

# **Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken**

von

**Markus Braun**



z  
2.10.99

Bericht Nr. 19 (1995)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1995

---

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,  
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

# **Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken**

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Markus Braun**

geboren in Landau

Hauptberichter:	Prof. Dr.–Ing. E. Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr.–Ing. W. Wendland
Tag der mündlichen Prüfung:	22. Juni 1995

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1995

## Kurzfassung

Ausgangspunkt für diese Arbeit ist der aus dem zunehmenden Bedarf an Faserverbundwerkstoffen für Flächentragwerke resultierende Wunsch, nichtlineare, 3–dimensionale Schalentheorien zu entwickeln, die auf einer für anisotrop geschichtete Laminate adäquaten Kinematik basieren. Die Berücksichtigung mehrerer Schalenmodelle mit unterschiedlichen kinematischen Approximationen ermöglicht für jedes individuelle Problem eine geeignete Analyse und stellt somit die Grundlage für physikalisch sinnvoll definierte Versagens– und Schädigungskriterien dar.

Da Faserverbundwerkstoffe meist für hoch beanspruchte Strukturen eingesetzt werden, ist die Berücksichtigung großer Deformationen unumgänglich, so daß die Dickenänderung des Laminats nicht vernachlässigt werden darf. Die notwendige Erweiterung einer herkömmlichen **5–Parameter** Schalentheorie auf eine **6–Parameter** Formulierung führt jedoch dazu, daß der Energieanteil der Normalspannung in Dickenrichtung über den Einfluß einiger Materialkennwerte das Ergebnis verfälscht (Dickenlocking). Dieser Defekt wird durch eine Erweiterung der transversalen Normaldehnung auf den Fall der linearen Dickenänderung behoben. Die zusätzlich benötigte Variable (**7–Parameter** Theorie) kann auf Elementebene durch das "Enhanced Assumed Strain" Konzept im Sinne einer hybrid–gemischten Formulierung eingeführt werden.

Alle vorgenannten **Einschichttheorien** (Singledirektortheorien) basieren auf der Geradlinigkeitshypothese des Direktors, die für bestimmte Laminate physikalisch nicht länger aufrechterhalten werden kann. Mit Hilfe einer höheren Kinematik wird die Formulierung einer nichtlinearen **Mehrschichttheorie** (Multidirektortheorie) möglich, die Laminate mit beliebigen Dicken– und Steifigkeitsverhältnissen der einzelnen Schichten analysieren kann und die oben erwähnten Einschichttheorien als Sonderfall enthält.

Weiterhin besteht durch die Behandlung der Schale als 3–dimensionales Kontinuum die Möglichkeit, beliebige 3–dimensionale Stoffgesetze ohne Modifikation einzusetzen und Lasten an den Außenflächen einer Struktur einzuleiten. Sowohl für die Einschichttheorien als auch für die Mehrschichttheorie bleiben die typischen Charakteristika von Schalentragwerken (Beschreibung über eine Referenzfläche, explizite Integration des Spannungszustandes über die Dicke, höhere Effizienz) gewahrt.

## Abstract

The reason to develop nonlinear, three-dimensional shell theories based on an adequate kinematics for anisotropic laminates is caused by the increasing demand for fiber reinforced materials for shell structures. Considering several shell models with different kinematic approximations, a suitable analysis for every individual problem can be carried out. This procedure represents the basis for physically reasonable defined failure and damage criteria.

Fiber reinforced materials are mostly used for high loaded structures. As large strain effects are becoming dominant, the thickness change of the laminate should not be neglected. The required extension of a conventional **5-parameter** shell theory to a **6-parameter** formulation leads to a significant error for bending dominated cases which depends on the anisotropic material properties. This thickness locking is due to the resulting linear distribution of the normal stress in thickness direction, not being balanced by the constant strain. The locking phenomenon is avoided if the shell formulation is extended by a linear thickness strain term which can be introduced by an extra independent variable (**7-parameter** theory) via the enhanced assumed strain concept based on a hybrid mixed approach.

The above mentioned **single layered theories** (singledirector theories) are based on the assumption of a straight director which cannot be maintained for definite composites and laminates with respect to the physics. With a higher order kinematics, a nonlinear, **layer-wise theory** (multidirector theory) which includes the singledirector theories as a special case with one kinematic layer has been developed. This layer-wise model is able to simulate the structural behaviour of anisotropic laminates with extreme differences in the thicknesses and material properties of each layer.

Furthermore there are two more advantages by analyzing the shell as a three-dimensional continuum: Firstly it is possible to use arbitrary complete three-dimensional constitutive laws without reduction or manipulation in nonlinear plate and shell analysis. Secondly the location within the shell body where the loading is applied can exactly be considered. For all presented formulations the typical characteristics of shell structures (reference surface, explicit or pre integration, higher efficiency) are preserved.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiat am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in den Jahren 1991 – 1994.

Mein außerordentlicher Dank gebührt Herrn **Professor Dr.–Ing. E. Ramm**, der mir zu jeder Zeit seine tatkräftige fachliche und menschliche Unterstützung entgegenbrachte. Aufgrund seines motivierenden Führungsstils herrschte ein sehr angenehmes und produktives Arbeitsklima, das ich als optimale Voraussetzung für diese Arbeit empfand.

Herrn **Professor Dr.–Ing. W. Wendland** gilt mein Dank für die Übernahme des Mitberichtes und die zügige Korrektur der Arbeit sowie die damit verbundenen Mühen.

Desweiteren danke ich meinen **Kolleginnen und Kollegen** des Instituts, deren Hilfsbereitschaft und Anregungen die Grundlage einer angenehmen, den wissenschaftlichen Austausch fördernden Atmosphäre darstellte. Darüber hinaus sei einigen **speziellen Freunden** des Instituts für die mir entgegengebrachte Freundschaft sowie zahlreichen privaten Aktivitäten ein Dankeschön ausgesprochen.

Schließlich danke ich meinen Eltern, **Gertrud und Albert Braun**, die mit ihrer finanziellen Unterstützung des Studiums und ihrer moralischen Hilfeleistung die Basis für diese Arbeit gelegt haben.

Nicht zuletzt möchte ich ein großes Dankeschön an meine Frau **Susanne** richten. Ihr starkes, weit über das normale Maß hinausgehende Verständnis und ihre ständigen Motivationsschübe haben mir unschätzbar geholfen.

Weiterhin möchte ich mich bei der **Deutschen Forschungsgemeinschaft** bedanken, die das Stipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs *Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen* an der Universität Stuttgart finanzierte.

Stuttgart, Juli 1995

Markus Braun

# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>11</b>
1.1 Motivation .....	11
1.2 Zielsetzungen .....	19
1.3 Übersicht .....	21
<b>2 Faserverbundwerkstoffe</b> .....	<b>24</b>
2.1 Einführung .....	24
2.2 Grundsätzliches über Faserverbundmaterial .....	25
2.2.1 Beschreibung des Werkstoffes .....	25
2.2.2 Vor- und Nachteile von Faserverbundwerkstoffen .....	29
2.2.3 Hauptunterschiede zu konventionellen Materialien .....	29
2.2.4 Sandwichkonstruktionen .....	30
2.2.5 Spektrum der Anwendungsmöglichkeiten .....	30
<b>3 Modellierung von dünnwandigen Laminaten</b> .....	<b>32</b>
3.1 Kinematikmodelle .....	32
3.1.1 Überblick .....	32
3.1.2 Einschichtmodelle .....	34
3.1.3 Zick-zack Erweiterungen .....	38
3.1.4 Mehrschichtmodelle .....	39
3.2 Materialmodelle .....	43
3.2.1 Mechanisches Verhalten von Faserverbundwerkstoffen .....	43
3.2.2 Bruchverhalten und Versagen .....	44
3.2.3 Versagenskriterien für Faserverbundstrukturen .....	45
<b>4 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b> .....	<b>51</b>
4.1 Differentialgeometrie .....	51
4.2 Elastizitätstheorie .....	53
4.2.1 Grundlegende Begriffe .....	53
4.2.2 Kinematische Beziehungen .....	54
4.2.3 Spannungsmaße .....	56
4.2.4 Erhaltungs- und Bilanzaussagen .....	57

4.2.5	Elastische Stoffgesetze .....	5
4.2.6	Arbeits- und Energieprinzipien .....	6
<b>5</b>	<b>Einschichttheorie (Singledirektortheorie)</b> .....	<b>6</b>
5.1	Beschreibung des Schalenkontinuums .....	6
5.2	Geometrie und Kinematik .....	6
5.3	Verzerrungsgleichungen für große Verzerrungen .....	6
5.4	Anisotrope, elastische Materialgesetze .....	6
5.4.1	Stoffgesetz einer einzelnen Schicht .....	6
5.4.2	Stoffgesetz des Laminats .....	6
5.4.3	Anisotrope, orthotrope, transversal-isotrope und isotrope Werkstoffgesetze .....	7
5.5	Schnittgrößen und deren konstitutive Beziehungen .....	7
5.6	Prinzip der virtuellen Verschiebungen .....	7
5.6.1	Virtuelle, innere Arbeit .....	7
5.6.2	Virtuelle, äußere Arbeit .....	7
5.7	Diskretisierung und Linearisierung .....	8
5.7.1	Diskretisierung des 3-dimensionalen Kontinuums .....	8
5.7.2	Lasteinleitung bei einer 3-dimensionalen Schalentheorie .....	8
5.7.3	Linearisierung der schwachen Formulierung .....	8
5.8	"Schwäche" der Formulierung .....	8
5.8.1	Versteifungseffekt bei isotropem Materialverhalten .....	8
5.8.2	Versteifungseffekt bei anisotropem Materialverhalten .....	9
5.9	Verbesserungsvorschläge .....	9
<b>6</b>	<b>Hybrid-gemischte Formulierungen</b> .....	<b>9</b>
6.1	Einführung .....	9
6.2	Enhanced assumed strain Konzept .....	9
6.2.1	Variationsformulierung .....	9
6.2.2	Diskretisierte, schwache Formulierung .....	10
6.2.3	Nichtlinearer Lösungsalgorithmus .....	10
6.2.4	Interpolation der erweiterten Verzerrungen .....	10
6.3	Assumed natural strain Methode .....	11
6.3.1	Shear-locking Phänomen .....	11
6.3.2	Prinzip des ANS-Konzeptes .....	11



<b>7</b>	<b>Mehrschichttheorie (Multidirektortheorie)</b>	<b>111</b>
7.1	Beschreibung der Schalengeometrie	111
7.2	Deformationsmaß	111
7.3	Formulierung des Stoffgesetzes	111
7.4	Schwache Form des Gleichgewichts	111
7.4.1	Resultierende Arbeit der inneren Kräfte	111
7.4.2	Resultierende Arbeit der äußeren Kräfte	111
7.5	Finite-Elemente-Diskretisierung	121
7.5.1	Diskretisierte, innere Arbeit und Linearisierung	121
7.5.2	Oberflächenlasten	121
7.6	Interlaminae Spannungen	121
7.7	Versteifungseffekt	121
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>121</b>
8.1	Isotroper Balken	121
8.2	Isotroper Kreiszyylinder ohne Endscheiben	130
8.3	Zweischicht-Zugprobe	131
8.4	Beullast einer Quadratplatte	131
8.5	Durchschlagen einer Zylinderschale	131
8.6	Anisotroper Kreiszyylinder ohne Endscheiben	131
8.7	Hyperbolische Schale unter diametralen Einzellasten	131
8.8	Rechteckplatte unter sinusförmiger Flächenlast	141
8.9	Sandwich-Platte	141
8.10	Wandartiger Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	150
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>151</b>
9.1	Zusammenfassung und Bewertung	151
9.2	Fazit und Ausblick	151
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>151</b>
A.1	Tensorbegriff	151
A.2	Tensoralgebra	151
A.3	Tensoranalysis	151
A.4	Integralsätze	161
A.5	Satz zur mehrdimensionalen Analysis	161

<b>B Anhang</b> .....	<b>16:</b>
B.1 Basisvektoren der Materialhauptrichtungen .....	16:
<b>Literatur</b> .....	<b>16:</b>

# Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

## Vereinbarungen

- In dieser Arbeit wird überwiegend die Tensorschreibweise verwendet, wobei griechische Buchstaben grundsätzlich die Werte 1 und 2, lateinische hingegen die Werte 1, 2 und 3 durchlaufen.
- Es gilt folgende Summationsregel der Tensorrechnung, die auch als EINSTEINsche Summationskonvention bezeichnet wird: Tritt in einem indizierten Term derselbe Index einmal oben und einmal unten auf, so wird über alle Zahlenwerte summiert, die der betreffende Index annehmen kann.
- Hinweise zu den Rechenregeln der Tensorrechnung finden sich im Anhang A.
- Da sich für manche Begriffe (locking, push–forward, pull–back, assumed natural strain, enhanced assumed strain usw.) keine eindeutige, kurze und gängige Übersetzung eingebürgert hat, wird in dieser Arbeit auf die englischen Ausdrücke Bezug genommen.

## Abkürzungen

AFK	Aramidfaserverstärkter Kunststoff
ANS	Assumed Natural Strain
BFK	Borfaser verstärkter Kunststoff
CFK	Carbonfaserverstärkter Kunststoff
EAS	Enhanced Assumed Strain
FEM	Finite–Elemente–Methode
FPF	First Ply Failure
FVW	Faserverbundwerkstoff
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
MDT	Multidirektorthorie
SDT(5,6)	Singledirektorthorie mit 5 oder 6 Parametern
SDT(7)	Singledirektorthorie mit 7 Parametern (über EAS–Konzept)
SIFCON	Slurry Infiltrated Fiber Concrete
UD	Unidirektional

## Definitionen

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L_2(B)} := \int_B f_1 \cdot f_2 \, dV \quad \text{mit} \quad f_i : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

## Symbole

$\bar{(\cdot)}$	Größe der verformten Schalenkonfiguration
$(\cdot)_h$	Finite-Element-Approximation
$(\cdot)_{,i}$	Partielle Ableitung nach $\theta^i$
$(\cdot)_{,x}$	Partielle Ableitung nach dem Vektor $x$
$(\dot{\cdot})$	Ableitung nach der Zeit
$(\cdot)'$	Ableitung nach den unbekanntenen Knotenparametern
$\tilde{(\cdot)}$	Inkompatible über EAS eingeführte Größen
$(\cdot)_L$	Größe der Schicht L bei Multidirektortheorie
$(\cdot, \cdot)_{L_2(B)}$	Skalarprodukt im Raum $L_2(B)$ der quadratisch integrierbaren Funktionen
$\delta(\cdot)$	Variation
$D(\cdot)$	Richtungsableitung, Gâteaux-Ableitung
$(\alpha, \beta)_s$	Symmetrischer Schichtaufbau, $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$
$(\alpha, \beta)_{2s}$	Symmetrischer Schichtaufbau, $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)_s$

## Geometrie

$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	Zu den krummlinigen Koordinaten gehörige, ko- bzw. kontravariante Vektorbasis der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{a}_3, \mathbf{g}_3$	Schalennormale (Direktor) der Referenzkonfiguration
$\mathbf{a}_{3L}, \mathbf{g}_{3L}$	Direktor der Schicht L der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Differentielles Linienelement
$dA, dV$	Differentielles Flächen- und Volumenelement
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	Ko- bzw. kontravariante Basis des Schalenraumes in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}, \mathbf{g}^{-1}$	Ko- bzw. kontravarianter Metriktenor des Schalenraumes in der Referenzkonfiguration
$h$	Schalendicke
$h_L$	Dicke der Schicht L (bei Single- und Multidirektortheorie)
$\mathbf{i}_i$	Rechtshändiges, orthonormales Koordinatensystem
$\mathbf{J}_C$	Jacobi-Matrix an der Stelle $\theta^3 = 0$
$\mathbf{J}$	Jacobi-Matrix
$\mu$	Betrag des Schalentensors (Schalenshifter)
$\mathbf{r}$	Ortsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche
$\mathbf{r}_L$	Ortsvektor eines Punktes der Mittelfläche der Schicht L
$\theta^i$	Allgemeine, krummlinige, konvektive Flächenkoordinaten

$\theta_{LS}$	Kontinuitätskoeffizienten bei MDT
$\xi, \eta, \zeta$	Krummliniges, konvektives Elementkoordinatensystem, normiert $-1 \leq \xi \leq 1$
$\zeta_L$	Lokale Dickenkoordinate der Schicht L, $\zeta_L \in [-1, 1]$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines Punktes im Schalenraum
$\ddot{\mathbf{x}}$	Beschleunigungsvektor eines Punktes im Schalenraum

### Kinematik

$\alpha$	Elementparameter des zusätzlichen, inkompatiblen Verzerrungsfeldes
$\alpha_{ij}$	bezüglich $\theta^3$ konstante Komponenten von $\mathbf{E}$
$\beta_{ij}$	bezüglich $\theta^3$ lineare Komponenten von $\mathbf{E}$
$\gamma_{ij}$	bezüglich $\theta^3$ quadratische Komponenten von $\mathbf{E}$
$\mathbf{C}$	Rechter–Cauchy–Green Deformationstensor
$\mathbf{d}$	Vektor der unbekannt Elementknotenparameter
$\mathbf{E}$	Green–Lagrange Verzerrungstensor
$\mathbf{E}^k$	Kompatibles Green–Lagrange Verzerrungsfeld
$\tilde{\mathbf{E}}$	Zusätzliches, inkompatibles Verzerrungsfeld (bezogen auf die Basis $\mathbf{g}^i$ )
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Zusätzliches, inkompatibles Verzerrungsfeld (bezogen auf die Basis $\mathbf{a}_0^i$ im Elementmittelpunkt)
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{H}$	Verschiebungsgradient
$\mathbf{M}_\xi$	Interpolationsmatrix des zusätzlichen Verzerrungsfeldes $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$
$\mathbf{M}$	Interpolationsmatrix des zusätzlichen Verzerrungsfeldes $\tilde{\mathbf{E}}$
$\mathbf{R}_i$	Elementarrotation um die $i_1$ –Achse
$\mathbf{R}$	mit $\mathbf{s}$ parametrisierter Rotationstensor
$\mathbf{s}$	Rotationsvektor
$\tilde{\mathbf{T}}$	Transformationsmatrix der inkompatiblen Verzerrungsfelder
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor eines Punktes im Schalenraum
$\mathbf{u}$	Vektor der unbekannt Systemknotenparameter
$\mathbf{u}^*$	Vorgeschiedene Verschiebungen auf der Randfläche $\partial B_u$
$\mathbf{v}$	Verschiebungsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche
$\mathbf{w}$	Differenzvektor der Direktoren aus beiden Konfiguration
$\mathbf{w}_L$	Differenzvektor der Direktoren der Schicht L aus beiden Konfiguration

### Materialabhängige Größen

$\alpha$	Faserwinkel
$\mathbf{C}$	4–stufiger, anisotroper Werkstoffstensor des Laminats (abhängig von der Dickenkoordinate $\theta^3$ )

$C_L$	Werkstofftensor der Schicht L im Laminatkoordinatensystem
$C_L^*$	Werkstofftensor der Schicht L im Schichtkoordinatensystem
$c_L^*$	Nachgiebigkeitstensor der Schicht L im Schichtkoordinatensystem
$D_0^{ijkl}$	Dehn- und Schubsteifigkeit
$D_1^{ijkl}$	Koppelsteifigkeit
$D_2^{ijkl}$	Biegesteifigkeit und Schubsteifigkeit höherer Ordnung
$E_1, E_2, E_3$	Elastizitätsmodul in Faserrichtung, senkrecht zur Faser und in Dickenrichtung (1,2,3 $\cong$ Materialhauptrichtungen)
$G_{12}$	Schubmodul in der 1–2 Ebene
$G_{13}, G_{23}$	Schubmodul in der 1–3 bzw. 2–3 Ebene
$g_i^*$	Orthonormales Basissystem in Richtung der Materialhauptachsen, tangential an die Schalenmittelfläche
$i_i'$	Orthonormales Basissystem in Richtung der Materialhauptachsen, aber nicht tangential an die Schalenmittelfläche
$\rho$	Massendichte
$R_{Kl}$	Transformationsmatrix von $i_i'$ nach $g_i^*$ (durch Kreuzproduktbildung)
$T$	Transformationsmatrix der Basisvektoren vom Schicht- auf das Laminatkoordinatensystem
$\nu_{ij}$	Querkontraktionszahl für Dehnungen in Richtung j, aufgrund Spannungen in Richtung i

### Kräfte, Lasten, Spannungen

$b$	Volumenkraftvektor pro Masseneinheit
$\beta$	Elementparameter des zusätzlichen, inkompatiblen Spannungsfeldes
$c$	Kraftdichte bezogen auf die Schalenmittelfläche (dem Differenzvektor $w$ zugeordnet)
$c_S$	Kraftdichte bezogen auf die Schalenmittelfläche (dem Differenzvektor $w_S$ der Schicht S zugeordnet)
$F_C^K$	Äquivalente Belastung des Differenzvektors $w_K$ am Knoten K
$F_{c_S}^K$	Äquivalente Belastung des Differenzvektors $w_S^K$ der Schicht S am Knoten K
$F_P^K$	Äquivalente Kraft am Knoten K (den Mittelflächenverschiebungen $v_K$ zugeordnet)
$\tilde{F}$	Ungleichgewichtskräfte
$N$	Schnittkrafttensor, basierend auf 2. Piola–Kirchhoff Spannungen
$M$	Schnittmomententensor, basierend auf 2. Piola–Kirchhoff Spannungen
$P$	1. Piola–Kirchhoff Spannungstensor

$\mathbf{P}_\xi$	Interpolationsmatrix des zusätzlichen Spannungsfeldes $\tilde{\sigma}$
$\mathbf{P}$	Globaler Lastvektor
$\mathbf{p}$	Kraftdichte bezogen auf die Schalenmittelfläche (den Mittelflächenverschiebungen $\mathbf{v}$ zugeordnet)
$\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}}$	Vektoren der inneren Kräfte
$\sigma$	Cauchy Spannungstensor
$\tilde{\sigma}$	Unabhängiges, zusätzliches Spannungsfeld (bezogen auf die Basis $\mathbf{a}_{i0}$ im Elementmittelpunkt)
$\mathbf{S}$	2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{S}}$	Unabhängiges, zusätzliches Spannungsfeld (bezogen auf die Basis $\mathbf{g}_i$ )
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor (bezogen auf das Flächenelement $dA$ )
$\mathbf{t}^*$	Vorgeschriebene Spannungsvektor auf der Randfläche $\partial B_\sigma$

### Steifigkeitsausdrücke

$\mathbf{K}_T$	Tangentiale Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{E+U}$	Materialle Steifigkeitsmatrix (linear, elastischer Anteil $\mathbf{K}_E$ und Anfangsverschiebungsmatrix $\mathbf{K}_U$ )
$\mathbf{K}_G$	Geometrische Steifigkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}$	Modifizierte Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{L}$	Zusätzliche über EAS eingeführte Steifigkeit (Koppelterm zwischen dem kompatiblen und inkompatiblen Ansatz)
$\mathbf{D}$	Zusätzliche über EAS eingeführte Steifigkeit

### Sonstige Größen

$\partial\mathfrak{B}$	Rand des kontinuierlichen Körpers
$\mathfrak{B}$	Kontinuierlicher Körper bestehend aus materiellen Punkten
$\partial B_\sigma$	Rand des Körpers $B$ mit vorgeschriebenen Spannungen
$\partial B_u$	Rand des Körpers $B$ mit vorgeschriebenen Verschiebungen
$B$	Kontinuierlicher Körper bestehend aus Raumpunkten (Ortsvektoren)
$\delta_i^j$	Kronecker–Delta
$\delta W$	Virtuelle Arbeit
$\delta W_{\text{int}}$	Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
$\delta W_{\text{ext}}$	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte
$\delta W_{\text{ext}}^1$	Virtuelle Arbeit der Volumenkräfte bei Multidirektorthorie
$\delta W_{\text{ext}}^2$	Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte bei Multidirektorthorie
$\mathbb{E}_3$	Dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum

$\mathbf{i}$	Impuls eines Körpers B
$\mathbf{I}$	Identitätsmatrix
$\mathbf{I}_1$	Invarianten einer Matrix bzw. eines Tensors 2. Stufe
$\mathbf{L}$	Drall eines Körpers B
$m$	Masse eines Körpers B
$\mathbf{n}$	Normaleneinheitsvektor
$N_K$	Formfunktion am Knoten K
NL	Anzahl der Schichten bei Multidirektortheorie
NN	Anzahl der Elementknoten
$\tilde{\Pi}$	Hu–Washizu 3–Feld–Funktional
$\tilde{\Pi}_{\text{int}}$	Innere Energie des Hu–Washizu Funktionals
$\Pi$	Gesamte potentielle Energie
$\Pi_{\text{int}}$	Potentielle, innere Energie
$\Pi_{\text{ext}}$	Potentielle, äußere Energie
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$t$	Zeit
$\chi$	Konfiguration, topologische Abbildung, Homöomorphismus
$\Psi$	Massenspezifische, freie Helmholtz Energie
$W_s$	Volumenspezifische Verzerrungsenergie



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Die ständig steigende Leistungsfähigkeit technischer Systeme aufgrund umfangreicherer Kenntnisse über das Werkstoffverhalten sowie computergestützten Berechnungsverfahren haben die Anforderungen an konventionelle Materialien so hoch geschraubt, daß viele dieser Werkstoffe an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit gestoßen sind. Die Forderungen nach Gewichtsreduzierung, Materialeinsparung (Knappheit der Rohstoffressourcen) und geringerem Energieverbrauch lassen einen deutlichen Trend zur Leichtbauweise erkennen, siehe Janssen (1994). Der Gesichtspunkt des Leichtbaus, der bisher eine Domäne der Aluminiumlegierungen war, ermöglicht den Verbundwerkstoffen und den Faserverbundwerkstoffen aufgrund ihrer Vorzüge (große Steifigkeiten / Festigkeiten bei niedrigem Eigengewicht) und Gestaltungsmöglichkeiten in der heutigen Zeit ein starkes Wachstum. Sie stellen einen Schwerpunkt der jüngsten Werkstoffforschung dar. Eine ausführliche Diskussion sowie einige Literaturhinweise über Faserverbundwerkstoffe erfolgen in Kapitel 2.

Der derzeitige und der prognostizierte Bedarf in Europa an Faserverbundwerkstoffen bestehend aus Glas-, Aramid- und Kohlenstofffasern ist in Bild 1.1 dargestellt.

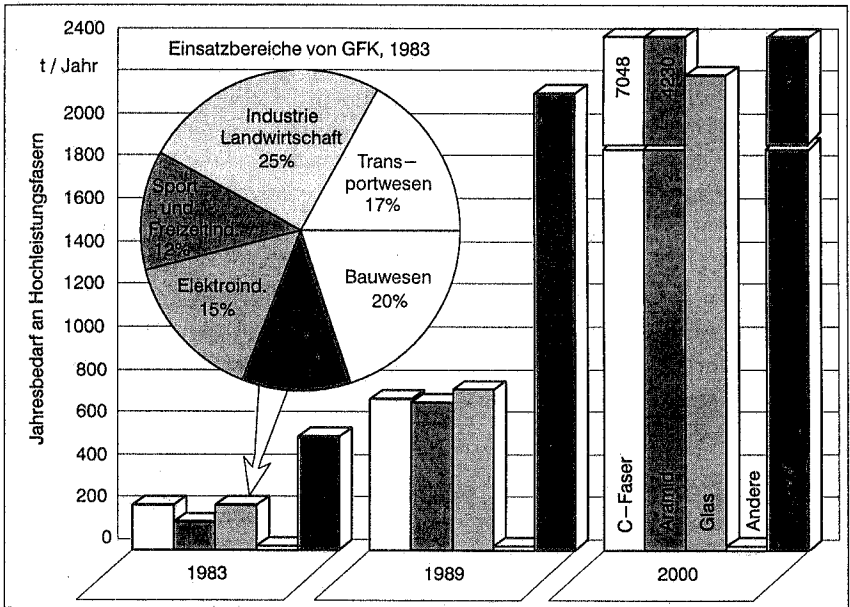


Bild 1.1: Bedarf an Hochleistungsfasern in Europa nach Ophey (1986)

Mit der Einführung und der zu erwartenden Verbreitung dieser Werkstoffe besteht, um ihr Potential voll ausnutzen zu können, ein hohes Interesse, extrem genaue "Werkzeuge" zum Entwerfen und zur Analyse von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen zur Verfügung zu haben.

