen nach der verallgemeinerten Bogenlänge berechnet werden. Die erste Ableitung lautet:

$$K_{ij} \dot{U}_j = \dot{\lambda} P_i \quad (\text{A2.1a})$$

$$\dot{\lambda} = \pm [\beta + \alpha \chi_1 \chi_1]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A2.1b})$$

$$\dot{U}_i = \dot{\lambda} \chi_1 i \quad (\text{A2.1c})$$

Hier ist χ_1 die Lösung für die Verschiebungen bei $\dot{\lambda} = 1$ in Gl. (A2.1a). Ein positives bzw. negatives Vorzeichen in Gl. (A2.1b) deutet auf Belastung bzw. Entlastung hin. Davon ist $K_{ij} = F_{ij} + 2G_{ijk} U_k + 3H_{ijkl} U_k U_l$.

Die Ableitung für (A2.1a) bzw. (A2.1b) ist

$$\begin{aligned} K_{ij} \ddot{U}_j &= -\dot{K}_{ij} \dot{U}_j + \ddot{\lambda} P_i \\ &= -2 G_{ijk} \dot{U}_j \dot{U}_k - 6 H_{ijkl} \dot{U}_j \dot{U}_k U_l + \ddot{\lambda} P_i \end{aligned} \quad (\text{A2.2a})$$

$$\ddot{\lambda} = -\alpha \chi_2 i \dot{U}_i / \bar{\mu} \quad (\text{A2.2b})$$

Dabei ist χ_2 die Lösung der Gleichung (A2.2a) für $\ddot{\lambda} = 0$ und

$$\bar{\mu} = \beta \dot{\lambda} + \alpha \dot{U}_i \chi_1 i \quad (\text{A2.9})$$

dann hat die zweite Ableitung des Verschiebungsvektors die Darstellung

$$\ddot{U}_i = \chi_2 i + \ddot{\lambda} \chi_1 i \quad (\text{A2.2c})$$

Die Rekursionsdarstellung der dritten bis achten Ableitung hat folgende Form:

3. Ableitung:

$$K_{ij} U_j^{(3)} = - 6 G_{ijk} \ddot{U}_j \dot{U}_k - 6 H_{ijkl} (3 \ddot{U}_j \dot{U}_k U_l + \dot{U}_j \dot{U}_k \dot{U}_l) + \lambda^{(3)} P_i \quad (\text{A2.3a})$$

$$\lambda^{(3)} = - [\alpha (\chi 3_i \dot{U}_i + \ddot{U}_i \ddot{U}_i) + \beta \ddot{\lambda} \ddot{\lambda}] / \bar{\mu} \quad (\text{A2.3b})$$

$$U_i^{(3)} = \chi 3_i + \lambda^{(3)} \chi 1_i \quad (\text{A2.3c})$$

4. Ableitung:

$$K_{ij} U_j^{(4)} = - 2 G_{ijk} (4 U_j^{(3)} \dot{U}_k + 3 \ddot{U}_j \ddot{U}_k) \quad (\text{A2.4a})$$

$$- 6 H_{ijkl} (4 U_j^{(3)} \dot{U}_k U_l + 3 \ddot{U}_j \ddot{U}_k U_l + 6 \ddot{U}_j \dot{U}_k \dot{U}_l) + \lambda^{(4)} P_i$$

$$\lambda^{(4)} = - [\alpha (\chi 4_i \dot{U}_i + 3 U_i^{(3)} \ddot{U}_i) + 3 \beta \lambda^{(3)} \ddot{\lambda}] / \bar{\mu} \quad (\text{A2.4b})$$

$$U_i^{(4)} = \chi 4_i + \lambda^{(4)} \chi 1_i \quad (\text{A2.4c})$$

5. Ableitung:

$$K_{ij} U_j^{(5)} = - 10 G_{ijk} (U_j^{(4)} \dot{U}_k + 2 U_j^{(3)} \ddot{U}_k) \quad (\text{A2.5a})$$

$$- 30 H_{ijkl} (U_j^{(4)} \dot{U}_k U_l + 2 U_j^{(3)} \ddot{U}_k U_l + 2 U_j^{(3)} \dot{U}_k \dot{U}_l + 3 \ddot{U}_j \ddot{U}_k \dot{U}_l) + \lambda^{(5)} P_i$$

$$\lambda^{(5)} = - [\alpha (\chi 5_i \dot{U}_i + 4 U_i^{(4)} \ddot{U}_i + 3 U_i^{(3)} U_i^{(3)}) + \beta (4 \lambda^{(4)} \ddot{\lambda} + 3 \lambda^{(3)} \lambda^{(3)})] / \bar{\mu} \quad (\text{A2.5b})$$

$$U_i^{(5)} = \chi 5_i + \lambda^{(5)} \chi 1_i \quad (\text{A2.5c})$$

6. Ableitung:

$$K_{ij} U_j^{(6)} = - 2 G_{ijk} (6 U_j^{(5)} \dot{U}_k + 15 U_j^{(4)} \ddot{U}_k + 10 U_j^{(3)} U_k^{(3)})$$

$$- 6 H_{ijkl} (6 U_j^{(5)} \dot{U}_k U_l + 15 U_j^{(4)} \ddot{U}_k U_l + 10 U_j^{(3)} U_k^{(3)} U_l + 15 U_j^{(4)} \dot{U}_k \dot{U}_l) \quad (\text{A2.6a})$$