Die entsprechenden numerischen Berechnungs- bzw. Approximationsverfahren müssen in der Lage sein, eine detaillierte Vorhersage der im Vergleich zu anderen Materialien komplizierteren Systemantwort sowie der Versagens- oder Schädigungscharakteristik treffen zu können. Dazu wird es nötig sein, neue Stoffgesetze mit einzubeziehen, um das inhomogene, anisotrope Materialverhalten möglichst gut zu erfassen. Da bei geschichteten Strukturen den Eigenschaften und "Geschehnissen" in Dickenrichtung eine deutlich höhere Bedeutung zukommt als bei herkömmlichen Materialien, besitzt die Frage der kinematischen Approximation des Laminats höchste Priorität. Sie kann als die wesentliche Voraussetzung jeder weiteren Berechnung statischer Größen oder bestimmter Versagens- und Schädigungsmechanismen angesehen werden.

Die Basis für ein solches numerisches Verfahren stellt die Methode der Finiten Elemente dar. Sie hat sich in den letzten 2 Jahrzehnten auf der Grundlage immer leistungsfähiger Rechner und ihrer Flexibilität als ein wesentliches Instrument zur numerischen Lösung von Problemen der Strukturmechanik erwiesen.

Die heute im Handel angebotenen kommerziellen Finite-Element-Programme beinhalten eine Menge unterschiedlicher Elementtypen, z.B. Balken-, Scheiben-, Platten-, Schalen- und Volumenelemente. Der reinen Anschauung folgend läßt sich vermuten, daß alle Strukturen mit den leicht zu implementierenden Volumenelementen berechnet werden können, unabhängig von der Dicke des Tragwerks. Jedoch hat sich bereits in den Anfängen der Finite-Element-Entwicklung (Ende der sechziger, Anfang der siebziger Jahre) herauskristallisiert, daß die Anwendung der 3D-Elemente auf Platten- und Schalenträgerwerke mit einigen Nachteilen und Mängeln verbunden ist. So zeigten z.B. Elemente mit 2 Knoten über die Dicke (an der Ober- und Unterseite) starke Versteifungseffekte, da der Energieanteil der Normalspannung  $S^{33}$  in Dickenrichtung das Ergebnis über den Einfluß der Querkontraktion verfälscht. Nur eine Erhöhung der Anzahl der Knoten in Dickenrichtung und dem damit verbundenen Ansteigen der Freiheitsgrade hätte dieses Problem beseitigen können.

Dies hatte zur Konsequenz, daß sich die Elemententwickler auf Platten- und Schalenformulierungen konzentrierten, die auf der von REISSNER im Jahre 1946 und MINDLIN im Jahre 1951 entwickelten Kinematik mit geradlinigem Verschiebungsverlauf über die Dicke basierten. Die Reduktion auf Querschnittsvariablen (Schnittgrößen) lieferte vom Standpunkt der Effizienz das wesentliche Merkmal einer Schalenformulierung, nämlich die explizite Dickenintegration oder Vorabintegration. Durch die Einbeziehung einer zusätzlichen statischen Nebenbedingung ( $S^{33} = 0$ ) konnte die Ordnung der kinemati-

schen und statischen Verläufe über die Dicke einander angepaßt werden. Es resultierte somit eine bis heute gültige und weit verbreitete 5-Parameter Schalentheorie, die in sehr vielen Forschungs- und Anwendungsgebieten der Strukturmechanik die Basis für lineare und nichtlineare Analysen darstellt.

Jedoch haben sich seit einigen Jahren neue Materialien, die Faserverbundwerkstoffe, auf dem Markt etabliert, deren Ansprüche an das numerische Berechnungsverfahren von herkömmlichen Schalentheorien aufgrund ihrer Restriktionen nicht mehr zur vollen Zufriedenheit erfüllt werden können:

- Die fehlende Berücksichtigung der Dickenänderung konzentriert die mit dem Anspruch einer akzeptablen Genauigkeit durchzuführende Untersuchung auf Deformationsvorgänge mit kleinen Verzerrungen.
- Die entsprechenden Stoffgesetze müssen zur Erfüllung der Forderung einer verschwindenden Normalspannung in Dickenrichtung modifiziert werden.
- Lokale Effekte, wie geometrische Diskontinuitäten (Ausparungen usw.), Delamination, Schädigung oder interlaminare Schubspannungsverteilungen dürfen nicht Gegenstand der Untersuchung sein.
- Die für die Versagensform der Delamination relevanten Beanspruchungsgrößen, nämlich die transversalen Spannungen werden entweder gar nicht berücksichtigt ( $S^{33} = 0$ ) oder wie im Falle des Querschubs ( $S^{13}, S^{23}$ ), nur konstant über die Dicke approximiert.
- Die Voraussetzung der Geradlinigkeitshypothese des Direktors beschränkt die Analyse von Laminaten auf Strukturen, bei denen die Dicken- und Steifigkeitsverhältnisse der einzelnen Schichten bestimmte Grenzen nicht überschreiten.

## 1.2 Zielsetzungen

Aufgrund all dieser, im vorigen Kapitel erwähnten, Unzulänglichkeiten entstand der Wunsch **nichtlineare, 3-dimensionale Schalentheorien zu entwickeln, die auf einer für Laminat adäquaten Kinematik basieren**. Die Berücksichtigung mehrerer Schalenmodelle mit unterschiedlichen kinematischen Approximationen soll die Möglichkeit offen halten, für jedes individuelle Problem eine geeignete und angepaßte Analyse vornehmen zu können und somit die Grundlage für physikalisch sinnvoll definierte Versagens- und Schädigungskriterien darstellen.

Der folgende Überblick soll die damit verbundenen Aufgaben, die dieser Arbeit zugrunde liegen, zusammenfassen:

- Da Faserverbundwerkstoffe meist für flexible Strukturen eingesetzt werden, ist die Berücksichtigung von starken Nichtlinearitäten (große Verzerrungen, große Rotationen) unumgänglich. Als direkte Folge dieser Forderung darf die Dickenänderung

der Struktur während des Deformationsvorganges nicht mehr vernachlässigt werden, so daß mindestens eine nichtlineare 6-Parameter Schalentheorie mit geradem Direktor zur Anwendung kommen muß.

- Des weiteren soll die Möglichkeit bestehen, beliebige 3-dimensionale Materialgesetze ohne Modifikation einzusetzen.
- Die Sicherung eines wenigstens approximativen 3-dimensionalen Spannungszustandes soll gewährleistet sein.
- Zur Verbesserung der 6-Parameter Schalentheorie wird das "Enhanced Assumed Strain" Konzept im Sinne einer hybrid-gemischten Formulierung verwendet, um einen linearen Verlauf der Dickenänderung zu erhalten und somit das "Dickenlocking" einer jeden Theorie mit linearen Verschiebungsansätzen über die Dicke zu beseitigen.
- Weiterhin werden die in der Literatur für eine 5-Parameter Theorie bekannten Verfahren (EAS- und ANS-Methode) zur Vermeidung der "locking"-Probleme niedrig interpolierter Schalenelemente auf die 6-Parameter Theorie übertragen und deren Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit bei geschichteten Strukturen untersucht.
- Da die Annahme eines geraden Direktors bei Laminaten mit beliebigen Dicken- und Steifigkeitsverhältnissen der einzelnen Schichten physikalisch nicht länger aufrechterhalten werden kann, wird eine nichtlineare Schichttheorie mit  $C^0$ -stetigem Verschiebungsfeld über die Dicke entwickelt. Dabei soll die REISSNER / MINDLIN Kinematik schichtweise zur Anwendung kommen.
- Beflügelt von folgendem Zitat von Robbins, Reddy (1993):  
*. . . Despite the success of the layerwise laminate models that neglect transverse normal strain, these models are not capable of accurately determining interlaminar stresses near discontinuities such as holes or cut-outs, traction-free edges, and delamination fronts . . .*  
soll die Dickenänderung pro Schicht berücksichtigt werden, so daß große Deformationen und lokale Effekte, wie interlaminare Schubspannungsverteilungen, geometrische Diskontinuitäten oder Randspannungseffekte beschreibbar sind.
- Die 3-dimensionalen Schalentheorien sollen auf der Basis einer Finite-Elemente-Verschiebungsformulierung in das Programmsystem CARAT (Computer Aided Research Analysis Tool) des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert werden.

## 1.3 Übersicht

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen in einen theoretischen und einen numerischen Teil:

**Kapitel 2** soll die wesentlichen Begriffe der Faserverbundwerkstoffe erläutern, deren Vor- und Nachteile sowie die Hauptunterschiede zu konventionellen Materialien aufzeigen.

In **Kapitel 3** werden die zahlreich in der Literatur veröffentlichten kinematischen Ansätze für Platten- und Schalenformulierungen geschichteter Strukturen übersichtlich zusammengefaßt. Dabei sollen die in der historischen Entwicklung wichtigsten und auffälligsten Verschiebungsansätze kurz diskutiert werden. Abschließend erfolgen einige theoretische Grundlagen des mechanischen Verhaltens von Faserverbundwerkstoffen und deren Umsetzung in entsprechende Materialmodelle.

**Kapitel 4** befaßt sich neben den differentialgeometrischen Grundlagen mit den wesentlichen Beziehungen der 3-dimensionalen, nichtlinearen Elastizitätstheorie. Diese kontinuumsmechanischen Zusammenhänge fußen auf einer rein mechanischen Theorie, thermische oder sonstige Effekte finden keine Berücksichtigung.

In **Kapitel 5** wird in einer totalen LAGRANGE Formulierung eine nichtlineare, 3-dimensionale Schalentheorie auf der Basis eines  $C^1$ -stetigen Verschiebungsfeldes über die Dicke entwickelt. Zunächst werden mit Hilfe der Linearität des Verschiebungsfeldes über die Schalendicke und der Berücksichtigung der Dickenänderung die GREENschen Verzerrungsgleichungen für große Deformationen hergeleitet. Das kontinuumsmechanische Schalenmodell verlangt eine makroskopische Betrachtungsweise der anisotropen Werkstoffeigenschaften, so daß die entsprechenden konstitutiven Gleichungen bereitgestellt werden müssen. Die zu den Verzerrungen energetisch konjugierten Schnittgrößen bilden die für die anschließende Diskretisierung wichtige virtuelle Arbeitsgleichung der inneren und äußeren Kräfte. Mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird das 3-dimensionale Kontinuum nach dem Degenerationskonzept diskretisiert. Die resultierende Nichtlinearität in den unbekanntem Verschiebungen erfordert die Linearisierung der schwachen Formulierung. Die vorgestellte Schalentheorie ist von der unerfreulichen Eigenschaft begleitet, daß nicht ausgeglichene kinematische und statische Größen das Ergebnis über den Einfluß der Querkontraktion verfälschen. Dieses Phänomen soll zusammen mit den entsprechenden Verbesserungsvorschlägen ausführlich diskutiert werden.

In **Kapitel 6** werden sowohl die auf einer Schalentheorie (Kapitel 5) basierenden Versteifungseffekte als auch die "locking" – Probleme der niedrig interpolierten Schalenelemente zusammengestellt. Auf der Grundlage einer hybrid-gemischten Formulierung ("Enhanced Assumed Strain" Konzept) wird das den Variationsverfahren zugrunde lie-

gende Arbeits- und Energieprinzip (3-Feld HU-WASHIZU Funktional) eingeführt und die entsprechenden EULER-Gleichungen angegeben. Durch eine Reparametrisierung besteht die Möglichkeit, die Verzerrungen durch zusätzliche, inkompatible Felder zu erweitern. Mit Hilfe der diskretisierten Ansätze der unabhängigen Variablen und einer Orthogonalitätsbedingung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen läßt sich ein 2-Feld-Funktional herleiten. Eine anschließende Linearisierung liefert ein gekoppeltes Gleichungssystem, in dem die neu entstandenen Parameter auf Elementebene eliminiert werden können. Eine geschickte Wahl der inkompatiblen Verzerrungsanteile beseitigt beide zu Beginn dieses Abschnittes erläuterten Versteifungseffekte. Des weiteren wird eine 2. Möglichkeit besprochen, das Blockieren der "low-order" Elemente zu verhindern. Mit Hilfe der "Assumed Natural Strain" Methode werden die "locking" verursachenden Verzerrungen an speziellen Punkten (Kollokationspunkte) ausgewertet und über das Finite Element interpoliert, so daß die Anteile, die zu Versteifungen führen, einer Art Unterintegration unterzogen worden sind. Beide Möglichkeiten zur Beseitigung der "locking"-Probleme sollen auf die 6-Parameter Theorie übertragen werden.

In **Kapitel 7** wird eine bezüglich der Dickenkoordinate  $C^0$ -stetige Schichttheorie vorgestellt, die als Sonderfall die in Kapitel 5 beschriebene  $C^1$ -stetige Formulierung mit einer kinematischen Schicht enthält. Die nichtlineare Schalentheorie soll auf der Basis einer höheren Kinematik die Dickenänderungen der einzelnen Schichten berücksichtigen können. Nach einer ausführlichen Herleitung der verfeinerten Beschreibung des Schalenraumes wird das schichtabhängige Deformationsmaß für große Verzerrungen eingeführt. Das Prinzip der virtuellen Arbeit der inneren und äußeren Kräfte bildet die Grundlage für eine diskretisierte Gleichgewichtsaussage. Die kontinuumstypische Diskretisierung der Schale läßt durch eine schichtweise Degeneration und anschließender Elimination abhängiger Variablen eine Beschreibung der Deformation über eine Referenzfläche zu. Das aus dieser Kinematik resultierende Potential zur Bewältigung der Probleme der Lasteinleitung an den Laibungen einer Struktur wird ebenso diskutiert, wie die bei Laminaten mit größerem Aufwand zu berechnenden, interlaminaren Schubspannungen. Der in Kapitel 5 erläuterte Versteifungseffekt muß aufgrund der verfeinerten Kinematik neu analysiert werden.

In **Kapitel 8** sollen zahlreiche numerische Beispiele und Vergleiche mit der Literatur die Leistungsfähigkeit der Algorithmen und die Effizienz der vorgestellten Schalentheorien sowie deren Umsetzung in Finite Elemente unterstreichen. Dabei werden lineare und nichtlineare Untersuchungen sowohl an dünnen als auch an dicken Platten- und Schalenstrukturen vorgenommen.

**Kapitel 9** liefert eine zusammenfassende und kritische Bewertung der in dieser Arbeit entwickelten Schalentheorien und gibt für mögliche weiterführende Entwicklungen einige Anregungen.

Zum besseren Verständnis der theoretischen Herleitungen wird die Arbeit durch einen mathematischen **Anhang A** mit Hinweisen zur Tensoralgebra und Tensoranalysis, sowie einigen Sätzen aus der mehrdimensionalen Analysis ergänzt. Im **Anhang B** werden Erläuterungen zur Bestimmung des Koordinatensystems eines anisotropen Werkstoffes aufgeführt.

Die **Literatur** über die angesprochenen Themen findet sich am Ende dieser Arbeit.

## 2 Faserverbundwerkstoffe

Nach einer allgemeinen Einführung über den prinzipiellen Aufbau von Laminaten werden die Eigenschaften der Verstärkungsfasern, der Matrixwerkstoffe und des Faser / Matrix–Verbundes erläutert. Danach erfolgt eine Zusammenstellung der Vor– und Nachteile dieser Materialien, ihre Hauptunterschiede zu herkömmlichen Werkstoffen und einige Anwendungsgebiete.

### 2.1 Einführung

Verbundwerkstoffe oder **Composites** sind eine Kombination beliebiger Werkstoffe. Die charakteristischen Eigenschaften dieser Materialien werden durch die Wahl der Betungsmasse sowie durch Zugabe von anderen Komponenten nach Art, Form, Menge, Ausrichtung und Verteilung beeinflusst. Ein spezieller Verbundwerkstoff ist der **Faserverbundwerkstoff (FVW)**. Er besteht aus 2 Komponenten, wobei die eine in **Faser**form vorliegt und in die andere, sie umgebende Komponente – die **Matrix** – eingebettet ist, siehe Bild 2.1.

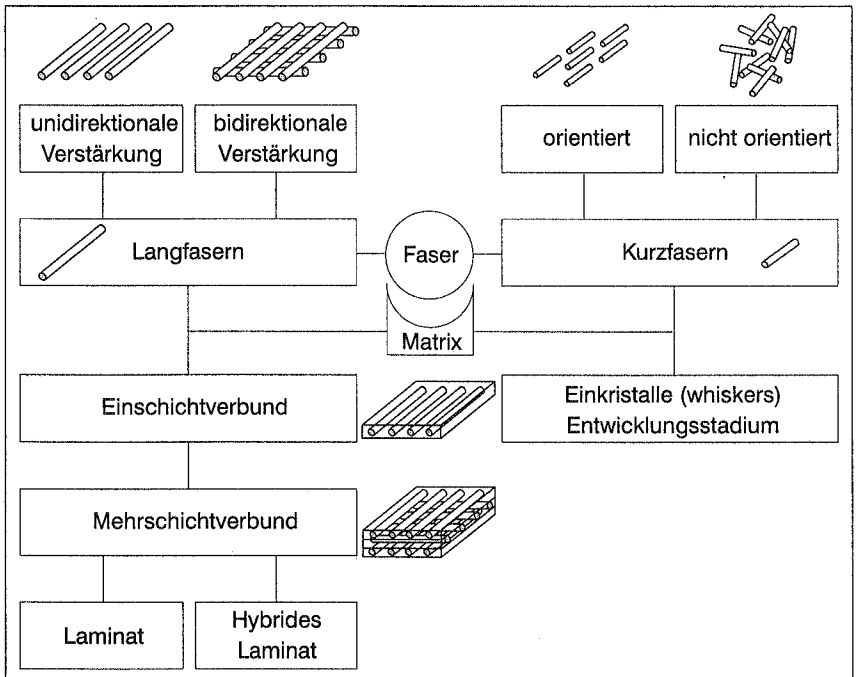


Bild 2.1: Klassifikation der Faserverbundwerkstoffe



Einige daraus resultierende Begriffe und Abkürzungen sollen nun kurz erläutert werden:

Unidirektionaler FVW: Fasern sind parallel und "geradlinig" orientiert

Hybridverbundwerkstoff: FVW, der zwei oder mehrere Fasertypen enthält

Laminat: Mehrschichtig aufgebauter Faserverbundwerkstoff

Hybrides Laminat: Verbund aus Einzellagen mit unterschiedlichen Fasertypen

Kreuzverbund: Faserorientierungen sind auf 0° und 90° beschränkt

Winkelverbund: Faserorientierungen sind auf die Winkel  $\pm \alpha$  beschränkt

Beispiele für FVW: Glasfaser Kunststoff (GFK), Borfaser Kunststoff (BFK), Kohlenstofffaser (Carbonfaser) Kunststoff (CFK), Aramidfaser Kunststoff (AFK)

Exemplarisch für die große Bandbreite der Literatur über Composite-Materialien sei an dieser Stelle auf Bergmann (1992), Chou (1993) und Lee (1993) hingewiesen.

## 2.2 Grundsätzliches über Faserverbundmaterial

### 2.2.1 Beschreibung des Werkstoffes

Die Idee der Faserverbundwerkstoffe ist nicht jüngerem Datum und existiert in der Natur als Grundbaustein. Der älteste Verbundwerkstoff ist Holz, wo Zellulosefasern (Volumenanteil von etwa 40–60%) in eine Lignin-Matrix (20–30%) eingebettet sind. Die charakteristischen Eigenschaften von Fasermaterialien sind durch hohe Festigkeiten und Steifigkeiten in Faserrichtung sowie durch ein geringes Eigengewicht gekennzeichnet. Heute existiert eine umfangreiche Palette von Fasermaterialien: Glasfasern (E-, S-, C-Glas), Kunststofffasern aus Aramid (Handelsname Kevlar) und Kohlenstofffasern (Carbon). Unter Einbuße einiger oben erwähnten Eigenschaften werden Fasern auch aus Keramik oder Metall (Stahl, Bor) hergestellt. In Bild 2.2 sind einige mechanische Eigenschaften der bekanntesten Fasertypen aufgelistet, Grüninger (1991).

Physikalische Eigenschaften	Einheit	Fasertypen (Orientierungswerte)				
		E-Glas	Bor	Kohlenstoff (hochsteif)	Kohlenstoff (hochfest)	Aramid (hochsteif)
Zugfestigkeit (in Faserrichtung)	$\frac{N}{mm^2}$	3500	1900–3700	1400–2100	2500–3400	3500–4200
Elastizitätsmodul (in Faserrichtung)	$\frac{KN}{mm^2}$	73.5	420–450	380–550	240–280	130
Bruchdehnung (in Faserrichtung)	%	~3.0–4.0	0.4	0.4–0.6	0.9–1.1	~2.0
Durchmesser	$\mu m$	5–13	100–140	~7.5	~8	11.7

Bild 2.2: Mechanische Eigenschaften verschiedener Fasertypen

Im direkten Vergleich zueinander sind die Aramidfasern die leichtesten, die Glasfasern die billigsten, die dicken Borfasern die teuersten und die zur Zeit am weitesten verbreiteten Kohlenstofffasern die steifsten.

Die zur Zeit wohl stärkste Faser der Welt ist am Institut für Chemische Technik der Universität Karlsruhe entwickelt worden. Es handelt sich um monokristalline Siliziumnitrid-Fasern mit einem Durchmesser von 1–3  $\mu\text{m}$ , einer Bruchdehnung von 7%, einer Zugfestigkeit von 30000–50000  $\text{N/mm}^2$  und einem Elastizitätsmodul von 550–750  $\text{KN/mm}^2$ , siehe Hüttinger, Pieschnick (1994).

Zum Vergleich sind in Bild 2.3 die Zugfestigkeiten einiger Stahlsorten des Bauwesens und der Luft- und Raumfahrtindustrie angegeben.

Allgemeine Baustähle	350–630 $\text{N/mm}^2$
Hochfeste, schweißgeeignete Baustähle	bis 940 $\text{N/mm}^2$
Hochfeste Stähle der Luft- und Raumfahrtindustrie	bis 2100 $\text{N/mm}^2$

*Bild 2.3: Zugfestigkeit verschiedener Stahlsorten*

Um die hohen gewichtsbezogenen Festigkeiten und Steifigkeiten der Fasern zur Wirkung zu bringen, werden sie in ein Füllmedium (Matrix) eingebettet, so daß ein Faserverbundwerkstoff entsteht. Die Matrix hat im wesentlichen die Aufgabe, die Fasern zu schützen und zu stabilisieren, Überspannungen auszugleichen und Kräfte auf die Fasern zu übertragen. Bei Matrixwerkstoffen wird zwischen Polymer-, Metall-, Keramik- und Kohlenstoffmaterialien differenziert. Aus Bild 2.4 ist zu entnehmen, daß die Bettungsmasse wenig zur hohen Zugfestigkeit und Steifigkeit eines Faserverbundwerkstoffes beiträgt.

Physikalische Eigenschaften	Einheit	Polymere Werkstoffe (Orientierungswerte)		
		Epoxid	Polyester	Polyimid
Zugfestigkeit (in Faserrichtung)	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	40–140	35–92	~75
Elastizitätsmodul (in Faserrichtung)	$\frac{\text{KN}}{\text{mm}^2}$	3.0–4.5	1.5–2.0	---
Bruchdehnung (in Faserrichtung)	%	2–10	2–4	1–7

*Bild 2.4: Mechanische Eigenschaften verschiedener Matrixharze*

**Bemerkungen:**

- Im wesentlichen ist das Spannungs – Dehnungsverhalten bei fast allen Verstärkungsfasern linear bis zum Bruch.

- Auch Stahlbeton kann als Verbundwerkstoff interpretiert werden, da die Stahlbewehrung in ein Betongemisch eingelagert wird und somit die Eigenschaften der Einzelkomponenten, nämlich Stahlstäbe an Steifigkeit und Beton an Festigkeit bei weitem übertreffen.
- In neueren Entwicklungen wurden in Stahlbetontragwerken sowohl in Druck- als auch in Zugzonen eine faserverstärkte Zementmatrix (besonders SIFCON) verwendet, um die Strukturduktilität und die Energieverhältnisse im Vergleich zum Tragwerk ohne Faserverstärkung deutlich zu erhöhen, siehe Naaman et al. (1993, 1994).

Wesentliche Beurteilungskriterien für die Brauchbarkeit eines Werkstoffes im Leichtbau sind sowohl die Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften als auch das Eigengewicht. Bild 2.5 zeigt nach Niederstadt et al. (1985) einen Vergleich gängiger Faserverbundwerkstoffe mit konventionellen Materialien wie Stahl und einigen Leichtmetallen wie Titan und Aluminium. Um die beiden erwähnten Beurteilungskriterien in eine Graphik mit einzubeziehen, ist in der Horizontalen der auf die Wichte  $\gamma = \text{mg/V}$  ( $m$ =Masse,  $g$ =Erdbeschleunigung) bezogene Elastizitätsmodul  $E$  aufgetragen. Entsprechend wird auf der Vertikalen die auf die Wichte bezogene Festigkeit dargestellt, welche als theoretische Reißlänge verstanden werden kann, bei der eine Faser unter ihrem Eigengewicht bricht.

Der Graphik ist zu entnehmen, daß einerseits Faserverbundwerkstoffe bezüglich Festigkeit und Steifigkeit wesentliche Vorteile gegenüber herkömmlichen Materialien besitzen und andererseits, daß allein durch Variation der Volumenanteile von Faser und Matrix unterschiedliche Eigenschaften des Faserverbundwerkstoffes resultieren.

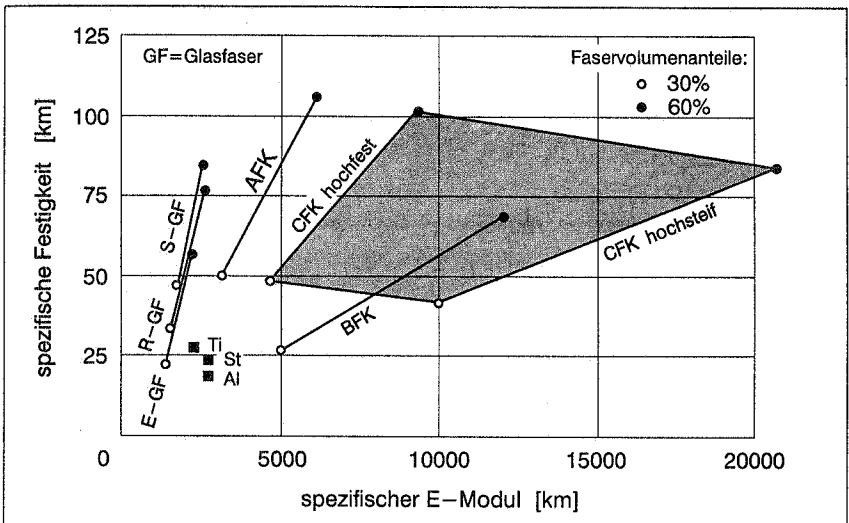


Bild 2.5: Vergleich gängiger Faserverbundwerkstoffe mit konventionellen Materialien

Die Intensität der entstandenen **Anisotropie** (Durch eine makromechanische Betrachtung, siehe Kapitel 3.2, kann man dem Werkstoff orthotropes Materialverhalten zuordnen.) ist von einigen Faktoren abhängig:

- Art und Anordnung der Fasern
  - Unidirektionale Langfasern verursachen starke Orthotropie.
  - In Wirrfasermatten erzeugen die kurzen Fasern einen nahezu isotropen Zustand (in der Schichtebene).
- Volumenanteil der Fasern (je mehr Fasern pro Schicht enthalten sind, desto größer ist der Unterschied der Eigenschaften in Faserrichtung und quer dazu.)
- Materialkombination Faser – Matrix (je unterschiedlicher die Zugfestigkeit und der Elastizitätsmodul von Faser und Matrix sind, desto stärker ist die Orthotropie.)
- Faserdurchmesser (je kleiner der Durchmesser der Fasern ist, desto höher ist ihre Zugfestigkeit (size–effect).)

Je nach Fertigungsverfahren und Anforderungen werden die einzelnen orthotropen bzw. anisotropen Schichten unter beliebigem Winkel miteinander verklebt, so daß ein **Laminat** mit der gewünschten Strukturdicke entsteht. Durch die unterschiedliche Anordnung der Faserrichtungen der einzelnen Lagen resultiert aufgrund der fehlenden Materialsymmetrieebene ein Mehrschichtverbund mit vollkommen anisotropem Materialverhalten (z.B. Zweischicht – Winkelverbund  $30^\circ/-30^\circ$ ). Bei geschickter Stapelung der Schichten läßt sich ein Laminat mit quasi–isotropem Material erzeugen (z.B.  $45^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ/45^\circ$ ).

Bei Mehrschichtverbunden werden zur Charakterisierung des Laminataufbaus zusätzlich folgende Begriffe eingeführt:

- Symmetrisches Laminat, wenn die Faserrichtungen ober– und unterhalb der Laminatmittelfläche korrespondieren.
- Ausgeglichenes Laminat, wenn jeder Schicht mit der Orientierung  $+\alpha$  eine Schicht mit der Orientierung  $-\alpha$  zugeordnet ist.

Um den wirtschaftlichen Einsatz von Faserverbundwerkstoffen zu steigern, können die mechanischen Eigenschaften eines Laminats bei gegebenem Lastfall optimiert werden. In diesem Zusammenhang sind in jüngster Zeit zahlreiche Publikationen erschienen, die durch Variation der Schichtdicke, des Faserwinkels, des Fasergehalts oder der Materialkennwerte für Faser und Matrix (=Entwurfsvariablen) die Zielfunktion der maximalen Steifigkeit oder des minimalen Gewichts erfüllen, siehe z.B. Eschenauer (1984), Fukunaga, Vanderplaats (1991), Gürdal, Haftka (1993), Pedersen (1993), Belsare, Haririan (1993).

## 2.2.2 Vor- und Nachteile von Faserverbundwerkstoffen

Vorteile von Laminaten aus Faserverbundwerkstoffen:

- sehr hohe gewichtsbezogene Festigkeit und Steifigkeit in faserparalleler Richtung
- Anpassung der Faserrichtungen an den Kraftfluß
- vielfältige Werkstoffkombinationen und Schichtungsmöglichkeiten
- geringes Gewicht
- hoher elektrischer Widerstand, antimagnetisch
- hoher Korrosionswiderstand, geringe Wärmedehnung
- gute Ermüdungseigenschaften
- geringer Montageaufwand mit wenigen Einzelteilen

Nachteile von Laminaten aus Faserverbundwerkstoffen (Einige von ihnen dürften aufgrund der regen Forschungs- und Entwicklungsaktivitäten in jüngster Zukunft behoben sein):

- Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung
- geringes Erfahrungspotential der Hersteller und Anwender in bezug auf Herstellungsverfahren, Langzeitverhalten, Entsorgung und Recycling
- fehlende Normen für Faserverbundmaterial
- relativ hohe Materialkosten
- Schwierigkeiten an Verbindungsstellen von Bauteilen (Bolzen, Niete, Klebstoff)
- empfindlich gegen Delamination
- empfindlich gegen Lufteinschlüsse, Blasen, Staub und Verunreinigungen während des Herstellungsverfahrens

## 2.2.3 Hauptunterschiede zu konventionellen Materialien

Die durch die Verbundeigenschaften entstandenen inhomogenen und anisotropen Materialeigenschaften geschichteter Strukturen können als der wesentliche Unterschied zu herkömmlichen Materialien genannt werden. Neben den in Kapitel 2.2.2 erwähnten direkten Folgen dieser Eigenschaften sind noch weitere Gesichtspunkte in Betracht zu ziehen. Bei einer beliebigen (unsymmetrischen) Anordnung der Einzelschichten treten Kopplungen zwischen verschiedenen Deformationsmoden auf, die auf das Verformungsverhalten des Laminats einen bedeutenden Einfluß haben. So können z.B. bei reiner Scheibenbelastung einer Platte Verschiebungen aus der Plattenebene auftreten (siehe Kapitel 5.4 und 8).

Ein weiterer Punkt ist die Berücksichtigung von scheinbaren Symmetriebedingungen, die bei isotropen Materialien korrekt sind, bei geschichteten Strukturen jedoch keine Gültigkeit mehr besitzen, siehe Cheng (1987) und Kapitel 8. Unterschiedliche Querkontraktionen der einzelnen Schichten führen zu verschiedenen Querverschiebungen und Querdehnungen der Lagen. Die Klebeverbindung der Schichten untereinander behindert die "freie" Verformung und erzwingt interlaminare Spannungen in Dickenrichtung.

Dies äußert sich in einem komplizierten Spannungsverlauf in der Umgebung von materiellen und geometrischen Diskontinuitäten und in der Nähe von freien Rändern. Bei der Berechnung von Flächentragwerken aus geschichteten Faserverbundwerkstoffen ist die transversale Schubsteifigkeit in den meisten Fällen so gering, daß die Schubverformung aufgrund der starken Rückwirkungen auf das Verformungsverhalten nicht vernachlässigt werden kann.

#### 2.2.4 Sandwichkonstruktionen

Als Musterbeispiel eines Verbund- bzw. Faserverbundwerkstoffes zählt die Sandwichkonstruktion, da hier verschiedene Materialien vorteilhaft in ein Bauteil integriert werden. Sie besteht aus zwei sehr dünnen, dehnsteifen Außen- oder Deckschichten und einem leichten, ausreichend schubsteifen Kern, Bild 2.6.

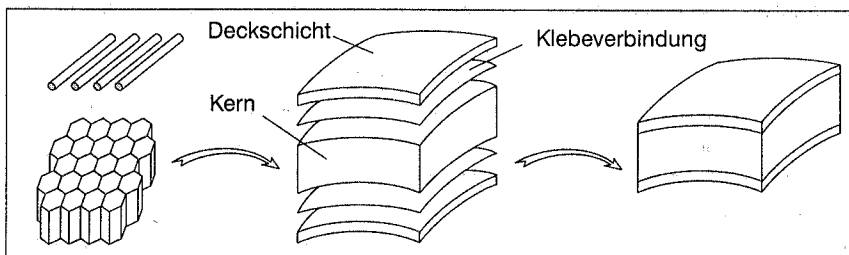


Bild 2.6: Sandwich mit wabenförmigem Kern

Der Kern ist üblicherweise aus Balsaholz, Hartschaum, gewelltem Blech, Metallwaben oder harzgetränkten Papierwaben. Bei den Deckschichten wird zwischen Metallen (Stahl, Aluminium- und Titanlegierungen), Composite Materialien und auch isotropen Materialien unterschieden. Die Schichten der Sandwichkonstruktion sind für sich allein kaum tragfähig, in Verbindung miteinander bilden sie jedoch einen festen, steifen und sehr leichten Verbund, der ebenfalls überwiegend in der Luft- und Raumfahrt und für militärische Zwecke eingesetzt wird.

#### 2.2.5 Spektrum der Anwendungsmöglichkeiten

Aufgrund der günstigen Eigenschaften und dem zu erwartenden Bedarf an Faserverbundwerkstoffen (siehe Kapitel 1.1) ist es nicht verwunderlich, daß auf der 25. Internationalen Tagung der Arbeitsgemeinschaft Verstärkter Kunststoffe (AVK) im November 1993 in Berlin die erste PC-Datenbank für langfaserverstärkte Kunststoffe vorgestellt wurde, siehe Kleine (1993). Mit ihr erhalten sowohl Unternehmen der Kunststoffindustrie als auch Abnehmer die Möglichkeit, Faserverbundwerkstoffe nach definierten Kriterien gezielt und anwendungsorientiert auszuwählen.

Im Bereich der Luft- und Raumfahrtindustrie sind Composites und Laminats seit vielen Jahren fest etabliert. Da ungefähr 50% des Gewichts eines Flugzeugs auf die eigentliche

Zelle entfällt, ist die Leichtbauweise und die damit verbundene Gewichtsreduzierung und Energieeinsparung in dieser Branche besonders effektiv. Auch in der Automobilindustrie, wo zunächst dem Ziel der Gewichtsminderung das Ziel der verbesserten Aufprallsicherheit entgegenwirkt, kommen Faserverbundwerkstoffe immer häufiger zum Einsatz, siehe Maier (1990). Eine bereits in Großserie realisierte Anwendung ist die Fertigung von Kardanwellen und Pleuel aus kohlenstoff- und glasfaserverstärkten Kunststoffen, wodurch eine Gewichtsreduzierung von etwa 50% erreicht wurde, siehe Oprey (1986), Weber (1990), Abele (1993).

Neben den "klassischen" Anwendungsmöglichkeiten im Bauwesen (z.B. Behälterbau, Dachkonstruktionen) werden auch neue Einsatzgebiete erschlossen. Speziell im Stahlbetonbau können Zugelemente aus Faserverbundwerkstoffen in bestimmten Fällen eine Alternative zu Bewehrungsstahl sein. Durch die momentan noch hohen Kosten dieser Werkstoffe sind sie jedoch Anwendungsnischen vorbehalten, bei denen große Steifigkeiten und Festigkeiten sowie die gute Beständigkeit in chemisch aggressiver Umgebung die dominanten Kriterien sind. Weitere Einsatzmöglichkeiten ergeben sich dann, wenn der Aufwand für den Korrosionsschutz der Bewehrung und spätere Erhaltungsmaßnahmen sehr groß sind, siehe Rostasy (1991). Auch im Brückenbau gewinnen diese Materialien immer mehr an Bedeutung, siehe Meier (1992), Erki, Rizkalla (1993), Khalifa et al. (1993). Chambers (1993) gibt zahlreiche Hinweise über zukünftige Entwicklungstrends bezüglich des Einsatzes von Composites als Strukturmaterialien in infrastrukturellen Einrichtungen.

Zunehmend werden Faserverbundwerkstoffe auch im Schiffsbau, in der Sport- und Freizeitindustrie und im Roboterbau eingesetzt.

#### **Fazit :**

Die naheliegende Vorstellung, daß diese "Werkstoffe nach Maß" einen technischen Durchbruch darstellen und alle Probleme der Materialwissenschaftler auf einen Schlag beseitigen, ist zweifelsohne zu optimistisch. Aluminium-, Stahl- und Titanlegierungen und andere herkömmliche Materialien werden auch in nächster Zukunft wesentliche Marktanteile einnehmen; die größeren Zuwachsraten liegen jedoch eindeutig bei den Verbund- und Faserverbundwerkstoffen.

## 3 Modellierung von dünnwandigen Laminaten

Um die Analyse geschichteter Strukturen computergestützten Methoden zugänglich zu machen, werden in diesem Kapitel die Fragen der kinematischen Annahme des Berechnungsmodells von Flächentragwerken und der Beschreibung der differenzierten Materialeigenschaften diskutiert.

### 3.1 Kinematikmodelle

Die Eigenschaften der Faserverbundwerkstoffe erfordern aufgrund der entstandenen Inhomogenität und Anisotropie besondere Berechnungsverfahren, um sowohl die globale Strukturantwort als auch lokale Effekte erfassen zu können. Da die Methode der Finiten Elemente als praktisches Verfahren zur Lösung nichtlinearer Randwertprobleme der Kontinuumsmechanik weit verbreitet und anerkannt ist, soll sie auch in dieser Arbeit zur Anwendung kommen. Aus der zahlreichen Literatur über diese Methode sind die Standardwerke von Bathe (1986) und Zienkiewicz u.a. (1989, 1991) hervorzuheben, in denen die Grundlagen und eine Fülle von Detailfragen erörtert werden. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit nur auf einige spezielle Aspekte eingegangen.

Einer der wichtigsten Schritte vor der Entwicklung eines Finiten Platten- und Schalenelementes für geschichtete Strukturen ist die Wahl des kinematischen Ansatzes über die Dicke des Laminats. In diesem Kapitel werden die in der einschlägigen Literatur erwähnten unterschiedlichen Approximationsstufen des Verschiebungsverlaufes über die Dicke für Platten- und Schalenelemente klassifiziert.

Da auf diesem Gebiet in den letzten 20 Jahren intensiv geforscht wurde, wäre es mühsam, und mit dem Anspruch auf Vollständigkeit auch unmöglich, alle bisher erschienen Publikationen und Bücher aufzulisten. Um dennoch einen allgemeinen Überblick zu ermöglichen, wird auf die Abhandlungen von Noor, Burton (1989, 1990), Reddy (1990) und Mackerle (1994) verwiesen, in denen eine detaillierte Zusammenfassung der zahlreichen Veröffentlichungen, umfangreiche Literaturhinweise (ungefähr 1000) und entsprechende Finite-Elemente-Modelle angegeben werden. Die Publikationen, die in direktem Zusammenhang zu dieser Arbeit stehen, werden im folgenden erwähnt.

#### 3.1.1 Überblick

Die Verschiebungsansätze für geschichtete Flächentragwerke können im Hinblick auf die Stetigkeit bezüglich der Dickenkoordinate in zwei Gruppen unterteilt werden, Bild 3.1. Die erste Kategorie beinhaltet die sogenannten **Einschichtmodelle**, die auf einem  $C^1$ -stetigen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung basieren. Der Begriff Einschichtmodell entspringt der Tatsache, daß die Kinematik dieser Theorie von der Schichtanzahl unabhängig und unempfindlich gegenüber unterschiedlichen Dickenab-



messungen oder Materialeigenschaften der einzelnen Schichten ist. Das Laminat wird vom Blickwinkel der Kinematik behandelt, als hätte es nur eine Schicht. Pinsky, Kim (1986) bezeichnen diese Approximationen deshalb als "kinematisch homogen".

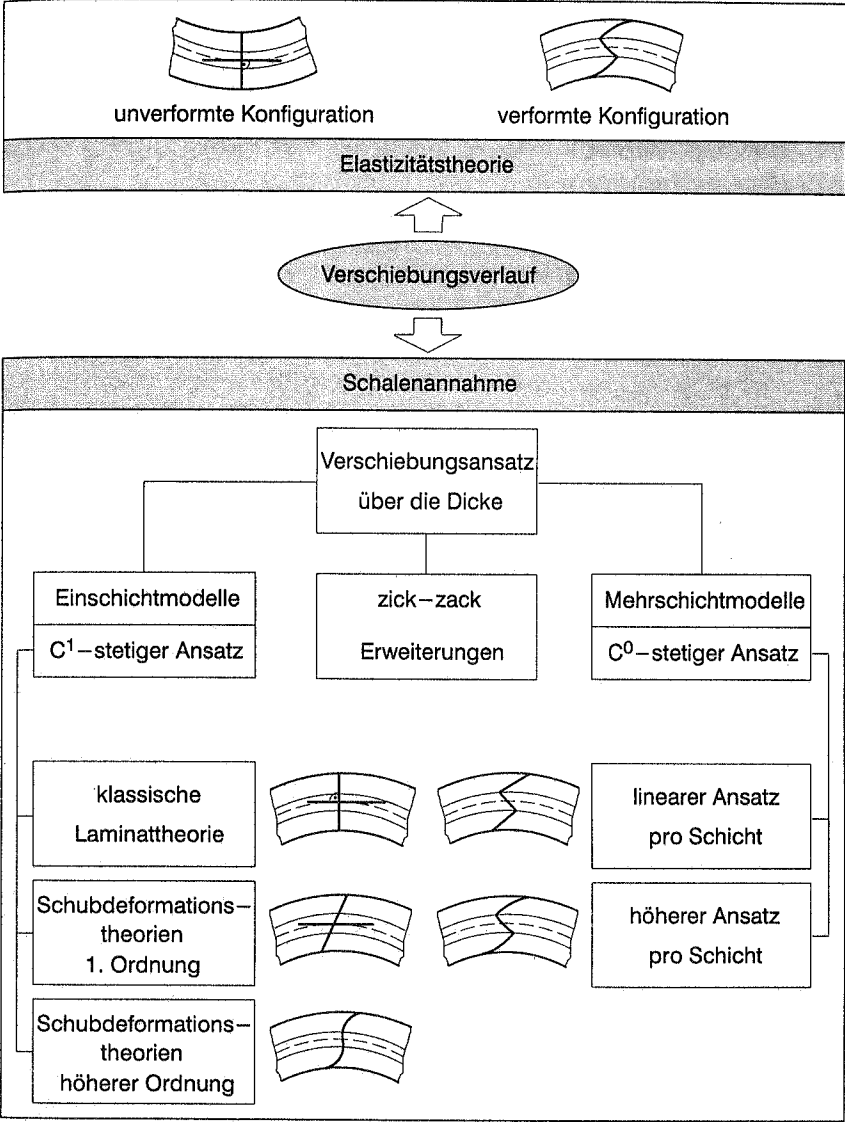


Bild 3.1: Verschiebungsapproximation für Schalen

Einige Vertreter dieser Gruppe sind die klassische Laminattheorie und Schubdeformationstheorien erster und höherer Ordnung.

Eine deutlich genauere Approximation des Verschiebungsverlaufes über die Laminatdicke erhält man durch die  $C^0$ -stetigen Ansätze der zweiten Kategorie, die ihrerseits wieder in zwei Untergruppen unterteilt werden. Bei den **zick-zack Erweiterungen** wird zu einem beliebigen  $C^1$ -stetigen Ansatz der Einschichtmodelle eine zick-zack Funktion hinzuaddiert, die die unterschiedlichen Dicken der einzelnen Schichten berücksichtigt. Im Gegensatz zur globalen Verschiebungsapproximation der Einschichtmodelle wird bei den **Mehrschichtmodellen** pro Laminatschicht ein linearer oder höherer kinematischer Ansatz angenommen.

Die Annahmen der zweiten Gruppe resultieren in einem für geschichtete Platten- und Schalenkonstruktionen typischen zick-zack-förmigen Verlauf des Verschiebungsfeldes über die Dicke.

### 3.1.2 Einschichtmodelle

Da die ersten vollständigen Theorien für Platten (KIRCHHOFF im Jahre 1850) und Schalen (LOVE im Jahre 1888) die Querschubverformungen vernachlässigt haben, wird heute für Platten- und Schalenformulierungen mit dieser Kinematik der Begriff KIRCHHOFF / LOVE-Hypothese verwendet.

Die Erweiterung der KIRCHHOFF-Plattentheorie auf heterogene Querschnitte liefert die **klassische Laminattheorie**. Sie ist in der Lage, die globale Strukturantwort für sehr dünne Laminats mit nicht stark unterschiedlichem Materialverhalten der einzelnen Schichten mit ausreichender Genauigkeit zu beschreiben. Als direkte Folge der kinematischen Annahme dieser Theorie können transversale Schub- und Normalverzerrungen nicht berücksichtigt werden. Die genaue Vorhersage der Systemcharakteristik von geschichteten Flächentragwerken aus Faserverbundwerkstoffen macht es jedoch erforderlich, die Querschubverformungen in die Formulierung mit einzubeziehen. Der Grund dafür ist das große Verhältnis (bis zu 60) des Elastizitätsmoduls in Faserrichtung zum transversalen Schubmodul quer zur Faserrichtung. Für isotrope Materialien hingegen ist das Verhältnis des Elastizitätsmoduls zum Schubmodul immer kleiner oder gleich drei. Die transversale Schubsteifigkeit von faserverstärkten Laminaten ist so gering, daß Schubverformungen nicht vernachlässigt werden dürfen. Pagano (1969, 1970a, 1970b) und Pagano, Hatfield (1972) zeigten durch 3-dimensionale analytische Lösungen für einige Spezialfälle anisotroper, geschichteter Platten genau diesen Sachverhalt.

Formulierungen für Laminats, die die transversalen Verzerrungskomponenten beinhalten, sind in der Literatur als Schubdeformationstheorien bekannt. Dabei erhält man geeignete Verschiebungsansätze, indem die Verschiebungen  $u$  in eine Taylorreihe um den Punkt  $\theta_0^3 = 0$  im Intervall  $-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2}$  ( $h \hat{=}$  Strukturdicke) entwickelt werden.

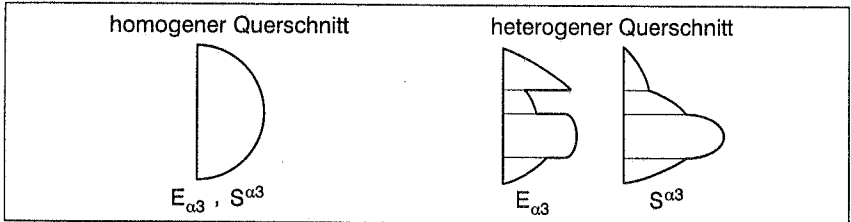
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \theta^3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + (\theta^3)^2 \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{bmatrix} + (\theta^3)^3 \begin{bmatrix} \bar{\bar{w}}_1 \\ \bar{\bar{w}}_2 \\ \bar{\bar{w}}_3 \end{bmatrix} + \dots \quad (3.1)$$

Dabei sind die Vektoren  $\mathbf{w}$ ,  $\bar{\mathbf{w}}$  und  $\bar{\bar{\mathbf{w}}}$  aufgrund des Entwicklungspunktes  $\theta_0^3 = 0$  von der Dickenkoordinate  $\theta^3$  unabhängig. Bricht man nach dem linearen Glied ab, so resultiert die **Schubdeformationstheorie erster Ordnung**, die als Erweiterung der REISSNER/MINDLIN–Kinematik auf geschichtete Strukturen interpretiert werden kann.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 \\ u_3 &= v_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Vektor  $\mathbf{v}$  beschreibt dabei die Verschiebung einer Referenzfläche (meistens die Schalenmittelfläche), während die beiden Komponenten  $w_1$  und  $w_2$  die Rotation der inextensiblen Schalennormale  $\mathbf{a}_3$  (auch Direktor genannt) definieren, siehe Kapitel 5.2. Auf der Basis dieser 5–Parameter Kinematik wurden zur Analyse anisotroper, geschichteter Strukturen entsprechende Schalenelement–Formulierungen entwickelt: Mit der Theorie kleiner Verschiebungen von Lehar (1985), Schmid (1988) und für nichtlineare Untersuchungen von Dorninger (1989), Dorninger, Rammerstorfer (1990b), Klarmann (1991), Schellekens (1992), Başar et al. (1993) und Wagner, Gruttmann (1994). Alle nichtlinearen Schalenformulierungen können kleine Verzerrungen und große Rotationen beschreiben.

Die resultierende Schalentheorie des Ansatzes (3.2) kann über die Schalendicke lediglich konstante, transversale Schubverzerrungen und –spannungen abbilden. Der wahre, physikalische Verlauf ist bei isotropen Materialien jedoch parabolisch und bei geschichteten Schalen zusätzlich mit Knicken und Sprüngen behaftet, Bild 3.2.



*Bild 3.2: Qualitativer Verlauf der transversalen Schubverzerrung und –spannung*

Um die virtuelle, innere Arbeit der transversalen Schubdeformationen wirklichkeitsnäher zu erfassen, wurden Schubkorrekturfaktoren eingeführt, die bei Laminaten von den einzelnen Schichten, vom Schichtaufbau und von der Richtung abhängig sind. Verschiedene Vorgehensweisen zur Berechnung dieser Faktoren finden sich u.a. in Whitney (1972, 1973), Noor, Peters (1989), Klarmann (1991), Vlachoutsis (1992) und Klarmann, Schweizerhof (1993).

Bei allen bisher erwähnten Formulierungen wird von der bei konventionellen 5-Parameter Schalentheorien üblichen Annahme ausgegangen, daß die transversale Normalspannung  $S^{33}$  gleich Null ist und realisiert dies über eine Modifikation (Kondensation) des Werkstoffgesetzes. Zusammen mit den Überlegungen des transversalen Querschubs wird somit eine physikalisch sinnvolle Modellierung einer bei geschichteten Strukturen häufig anzutreffenden Versagensform, der Delamination, d.h. die Ablösung einzelner oder mehrerer Schichten infolge Querzug verhindert.

Um nun alle für ein physikalisch sinnvolles Versagens- bzw. Schädigungskriterium relevanten Beanspruchungsgrößen in einer Schalentheorie vereint zu haben (bzw. besser approximiert), muß der geometrische Zwang des inextensiblen Direktors fallengelassen werden. Es resultiert somit eine 6-Parameter Theorie, die in der Lage ist, eine konstante Dickenänderung der Schale zu beschreiben. Der entsprechende kinematische Ansatz sieht demnach wie folgt aus:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 \\ u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Berücksichtigung der Dickenänderung bringt neben dem bereits erwähnten 3-dimensionalen Spannungszustand weitere Vorteile mit sich. Sie befreit konventionelle 5-Parameter Schalentheorien von der gravierenden Einschränkung auf kleine Verzerrungen. Des weiteren besteht die Möglichkeit, unveränderte 3-dimensionale Stoffgesetze verwenden zu können. Dieser auf den ersten Blick nicht allzu dramatisch wirkende Vorteil gewinnt jedoch an Bedeutung, wenn berücksichtigt wird, daß die oben angesprochene Modifikation des Materialtensors lediglich bei einfachen Stoffgesetzen leicht durchführbar ist. Bei komplizierteren konstitutiven Gleichungen hingegen (z.B. für gummiartige Materialien, für Schädigungsmodelle oder in der Plastizität) ist die Kondensation explizit nicht durchführbar oder sie führt zu sehr komplizierten Ausdrücken. Die Nachteile der 6-Parameter Theorie werden in Kapitel 5.8 ausführlich diskutiert.

Eine andere Möglichkeit zur exakten Bestimmung der Deformationsenergie der transversalen Schubverzerrungen stellen die **Schubdeformationstheorien höherer Ordnung** dar, bei denen das Verschiebungsfeld in Gleichung (3.1) quadratische oder höherwertige Terme enthält. Ansätze der Ordnung drei führen auf einen quadratischen Verlauf des Querschubs, so daß Schubkorrekturfaktoren überflüssig werden. Eine Fülle von Formulierungen mit kubischen Verschiebungsansätzen sind seit Mitte der siebziger Jahre erschienen, z.B. Lo et al. (1977), Kwon, Akin (1987) und Pandya, Kant (1988).

Besonders hervorzuheben ist die 9-Parameter Plattenformulierung von Reddy (1984a), der für die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  einen kubischen und für die Querver-schiebung  $u_3$  einen konstanten Ansatz wählt. Durch den Einbau der Bedingungen, daß die transversalen Schubspannungen  $S^{13}$  und  $S^{23}$  an der Ober- und Unterseite der

Struktur null sein müssen, kann die Formulierung auf eine Theorie reduziert werden, die weiterhin einen kubischen Verschiebungsverlauf, aber nur noch 5 Parameter besitzt.

$$u_\alpha = v_\alpha + \theta^3 w_\alpha + (\theta^3)^3 \left[ -\frac{4}{3h^2} (w_\alpha + v_{3,\alpha}) \right] \quad (3.4)$$

$$u_3 = v_3$$

Der entscheidende Nachteil ist die erforderliche  $C^1$ -Kontinuität der Durchsenkung  $u_3$  bezüglich der Koordinaten  $x$  und  $y$ . Diese vereinfachte Schubdeformationstheorie höherer Ordnung wurde von Reddy (1984b) auf die von KÁRMÁN Nichtlinearität erweitert und diente als Basis für einige später entwickelte Finite-Element-Formulierungen, Phan, Reddy (1985), Putcha, Reddy (1986).