$$+ 60 U_j^{(3)} \ddot{U}_k \dot{U}_l + 15 \ddot{U}_j \ddot{U}_k \dot{U}_l) + \lambda^{(6)} P_i$$

$$\lambda^{(6)} = - [\alpha (\chi 6_i \dot{U}_i + 5 U_i^{(5)} \ddot{U}_i + 10 U_i^{(4)} U_i^{(3)}) + \beta (5 \lambda^{(5)} \ddot{\lambda} + 10 \lambda^{(4)} \lambda^{(3)})] / \bar{\mu} \quad (\text{A2.6b})$$

$$U_j^{(6)} = \chi 6_i + \lambda^{(6)} \chi 1_i \quad (\text{A2.6c})$$

7. Ableitung:

$$\begin{aligned} K_{ij} U_j^{(7)} = & -14G_{ijk}(U_j^{(6)}\dot{U}_k + 3U_j^{(5)}\ddot{U}_k + 5U_j^{(4)}U_k^{(3)}) \\ & -42H_{ijkl}(U_j^{(6)}\dot{U}_k U_l + 3U_j^{(5)}\ddot{U}_k U_l + 5U_j^{(4)}U_k^{(3)}U_l + 3U_j^{(5)}\dot{U}_k \dot{U}_l \\ & + 15U_j^{(4)}\ddot{U}_k \dot{U}_l + 10U_j^{(3)}U_k^{(3)}\dot{U}_l + 15U_j^{(3)}\ddot{U}_k \ddot{U}_l) + \lambda^{(7)}P_i \end{aligned} \quad (\text{A2.7a})$$

$$\lambda^{(7)} = -[\alpha(\chi 7_i \dot{U}_i + 6 U_i^{(6)} \ddot{U}_i + 15 U_i^{(5)} U_i^{(3)} + 10 U_i^{(4)} U_i^{(4)}) \quad (\text{A2.7b})$$

$$+ \beta(6 \lambda^{(6)} \ddot{\lambda} + 15 \lambda^{(5)} \lambda^{(3)} + 10 \lambda^{(4)} \lambda^{(4)})] / \bar{\mu}$$

$$U_i^{(7)} = \chi 7_i + \lambda^{(7)} \chi 1_i \quad (\text{A2.7c})$$

8. Ableitung:

$$\begin{aligned} K_{ij} U_j^{(8)} = & -2G_{ijk}(8U_j^{(7)}\dot{U}_k + 28U_j^{(6)}\ddot{U}_k + 56U_j^{(5)}U_k^{(3)} + 35U_j^{(4)}U_k^{(4)}) \\ & -6H_{ijkl}(8U_j^{(7)}\dot{U}_k U_l + 28U_j^{(6)}\ddot{U}_k U_l + 56U_j^{(5)}U_k^{(3)}U_l + 35U_j^{(4)}U_k^{(4)}U_l \\ & + 28 U_j^{(6)} \dot{U}_k \dot{U}_l + 168U_j^{(5)} \ddot{U}_k \dot{U}_l + 280U_j^{(4)} U_k^{(3)} \dot{U}_l \end{aligned} \quad (\text{A2.8a})$$

$$\begin{aligned} & + 210 U_j^{(4)} \ddot{U}_k \ddot{U}_l + 280 U_j^{(3)} U_k^{(3)} \ddot{U}_l) + \lambda^{(8)}P_i \\ \lambda^{(8)} = & -[\alpha(\chi 8_i \dot{U}_i + 7 U_i^{(7)} \ddot{U}_i + 21 U_i^{(6)} U_i^{(3)} + 35 U_i^{(5)} U_i^{(4)}) \quad (\text{A2.8b}) \end{aligned}$$

$$+ \beta(7 \lambda^{(7)} \ddot{\lambda} + 21 \lambda^{(6)} \lambda^{(3)} + 35 \lambda^{(5)} \lambda^{(4)})] / \bar{\mu}$$

$$U_i^{(8)} = \chi 8_i + \lambda^{(8)} \chi 1_i \quad (\text{A2.8c})$$

Die Vektoren $\chi 3, \dots, \chi 8$ sind die Lösungen der Gleichungen (A2.3a) - (A2.8a) für $\lambda^{(n)} = 0$. Die Gleichungen (A2.1a) - (A2.8a) haben alle die gleiche Koeffizientenmatrix K_{ij} . Die Dreieckszerlegung der Koeffizientenmatrix ist deshalb nur einmal erforderlich.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbe-
anspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-
sierten und erweiterten Trefftz - Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II.
- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite
Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf
die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppel-
schalen über quadratischem Grundriß auf Einzel-
stützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken
(in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf
Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-
tragwerke unter Berücksichtigung der Reissner-
schen Theorie und der Methode der gemischten
finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von
Platten und Schalen bei stofflicher und geo-
metrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität
und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnungen von Tragwerken unter
verformungsabhängiger Belastung mit finiten Ele-
menten.
- 82-3 H.-P. André:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flach-
decken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbeton-
schalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter
Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und
Formabweichungen unter Innendruck und Stützen-
längskraft.

- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter
Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der
finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugel-
schalen.
- 7 (1987) G. Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von
Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem
Querschnitt unter Berücksichtigung der Inter-
aktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch
und physikalisch nichtlineare Strukturberech-
nungen.