Viele dieser Arbeiten der Schubdeformationstheorien höherer Ordnung sind jedoch auf spezielle Geometrien (Platte), eingeschränkte geometrische Nichtlinearitäten (von KÁRMÁN, kleine Rotationen, kleine Verzerrungen) oder sogar auf den linearen Fall beschränkt. Auch die Berücksichtigung der transversalen Normalspannung  $S^{33}$  ist eher die Ausnahme als die Regel.

Verschiebungsansätze mit höherwertigen Termen als 3. Ordnung sind in der einschlägigen Literatur nicht bekannt, da sie zum einen sehr aufwendig wären und zum anderen keine spürbare Verbesserung der Genauigkeit der Lösung zur Folge hätten.

Die Kontinuität der aus den Verschiebungsansätzen der Einschichtmodelle resultierenden Verzerrungen und Spannungen über die Dicke wird in Bild 3.3 mit den wahren Verläufen der 3-dimensionalen Elastizitätstheorie verglichen.



	Dehnungen und Schubverzerrungen $E_{11}$ $E_{22}$ $E_{12}$	transversale Schubverzerrungen $E_{13}$ $E_{23}$	transversale Dehnung $E_{33}$
3D-Elastizitätstheorie	stetig	nicht stetig	nicht stetig
	nicht stetig	stetig	stetig
Einschichtmodelle	stetig	stetig	stetig
	nicht stetig	nicht stetig	0 / nicht stetig
	Membran- und Biegespannungen $S^{11}$ $S^{22}$ $S^{12}$	transversale Schubspannungen $S^{13}$ $S^{23}$	transversale Normalspannung $S^{33}$

Bild 3.3: Kontinuität der Verzerrungen und Spannungen über die Dicke

Alle Einschichtmodelle basieren auf Verschiebungsansätzen, die zu stetigen Verzerrungsfeldern über die Dicke führen. Die transversalen Dehnungs- und Schubanteile

sind jedoch bei geschichteten Strukturen mit Sprüngen über die Dicke behaftet, so daß die exakte Beschreibung von Laminaten mit unterschiedlichen Schichtmaterialien unmöglich wird. Auf der statischen Seite verhält sich die Situation genau umgekehrt. Da die Spannungen aus dem Materialgesetz berechnet werden und jede Schicht einen anderen Materialtensor besitzt, geht die erforderliche Kontinuität der transversalen Spannungskomponenten verloren.

#### Fazit :

Die Einschichtmodelle sind die einfachsten und wirtschaftlichsten Formulierungen zur globalen Analyse von Laminaten, verbunden mit dem wesentlichen Vorteil, daß die Anzahl der Unbekannten der Finite-Element-Diskretisierung unabhängig von der Anzahl der Schichten ist. Sie können das globale Systemverhalten, wie maximale Durchbiegung, kritische Beullast oder dynamische Aspekte (Eigen- und Schwingungsfrequenzen) von dünnen bis mäßig dicken Laminaten mit akzeptabler Genauigkeit wiedergeben, wenn die Dicken- und Steifigkeitsverhältnisse der einzelnen Schichten bestimmte Schranken nicht überschreiten. Die Schubdeformationstheorien höherer Ordnung lassen aufgrund ihrer höherwertigen Terme einen deutlich breiteren Anwendungsbereich zu als die klassischen Schalenmodelle.

Wenn jedoch genauere Informationen über lokale Effekte auf Schichtebene oder zwischen zwei Schichten erforderlich werden, so sind Einschichtmodelle durch ihre globale Verschiebungsapproximation ungeeignet. Ein erster Schritt zur Erfassung des lokalen Festigkeitsverhaltens sind die Erweiterungen der Einschichtmodelle durch zick-zack Funktionen.

#### 3.1.3 Zick-zack Erweiterungen

Während eines Deformationsvorganges können aufgrund materieller und geometrischer Diskontinuitäten erhebliche Knicke des Verschiebungsverlaufes über die Dicke der Schale entstehen. Die durch unterschiedliche Dickenverhältnisse der einzelnen Schichten hervorgerufenen Knicke werden bei dieser Methode durch Addition einer **zick-zack Funktion** zu einem beliebigen  $C^1$ -stetigen Ansatz erfaßt. Einige Vertreter dieser Idee sind z.B. Di Sciuva (1985, 1987, 1993), Bhaskar, Varadan (1991), Di, Ramm (1993), Rothert, Di (1994).

In Gleichung (3.6) ist ein möglicher Verschiebungsansatz  $u^L$  für die  $L$ -te Schicht nach Di, Ramm (1993) angegeben. Dabei stellen  $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, \bar{w}_1$ , und  $\bar{w}_2$  die unbekannt, verallgemeinerten Verschiebungen des  $C^1$ -stetigen, kubischen Ansatzes dar.  $\hat{\theta}_L^3$  beschreibt eine stückweise lineare,  $C^0$ -stetige zick-zack Funktion in Abhängigkeit der einzelnen Schichtdicken  $h_L$  sowie der natürlichen Schichtkoordinaten  $\zeta_L \in [-1, +1]$ .

$$\hat{\theta}_L^3 = \hat{\theta}_L^3(h_L, \zeta_L) \quad \text{mit} \quad i = 1(1)L \quad (3.5)$$

$$\begin{array}{l}
 u_1^I = v_1 + \theta^3 w_1 + (\theta^3)^3 \bar{w}_1 + \hat{\theta}_L^3 \psi_1 \\
 u_2^I = v_2 + \theta^3 w_2 + (\theta^3)^3 \bar{w}_2 + \hat{\theta}_L^3 \psi_2 \\
 u_3^I = v_3
 \end{array}
 \quad (3.6)$$

Der "Zusammenbau" des Ansatzes mit den beiden Rotationen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  ist in Bild 3.4 graphisch verdeutlicht.

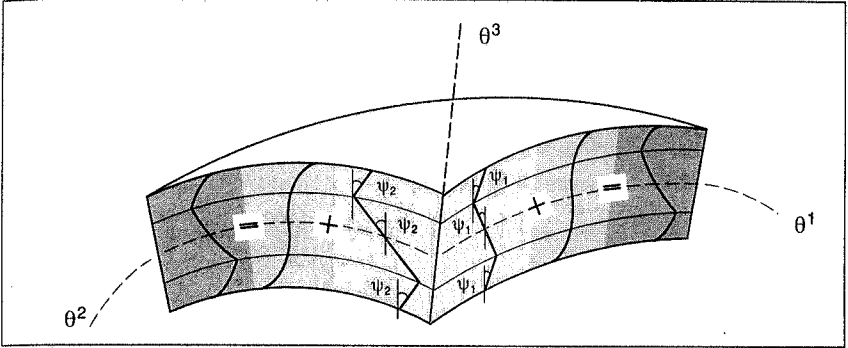


Bild 3.4: Illustration der zick-zack Erweiterung nach Di, Ramm (1993)

Aus der Graphik wird deutlich, daß diese Formulierung starken Restriktionen unterworfen ist, da die Rotationswinkel in jeder Schicht als identisch vorausgesetzt werden. Diese Zwangsbedingung ist jedoch physikalisch dann nicht realistisch, wenn das Strukturverhalten, beispielsweise einer Sandwichkonstruktion, simuliert oder die KIRCH-HOFF/LOVE-Bedingung in einer Schicht erfüllt werden muß.

#### Fazit :

Da in dieser Formulierung die Rotationen der einzelnen Schichten miteinander gekoppelt sind (besser, wenn auch aufwendiger wäre, wenn jede Schicht eine unabhängige Rotation besitzt), können Diskontinuitäten, die auf stark unterschiedlichen Materialeigenschaften der einzelnen Schichten beruhen, nicht beschrieben werden.

Bei der Anwendung allgemeinerer Modelle sind auf Kosten einer höheren Anzahl an unbekanntem Parametern Verdrehungen der Schichten unabhängig voneinander möglich.

#### 3.1.4 Mehrschichtmodelle

Aufgrund der variierenden Faserorientierungen und der Anisotropie des Materials versucht jede Schicht sich unabhängig von den anderen zu bewegen, so daß relativ große Kantenspannungen notwendig sind, um die Kompatibilität der Deformation sicherzustellen. Dieser sowie zahlreiche andere lokale Effekte, wie z.B. Rißfortschritt, Schädigung

gung oder interlaminare Spannungen erfordern auf der Basis einer adäquaten Kinematik eine möglichst genaue Berechnung des 3–dimensionalen Spannungszustandes. Auch die transversale Normalspannung  $S^{33}$ , die zwar keine dominante, aber im Hinblick auf Delamination eine signifikante Spannung darstellt, muß in die Analyse mit aufgenommen werden.

Zu Beginn der Entwicklungsphase von Berechnungsverfahren für geschichtete Strukturen fanden Mehrschichtmodelle aufgrund der geringen Verbreitung der Faserverbundwerkstoffe keine Berücksichtigung. Da bei diesen Theorien pro Laminatschicht ein meistens polynomialer Verschiebungsansatz linearer oder höherer Ordnung angenommen wird und somit die Freiheitsgrade von der Schichtanzahl abhängig sind, dürften die damals noch in den Kinderschuhen steckenden Rechnerleistungen ein weiterer Grund für die Nichtbeachtung dieser Formulierungen sein.

Die erste dem Autor bekannte Veröffentlichung für isotrop geschichtete Schalen geht auf Epstein, Glockner (1977) zurück, die jedoch nur eine Theorie, aber keine Diskretisierung und auch keine Beispiele vorstellten. Ab Mitte der achtziger Jahre erschienen dann zahlreiche Publikationen, die sich im wesentlichen durch folgende Punkte unterscheiden: kartesische oder krummlinig, konvektive Beschreibung von Platten– oder Schalentragwerken aus isotropen oder anisotropen Materialien, Grad der berücksichtigten Nichtlinearität (von KÁRMÁN–Theorie, kleine oder große Verzerrungen sowie Rotationen) und die Benutzung von kondensierten ( $S^{33} = 0$ ) oder komplett 3–dimensionalen Stoffgesetzen ( $S^{33} \neq 0$ ).

Reddy (1987) entwickelte auf der Basis linearer Analysen eine verallgemeinerte Schreibweise für Plattentheorien mit beliebiger Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung. Für die Verschiebung eines Punktes wird folgender, allgemein gehaltenen Ansatz angenommen:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j(x, y) \Phi_j(z) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \sum_{j=1}^n V_j(x, y) \Phi_j(z) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y) + \sum_{j=1}^m W_j(x, y) \Psi_j(z)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei  $(u, v, w)$  die Verschiebung eines Punktes  $(x, y, 0)$  der Referenzebene repräsentiert. Die unbestimmte Koeffizienten  $U_j, V_j, W_j$  werden über beliebige, die Kontinuität erfüllende und in der Dickenkoordinate  $z$  stetige Funktionen definiert. Durch geschickte Interpretation der unbekanntenen Koeffizienten und Festlegung der Funktionen  $\Phi_j(z), \Psi_j(z)$  sind alle im Kapitel 3.1.2 erwähnten Einschichtmodelle enthalten. Die nichtlineare Erweiterung auf die von KÁRMÁN–Plattentheorie wird in Reddy, Barbero (1987) erläutert.



Mit Hilfe einer eindimensionalen LAGRANGE–Interpolation über die Schichtdicke und unter der Voraussetzung der transversalen Inextensibilität lieferten Reddy et al. (1989) im Rahmen einer Theorie kleiner Verschiebungen die numerische Umsetzung (Finite–Element–Diskretisierung) der obigen Gleichungen. Die Verschiebungen  $u_1, u_2$  wurden dabei als linear veränderlich und die Durchsenkung  $u_3$  als konstant in der Dickenkoordinate  $z$  angenommen. Barbero et al. (1990) fanden auf der Basis trigonometrischer Reihenentwicklungen eine analytische Lösung für die von Reddy vorgestellte verallgemeinerte Plattentheorie.

Mit der Forderung der Inextensibilität der Direktoren existieren einige Veröffentlichungen über nichtlineare Platten– (Owen, Li (1987a, 1987b)) und Schalentheorien für anisotropes Werkstoffverhalten, siehe Dörninger (1991), Rammerstorfer et al. (1992), Başar et al. (1993), Gruttmann et al. (1993). Die ersten beiden Schalenbeiträge basieren auf der von Ramm (1976) zur Beschreibung großer Rotationen eingeführten Kinematik.

Formulierungen, die eine Änderung der Strukturdicke und einen vollständig 3–dimensionalen Spannungszustand berücksichtigen, sind zur Beschreibung der lokalen Effekte am besten geeignet. Epstein, Huttelmaier (1983), Huttelmaier, Epstein (1985), Pinsky, Kim (1986) und Robbins, Reddy (1993a) publizierten lineare Platten– und Schalentheorien, die einige dieser Phänomene beschreiben können. Veröffentlichungen neuesten Datums für nichtlineare Finite–Element–Formulierungen zur Untersuchung lokaler Effekte sind Başar, Ding (1994), Gruttmann, Wagner (1994, 1995).

Die Kontinuität der aus den Mehrschichtmodellen resultierenden Verzerrungs– und Spannungsverläufen ist in Bild 3.5 (analog zu Kapitel 3.1.2) dargestellt.



	Dehnungen und Schubverzerrungen $E_{11} \ E_{22} \ E_{12}$	transversale Schubverzerrungen $E_{13} \ E_{23}$	transversale Dehnung $E_{33}$
3D–Elastizitätstheorie 	stetig	nicht stetig	nicht stetig
	nicht stetig	stetig	stetig
Mehrschichtmodelle 	stetig	nicht stetig	nicht stetig
	nicht stetig	nicht stetig	0 / nicht stetig
	Membran– und Biegespannungen $S_{11} \ S_{22} \ S_{12}$	transversale Schubspannungen $S_{13} \ S_{23}$	transversale Normalspannung $S_{33}$

Bild 3.5: Kontinuität der Verzerrungen und Spannungen über die Dicke

Die durch die unterschiedlichen Schichtmaterialien hervorgerufenen Sprünge in den transversalen Verzerrungsanteilen werden bei dieser lokalen Verschiebungsapproximation richtig erfaßt. Da sich auf Materialeseite im Vergleich zu den Einschichtmodellen nichts geändert hat, bleibt die Problematik bezüglich der Diskontinuität der Schub- und Normalspannung in Dickenrichtung erhalten. Sie ist durch die kinematische Annahme begründet.

### **Bemerkungen:**

- Kinematische Ansätze auf der Basis der Mehrschichtmodelle sind die Grundlage für die Beschreibung des Strukturverhaltens von Sandwichkonstruktionen. Dabei können spezielle Annahmen, die aus der besonderen Sandwichkinematik resultieren, in den Verschiebungsansatz mit "eingearbeitet" werden. Ha (1990) gibt eine Übersicht der unterschiedlichen, kinematischen Approximationen sowie deren Umsetzung in Finite-Element-Modelle zur Analyse von Sandwichplatten an.
- Um die Vorteile sowohl der Einschicht- als auch der Mehrschichtmodelle in einer Analyse optimal nutzen zu können, wurden in jüngster Zeit hierarchische Theorien entwickelt, siehe Babuška et al. (1992), Actis, Szabó (1993).
- Da Schalenmodelle eine Approximation der dreidimensionalen Struktur beschreiben, ist eine Genauigkeitsanalyse dieser Näherungsmodelle wünschenswert. Schwab (1994) konstruierte verschiedene 2-dimensionale Plattenmodelle in Hierarchien steigender Komplexität für die 3-dimensionale, lineare Elastostatik auf dünnen Gebieten. Durch die vollständige, asymptotische Entwicklung der Lösung  $u$  nach Potenzen des Dickenparameters und einer rigorosen Analysis der damit erzielten asymptotischen Entwicklung der Verformungsarbeit konnte er zeigen, daß die 3-dimensionale Lösung von den Plattenmodellen nur in mit der Dicke kleiner werdenden Grenzsicht-Umgebungen des Randes abweicht. Zudem konnte er diesen Modellfehler auch quantitativ beschreiben. Der Approximationsfehler der Plattenmodelle klingt in das Innere des Gebietes exponentiell ab. Damit kann eine systematische qualitative sowie quantitative adaptive Modellierung 3-dimensionaler Fehler mit Plattenmodellen erzielt werden. Die entsprechende Verallgemeinerung auf Schalen steht noch aus.
- Eine systematische Untersuchung der Konvergenz von elliptischen Randwertproblemen auf 3-dimensionalen Gebieten gegen niederdimensionale Grenzmodelle auf 2-dimensionalen Gebieten wurde von Ciarlet (1990) und Ciarlet, Miara (1992) durchgeführt. Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der Rechtfertigung des KIRCHHOFF/LOVE Modells für Platten- und schwach gekrümmte Schalenstrukturen (für ST. VENANT-KIRCHHOFF Material) als asymptotischer Grenzwert eines geeignet skalierten, 3-dimensionalen Problems bei verschwindender Dicke des Grundgebietes.

## **Fazit :**

Mehrschichtmodelle sind zweifelsohne die teuersten und aufwendigsten Formulierungen. Sie garantieren aber als einzige Theorie eine kinematisch korrekte Darstellung des Verschiebungs- und Verzerrungsverlaufes in Laminaten, womit eine wesentliche Voraussetzung zur Bestimmung eines 3-dimensionalen Spannungszustandes am Interface oder innerhalb einer Schicht existiert. Hohe Spannungskonzentrationen in der Nähe von freien Kanten, Löchern oder Aussparungen sowie die komplizierte Versagens- und Schädigungscharakteristik machen die Berücksichtigung aller 6 Spannungsgrößen notwendig.

## **3.2 Materialmodelle**

Da geschichtete Strukturen aus Faserverbundwerkstoffen durch ihre Bestandteile und der starken Anisotropie den unterschiedlichsten Belastungen und Kraftflüssen angepaßt werden können, treten auch sehr differenzierte Materialeigenschaften auf. In diesem Kapitel sollen die zwei prinzipiellen Betrachtungsweisen zur Berechnung von Verbundwerkstoffen erläutert und die im Gegensatz zu metallischen Materialien deutlich komplizierteren Festigkeitsversagensarten sowie einige Verfahren zu deren Erfassung angegeben werden.

### **3.2.1 Mechanisches Verhalten von Faserverbundwerkstoffen**

Aufgrund ihrer inhärenten, heterogenen Natur werden bei der Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Verbundwerkstoffen zwei Betrachtungsweisen unterschieden. Der erste Schwerpunkt wird durch den Begriff der **Mikromechanik** geprägt. Hierunter werden alle Untersuchungen verstanden, die Aufschlüsse über das Zusammenwirken und die gegenseitige Beeinflussung der Faser und der Matrix geben. Eine mikroskopische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen scheidet für die numerische Simulation des Tragverhaltens jedoch immer dann aus, wenn das globale Verhalten der gesamten Struktur im Vordergrund stehen soll und es weniger um die Analyse der mikroskopischen Interaktion zwischen Faser und Matrix geht. Chawla (1987) und Dorninger (1989) geben eine Reihe von Verfahren an, die von der einfachsten Mischungsregel bis zu komplizierten analytischen oder numerischen Methoden reichen. Viele dieser Verfahren fußen auf einem mathematisch sehr hohen Aufwand, so daß trotz hoher Genauigkeit die praktische Anwendbarkeit stark eingeschränkt ist.

Um jedoch das globale Verhalten einer Struktur aus Faserverbundwerkstoffen einer computergestützten und vom Aufwand akzeptablen Bearbeitung zugänglich zu machen, muß der inhomogene, anisotrope Verbund aus Faser und Matrix durch ein fiktives, schichtweise homogenes, aber weiterhin anisotropes Material ersetzt werden. Die dafür benötigte Vorhersage der Material- oder Elastizitätskennwerte einer unidirektio-

nal verstärkten Schicht aus den mikroskopischen, mechanischen Eigenschaften der Faser- und Matrixwerkstoffe wird in den meisten Büchern über Faserverbundmaterialien über "einfache" Mittelungs- oder Mischungsregeln vorgenommen. Dieser Vorgang ist in der mathematischen Literatur unter dem Begriff Homogenisierung bekannt.

Die zweite Betrachtungsweise basiert auf dem Terminus **Makromechanik**. Hier wird nicht mehr zwischen Faser und Matrix unterschieden; die Eigenschaften beider Komponenten werden bei der makromechanischen Betrachtungsweise verschmiert. Das Laminat wird makroskopisch als schichtweise homogenes, anisotropes Kontinuum betrachtet, so daß die globalen Eigenschaften entweder einer Schicht oder des gesamten Laminats von Interesse sind. Mit Hilfe der anisotropen Kontinuumstheorie ist somit die Grundlage für die in der Strukturmechanik verwendeten Materialmodelle gesetzt. Dieses "**verschmierte Werkstoffprinzip**" stellt das Fundament für alle in Kapitel 3.1 erläuterten Approximationstheorien dar.

### 3.2.2 Bruchverhalten und Versagen

Aufgrund des heterogenen, anisotropen Aufbaus von Faserverbundwerkstoffen unterscheidet sich das Bruchverhalten wesentlich von dem der metallischen Materialien. Bei Metallen wird der Bruch durch das Entstehen und Fortpflanzen eines einzigen Risses eingeleitet, bei Verbundstrukturen hingegen sind die Vorgänge bei der Rißausbreitung deutlich komplexer. Das Versagen ist ein Ergebnis mehrerer, sich gegenseitig beeinflussender, mikromechanischer Versagensprozesse, die naturgemäß im weiteren makromechanische Auswirkungen zeigen. So können z.B. Matrixmikrorisse als Folge erster plastischer Deformationen im Laufe des Verformungsvorganges zu einer Mikrorißzone anwachsen und somit Vorläufer eines makroskopischen Risses sein. Eine klare Trennung der einzelnen Mechanismen und die Einschätzung ihres qualitativen Anteils am Gesamtbruchgeschehen gestaltet sich äußerst schwierig.

Die Schadenscharakteristik in faserverstärkten Verbundsystemen manifestiert sich auf unterschiedliche Art. Die meisten Schäden lassen sich jedoch auf "einfache" Versagensmechanismen zurückführen. Bei Laminaten wird zwischen **intralaminarem** und **interlaminarem Versagen** unterschieden, siehe Bild 3.6.

Faserbruch kann infolge unregelmäßiger Faserdurchmesser, nicht parallel verlaufender Fasern oder anderen Abweichungen in Geometrie und Anordnung auftreten. Bei der Lastabtragung werden die Anteile der gebrochenen Fasern durch Schubspannungen über die Matrix auf die Nachbarfasern übertragen, so daß die lokale Zugfestigkeit des Laminats im Bereich der gebrochenen Fasern abnimmt. Auch die Matrix kann, obwohl fast die gesamte Festigkeit und Steifigkeit eines Verbundes in den Fasern enthalten ist, die Ursache des Versagens des Laminats sein. Wenn z.B. unter Druckbelastung in Faserrichtung eine nicht ausreichende Steifigkeit der Matrix das seitliche Ausknicken der

Faser nicht verhindern kann oder wenn überhöhte Spannungen in Gebieten oder Richtungen entstehen, die nicht mit Fasern verstärkt sind.

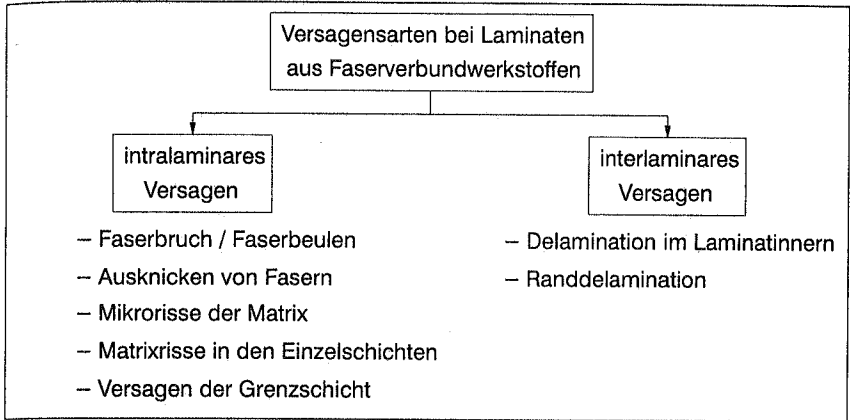


Bild 3.6: Versagensarten in faserverstärkten Verbundstrukturen

Bei interlaminarem Versagen wird zwischen der **Delamination**, die im Innern eines Laminats und solchen, die an den freien Kanten entstehen, unterschieden. Das Ablösen einzelner oder mehrerer Schichten im Innern einer Struktur kann durch Schlägeinwirkung (z.B. während des Betriebes eines Flugzeugs) oder durch Fremdeinschlüsse (Luft, Staub oder sonstige Verunreinigungen) während des Herstellungsverfahrens entstehen. Eine im Ergebnis der eben beschriebenen Delamination ähnliche, aber in der Ursache völlig andere Art des Versagens ist die Randdelamination. Hier verursachen unterschiedliche Querkontraktionen der einzelnen Schichten sehr hohe interlaminares, transversale Spannungen, die das Laminat in einer oder mehreren Ebenen aufspalten (free-edge effect), siehe u.a. Shah, Krishna Murty (1991), Schellekens (1992), Robbins, Reddy (1993b), Rinderknecht (1994). Weitere lokale und globale Instabilitätsphänomene, die meistens aber nur bei Sandwichstrukturen zu beobachten sind, werden in Starlinger (1991), Kühhorn (1991) und Kühhorn, Schoop (1992) beschreiben.

### 3.2.3 Versagenskriterien für Faserverbundstrukturen

Die Bestimmung des Festigkeitsverhaltens und die damit verbundene Abschätzung der Funktionsfähigkeit eines Laminats läßt sich auf experimentellem Weg mit vertretbarem Aufwand nicht realisieren. Aufgrund der großen Anzahl möglicher Laminatkonfigurationen mit mehreren Kenngrößen wären zu viele Versuche notwendig, um die Festigkeitscharakteristik zu bestimmen. Daraus ergibt sich die Forderung nach analytisch ableitbaren Kriterien für die Belastbarkeit von Laminaten.

Auch bei der Vorhersage der Versagenscharakteristik wird analog zu Kapitel 3.2.1 zwischen mikro- und makromechanischen Kriterien und Verfahren unterschieden, obwohl beide Bereiche, wie in den vorigen Kapiteln bereits erwähnt, eng miteinander verbunden sind.

In vielen Veröffentlichungen werden für numerische Simulationen diskrete Risse in der Matrix oder sonstige mikro- und bruchmechanische Zusammenhänge zwischen Faser und Matrix modelliert. So diskretisiert Herrmann (1991) Matrixrisse in einer thermisch belasteten Einheitszelle eines Verbundwerkstoffes, bestehend aus Glasfasern eingebettet in eine Aluminiummatrix. In Dorninger (1989) und Herrmann (1991) finden sich einige Publikationen, die auf einer mikroskopischen Modellierung von Faserverbundwerkstoffen für die computergestützte Simulation des Schädigungs- und Versagensverhaltens basieren.

Die mikroskopische Vorgehensweise kann zwar sehr genau die Interaktion zwischen den Verbundkomponenten darstellen, hat aber meist die Existenz, den Ort sowie bestimmte Geometrien eines Risses als Voraussetzung. Viele auf dem Bereich der Mikromechanik fußende Verfahren sind in ihrer Anwendung zu speziell oder benötigen schwer bestimmbare Faktoren. Auch die Modellierung einzelner Matrixrisse für die Schadensanalyse von Tragwerken macht wenig Sinn, da das überkritische Verhalten von unzähligen Mikrorissen begleitet wird. Wenn die Schadensausbreitung in der gesamten Struktur Gegenstand einer Analyse ist, erscheinen diese Verfahren zu aufwendig, vor allem, wenn in bezug auf eine wirklichkeitsnahe Erfassung des Werkstoffverhaltens materielle Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssen.

Oft sind in vielen Strukturberechnungen auch nur die verschmierten Werkstoffdaten bekannt, die Elastizitätskennwerte der Verbundbestandteile jedoch nicht.

So entstand der Wunsch nach **makromechanischen Versagenskriterien**, bei denen die Bruchspannungen aus einachsigen Belastungsversuchen auf allgemeine mehrachsig Spannungszustände übertragen werden können, um so globale Betrachtungen an einer Schicht oder am gesamten Laminat vorzunehmen. Die unidirektional verstärkten Schichten werden dabei als homogene, anisotrope Körper idealisiert, Kapitel 3.2.1.

Unter der Voraussetzung des linear elastischen Verhaltens bis zum Bruch ist das **Maximalspannungskriterium** die einfachste Möglichkeit, Versagen zu definieren. Hier erfolgt die Festigkeitsbetrachtung durch Gegenüberstellung der berechneten Spannungskomponenten mit den experimentell bestimmten Festigkeitskennwerten in Zug- und Druckrichtung, siehe Bild 3.7. Die Bruchspannung  $X_T$  bei einer Zuglast in Faserrichtung ( $\cong 1$ -Richtung) wird über einen einachsigen Belastungsversuch bestimmt. Aus entsprechenden Zugversuchen senkrecht zur Faser ( $\cong 2,3$ -Richtung) resultieren die Grenzwerte  $Y_T$  und  $Z_T$ . Analog lassen sich auch die Bruchspannungen  $X_C$ ,  $Y_C$  und  $Z_C$  unter Druckbelastung berechnen. R, S und T spiegeln die Festigkeitskennwerte der

Schubversuche in der 1–2, der 1–3 und der 2–3 Ebene wieder. Die Spannungen müssen dabei auf das lokale Schichtkoordinatensystem bezogen sein, Kapitel 5.4.3. Die Anteile  $S^{11}$ ,  $S^{22}$  und  $S^{12}$  stellen im 3–dimensionalen Spannungsraum einen Quader dar.

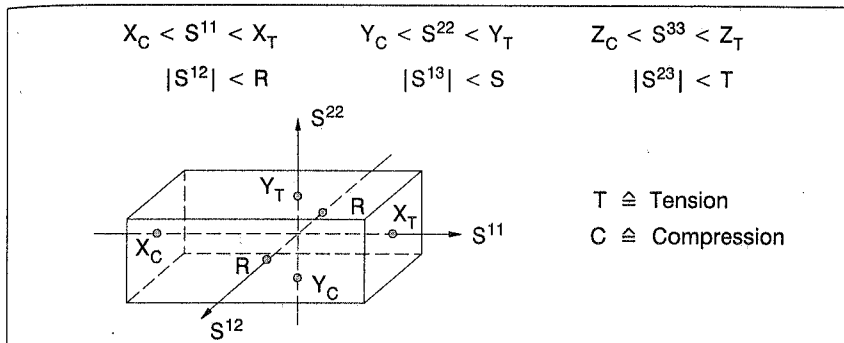


Bild 3.7: Maximalspannungskriterium

Nach diesem Kriterium versagt eine Einzelschicht, wenn irgendeine Spannungskomponente unabhängig von allen anderen die Bruchfestigkeit erreicht. Es werden keine Interaktionen der Spannungen untereinander berücksichtigt. In der Literatur wird dieses Verfahren meistens zur Identifikation eines Faserbruches oder Faserbeulens angewendet, da die Faser zum größten Teil durch Kräfte in Längsrichtung beansprucht werden.

**Bemerkung:**

- Wird diese Festigkeitsuntersuchung mit Verzerrungen und entsprechenden Bruchdehnungen formuliert, so resultiert das **Maximaldehnungskriterium**.

**Quadratische Versagenskriterien** hingegen berücksichtigen alle Spannungskomponenten und gehen von der Annahme aus, daß im mehrdimensionalen Spannungsraum eine Versagensfläche existiert, die den bruchsicheren Bereich umhüllt. Sie werden oft als die Verallgemeinerung der von MISES–Fließbedingung interpretiert, d.h. es müssen richtungsabhängige Fließ– oder Bruchspannungen in die Kriterien mit eingehen.

TSAL–WU (1971) entwickelten ein allgemeines Versagenskriterium für Composite Materialien, das als Tensorpolynom in den Spannungen  $\mathbf{S}$  definiert ist.

$$f(S^{ij}) = Q_{ij}S^{ij} + F_{ijkl}S^{ij}S^{kl} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Anteile höherer} \\ \text{Ordnung in } \mathbf{S} \end{array} \right\} \leq 1 \quad (3.8)$$

$\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{F}$  repräsentieren Festigkeitstensoren zweiten und vierten Ranges, die unter der Voraussetzung der Symmetrie zur Beschreibung eines 3–dimensional anisotropen Werkstoffes 6 bzw. 21 unabhängige Komponenten beinhalten. In Analogie zur Gestalt eines orthotropen Werkstoffensors (Kapitel 5.4.3) lassen sich folgende Vereinfachungen definieren:

- Es existiert keine Interaktion zwischen Schub- und Normalspannungen.

$$\rightarrow F_{ii12} = F_{ii13} = F_{ii23} = 0 \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.9)$$

- Die Schubspannungen sind untereinander entkoppelt.

$$\rightarrow F_{1213} = F_{1223} = F_{1323} = 0 \quad (3.10)$$

- Die Festigkeitskennwerte für positive und negative Schubspannungen sind gleich.

$$\rightarrow Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0 \quad (3.11)$$

Es verbleiben somit noch 3 bzw. 9 unabhängige Komponenten der Festigkeitstensoren  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{F}$ , die wiederum aus einaxialen Belastungsversuchen bestimmt werden können.

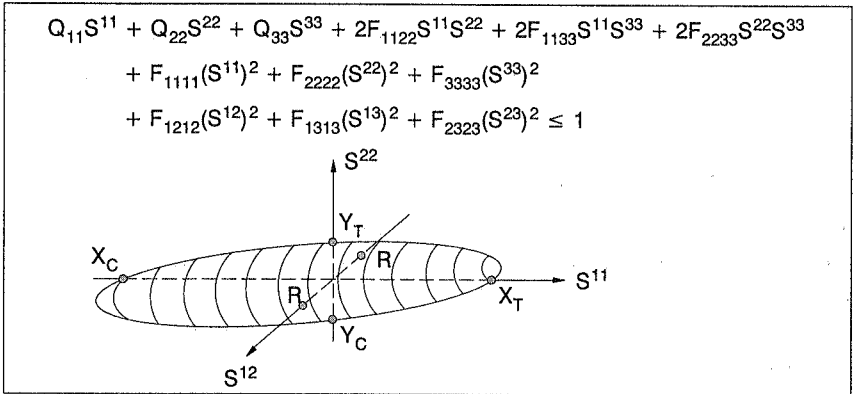


Bild 3.8: TSAI–WU Kriterium eines orthotropen Materials

Grundlage für dieses Kriterium stellt die quadratische Funktion  $f(\mathbf{S})$  dar, die im mehrdimensionalen Spannungsraum mit der Annahme eines ebenen Spannungszustandes einen Ellipsoid beschreibt, siehe Bild 3.8. Ein Spannungszustand wird durch einen Punkt innerhalb des Ellipsoids repräsentiert; die Festigkeit ist somit gewährleistet. Liegt der Punkt außerhalb des Körpers tritt Versagen ein.

Die verbleibenden 12 Festigkeitskoeffizienten können als Funktion von gemessenen Spannungswerten ausgedrückt werden. Aus Zug- und Druckversuchen in Längsrichtung der Faser lassen sich mit Hilfe der Ungleichung in Bild 3.8 die Komponenten  $Q_{11}$  und  $F_{1111}$  bestimmen:

$$\left. \begin{aligned}
 S^{11} = X_T & \rightarrow F_{1111}X_T^2 + Q_{11}X_T = 1 \\
 S^{11} = -X_C & \rightarrow F_{1111}X_C^2 - Q_{11}X_C = 1
 \end{aligned} \right\} Q_{11} = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad F_{1111} = \frac{1}{X_T X_C} \quad (3.12)$$

Die entsprechenden Belastungsversuche quer zur Faser liefern die Zug- und Druckfestigkeiten in 2- und 3-Richtung.

$$Q_{22} = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad F_{2222} = \frac{1}{Y_T Y_C}, \quad Q_{33} = \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}, \quad F_{3333} = \frac{1}{Z_T Z_C} \quad (3.13)$$



Die Schubfestigkeiten können aus 3 Schubversuchen in den zugehörigen Ebenen berechnet werden.

$$S^{12} = R \rightarrow F_{1212} = \frac{1}{R^2}, \quad S^{13} = S \rightarrow F_{1313} = \frac{1}{S^2} \quad (3.14)$$

$$S^{23} = T \rightarrow F_{2323} = \frac{1}{T^2} \quad (3.15)$$

Die noch unbekanntenen Terme  $F_{1122}$ ,  $F_{1133}$  und  $F_{2233}$  repräsentieren die Interaktion zwischen den Normalspannungskomponenten. Zur Bestimmung der Faktoren müssen biaxiale Belastungsversuche durchgeführt werden. Mit einem Zugversuch in 1- und 2-Richtung besteht die Möglichkeit, den Koppelterm  $F_{1122}$  aus bereits bekannten Festigkeitskennwerten zu berechnen.

$$S^{11} = S^{22} = P \rightarrow P(Q_{11} + Q_{22}) + P^2(2F_{1122} + F_{1111} + F_{2222}) = 1$$

$$F_{1122} = \frac{1}{2P^2} \left( 1 - P \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - P^2 \left( \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} \right) \right) \quad (3.16)$$

Eine analoge Vorgehensweise mit Zugversuchen in 1-3 und 2-3 Richtung liefert die beiden letzten Ausdrücke für  $F_{1133}$  und  $F_{2233}$ .

Quadratische Versagenskriterien eignen sich hervorragend zur Beurteilung der Belastbarkeit des Matrixmaterials, da die Matrix durch alle auf das Laminat einwirkenden Kräfte beansprucht wird und somit 6 Spannungskomponenten berücksichtigt werden müssen. Da das Maximalspannungskriterium als alleiniges Maß zur Beurteilung des Versagens unbrauchbar ist (keine Interaktion der Spannungskomponenten untereinander), kann es mit einem quadratischen Versagenskriterium kombiniert werden. Die Spannungsfunktion stellt somit im mehrdimensionalen Spannungsraum eine "Zigarre" dar (Bild 3.8), die an den Enden abgeschnitten ist.

Intralaminare Versagen in einer Schicht verursacht lediglich Spannungsverteilungen, die jedoch nicht notwendigerweise das Versagen des gesamten Mehrschichtverbundes bedeuten müssen. Um die "versteckten" Tragreserven zu ermitteln, werden sogenannte **progressive Versagenskriterien** angewendet. Versagen in einer Schicht wird dabei, je nach auftretendem Versagenstyp, durch Reduktion der damit verbundenen Steifigkeits- und Festigkeitsanteile berücksichtigt. Diese Prozedur wird solange wiederholt bis ein Totalversagen des Laminats ( $\cong$  singuläre Steifigkeitsmatrix) eintritt, siehe Niederstadt et al. (1985), Doringner, Rammerstorfer (1990b).

Rammerstorfer et al. (1994) schlagen eine kombinierte mikro- und makromechanische semi-analytische Vorgehensweise zur Erfassung lokaler Phänomene, wie Beulen der Außenschichten (wrinkling) in Sandwichschalen oder Faserbruch / Faserbeulen vor. Durch spezielle trigonometrische Verschiebungsansätze kann das Versagen der Au-

Benschichten auf analytischem Weg in Verbindung mit einer globalen Finite-Element-Strukturanalyse (also makroskopisch) berechnet werden.

Einige Versagenskriterien sind als Sonderfälle im TSAI-WU Kriterium enthalten, so z.B. Modelle nach HILL (1948) und HOFFMAN (1967). Sie werden oft als plastische Fließflächen verwendet, um materielle Nichtlinearitäten (anisotrope Plastizität) zu berücksichtigen. Diese Kriterien sind in der Lage, die bereits im elastischen Bereich vorhandene starke Anisotropie auch bei plastischem Verhalten zu erfassen. Anwendungen des HILL-Kriteriums finden sich u.a. in Owen, Figueiras (1983a, 1983b), Li, Owen (1989), de Borst, Feenstra (1990). In Schellekens, de Borst (1990) und Schellekens (1992) wird elastoplastisches Verhalten mit Hilfe des HOFFMAN-Kriteriums berücksichtigt. Klarman (1991) wendet einen vollständig impliziten Spannungsalgorithmus auf alle drei Fließkriterien an.

#### **Bemerkungen:**

- Im Gegensatz zum HILL-Kriterium können das TSAI-WU und das HOFFMAN-Kriterium unterschiedliche Fließ- und Bruchspannungen im Zug- und Druckbereich berücksichtigen.
- Alle oben erwähnten Versagenskriterien werden schichtweise an jedem Integrationspunkt über die Dicke ausgewertet.
- Die Last, bei der an einer beliebigen Stelle im Tragwerk zum ersten Mal Versagen eintritt, wird als First-Ply-Failure Last bezeichnet. Sie kann näherungsweise aus der Spannungsfunktion  $f(\mathbf{S})$  berechnet werden, siehe Reddy, Pandey (1987).

#### **Fazit :**

Bei Faserverbundwerkstoffen tragen eine Vielzahl komplexer mikro- und makromechanischer Bruchvorgänge zum "Energieverzehr" bei, so daß sich eine glaubwürdige und realistische Beurteilung der Konsequenzen kritischer Belastungen und der darunter auftretenden Schäden als schwierig erweist. Die mit vertretbarem numerischem Aufwand durchzuführende numerische Simulation der komplizierten Versagens- und Schädigungscharakteristik in Faserverbundbauteilen bedarf zur realistischen Vorhersage des Werkstoffverhaltens noch eines langen Entwicklungs- und Forschungsprozesses.

# 4 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Im folgenden Kapitel soll neben differentialgeometrischen Grundlagen ein kurzer Einblick in die nichtlineare Kontinuumsmechanik gegeben werden, um einerseits eine einheitliche Nomenklatur einzuführen und andererseits die Basis für weitere Untersuchungen bereitzustellen. Ausführliche Darstellungen finden sich u.a. in Truesdell, Noll (1965), Green, Zerna (1968), Becker, Bürger (1975), Stein, Barthold (1992), Betten (1993).

## 4.1 Differentialgeometrie

In der Differentialgeometrie werden geometrische Eigenschaften von Punktmengen des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  und gegebenenfalls auch des  $\mathbb{R}^n$  mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung untersucht. Ein kontinuierlicher Körper  $\mathfrak{B}$  kann als geschlossene Menge von materiellen Körperpunkten aufgefaßt werden. Er nimmt üblicherweise eine Teilmenge des dreidimensionalen EUKLIDischen Raumes  $\mathfrak{E}_3$  ein. Der Rand dieser Punktmenge wird mit  $\partial\mathfrak{B}$  bezeichnet und Oberfläche des Körpers  $\mathfrak{B}$  genannt. Um einen Körperpunkt zu lokalisieren, wird zum einen ein raumfestes, kartesisches Koordinatensystem (kanonische Basis  $\mathbf{i}_i = \mathbf{i}^i$ ) und zum anderen eine stetige und umkehrbar eindeutige Abbildung des Körpers  $\mathfrak{B}$  in den Raum  $\mathfrak{E}_3$  benötigt. Eine solche Abbildung

$$\chi : \begin{cases} \mathfrak{B} \rightarrow B \subset \mathfrak{E}_3 \\ P \mapsto \chi(P) =: \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.1)$$

der materiellen Punkte auf Raumpunkte (Ortsvektor  $\mathbf{x}$ ) wird in den Ingenieurwissenschaften als Konfiguration, in der Mathematik als topologische Abbildung oder Homöomorphismus bezeichnet, Bild 4.1.

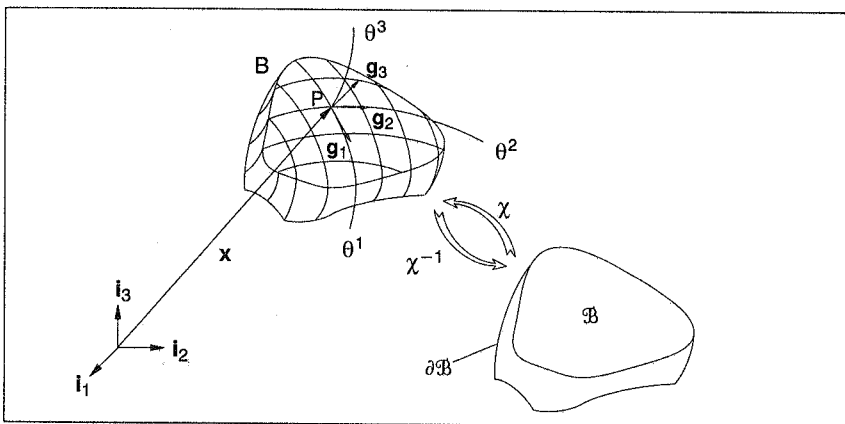


Bild 4.1: Topologische Abbildung

Durch die Einführung allgemeiner, krummliniger Koordinaten  $\theta^i$  ist jeder Punkt neben den Koeffizienten  $x^i$  auch durch das Zahlentripel  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  eindeutig darstellbar:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^j) = x^i(\theta^j)\mathbf{I}_i \quad (4.2)$$

Das vollständige Differential  $d\mathbf{x}$  des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  definiert die natürliche, ortsabhängige Basis  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  des Raumes in bezug auf die krummlinigen Koordinaten. Diese Vektoren  $\mathbf{g}_i$  bezeichnet man als kovariante Basisvektoren des Körpers  $B$  und stellen die Richtungsvektoren der Tangenten an die  $\theta^i$ -Kurven dar.

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} d\theta^i = \mathbf{g}_i d\theta^i \quad (4.3)$$

Die Forderung nach einer dualen Basis (reziproke Basis zu  $\mathbf{g}_i$ ) führt auf die Definition der kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}^i$ .

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad \mathbf{g}^{i\top} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.4)$$

**Bemerkung:**

- Die kovarianten Basisvektoren sind die Spalten der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \otimes \mathbf{I}_1 = (\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3) \quad (4.5)$$

Die Länge  $ds^2$  eines vektoriellen Linienelementes  $d\mathbf{x}$  liefert die Komponenten  $g_{ij}$  des kovarianten Metrikensors  $\mathbf{g}$ , dem bei der Berechnung von Längen, Winkeln, Flächen- und Volumeninhalten eine wichtige Bedeutung zuteil wird.

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j d\theta^i d\theta^j = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (4.6)$$

Gleichung (4.6) wird in der Differentialgeometrie als erste Fundamentalform und entsprechend die Metrik  $\mathbf{g}$  auch als Fundamentaltensor des Raumes bezeichnet.

Mit der Definition der Komponenten des kontravarianten Metrikensors  $g^{ik}g^{kj} = \delta_i^j$  lassen sich folgende Beziehungen angeben :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (4.7)$$

$$\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (4.8)$$

Als direkte Folge dieser Gleichungen entstehen nützliche Rechenregeln bezüglich der Transformation der ko- und kontravarianten Basisvektoren.

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad \mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (4.9)$$

Um nun neben den metrischen Eigenschaften einer Punktmenge auch Informationen über deren Krümmung zu erhalten, muß die zweite Fundamentalform der Differentialgeometrie hergeleitet werden. Sie ist durch das Skalarprodukt  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{g}_3$  definiert.

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_{3,j} d\theta^i d\theta^j = -b_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (4.10)$$

Die eingeführte Abkürzung  $b_{ij}$  definiert dabei den kovarianten Krümmungstensor.

## 4.2 Elastizitätstheorie

### 4.2.1 Grundlegende Begriffe

Bei der Beschreibung von Deformationsvorgängen wird üblicherweise der Ausgangszustand oder auch die Konfiguration zur Zeit  $t=t_0$  als Bezugs- oder Referenzkonfiguration gewählt. Die Änderung der Konfiguration mit der Zeit  $t$  wird als Bewegung bezeichnet. Die in Gleichung (4.1) beschriebene Abbildung enthält somit als zusätzliche Variable die Zeit  $t$ :

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_3 \\ (P, t) \mapsto \chi(P, t) =: \chi_t(P) =: \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.11)$$

Um die Bewegung eines Körpers zu erfassen, muß eine Abbildung  $\Phi_t$  von der Referenzkonfiguration in eine beliebige Momentankonfiguration zur Zeit  $t$  existieren. Sie ergibt sich als Komposition der Abbildungen  $\chi_t$  und  $\chi_{t_0}^{-1}$  (siehe Bild 4.2).

$$\Phi_t : \begin{cases} \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x} \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}) = [\chi_t \circ \chi_{t_0}^{-1}](\mathbf{x}) =: \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.12)$$

Um eine komplizierte Schreibweise zu verhindern, tritt die Abhängigkeit der Abbildung  $\Phi_t$  von der Wahl der Referenzkonfiguration zur Zeit  $t=t_0$  nicht als expliziter Index auf.

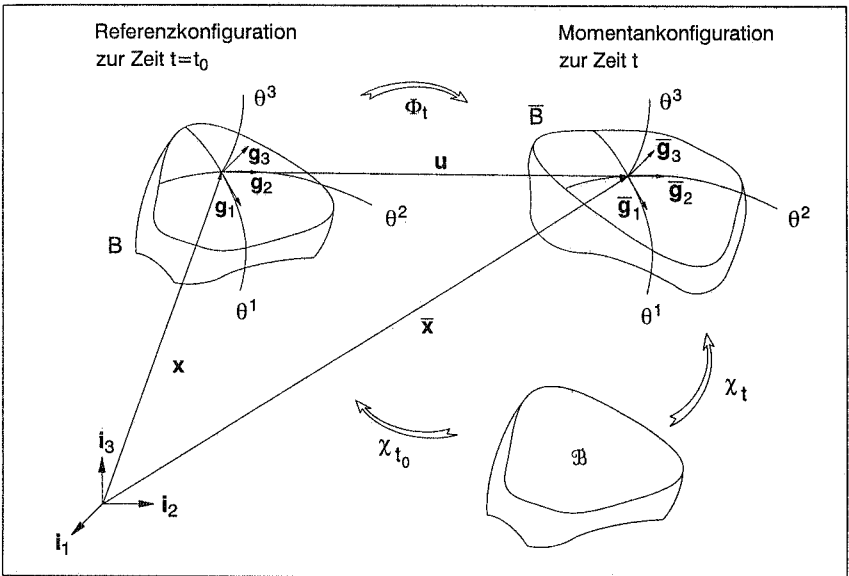


Bild 4.2: Kinematik des Kontinuums

Grundsätzlich werden zwei Betrachtungsweisen zur Beschreibung der Bewegung unterschieden:

- **Materielle oder LAGRANGE–Formulierung:**  
Bei der LAGRANGE–Beschreibung des Problems folgt man allen Partikeln des Körpers in ihren Bewegungen vom Ausgangszustand bis zum Endzustand (körperfeste oder materielle Beschreibung). Für den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  des Punktes  $P_0$  in der Referenzkonfiguration gilt die Beziehung:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{g}_i \quad (4.13)$$

Die Koordinaten  $x^i$  werden als LAGRANGE–Koordinaten bezeichnet. In dieser Darstellung wird die Bewegung eines Teilchens als Funktion der Position  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t=t_0$  und der aktuellen Zeit  $t>t_0$  beschrieben.

$$\bar{\mathbf{x}} = \Phi_t(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

- **Räumliche oder EULER–Formulierung:**  
Bei der EULER–Formulierung hingegen beobachtet man den materiellen Fluß durch ein stationäres Kontrollvolumen (raumbezogene Beschreibung). Analog ergibt sich der Ortsvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  des Punktes  $P$  (mit den EULER–Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$ ) in der Momentankonfiguration.

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{x}^i \bar{\mathbf{g}}_i \quad (4.15)$$

Die Beschreibung der Bewegung erfolgt mit der Umkehrabbildung  $\Phi_t^{-1}$ :

$$\mathbf{x} = \Phi_t^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.16)$$

Die Attribute materiell bzw. räumlich stehen für auf die Ausgangs– bzw. die Momentankonfiguration bezogene Größen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Ausgangskonfiguration als Bezugskonfiguration (Totale LAGRANGE–Formulierung) gewählt werden.

#### 4.2.2 Kinematische Beziehungen

Durch die Einführung eines Verschiebungsfeldes als Differenz der Ortsvektoren eines Punktes mit den Koordinaten  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$  aus beiden Konfigurationen

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) , \quad (4.17)$$

ergeben sich die ko– und kontravarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration.

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i} \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad (4.18)$$

Analog zu den Gleichungen (4.7) und (4.8) folgen die Metriktensoren der Momentankonfiguration.

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j = \bar{g}_{ij} \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j \quad (4.19)$$

$$\bar{\mathbf{g}}^{-1} = \bar{\mathbf{g}}^i \cdot \bar{\mathbf{g}}^j \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j = \bar{\mathbf{g}}^i \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j \quad (4.20)$$

In jenen jeweiligen Konfigurationen stellen die Metrikensoren  $\mathbf{g}$  und  $\bar{\mathbf{g}}$  Einheitstensoren dar.

Aus der Anwendung der Kettenregel resultiert ein Zusammenhang zwischen den Basisvektoren der Referenz- und denen der Momentankonfiguration.

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i \quad (4.21)$$

Der entstehende, unsymmetrische Tensor 2. Stufe  $\mathbf{F}$  wird als materieller Deformationsgradient bezeichnet. Diese Abbildung des Tangentialraumes kann als "push-forward" Operation der Basisvektoren der Referenz- in die Momentankonfiguration interpretiert werden. Entsprechendes gilt für die kontravarianten Basisvektoren

$$\bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{g}^i \quad (4.22)$$

und die "pull-back" Operationen.

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{g}}_i \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{g}}^i \quad (4.23)$$

Die Transformation physikalischer Größen auf Basen unterschiedlicher Konfigurationen (push-forward, pull-back Operation) wurde von Marsden, Hughes (1983) eingeführt (siehe auch Wriggers (1988)).

Gleichungen (4.21) bis (4.23) liefern alternative Darstellungen des Deformationsgradienten als Tensorprodukt der natürlichen Basisvektoren.

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^i \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{g}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}_i \quad \mathbf{F}^{-T} = \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (4.24)$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten, der auch als Funktion des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  ausgedrückt werden kann,

$$\mathbf{F} = \text{grad } \bar{\mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i = \mathbf{H} + \mathbf{g} \quad (4.25)$$

lassen sich differentielle Linien-, Flächen- und Volumenelemente in die entsprechende Konfiguration transformieren

$$d\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad d\bar{\mathbf{A}} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \quad d\bar{\mathbf{V}} = \det \mathbf{F} d\mathbf{V} \quad (4.26)$$

wobei  $d\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{n}} d\bar{\mathbf{A}}$  und  $d\mathbf{A} = \mathbf{n} d\mathbf{A}$  die orientierten infinitesimalen Flächenelemente aus beiden Konfigurationen darstellen ( $\bar{\mathbf{n}}$  und  $\mathbf{n}$  sind Einheitsnormalenvektoren). Damit diese Abbildungen eineindeutig sind,  $\det \mathbf{F} \neq 0$  und Selbstpenetrationen eines Gebietes ausgeschlossen werden,  $\det \mathbf{F} \geq 0$ , muß für die Determinante des Deformationsgradienten gelten:

$$\det \mathbf{F} > 0 \quad (4.27)$$

Als Maß für die Verzerrung eines Kontinuums ist der Deformationsgradient gänzlich ungeeignet, da er Starrkörperanteile enthält, richtungsabhängig ist und keine symmetrische Struktur aufweist. Diese Nachteile können durch den symmetrischen rechten

CAUCHY–GREEN–Deformationstensor  $\mathbf{C}$  beseitigt werden, da er mit Hilfe der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten die Starrkörperanteile eliminiert. Ein anderer sinnvoller Ausgangspunkt stellt die Differenz der Quadrate der Linienelemente in der Referenzkonfiguration  $ds^2$  und in der Momentankonfiguration  $d\bar{s}^2$  dar:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.28) \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} =: d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Der resultierende Tensor  $\mathbf{E}$  wird als GREEN– oder GREEN–LAGRANGE–Verzerrungstensor bezeichnet.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{g}) \quad (4.29)$$

Durch Einsetzen der Darstellung (4.24) des Deformationsgradienten als Tensorprodukt der natürlichen Basisvektoren kann der Verzerrungstensor als Differenz der Metrikensoren aus beiden Konfigurationen ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}((\mathbf{g}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}_i) \cdot (\bar{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{g}^j) - g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \quad (4.30) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned}$$

Alternative Verzerrungsmaße finden sich u.a. in Ogden (1984).

### 4.2.3 Spannungsmaße

Eine für den Spannungszustand eines materiellen Körpers  $B$  (Momentankonfiguration) signifikante Größe ist der Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$ , der in einem Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  einer gedachten Schnittfläche (EULER–Schnittprinzip) wie folgt definiert ist:

$$\bar{\mathbf{t}} := \lim_{\Delta\bar{A} \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta\bar{A}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\bar{A}} \quad (4.31)$$

wobei  $\Delta\bar{A}$  ein Flächenelement der Schnittfläche darstellt, an dem die Kraft  $\Delta\mathbf{f}$  angreift. Der Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  im Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  hängt aufgrund des CAUCHY–Postulats nur vom Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}$  des Flächenelementes  $\Delta\bar{A}$  ab. Über die Gleichgewichtsbedingung am differentiellen Tetraeder in der Momentankonfiguration erhält man den CAUCHY–Spannungstensor  $\sigma$  aus der linearen Abbildung

$$\bar{\mathbf{t}} = \sigma \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (\text{CAUCHY – Theorem}). \quad (4.32)$$

Durch den Bezug der wahren Spannungen auf die aktuelle Konfiguration ergibt sich für den CAUCHY–Spannungstensor die Darstellung:

$$\sigma = \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j \quad (4.33)$$



Mit der Bedingung, daß die resultierende Kraft  $df$  auf ein Flächenelement unabhängig von der Bezugskonfiguration sein soll  $\bar{t}d\bar{A} = tdA$ , gewinnt man mit der NANSON-Formel (siehe Ogden (1984) §2.2.2)  $\bar{n}d\bar{A} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \cdot n dA$  folgende Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{n} d\bar{A} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot n dA \quad (4.34)$$

Die Transformation der wahren Spannungen auf ein Flächenelement  $dA$  der Referenzkonfiguration liefert die Definition des unsymmetrischen 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} := \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j = P^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (4.35)$$

Die vorhandene Asymmetrie des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors erschwert die Aufstellung von Stoffgesetzen, weshalb häufig der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  Verwendung findet. Er wird durch eine "pull-back" Operation (Gleichung (4.24)) des Basisvektors  $\bar{\mathbf{g}}$  in Gleichung (4.35) gewonnen.

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (4.36)$$

Dieser vollständig auf die Referenzkonfiguration bezogene Spannungstensor besitzt keine physikalische Bedeutung, da er kein Maß für die wahre Spannung ist (deswegen auch Pseudospannungstensor genannt). Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF- und der CAUCHY-Spannungstensor können durch eine "pull-back" Operation

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (4.37)$$

beziehungsweise eine "push-forward" Operation

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.38)$$

ineinander umgerechnet werden.

#### 4.2.4 Erhaltung- und Bilanzaussagen

##### Erhaltung der Masse

Das Postulat der Massenerhaltung beinhaltet, daß sich die Masse eines materiellen Körpers  $B$  während des Deformationsvorganges nicht ändert.

Es ist möglich, zu jeder Konfiguration eine auf das Volumen im EUKLIDischen Raum  $\mathcal{E}_3$  bezogene Dichte anzugeben, die die Masse des Körpers definiert:

$$m = \int_{\bar{B}} d\bar{m} = \int_{\bar{B}} \bar{\rho} d\bar{V} = \int_B \rho dV = \text{const} \quad (4.39)$$

Mit Gleichung (4.26)<sub>3</sub> ergibt sich sofort die lokale Form der Massenerhaltung:

$$\dot{\rho} = -\bar{\rho} \det \mathbf{F} \quad (4.40)$$

##### Impulserhaltung

Der Impuls  $\mathbf{i}$  eines Körpers  $B$  in der Momentankonfiguration ist definiert als

$$\dot{\mathbf{l}} := \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} d\bar{m} = \int_{\mathbb{B}} \bar{\rho} \dot{\bar{\mathbf{x}}} d\bar{V} \quad \text{mit} \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \quad (4.41)$$

wobei mit  $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}$  das Geschwindigkeitsfeld beschrieben wird. Das Prinzip der Impulserhaltung fordert, daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der auf den Körper einwirkenden Kräfte (Oberflächen- und Volumenkräfte) ist.

$$\frac{d\dot{\mathbf{l}}}{dt} = \mathbf{f} \quad (4.42)$$

Die resultierende Kraft  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \int_{\mathbb{B}} \bar{\rho} \mathbf{b} d\bar{V} + \int_{\partial\mathbb{B}} \bar{\mathbf{t}} d\bar{A} = \int_{\mathbb{B}} \bar{\rho} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathbb{B}} \mathbf{t} dA \quad (4.43)$$

beinhaltet den Volumenkraftvektor  $\mathbf{b}$  pro Masseneinheit und die auf die Flächenelemente  $dA$  und  $d\bar{A}$  bezogenen Spannungsvektoren  $\mathbf{t} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  und  $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ . Mit dem Gauß Integralsatz (A.64) läßt sich Gleichung (4.42) als 1. Bewegungsgleichung von CAUCHY angeben

$$\bar{\rho} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\rho} \mathbf{b} \quad (4.44)$$

und entsprechend mit den Größen der Referenzkonfiguration zu:

$$\bar{\rho} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \text{div} \mathbf{P} + \bar{\rho} \mathbf{b} \quad (4.45)$$

### Drall- oder Drehimpulserhaltung

Die Definition des Dralls  $\mathbf{L}$  eines Körpers  $\mathbb{B}$  in der Momentankonfiguration bezüglich eines raumfesten Punktes  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_3$  lautet:

$$\mathbf{L} := \int_{\mathbb{B}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\rho} \dot{\bar{\mathbf{x}}} d\bar{V} \quad (4.46)$$

Das aus den Oberflächen- und Volumenkräften resultierende Moment  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \int_{\mathbb{B}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\rho} \mathbf{b} d\bar{V} + \int_{\partial\mathbb{B}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\mathbf{t}} d\bar{A} \quad (4.47)$$

muß der Zeitableitung des Dralls  $\mathbf{L}$  entsprechen.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \quad (4.48)$$

Nach einer Zwischenrechnung folgt die 2. CAUCHY-Bewegungsgleichung, die die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors zum Ausdruck bringt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (4.49)$$

Zur genauen Herleitung dieser dem Drallerhaltungssatz äquivalenten Aussage siehe z.B. Marsden, Hughes (1983), Stein, Barthold (1992).

Zur Verifikation der Symmetrieeigenschaften der PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungstensoren  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{S}$  wird auf die Gleichungen (4.35) und (4.36) zurückgegriffen.

$$\mathbf{P}^T = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \neq \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{P} \quad \text{aber:} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.50)$$

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}^T \quad (4.51)$$

#### 4.2.5 Elastische Stoffgesetze

Die kinematischen Beziehungen (Kapitel 4.2.2) und die Erhaltungssätze (Kapitel 4.2.4) reichen in der Regel noch nicht aus, um ein Randwertproblem der Kontinuumsmechanik zu lösen. Zur vollständigen Beschreibung des Problems muß das reale Materialverhalten unter physikalisch makroskopischer Beobachtung der Verformungen in ein mathematisches Modell überführt werden. Durch diese Idealisierung entstehen die benötigten Materialgleichungen, die unterschiedliches Materialverhalten wie z.B. elastisches, elasto–plastisches oder viskoelastisches Verhalten beschreiben.

Ein Material wird als elastisch oder CAUCHY–elastisch bezeichnet, wenn der Spannungszustand eines materiellen Punktes  $\bar{\mathbf{x}}$  nur vom momentanen Deformationsgradienten abhängt, nicht aber von der Deformationsgeschichte und von der Zeit die verstreicht, um den Deformationszustand zu erreichen.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (4.52)$$

Für homogenes Materialverhalten reduziert sich die Materialgleichung zu:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}) \quad (4.53)$$

Die von den Spannungen geleistete Arbeit (Verzerrungsenergie) ist jedoch im allgemeinen von der Verformungsgeschichte des Körpers abhängig. Im Rahmen der GREEN– oder Hyperelastizität fordert man die Existenz einer Verzerrungsenergiefunktion  $W = W(\mathbf{F})$ , so daß die von den Spannungen geleistete Arbeit wegunabhängig ist. Während eines Belastungszyklusses wird somit keine Energie dissipiert. Die Verzerrungs– oder Formänderungsenergiefunktion  $\dot{W}$  kann aus der volumenspezifischen Verzerrungsenergie  $W_s$  oder aus der massenspezifischen freien HELMHOLTZ–Energie  $\Psi$  (hyperelastisches Potential) berechnet werden (Truesdell, Noll (1965)).

$$W = \int_B W_s dV = \int_B \Psi dm = \int_B \rho \Psi dV \quad (4.54)$$

Durch Vergleich der Zeitableitung der spezifischen Formänderungsfunktion

$$\dot{W}_s = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (4.55)$$

mit der spezifischen inneren Spannungsleistung  $\dot{W}_s = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$  kann die konstitutive Gleichung für den 1. PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungstensor gewonnen werden.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{F}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{H}} \quad (4.56)$$

Die analoge Beziehung für den 2. PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungstensor lautet:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} = \varrho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2\varrho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.57)$$

Die Linearisierung dieser Größe (Kapitel 5.7) führt auf den 4–stufigen Materialtensor:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = 4\varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \otimes \partial \mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (4.58)$$

Durch die Beschränkung auf isotrope Materialien hängt die Verzerrungsenergiefunktion  $W$  nur von den 3 Invarianten  $I_i(\mathbf{C})$  des rechten CAUCHY–GREEN–Deformationstensors ab. Somit ergibt sich das auf die Referenzkonfiguration bezogene Stoffgesetz zu

$$\mathbf{S} = \varrho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_i(\mathbf{C})} \frac{\partial I_i(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{E}} = 2\varrho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_i(\mathbf{C})} \frac{\partial I_i(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.59)$$

#### 4.2.6 Arbeits– und Energieprinzipien

Die Analyse von statischen oder dynamischen Randwertproblemen der Kontinuumsmechanik erfordert die Lösung eines gekoppelten Systems von nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen, die bei der Berechnung von geometrisch und physikalisch nichtlinearen Problemen entstehen. Die Gleichungen, die hier in Größen der Referenzkonfiguration formuliert sind, bestehen aus dem lokalen Gleichgewicht, der kinematischen Beziehung, dem Materialgesetz und den Randbedingungen.

$$\varrho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \varrho \mathbf{b} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \quad \text{auf} \quad \partial B_u \quad (4.63)$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf} \quad \partial B_\sigma \quad (4.64)$$

wobei  $\mathbf{u}^*$  und  $\mathbf{t}^*$  die vorgeschriebenen Verschiebungen (DIRICHLET–Randbedingung) und Spannungen (NEUMANN–Randbedingung) auf den entsprechenden Teilen des Körperrandes repräsentieren. Die Berandung  $\partial B$  eines kontinuierlichen Körpers  $B$  setzt sich wie folgt zusammen:

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_\sigma \quad \partial B_u \cap \partial B_\sigma = \emptyset \quad (4.65)$$

Das gekoppelte System kann nur für wenige, einfache Randwertprobleme gelöst werden, so daß Diskretisierungsmethoden auf der Basis von Einfeld– (z.B. DIRICHLET) oder Mehrfeld– (z.B. HU–WASHIZU) Variationsprinzipien zur Anwendung kommen müssen. Den Variationsverfahren liegen Arbeitsprinzipien

- Prinzip der virtuellen Arbeit (Prinzip der virtuellen Verschiebung)
- Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit (Prinzip der virtuellen Kräfte)

und für Potentialprobleme Energieprinzipien

- Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie
- Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie

zugrunde. In diesem Kapitel wird das Prinzip der virtuellen Arbeit hergeleitet, das den wesentlichen Vorteil besitzt, daß ein Teil der Randbedingungen (nämlich die statischen Randbedingungen) implizit in der integralen Darstellung enthalten sind ( $\Rightarrow$  natürliche Randbedingungen). Neben diesem Einfeldfunktional werden in Kapitel 6 entsprechende Mehrfeldfunktionale, deren Variation, Diskretisierung und Linearisierung besprochen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist eine der Impulsbilanz (4.45) äquivalente Formulierung, die in der mathematischen Literatur als schwache Formulierung oder integrale Darstellung des lokalen Gleichgewichts bezeichnet wird. Zur Herleitung wird die durch die Impulsbilanz gegebene Differentialgleichung (starke Formulierung) skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  (zulässige, virtuelle Verschiebung), die auf  $\partial B_u$  verschwindet, gewichtet. Die anschließende Integration über das Volumen des Körpers liefert:

$$\int_B (\operatorname{div} \mathbf{P} + \varrho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}})) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad (\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}) \quad (4.66)$$

Mit der Produktregel (A.61), dem GAUSS'schen Integralsatz (A.64) und der Randbedingung (4.64) folgt die schwache Form der durch die Impulsbilanz gegebenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_B (\mathbf{P} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} - \operatorname{div}(\mathbf{P}^T \cdot \delta \mathbf{u}) - \varrho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}) \, dV \\ &= \int_B \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV + \int_B \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_B \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$= \int_B \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV + \int_B \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_B \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (4.68)$$

$$= \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (4.69)$$

Die beiden ersten Integralausdrücke entsprechen der virtuellen inneren Arbeit  $W_{\text{int}}$ , während die beiden anderen Terme die virtuelle Arbeit  $W_{\text{ext}}$  der äußeren Belastung (Volumen- und Oberflächenkräfte) widerspiegeln.

Da in dieses Prinzip nur geometrische und statische Informationen eingehen, aber keine Annahmen über das Stoffgesetz getroffen werden, läßt es einen großen Anwendungsbereich zu. Auch die Existenz einer Verzerrungsenergiefunktion  $W$  oder eines Potentials  $\Psi$  ist nicht erforderlich. Wenn sich die Spannungen, wie in Kapitel 4.2.5 bereits

erwähnt, aus einem Potential herleiten, so kann man ein Funktional angeben (siehe Biffler (1991)), dessen 1. Variation auf die schwache Formulierung des Problems führt. Das Funktional entspricht der gesamten potentiellen Energie  $\Pi$ , das Minimum liefert unter Beachtung der erzwungenen (kinematischen) Randbedingungen die Impulsbilanz (EULER-Differentialgleichung) sowie die natürlichen (statischen) Randbedingungen.

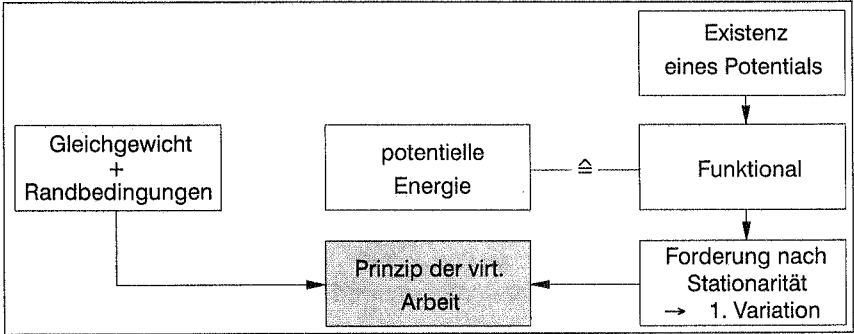


Bild 4.3: Prinzip der virtuellen Arbeit

## 5 Einschichttheorie (Singledirektortheorie)

Um die ersten 3 Forderungen des Kapitels 1.2 zu erfüllen, muß eine 3–dimensionale Schalentheorie entwickelt werden, die die Dickenänderung einer Struktur berücksichtigt. Dieses Schalenelement mit geradem, extensilem Direktor (Singledirektortheorie) wird nach dem auf Ahmad et al. (1970) zurückgehenden und von Ramm (1976) auf geometrische Nichtlinearität erweiterten Degenerationskonzept hergeleitet. Diese Methode entspricht, abgesehen von der Art der unbekanntenen Variablen und deren Interpolation, bei gleichen Annahmen dem klassischen Vorgehen einer Schalentheorie, siehe Büchter, Ramm (1992a).

In der resultierenden Schalenformulierung wird die Aktualisierung des Direktors während des Deformationsvorganges durch den Differenzvektor  $\mathbf{w}$  beschrieben. Dies begründet sich aus der Tatsache, daß bei der Benutzung eines Rotationstensors die benötigten Variationen und Linearisierungen der Komponenten des Verzerrungstensors deutlich komplizierter werden und zu aufwendigen Ausdrücken führen, siehe Gruttmann (1988), Sansour (1992), Sansour, Bufler (1992) mit Theorien basierend auf Ingenieurverzerrungen und Büchter (1992) mit GREEN–LAGRANGE Verzerrungen. Die Aktualisierung mit Hilfe des Differenzvektors bedeutet natürlich keine Beschränkung der Theorie auf 6 Parameter, da jederzeit die Inextensibilität des Direktors als Zwangsbedingung eingeführt werden kann, siehe Başar (1993).

Neben den grundlegenden geometrischen und kinematischen Beziehungen werden die Verzerrungsgleichungen für große Verzerrungen hergeleitet. Auf Materialebene wird durch den Übergang von der mikromechanischen Beschreibung des Faser–Matrix Verbundes zur makromechanischen Betrachtung einer einzelnen Schicht die Berücksichtigung des gesamten Mehrschichtverbundes möglich. Mit Hilfe der arbeitskonformen Schnittgrößen kann das Prinzip der virtuellen Arbeit als Grundlage des Diskretisierungsverfahrens aufgestellt werden. Dieses Prinzip muß aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit von den unbekanntenen Verschiebungen nach der Diskretisierung linearisiert werden. Der 3–dimensionale Verzerrungs– und Spannungszustand dieser 6–Parameter Theorie besitzt bezüglich der Dickenrichtung die gleichen mechanischen Eigenschaften wie das trilineare Volumenelement; folglich auch die damit verbundenen Probleme. Dieser Versteifungseffekt sowie die entsprechenden Gegenmittel zur Beseitigung des Elementblockierens werden am Ende dieses Kapitels besprochen.

### 5.1 Beschreibung des Schalenkontinuums

Die geringe Ausdehnung einer Schalenkonstruktion in Dickenrichtung rechtfertigt die Beschreibung ihrer Geometrie über eine zweidimensionale Referenzfläche, die in dieser Arbeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Schalenmittelfläche darstellen

soll. Dieses Charakteristikum eines jeden Flächentragwerks führt zwangsläufig auf die Verwendung von allgemeinen, krummlinigen Flächenkoordinaten  $\theta^i$  (auch GAUSS-Parameter genannt). Die konvektiven Parameter kennzeichnen jeden Punkt des Körpers während des gesamten Deformationsvorganges durch dasselbe Koordinatentripel  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ .

## 5.2 Geometrie und Kinematik

Ein beliebiger Punkt des Schalenraumes zur Zeit  $t=t_0$  wird über den Ortsvektor der Mittelfläche  $\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, 0)$  und den dazugehörigen Direktor  $\mathbf{a}_3$  beschrieben, siehe Bild 5.1.

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} |\mathbf{a}_3| = \frac{h}{2} \\ -1 \leq \theta^3 \leq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

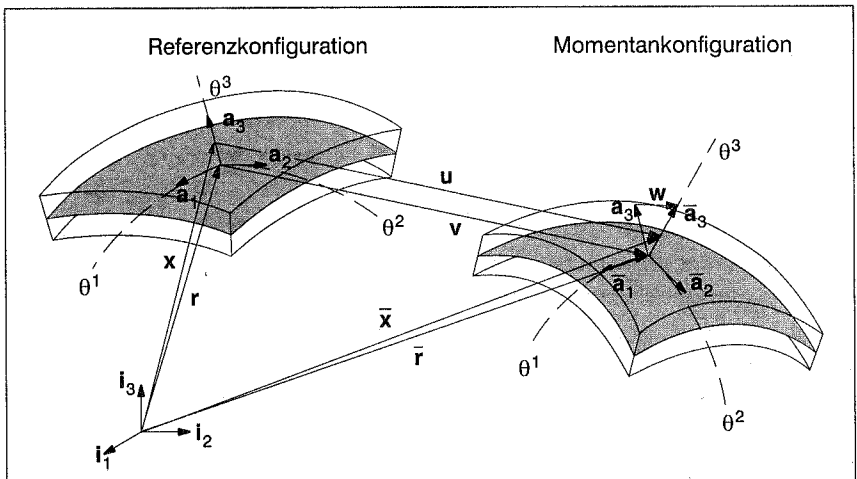


Bild 5.1: Schalenkontinuum im unverformten und verformten Zustand

Besonders zu erwähnen ist, daß der Direktor nicht zwangsläufig als Flächennormale definiert sein muß, jedoch die Dicke in Richtung des Direktors zu messen ist. Schwach veränderliche Materialeigenschaften über den Querschnitt der Struktur sowie kleine transversale Schubverzerrungen rechtfertigen die Annahme eines linearen Verschiebungsfeldes über die Dicke.

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (5.2)$$

Die jeweils 3 Komponenten der Mittelflächenverschiebung  $\mathbf{v}$  und des Differenzvektors  $\mathbf{w}$  sind in der Lage, das gesamte Verschiebungsfeld einer Schale zu beschreiben. Als direkte Folge dieses kinematischen Ansatzes resultiert der Ortsvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  eines Punktes der Momentankonfiguration:



$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{r} + \mathbf{v}} + \underbrace{\theta^3(\mathbf{a}_3 + \mathbf{w})} \\ &= \bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3\end{aligned}\quad (5.3)$$

Die Aktualisierung des Direktors erfolgt in dieser Arbeit durch den Differenzvektor  $\mathbf{w}$ . Da er keinen Zwangs- oder Nebenbedingungen unterliegt, kann die Kinematik über die Dicke konstante Verformungen (Dickenänderung) beschreiben. Eine vom mechanischen Standpunkt äquivalente Formulierung läßt sich durch eine Umparametrisierung der unabhängigen Komponenten von  $\mathbf{w}$  in einen Dickenänderungsparameter  $\chi$  sowie in die Rotationsparameter  $s_1, s_2$  erreichen, siehe auch Kapitel 5.8 und 5.9.

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_3 = \frac{\bar{h}}{2} \bar{\mathbf{d}} - \frac{h}{2} \mathbf{d} = \frac{h}{2} \left( \frac{\bar{h}}{h} \mathbf{R}(s_1, s_2) \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d} \right) = \frac{h}{2} (\chi \mathbf{R}(s_1, s_2) \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d}) \quad (5.4)$$

Dabei sind  $\bar{\mathbf{d}}$  und  $\mathbf{d}$  die Direktoren der Länge eins in beiden Konfigurationen und  $\mathbf{R}$  ein mit dem Rotationsvektor  $\mathbf{s}$  parametrisierter Rotationstensor.

### 5.3 Verzerrungsgleichungen für große Verzerrungen

Der Deformationszustand einer Schale wird durch die Verzerrungen und Verkrümmungen der Schalenmittelfläche vollständig beschrieben. Mit Hilfe der Darstellung (4.30) des GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensors und der kovarianten Basisvektoren (4.18) sollen Gleichungen hergeleitet werden, die eine sich während der Deformation ändernde Schalendicke erfassen können.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (5.5)$$

Mit den kovarianten Basisvektoren des Schalenraumes aus beiden Konfigurationen

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{r}_{, \alpha} + \theta^3 \mathbf{a}_{3, \alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3, \alpha} & \bar{\mathbf{g}}_\alpha &= \bar{\mathbf{r}}_{, \alpha} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3, \alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3, \alpha} \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 & \bar{\mathbf{g}}_3 &= \bar{\mathbf{a}}_3\end{aligned}\quad (5.6)$$

läßt sich ein flächenhaftes, tensorielles Verzerrungsmaß (als Funktion der kovarianten Basen  $\mathbf{a}_i$  und  $\bar{\mathbf{a}}_i$  der Schalenmittelfläche) angeben. Die für große Verzerrungen gültigen Terme in vektorieller Darstellung können bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$  in konstante, lineare und quadratische Ausdrücke geordnet werden.

$$E_{ij} = \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} + (\theta^3)^2 \gamma_{ij} \quad \text{mit} \quad (5.7)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3, i} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \bar{\mathbf{a}}_{3, j} \cdot \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{a}_{3, i} \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{3, j} \cdot \mathbf{a}_i) \quad \text{mit} \quad (i, j) \neq (3, 3) \quad (5.8)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3, \alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3, \beta} - \mathbf{a}_{3, \alpha} \cdot \mathbf{a}_{3, \beta})$$

$$\beta_{33} = \gamma_{\alpha 3} = \gamma_{33} = 0$$

In Büchter (1992) wird gezeigt, daß der in  $\theta^3$  quadratische Anteil vernachlässigt werden kann, wenn ein relativer Fehler in den Verzerrungen der Größenordnung

$$\max\left(\frac{h}{2R}, (1 + 2\eta_E) \frac{\bar{h}}{2R}\right) \begin{cases} \eta_E \cong \text{größte Hauptdehnung von } \mathbf{E} \\ R, \bar{R} \cong \text{Hauptkrümmungsradius} \end{cases} \quad (5.9)$$

toleriert wird und sowohl der Gradient der Querschubverzerrungen als auch die Dickenänderung klein sind. Die auf die Mittelfläche bezogenen Verzerrungen ergeben sich somit linear bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$ .

$$\mathbf{E}_{ij} = \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} \quad (5.10)$$

Die Vernachlässigung des letzten multiplikativen Termes in Gleichung (5.5) liefert die Verzerrungsgleichungen der linearen Theorie:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_j - 2\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \bar{\mathbf{a}}_{3,j} \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{3,j} \cdot \bar{\mathbf{a}}_i + \bar{\mathbf{a}}_{3,i} \cdot \mathbf{a}_j - 2\mathbf{a}_{3,i} \cdot \mathbf{a}_j - 2\mathbf{a}_{3,j} \cdot \mathbf{a}_i); (i, j) \neq (3, 3) \quad (5.11)$$

$$\beta_{33} = 0$$

## 5.4 Anisotrope, elastische Materialgesetze

Auf der Grundlage des Aufbaus einer Faserverbundschale wird über die Herleitung des vollständig 3-dimensionalen Stoffgesetzes einer unidirektionalen Schicht durch Transformation der Materialtensoren vom lokalen Schicht- auf das Laminatkoordinatensystem die Beschreibung des gesamten Mehrschichtverbundes möglich.

### 5.4.1 Stoffgesetz einer einzelnen Schicht

Eine wesentliche Voraussetzung für ein richtungsabhängiges Stoffgesetz ist die Forderung, daß die Orthotropieachsen einer Materialschicht durch ein netzunabhängiges Koordinatensystem beschrieben werden müssen, welches tangential an der Schalenmittelfläche ausgerichtet ist.

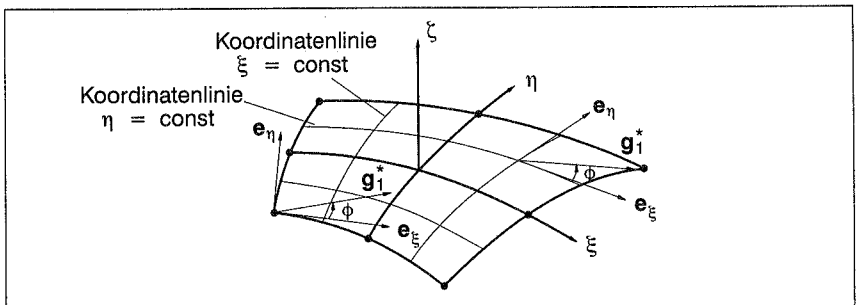


Bild 5.2: Elementabhängigkeit des natürlichen Koordinatensystems

Das natürliche Elementkoordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  ist aus folgenden Gründen als Bezugssystem zur Beschreibung richtungsabhängiger Materialeigenschaften nicht geeignet, siehe Bild 5.2:

- Das Koordinatensystem ist elementabhängig, wodurch eine über die Struktur einheitliche Faserrichtung unmöglich wird.
- Die Richtungsvektoren  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  der Tangenten an die Koordinatenlinien  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  müssen nicht senkrecht zueinander sein, so daß die Orthotropierichtungen nicht mehr gegeben sind.
- Da die Richtungsvektoren  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  ihre Orientierung im Schalenelement ändern, führt eine Rotation der Fasern um einen konstanten Winkel  $\phi$  zu unterschiedlichen Faserorientierungen. Zum Erreichen einer einheitlichen Faserorientierung wäre in jedem Punkt eine Rotation der Fasern um unterschiedliche Winkel nötig.

Zur Überwindung dieser Probleme berechnet Dorninger (1989) die erwähnte Änderung  $\Delta\phi$  des Faserwinkels  $\phi$  aus der Interpolation der Elementgeometrie. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch eine andere Strategie verfolgt werden. Für "gerade" Fasern (bezogen auf die Schalenebene sind die Fasern gerade und parallel) wird die Herleitung der Basisvektoren der Materialhauptrichtungen 1,2 und 3 am Beispiel einer Rotation der Fasern um die  $\mathbf{i}_3$ -Achse des globalen Koordinatensystems in Bild 5.3 erläutert.

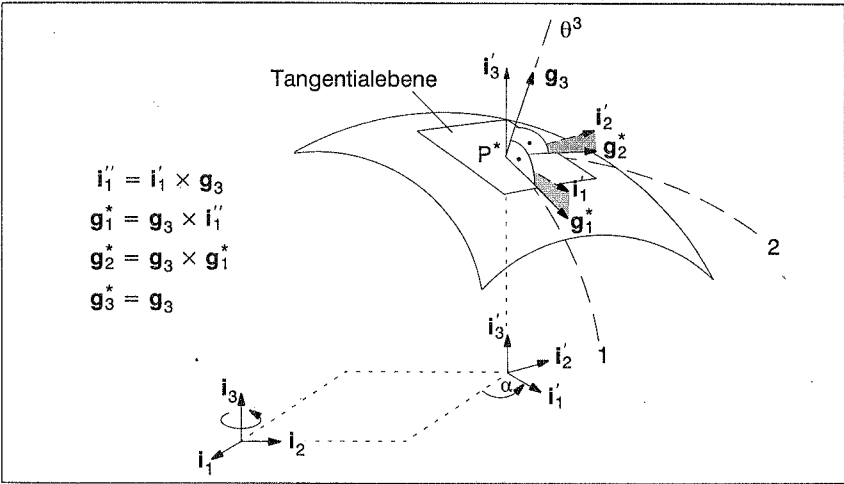


Bild 5.3: Definition der Orthotropierichtungen eines anisotropen Werkstoffgesetzes

Eine unidirektionale Materialschicht soll um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der  $\mathbf{i}_1$ -Achse orientiert sein. Mit der entsprechenden Elementarrotation um die  $\mathbf{i}_3$ -Achse des globalen Koordinatensystems

$$\mathbf{R}_{\mathbf{i}_3}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{i}'_j = (\mathbf{R}_{\mathbf{i}_3})_{ij} \mathbf{i}_j \quad (5.12)$$

entsteht im Punkt  $P^*$  ein orthonormales Basissystem  $\{\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3\}$ , welches nun zwar Orthotropierichtung besitzt, aber nicht in der Tangentialebene der Schalenmittelfläche liegt. Durch die in Bild 5.3 angegebene Kreuzproduktbildung werden die Basisvektoren  $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2$  mit der Abbildung  $\mathbf{R}_{K^r}$  in die Tangentialebene transformiert und somit die Materialhauptrichtungen der gekrümmten Struktur angepaßt.

$$\mathbf{g}_k^* = (\mathbf{R}_{K^r})_{jk} \mathbf{i}'_j \quad \text{mit} \quad (\mathbf{R}_{K^r})_{jk} = \mathbf{i}'_j \mathbf{g}_k^* \quad (5.13)$$

**Bemerkung:**

- Bei ebenen Strukturen (z.B. Platten) geht die Transformationsmatrix  $\mathbf{R}_{K^r}$  in die Einheitsmatrix  $(\mathbf{R}_{K^r})_{ij} = \delta_{ij}$  über.

Das resultierende orthonormale Basissystem  $\{\mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_3^*\}$  entstand also lediglich aus einer Rotation des globalen Koordinatensystems um den Winkel  $\alpha$  und anschließender Kreuzproduktbildung mit dem Direktor  $\mathbf{g}_3$ . Die zu Beginn dieses Abschnittes geforderten Eigenschaften der Netzunabhängigkeit sowie der tangential an die Schalenmittelfläche liegenden Basisvektoren sind somit erfüllt.

Wenn sich die Richtung der Orthotropie über die Struktur ändert, die Neigung des Direktors jedoch konstant bleibt (nur bei ebenen, kreisförmigen Strukturen, siehe Bild 5.4), so muß die Winkeländerung der Fasern vorgegeben werden.

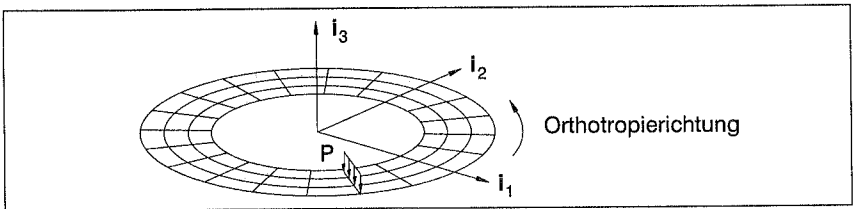


Bild 5.4: Geschlitzte Ringplatte

Dorninger (1989) schlägt zur Beseitigung des "Defektes" seiner Theorie zur Bestimmung der Orthotropierichtung folgende Abhilfe vor: Die Angabe der Faserwinkeländerung läßt sich z.B. durch Interpolation mit den herkömmlichen zweidimensionalen Ansatzfunktionen  $N_K(\xi, \eta)$  verwirklichen. Die entsprechenden Faserwinkel müßten an den Elementknoten vorgegeben werden:

$$\alpha(\xi, \eta) = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \alpha_K \quad (5.14)$$

Da sowohl die Verzerrungen (4.30) als auch die Spannungen (4.36) auf die kontra- bzw. kovarianten Basisvektoren bezogen sind, müssen die Materialtensoren  $\mathbf{C}_L^*$  der ein-

zelen Schichten auf das Laminatkoordinatensystem transformiert werden. Um nun einen Zusammenhang zwischen den Basisvektoren  $\mathbf{g}_i^*$  des Schichtkoordinatensystems und denen des Laminatkoordinatensystems  $\mathbf{g}_i$  herzustellen, wird Gleichung (5.12)<sub>2</sub> in (5.13)<sub>1</sub> eingesetzt:

$$\mathbf{g}_k^* = (\mathbf{R}_{Kl'})_{jk} \mathbf{i}_j' = (\mathbf{R}_{Kl'})_{jk} (\mathbf{R}_{l_3})_{ij} \mathbf{i}_i = (\mathbf{R}_{Kl'})_{jk} (\mathbf{R}_{l_3})_{ij} \frac{\partial \theta^l}{\partial X_i} \mathbf{g}_l = \mathbf{T}_{kl} \mathbf{g}_l \quad (5.15)$$

Mit dieser Abbildung ist es möglich, den Materialtensor  $\mathbf{C}_L^*$  im Schichtkoordinatensystem der Schicht L

$$\mathbf{C}_L^* = C_L^{ijkl*} \mathbf{g}_i^* \otimes \mathbf{g}_j^* \otimes \mathbf{g}_k^* \otimes \mathbf{g}_l^* \quad (5.16)$$

mit einer 4-stufigen Tensortransformation auf das Laminatkoordinatensystem zu beziehen.

$$\mathbf{C}_L = C_L^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad \text{mit} \quad C_L^{ijkl} = T_{mi} T_{nj} C_L^{mnop*} T_{ok} T_{pl} \quad (5.17)$$

Die explizite Form der Komponenten  $C_L^{ijkl*}$  des Materialtensors  $\mathbf{C}_L^*$  werden in Kapitel 5.4.3 ausführlich erläutert.

#### Bemerkungen:

- Der Basisvektor  $\mathbf{g}_1^*$  liegt in der durch die Vektoren  $\mathbf{i}_1'$  und  $\mathbf{i}_3'$  aufgespannten Ebene, während  $\mathbf{g}_2^*$  in der  $\mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'$  – Ebene liegt.
- Im Punkt  $P^*$  gelten folgende Beziehungen:

$$|\mathbf{g}_i^*| = 1 \quad , \quad \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^* = 0 \quad \text{mit} \quad i \neq j \quad (5.18)$$

$\mathbf{g}_1^*$  und  $\mathbf{g}_2^*$  liegen somit in der Tangentialebene an den Punkt  $P^*$ .

- Dieses Verfahren ist jedoch nicht singularitätenfrei, da die Bedingung  $\mathbf{i}_1' \times \mathbf{g}_3 \neq \mathbf{0}$  erfüllt werden muß, womit der Schalendirektor  $\mathbf{g}_3$  nicht parallel zu  $\mathbf{i}_1'$  orientiert sein darf (z.B. Kugelschale – "pinched hemisphere"). Ist diese Bedingung verletzt, so wird das Basissystem  $\{\mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_3^*\}$  nach folgender Vorschrift gebildet:

$$\mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 \quad , \quad \mathbf{g}_2^* = \mathbf{i}_3' \times \mathbf{g}_3 \quad , \quad \mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_2^* \times \mathbf{g}_3 \quad (5.19)$$

- Die entsprechenden Rotationen um die  $\mathbf{i}_1'$ – bzw.  $\mathbf{i}_2'$ –Achse werden im Anhang B.1 erläutert.

#### 5.4.2 Stoffgesetz des Laminats

Wie im einführenden Kapitel 2.2 über Faserverbundwerkstoffe bereits erwähnt, bestehen Laminat aus mehreren Einschichtverbunden, die unter beliebigem Winkel übereinander angeordnet sind. Durch die oben hergeleitete Transformation (5.17) vom Schicht– auf das Laminatkoordinatensystem oder auch durch komplett andere Schichtmaterialien entstehen im gemeinsamen Basissystem  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  unterschiedliche Materialtensoren  $\mathbf{C}_L$ . Formal kann der von der Dickenkoordinate abhängige Materialtensor  $\mathbf{C}$  mit Hilfe von Bild 5.5 wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{C}(\theta^3) = \begin{cases} \mathbf{C}_{NL} & \tilde{\theta}_{NL}^3 < \theta^3 \leq \tilde{\theta}_{NL+1}^3 = +1 \\ \mathbf{C}_{NL-1} & \tilde{\theta}_{NL-1}^3 < \theta^3 \leq \tilde{\theta}_{NL}^3 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_2 & \tilde{\theta}_2^3 < \theta^3 \leq \tilde{\theta}_3^3 \\ \mathbf{C}_1 & -1 = \tilde{\theta}_1^3 \leq \theta^3 \leq \tilde{\theta}_2^3 \end{cases} \quad (5.20)$$

Die Koordinaten  $\tilde{\theta}_i^3$  beschreiben dabei den Abstand von der Schalenmittelfläche zum Interface zwischen Schicht  $i-1$  und  $i$  ( $i=1$  und  $i=NL+1$  kennzeichnen die Schalenunter- bzw. Schalenoberseite) und werden nach folgender Formel berechnet:

$$\tilde{\theta}_i^3 = -1 + \frac{2}{h} \sum_{j=1}^{i-1} h_j \quad \text{für } i = 2, \dots, NL; \quad h_j \hat{=} \text{Dicke der Schicht } j \quad (5.21)$$

Die in Bild 5.5 zusätzlich angegebenen Koordinaten  $\theta_i^3$  werden zwar erst in Kapitel 5.5 benötigt, sollen aber aus Gründen der Vollständigkeit bereits an dieser Stelle erklärt werden. Sie definieren den Abstand von der Schalenmittelfläche zur Mittelfläche der Schicht  $i$ :

$$\theta_i^3 = -1 + \frac{h_i}{h} + \frac{2}{h} \sum_{j=1}^{i-1} h_j \quad \text{für } i = 1, \dots, NL \quad (5.22)$$

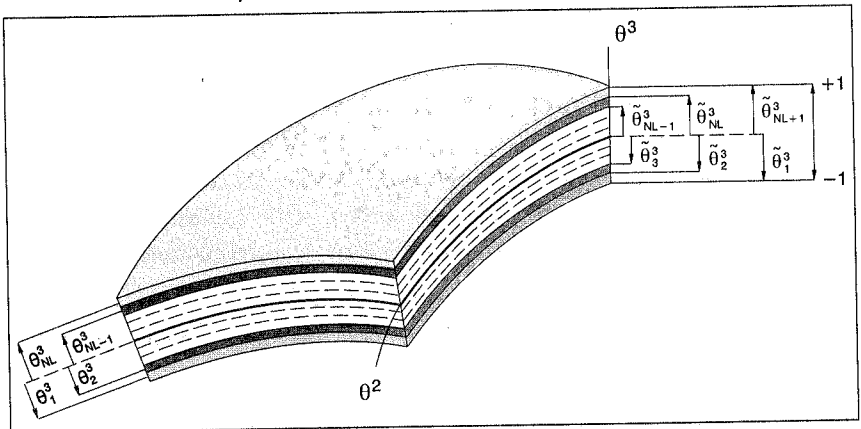


Bild 5.5: Geometrie des Mehrschichtverbundes

### 5.4.3 Anisotrope, orthotrope, transversal-isotrope und isotrope Werkstoffgesetze

Mit der Beschreibung eines Laminats als schichtweise, homogene Struktur (siehe Kapitel 3.2.1) kann unter der Voraussetzung linearer Elastizität das verallgemeinerte HOO-KESche Gesetz für homogene, anisotrope Kontinua zur Anwendung kommen. Die 2.

PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungen  $\mathbf{S}$  werden somit durch folgende lineare Abbildung mit den GREEN–LAGRANGE–Verzerrungen  $\mathbf{E}$  verknüpft.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (5.23)$$

Für den 4–stufigen Materialtensor  $\mathbf{C}$  gelten die in Gleichung (5.20) dargestellten Abhängigkeiten bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$ . Die Tensoren  $\mathbf{C}_L$  resultierten dabei aus einer Transformation vom Koordinatensystem in Richtung der Materialhauptachsen auf das Laminatsystem. In diesem Unterkapitel sollen nun die auf das Schichtkoordinatensystem bezogenen Materialtensoren  $\mathbf{C}_L^*$  in ihrer expliziten Gestalt angegeben werden.

Der Materialtensor  $\mathbf{C}_L^*$  besitzt im allgemeinen, anisotropen Fall  $3^4 = 81$  Konstanten und würde somit bei Überführung in die Matrizenschreibweise eine  $9 \times 9$  Matrix darstellen. Da der Spannungs– und Verzerrungstensor symmetrisch sind, werden sie nicht durch 9 sondern durch 6 Komponenten beschrieben. Daraus resultiert eine Reduktion der Anzahl der Konstanten des Elastizitätstensors auf 36.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (5.24)$$

Bei GREEN– oder hyperelastischen Materialien existiert nach Kapitel 4.2.5 ein hyperelastisches Potential  $\Psi$ , so daß sich der Stofftensor wie folgt berechnen läßt.

$$\mathbf{C} = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (5.25)$$

Mit Hilfe des Satzes von Schwarz (siehe Kapitel A.5) aus der mehrdimensionalen Analysis kann die Symmetrie des Materialtensors hergeleitet werden.

$$C_{ijkl} = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = C_{klij} \quad (5.26)$$

Dies hat zur Folge, daß eine weitere Reduktion der Konstanten auf 21 erfolgen kann. Durch Überführung der 6 Komponenten des Spannungs– und Verzerrungstensors in Vektorschreibweise

$$\mathbf{S} = (S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{23})^T ; \quad \mathbf{E} = (E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{13} \ 2E_{23})^T \quad (5.27)$$

ergibt sich die Werkstoffmatrix eines anisotropen (triklinen) Materials mit 21 unabhängigen Konstanten zu:

$$\mathbf{C}_L^* = \begin{bmatrix} C_L^{1111*} & C_L^{1122*} & C_L^{1133*} & C_L^{1112*} & C_L^{1113*} & C_L^{1123*} \\ & C_L^{2222*} & C_L^{2233*} & C_L^{2212*} & C_L^{2213*} & C_L^{2223*} \\ & & C_L^{3333*} & C_L^{3312*} & C_L^{3313*} & C_L^{3323*} \\ & & & C_L^{1212*} & C_L^{1213*} & C_L^{1223*} \\ & \text{sym.} & & & C_L^{1313*} & C_L^{1323*} \\ & & & & & C_L^{2323*} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Besonders zu erwähnen ist die Tatsache, daß sowohl die Schubverzerrungen und die Normalspannungen als auch die Längsdehnungen und die Schubspannungen miteinander gekoppelt sind.

Kann der Werkstoff gewisse Symmetrieeigenschaften aufweisen, so läßt sich die vollbesetzte Materialmatrix deutlich vereinfachen. Existiert eine Symmetrieebene (z.B. die  $yz$ -Ebene), so spricht man von einem monoklinen Material, zu dessen Beschreibung 13 unabhängige Konstanten notwendig sind.

$$C_L^* = \begin{bmatrix} C_L^{1111*} & C_L^{1122*} & C_L^{1133*} & 0 & 0 & C_L^{1123*} \\ & C_L^{2222*} & C_L^{2233*} & 0 & 0 & C_L^{2223*} \\ & & C_L^{3333*} & 0 & 0 & C_L^{3323*} \\ & \text{sym.} & & C_L^{1212*} & C_L^{1213*} & 0 \\ & & & & C_L^{1313*} & 0 \\ & & & & & C_L^{2323*} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Bei einem orthotropen Material für 3–dimensionale Strukturen existieren drei aufeinander senkrecht stehende Ebenen, bezüglich derer die elastischen Eigenschaften des Werkstoffes symmetrisch sind, siehe Bild 5.6.

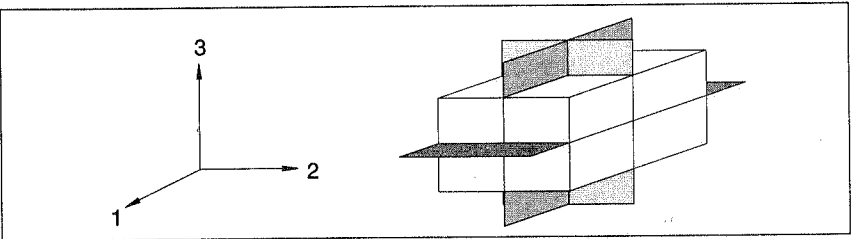


Bild 5.6: Symmetrieebenen eines orthotropen Werkstoffes

Die Anzahl der unabhängigen elastischen Konstanten reduziert sich auf neun, wodurch eine Entkopplung der Schubterme von den Ausdrücken in Normalenrichtung möglich wird.

$$C_L^* = \begin{bmatrix} C_L^{1111*} & C_L^{1122*} & C_L^{1133*} & 0 & 0 & 0 \\ & C_L^{2222*} & C_L^{2233*} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_L^{3333*} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & C_L^{1212*} & 0 & 0 \\ & & & & C_L^{1313*} & 0 \\ & & & & & C_L^{2323*} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Diese Werkstoffkonstanten können mit akzeptablem Aufwand nur aus einachsigen Zug-, Druck- und Schubversuchen durch die Messung von Verschiebungen bei aufgebrachter Belastung ermittelt werden. Die Ergebnisse sind dann auf den mehrachsigen



gen Spannungszustand zu übertragen, so daß sich in anschaulicher Weise die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{c}_L^*$  ergeben.

$$\begin{aligned}
 c_L^{1111*} &= \frac{1}{E_1} & ; & & c_L^{2222*} &= \frac{1}{E_2} & ; & & c_L^{3333*} &= \frac{1}{E_3} \\
 c_L^{1122*} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} & ; & & c_L^{1133*} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} & ; & & c_L^{2233*} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\
 c_L^{1212*} &= \frac{1}{G_{12}} & ; & & c_L^{1313*} &= \frac{1}{G_{13}} & ; & & c_L^{2323*} &= \frac{1}{G_{23}}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Zur Bestimmung dieser Terme sind folgende Definitionen verwendet worden (siehe auch Bild 5.7):

- $E_1, E_2, E_3$       Elastizitätsmodul in Faserrichtung, senkrecht zur Faser und in Dickenrichtung
- $\nu_{ij} = -\frac{E_{jj}}{E_{ii}}$       Querkontraktionszahl für Dehnungen in Richtung  $j$ , aufgrund Spannungen in Richtung  $i$       (5.32)
- $G_{12}, G_{13}, G_{23}$       Schubmodul in der Ebene 1 – 2, 1 – 3, 2 – 3

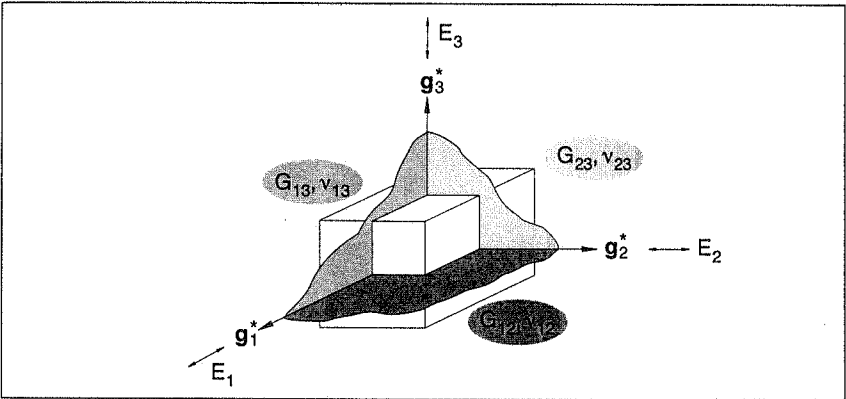


Bild 5.7: Materialkennwerte eines orthotropen Werkstoffes

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Nachgiebigkeitsmatrix ( $\mathbf{C}_L^* = (\mathbf{c}_L^*)^{-1}$  ist symmetrisch) kann eine nützliche Beziehung angegeben werden,

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \tag{5.33}$$

so daß sich durch Inversion von  $\mathbf{c}_L^*$  die Komponenten des Elastizitätstensors  $\mathbf{C}_L^*$  der Gleichung (5.30) wie folgt berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
C_L^{1111*} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} ; & C_L^{2222*} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} ; & C_L^{3333*} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} \\
C_L^{1122*} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta E_1 E_3} ; & C_L^{1133*} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta E_1 E_2} ; & C_L^{2233*} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2} \quad (5.34) \\
C_L^{1212*} &= G_{12} ; & C_L^{1313*} &= G_{13} ; & C_L^{2323*} &= G_{23}
\end{aligned}$$

wobei folgende Abkürzung benutzt wurde:

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{31}\nu_{12}\nu_{23}) \quad (5.35)$$

Existiert in jedem Punkt eines Körpers eine Ebene, in der die elastischen Eigenschaften in allen Richtungen gleich sind, so wird das Material als transversal isotrop bezeichnet. Da sich das Material senkrecht zur ausgezeichneten Richtung 1 isotrop verhält, ergeben sich unter der Voraussetzung, daß diese Ebene mit der 2–3 Ebene zusammenfällt, folgende Vereinfachungen, Bild 5.8.

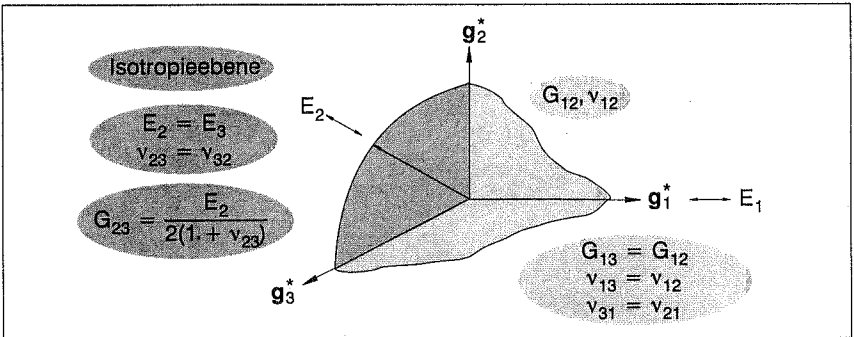


Bild 5.8: Materialkennwerte eines transversal isotropen Werkstoffes

Mit den verbleibenden 5 unabhängigen Konstanten  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, G_{12}$  lassen sich die Komponenten (5.34) des Werkstoffensors  $C_L^*$  wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
C_L^{1111*} &= \frac{1 - \nu_{23}^2}{\Delta E_2} ; & C_L^{2222*} &= C_L^{3333*} ; & C_L^{3333*} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1} \\
C_L^{1122*} &= \frac{\nu_{12}(1 + \nu_{23})}{\Delta E_1} ; & C_L^{1133*} &= C_L^{1122*} ; & C_L^{2233*} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{\Delta E_1} \quad (5.36) \\
C_L^{1212*} &= G_{12} ; & C_L^{1313*} &= C_L^{1212*} ; & C_L^{2323*} &= \frac{1}{2} (C_L^{2222*} - C_L^{2233*}) = G_{23} \\
\Delta &= \frac{1}{E_1 E_2} (1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{12}\nu_{23}) \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen können unidirektional verstärkte Faserverbundwerkstoffe beschrieben werden.

Gibt es schließlich unendlich viele Symmetrieebenen – hat also der Werkstoff in jeder

beliebigen Richtung dieselben elastischen Eigenschaften – dann reduziert sich die Anzahl der unabhängigen elastischen Konstanten für diesen isotropen Werkstoff auf zwei, nämlich  $E$  und  $\nu$ . Mit den folgenden Abkürzungen

$$E = E_1 = E_2 = E_3 \quad ; \quad \nu = \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{32} \quad (5.38)$$

$$G = G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

läßt sich der Werkstofftensor eines isotropen Materials als Sonderfall der anisotropen Beziehungen herleiten.

$$C_L^{1111*} = C_L^{2222*} = C_L^{3333*} = \frac{1 - \nu^2}{\Delta} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$C_L^{1122*} = C_L^{1133*} = C_L^{2233*} = \frac{\nu(1 + \nu)}{\Delta} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (5.39)$$

$$C_L^{1212*} = C_L^{1313*} = C_L^{2323*} = G$$

$$\Delta = \frac{1}{E}(1 - 3\nu^2 - 2\nu^3) = \frac{1}{E}(\nu + 1)^2(1 - 2\nu) \quad (5.40)$$

In Bild 5.9 wird abschließend eine Übersicht der oben diskutierten Materialien mit der dazugehörigen Anzahl unabhängiger elastischer Materialparameter gegeben.

Material	anisotrop (triklin)	monoklin	orthotrop	transversal isotrop	isotrop
Anzahl der unabhängigen Materialkonstanten	21	13	9	5	2
Anzahl der Symmetrieebenen	0	1	3	3	$\infty$

Bild 5.9: Anzahl der Materialkonstanten

**Bemerkung:**

- Die dargestellten 6x6 Materialmatrizen für anisotrope, orthotrope, transversal–isotrope und isotrope Werkstoffeigenschaften resultieren aus vollständig 3–dimensionalen Tensoren 4. Stufe. Sie bedürfen keiner Modifikation oder sonstigen Änderung und könnten direkt in eine Finite Elemente Formulierung basierend auf Volumenelementen bzw. 3–dimensional orientierten Schalenelementen integriert werden.

## 5.5 Schnittgrößen und deren konstitutive Beziehungen

Die in Gleichung (5.23) berechneten 2. PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungen  $\mathbf{S}$  werden nun zu Schnittgrößen zusammengefaßt, da sie oft einen besseren Gesamtüberblick über die Belastung eines Tragwerks liefern. Zum anderen ist eine anschauliche und praktische Zerlegung in Membran– und Biegebeanspruchung möglich.

Mit der Definition des Schnittkraft– (inkl. Querkräften) bzw. Schnittmomententensors

$$\mathbf{N} := \int_{-1}^1 \mu \mathbf{S} d\theta^3 = n^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{M} := \int_{-1}^1 \mu \theta^3 \mathbf{S} d\theta^3 = m^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (5.41)$$

können die dabei auftretenden Spannungsresultierenden  $n^{ij}$  und  $m^{ij}$  mit Hilfe des im vorigen Kapitel erläuterten Stoffgesetzes berechnet werden (Zur genauen Definition des Betrages  $\mu$  des Schalenshifters siehe nächstes Kapitel).

$$n^{ij} = \int_{-1}^1 \mu S^{ij} d\theta^3 = \int_{-1}^1 \mu C^{ijkl} (\alpha_{kl} + \theta^3 \beta_{kl}) d\theta^3 = D_0^{ijkl} \alpha_{kl} + D_1^{ijkl} \beta_{kl} \quad (5.42)$$

$$m^{ij} = \int_{-1}^1 \mu \theta^3 S^{ij} d\theta^3 = \int_{-1}^1 \mu \theta^3 C^{ijkl} (\alpha_{kl} + \theta^3 \beta_{kl}) d\theta^3 = D_1^{ijkl} \alpha_{kl} + D_2^{ijkl} \beta_{kl} \quad (5.43)$$

In beiden Gleichungen ist die in den einführenden Abschnitten (Kapitel 2.2.3) erwähnte Kopplung zwischen unterschiedlichen Deformationsmodes deutlich zu erkennen. Die Ursache hierfür liegt in der Koppelsteifigkeit  $D_1^{ijkl}$ , die dafür sorgt, daß z.B. bei reiner Membranbeanspruchung die Dehnungen mit Biege– und/oder Drillmomenten oder die Biegemodes mit Dehnungen und/oder Schub durchsetzt sind, siehe Beispiel 8.3.

Die Koppelsteifigkeiten ergeben sich bei exakt symmetrischer Struktur bezüglich der Schalenmittelfläche zu null. Exakt symmetrisch bedeutet in diesem Zusammenhang, daß sowohl die Dickenabmessungen als auch die Materialeigenschaften der bezüglich der Mittelfläche gegenüberliegenden Schichten übereinstimmen müssen.

Die in den Gleichungen der Spannungsresultierenden auftretende und für Schalenformulierungen typische explizite Integration des Materialtensors über die Dicke

$$D_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 \mu \cdot (\theta^3)^K \cdot C^{ijkl} d\theta^3 \quad (5.44)$$

muß im allgemeinen numerisch erfolgen, da sowohl der Materialtensor als auch der Betrag des Schalenshifters von der Dickenkoordinate  $\theta^3$  abhängen.

Unter der Voraussetzung, daß die Materialtensoren  $\mathbf{C}_L$  innerhalb der Schicht  $L$  von der Dickenkoordinate unabhängig sind, läßt sich das Integral (5.44) in Teilintegrale (für jede Schicht) aufspalten. Um nun die GAUSSsche Quadraturformel mit ihren bekannten Grenzen  $-1$  und  $+1$  anwenden zu können, muß die auf Panda, Natarajan (1979) zurückgehende Koordinatentransformation durchgeführt werden, siehe Bild 5.10.

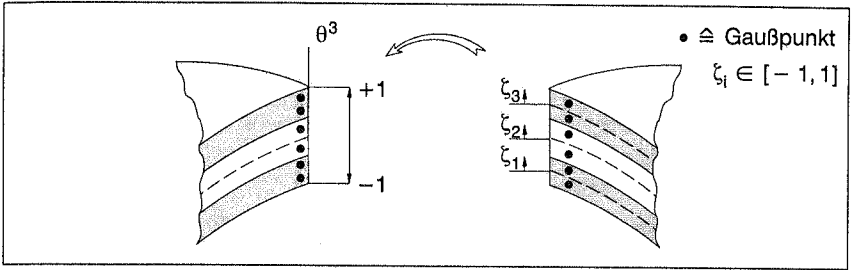


Bild 5.10: Transformation auf Schichtkoordinaten

$$\theta^3 = -1 + \frac{1}{h} \left[ -h_L(1 - \zeta_L) + 2 \sum_{i=1}^L h_i \right] \rightarrow d\theta^3 = \frac{h_L}{h} d\zeta_L \quad (5.45)$$

Mit dieser lokalen Dickenkoordinate  $\zeta_L \in [-1, 1]$  der Schicht L kann der Materialtensor  $\mathbf{C}$  mit den gewohnten Stützstellen und Wichtungsfaktoren der GAUSSschen Quadratur schichtweise numerisch integriert werden.

$$D_K^{ijkl} = \sum_{L=1}^{NL} \frac{h_L}{h^{K+1}} \int_{-1}^1 \mu_{\zeta_L} \left[ -h - h_L(1 - \zeta_L) + 2 \sum_{i=1}^L h_i \right]^K \cdot C_L^{ijkl} d\zeta_L \quad (5.46)$$

Dabei ist die Abhängigkeit des Schalenshifters von  $\theta^3$  ebenfalls zu transformieren.

$$\mu = \mu(\theta^3) \rightarrow \mu_{\zeta_L} = \mu(\zeta_L) \quad (5.47)$$

Bei Tolerierung eines Fehlers von  $h:R$  kann jedoch auf den Betrag des Schalenshifters für dünne oder schwach gekrümmte Schalen verzichtet werden,  $\mu = 1$  (siehe Büchter (1992)). Mit der Abkürzung  $\tilde{h}_L = 2h_L/h$  und unter Zuhilfenahme der in Kapitel 5.4.2 definierten Koordinaten  $\theta_i^3$  und  $\tilde{\theta}_i^3$  können die Teilintegrale dann auch analytisch berechnet werden.

$$D_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^K \cdot C^{ijkl} d\theta^3 = \sum_{L=1}^{NL} \int_{\tilde{\theta}_L^3}^{\tilde{\theta}_{L+1}^3} (\theta^3)^K \cdot C_L^{ijkl} d\theta^3 = \sum_{L=1}^{NL} C_L^{ijkl} \frac{(\tilde{\theta}_{L+1}^3)^{K+1} - (\tilde{\theta}_L^3)^{K+1}}{K+1}$$

$$D_0^{ijkl} = \sum_{L=1}^{NL} C_L^{ijkl} \tilde{h}_L, \quad D_1^{ijkl} = \sum_{L=1}^{NL} C_L^{ijkl} \tilde{h}_L \theta_L^3, \quad D_2^{ijkl} = \sum_{L=1}^{NL} C_L^{ijkl} (\tilde{h}_L (\theta_L^3)^2 + \frac{\tilde{h}_L^3}{12}) \quad (5.48)$$

### Bemerkungen:

- Die erwähnte numerische Vorabintegration des vollständigen, unveränderten Materialtensors über die Dicke, Gleichung (5.44), stellt keinen Widerspruch zu Schalentheorien und im speziellen zum Degenerationskonzept (Kapitel 5.7.1) dar. Wichtig ist, daß die eigentliche Steifigkeitsmatrix nur über die Fläche integriert wird. Ob jedoch die Vorabintegration der Dicke analytisch oder numerisch erfolgt, ist in bezug auf die grundlegenden Prinzipien dieses Konzeptes ohne Bedeutung.

- Um Mißverständnisse zu vermeiden, soll im weiteren für vorabintegrierte Formulierungen auch der Begriff explizite Integration verwendet werden. Die kontinuumstypische Volumenintegration (analog zu 3D-Elementen – "bricks") hingegen wird als implizite Integration bezeichnet.

## 5.6 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

In diesem Abschnitt soll die virtuelle Arbeit eines dreidimensionalen Kontinuums durch die Dickenintegration so umgeformt werden, daß eine für Schalentheorien typische Arbeitsgleichung in energetisch konjugierten Größen resultiert.

### 5.6.1 Virtuelle, innere Arbeit

Der Arbeitsausdruck der inneren Kräfte (Gleichungen (4.68) und (4.69)) aus einer schwachen Formulierung für statische Probleme läßt sich wie folgt definieren:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_B \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV \quad (5.49)$$

Das differentielle Volumenelement des Schalenraumes

$$dV = \det \mathbf{J} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad \text{mit} \quad |\mathbf{g}_3| = \frac{h}{2} \quad (5.50)$$

muß nun mit Hilfe eines Flächenelements der Schalenmittelfläche in eine Form transformiert werden, die eine Aufspaltung des Volumenintegrals in die Dickenrichtung und eine Integration über die Fläche möglich macht.

$$dA = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\det \mathbf{J}_C}{|\mathbf{a}_3|} d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\sqrt{|\mathbf{a}|}}{|\mathbf{a}_3|} d\theta^1 d\theta^2 \quad (5.51)$$

$$\rightarrow dV = \frac{\det \mathbf{J}}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} d\theta^3 dA = \sqrt{\frac{|\mathbf{g}|}{|\mathbf{a}|}} |\mathbf{a}_3| d\theta^3 dA = \mu d\theta^3 dA \quad (5.52)$$

wobei  $\mathbf{J}_C$  die JACOBI-Matrix der Referenzfläche, also  $\mathbf{J}_C = \mathbf{J}(\theta^3 = 0)$  und  $|\mathbf{a}|$  die Determinante des kovarianten Metrikensors  $\mathbf{a} = a_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$  der Mittelfläche darstellen.

Unter Berücksichtigung der Definitionen der Spannungsresultierenden (5.42) und (5.43) resultiert für Gleichung (5.49) somit ein Ausdruck, der die aus den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Schnittgrößen und den arbeitskonformen Verzerrungen geleistete innere Arbeit repräsentiert.

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_B \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV = \int_B \delta E_{ij} S^{ij} \, dV = \int_A \int_{\theta^3} \delta E_{ij} S^{ij} \mu \, d\theta^3 dA \quad (5.53)$$

$$= \int_A (\delta \alpha_{ij} n^{ij} + \delta \beta_{kl} m^{kl}) \, dA \quad \text{mit} \quad (k, l) \neq (3, 3) \quad (5.54)$$

## 5.6.2 Virtuelle, äußere Arbeit

Die von der äußeren Belastung geleistete Arbeit nimmt bei Schalenformulierungen mit extensiblen Direktor gegenüber konventionellen 5-Parameter Theorien einen deutlich höheren Stellenwert ein. Aufgrund der Zwangsbedingung der Inextensibilität des Direktors sind herkömmliche Theorien mit kondensiertem Stoffgesetz ( $S^{33} = 0$ ) nicht in der Lage, eine Dickenänderung der Schale zu simulieren. Da jedoch mit abnehmender Schlankheit die Dickenänderung einer Struktur an Bedeutung gewinnt, ist die Frage der korrekten Lasteinleitung an der Ober- oder Unterseite bei vollständig 3-dimensionalen Schalenformulierungen von größerer Wichtigkeit.

Nähere Erläuterungen zur Lasteinleitung bei Schalentheorien, die auf dem Degenerationskonzept basieren, werden im Kapitel 5.7 gegeben, da dort die Arbeitsausdrücke in diskretisierter Form vorliegen.

Ausgehend von der virtuellen, äußeren Arbeit (Gleichung (4.68)) der im Kontinuum verteilten Volumenkräfte sowie der auf die Laibungen einwirkenden Flächenkräfte

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_B \mathbf{q} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (5.55)$$

wird das Integral über die Oberfläche in einen Anteil der Schalenober- und einen der Schalenunterseite aufgespalten.

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_B \mathbf{q} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{A^{\text{ob}}} \mathbf{t}^{\text{ob}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{ob}} \, dA^{\text{ob}} - \int_{A^{\text{un}}} \mathbf{t}^{\text{un}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{un}} \, dA^{\text{un}} \quad (5.56)$$

Die entsprechenden Bezeichnungen sind in Bild 5.11 erläutert.

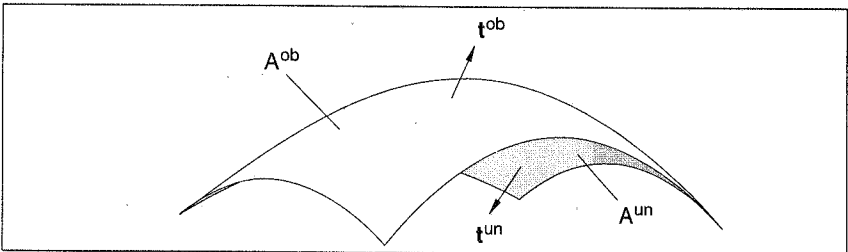


Bild 5.11: Spannungsvektoren der Laibungsflächen einer Schale

Mit Hilfe einer Transformation der differentiellen Flächenelemente

$$\left. \begin{aligned} dA^{\text{ob}} &= \mu^{\text{ob}} dA \\ dA^{\text{un}} &= \mu^{\text{un}} dA \end{aligned} \right\} \text{ mit } \left\{ \begin{aligned} \mu^{\text{ob}} &= \mu \left( + \frac{h}{2} \right) \\ \mu^{\text{un}} &= \mu \left( - \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (5.57)$$

können in Gleichung (5.56) die Flächenintegrale auf die Schalenmittelfläche bezogen werden.

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_B \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_A (\mathbf{t}^{\text{ob}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{un}} \mu^{\text{un}}) \, dA \quad (5.58)$$

Durch Einführung der benötigten variationellen Verschiebungsbeziehungen

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{v} + \theta^3 \delta \mathbf{w} \quad , \quad \delta \mathbf{u}^{\text{ob}} = \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{w} \quad , \quad \delta \mathbf{u}^{\text{un}} = \delta \mathbf{v} - \delta \mathbf{w} \quad (5.59)$$

läßt sich ein Ausdruck in den unbekanntenen Funktionen  $\delta \mathbf{v}$  und  $\delta \mathbf{w}$  angeben, in dem analog zur virtuellen, inneren Arbeit die Dicken- und die Flächenintegration getrennt sind:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = & - \int_A \left[ \left( \int_{\theta^3} \varrho \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \right) \cdot \delta \mathbf{v} + \left( \int_{\theta^3} \theta^3 \varrho \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \right) \cdot \delta \mathbf{w} \right] \, dA \quad (5.60) \\ & - \int_A \left[ (\mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}}) \cdot \delta \mathbf{v} + (\mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} - \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}}) \cdot \delta \mathbf{w} \right] \, dA \quad (5.61) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}} + \int_{\theta^3} \varrho \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} - \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}} + \int_{\theta^3} \theta^3 \varrho \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \quad (5.62)$$

entsteht für die virtuelle Arbeit der äußeren Belastungen ein kompakter Ausdruck, der mit dem im nächsten Kapitel besprochenen Diskretisierungsverfahren auf konsistente Knotenkräfte umgerechnet werden kann.

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_A (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{w}) \, dA \quad (5.63)$$

## 5.7 Diskretisierung und Linearisierung

Die Basis vieler Diskretisierungsmethoden stellt die Variationsformulierung des lokalen Gleichgewichts (Prinzip der virtuellen Arbeit) im Sinne einer schwachen Formulierung dar. Da diese Gleichungen nichtlinear von den unbekanntenen Verschiebungen abhängen, ist ein iterativer Lösungsalgorithmus erforderlich. Die gebräuchlichsten Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme sind u.a. in Luenberger (1984) angegeben. Neben der iterativen Bearbeitung der nichtlinearen Gleichungen wird in dieser Arbeit der Weg der konsistenten Linearisierung der schwachen Formulierung mit anschließender Beseitigung des Linearisierungsfehlers besprochen.

### 5.7.1 Diskretisierung des 3-dimensionalen Kontinuums

Zur Lösung von Randwertproblemen der Kontinuumstheorie wird das zu untersuchende Gebiet  $B$  in  $N_e$  Teilgebiete  $B_e$  zerlegt.

$$B \approx B_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} B_e \quad \text{mit} \quad B_{e_1} \cap B_{e_2} = \emptyset \quad , \quad e_1, e_2 \in [1, N_e] \quad (5.64)$$



Durch die mit (...)<sub>h</sub> gekennzeichneten Größen sind hier und im folgenden die Finite Element Approximationen definiert. Da die Steifigkeiten und Lastvektoren aller Elemente nach einem "Baukastenprinzip" zur Gesamtsteifigkeitsmatrix bzw. zum Gesamtlastvektor zusammengebaut werden, genügt es, die Herleitung der Gleichungen auf ein Element zu beschränken und auf den Elementzeiger e weitgehend zu verzichten.

Der Diskretisierung liegt das isoparametrische Konzept zugrunde, d.h. Geometrie und Verschiebungsfeld werden mit den gleichen Ansatzfunktionen auf dem Einheitswürfel  $\square = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  des isoparametrischen Raumes beschrieben.

Die Interpolation der Geometrie des 3-dimensionalen Kontinuums in der Referenzkonfiguration läßt sich mit 2 Knoten über die Dicke wie folgt darstellen

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_h = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \left( \frac{1 + \xi}{2} \mathbf{x}_{ob}^K + \frac{1 - \xi}{2} \mathbf{x}_{un}^K \right), \quad (5.65)$$

dabei bezeichnet  $N_K$  die in natürlichen Koordinaten  $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  definierte Formfunktion eines Knotens K, siehe Bild 5.12.

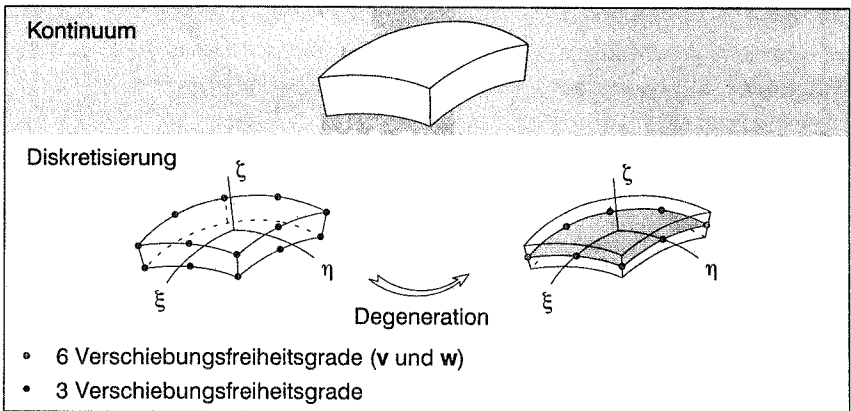


Bild 5.12: Diskretisierung mit einfacher Schalenkinematik

Unter Zuhilfenahme des Grundgedankens des Degenerationsprinzips, nämlich der Direktor muß vor und während der Deformation gerade bleiben, kann mit den Abkürzungen

$$\mathbf{r}_K = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{ob}^K + \mathbf{x}_{un}^K), \quad \mathbf{a}_3^K = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{ob}^K - \mathbf{x}_{un}^K) \quad \text{mit} \quad |\mathbf{a}_3^K| = \frac{h_K}{2} \quad (5.66)$$

das Koordinatenfeld  $\mathbf{x}$  aus Gleichung (5.65) so umgeschrieben werden, daß eine flächenhafte Beschreibung des Kontinuums erfolgen kann.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \approx \mathbf{x}_h &= \underbrace{\sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{r}_K}_{\mathbf{r}_h} + \theta^3 \underbrace{\sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{a}_3^K}_{\theta^3 \mathbf{a}_{3,h}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Wenn dieselbe Vorgehensweise nun auf die Geometrie  $\bar{\mathbf{x}}$  der Momentankonfiguration angewendet wird, so resultiert die Approximation des in den Variationsgleichungen vorkommenden, unabhängigen Verschiebungsfeldes.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h &= \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{v}_K + \theta^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) (\bar{\mathbf{a}}_3^K - \mathbf{a}_3^K) \\ &= \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{v}_K + \theta^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{w}_K \end{aligned} \quad (5.68)$$

Die Verschiebungen  $\mathbf{v}_h$  und  $\mathbf{w}_h$  werden dabei bezüglich des globalen, orthonormalen Koordinatensystems  $\mathbf{i}_i$  interpoliert. Diese Vorgehensweise steht im Gegensatz zur Diskretisierung von Formulierungen, die von einer Schalentheorie ausgehen, da dort die unbekannt Funktionen auf die lokale, kovariante Basis  $\mathbf{a}_i$  bezogen werden, siehe Bařar, Krätzig (1985).

Die zur Berechnung der Verzerrungsgleichungen (5.8) benötigten Vektoren lassen sich mit Hilfe der Approximationen der Ortsvektoren der Schalenmittelfläche und der Schalendirektoren leicht berechnen.

$$\mathbf{a}_\alpha \approx \mathbf{a}_{\alpha,h} = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha} \mathbf{r}_K, \quad \mathbf{a}_3 \approx \mathbf{a}_{3,h} = \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{a}_3^K, \quad \mathbf{a}_{3,\alpha} \approx \mathbf{a}_{3,\alpha,h} = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha} \mathbf{a}_3^K \quad (5.69)$$

Auf den Fußzeiger  $h$  für approximierte Funktionen wird im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Mit der gewählten Diskretisierung kann aus den virtuellen Arbeitsanteilen (5.54) und (5.63) ein in der Regel nichtlineares Gleichungssystem in den unbekannt Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  hergeleitet werden.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_A (\alpha_{ij} n^{ij} + \beta'_{kl} m^{kl}) dA = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}); \quad (k, l) \neq (3, 3) \quad (5.70)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{F}_{\text{ext}}) = \delta \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{P}) \quad (5.71)$$

Fundamentallemma der Variationsrechnung  $\rightarrow \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$

Die mit (...) gekennzeichneten Größen stellen die Ableitung nach den unbekannt Knotenparametern  $\mathbf{d}$  dar,  $\delta(\dots) = (\dots)_{,\mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} = (\dots)' \cdot \delta \mathbf{d}$ . Der Knotenvektor  $\mathbf{d}$  ist dabei wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{d}_1^T \cdot \cdot \cdot \mathbf{d}_K^T \cdot \cdot \cdot \mathbf{d}_{NN}^T] \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_K^T = [\mathbf{v}_K^T \quad \mathbf{w}_K^T] \quad (5.72)$$

Im Sinne eines GALERKIN–BUBNOV Verfahrens gelten obige Finite Element Approximationen auch für die entsprechenden variationellen Beziehungen.

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \delta \mathbf{v}_{,\alpha} = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{v}_K \quad (5.73)$$

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \delta \mathbf{w} = \sum_{K=1}^{NN} N_K \delta \mathbf{w}_K \quad \rightarrow \quad \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = \delta \mathbf{w}_{,\alpha} = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{w}_K \quad (5.74)$$

Aus den Variationen der Verzerrungskomponenten  $\alpha_{ij}$  und  $\beta_{ij}$  können deren Ableitungen nach den unbekanntenen Knotenparametern berechnet werden:

– Membranverzerrungen:

$$\delta \alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) = \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha N_{K,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta N_{K,\alpha}) \cdot \delta \mathbf{v}_K = \alpha'_{\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (5.75)$$

– Schubverzerrungen:

$$\delta \alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) = \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_3 N_{K,\alpha} \cdot \delta \mathbf{v}_K + \bar{\mathbf{a}}_\alpha N_K \cdot \delta \mathbf{w}_K) = \alpha'_{\alpha 3} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (5.76)$$

$$\delta \beta_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}) = \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_3 N_{K,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} N_K) \cdot \delta \mathbf{w}_K = \beta'_{\alpha 3} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (5.77)$$

– Dickenänderung:

$$\delta \alpha_{33} = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \sum_{K=1}^{NN} (\bar{\mathbf{a}}_3 N_K \cdot \delta \mathbf{w}_K) = \alpha'_{33} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (5.78)$$

– Biegung:

$$\delta \beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta}) \quad (5.79)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} N_{K,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} N_{K,\alpha}) \cdot \delta \mathbf{v}_K + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\beta N_{K,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha N_{K,\beta}) \cdot \delta \mathbf{w}_K \right] = \beta'_{\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{d}$$

Dabei definieren die Größen  $\alpha'_{ij}$ ,  $\beta'_{\alpha\beta}$  und  $\beta'_{\alpha 3}$  den **B**-Operator. Stellvertretend für die insgesamt 11 Ableitungen der Verzerrungskomponenten wird für  $\alpha'_{11}$  eine ausführliche Darstellung angegeben.

$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{v}_{NN}$	$\mathbf{w}_{NN}$
$(\bar{\mathbf{a}}_1)_1 N_{1,1}$	$(\bar{\mathbf{a}}_1)_2 N_{1,1}$	$(\bar{\mathbf{a}}_1)_3 N_{1,1}$	$0 \ 0 \ 0 \ \dots$
$(\bar{\mathbf{a}}_1)_1 N_{NN,1}$	$(\bar{\mathbf{a}}_1)_2 N_{NN,1}$	$(\bar{\mathbf{a}}_1)_3 N_{NN,1}$	$0 \ 0 \ 0$
<p>↑↑ Komponente erster kovarianter Basisvektor</p>			

### Bemerkungen:

- Besonders zu erwähnen ist die Tatsache, daß die Variationen der Verzerrungskomponenten (5.11) einer linearen Theorie die gleiche Struktur aufweisen wie die obigen nichtlinearen Komponenten (5.75) – (5.79). Jedoch müssen sich die nicht variierten Größen auf die Referenzkonfiguration beziehen. Somit kann in der entsprechenden Computerimplementierung beider Theorien derselbe "B-Operator" zur Anwendung kommen, wenn die Eingangsdaten  $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}$  durch  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{3,\alpha}$  ersetzt werden.
- Trotz der zugelassenen Längenänderung des Direktors basiert diese 6-Parametertheorie auf dem Degenerationskonzept, da weiterhin
  - die Geradlinigkeitshypothese der Schalennormale erfüllt ist
  - das 3-dimensionale Kontinuum diskretisiert wird
  - die typischen Interpolationen der Verschiebungen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  bezüglich der globalen, kanonischen Basis  $\mathbf{I}_i$  angewendet werden.

### 5.7.2 Lasteinleitung bei einer 3-dimensionalen Schalentheorie

Die in Kapitel 5.6.2 hergeleitete virtuelle, äußere Arbeit muß in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet werden, um in der diskretisierten Gleichgewichtsaussage erfaßt werden zu können. Mit Hilfe der Diskretisierung (5.68) der unbekanntenen Funktionen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  lassen sich die Knotenkräfte über die Formfunktionen bestimmen.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= - \int_A (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{w}) \, dA = - \int_A \left[ \sum_{K=1}^{NN} (N_K \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v}_K + N_K \mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{w}_K) \right] dA \quad (5.80) \\ &= - \sum_{K=1}^{NN} (\mathbf{F}_p^K \cdot \delta \mathbf{v}_K + \mathbf{F}_c^K \cdot \delta \mathbf{w}_K) = - \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{P} \quad (5.81) \end{aligned}$$

Die den Knotenverschiebungen der Schalenmittelfläche zugeordneten Kraftkomponenten  $\mathbf{F}_p^K$  sowie die entsprechende Knotenbelastung  $\mathbf{F}_c^K$  des Differenzvektors

$$\mathbf{F}_p^K = \int_A N_K \mathbf{p} \, dA \quad , \quad \mathbf{F}_c^K = \int_A N_K \mathbf{c} \, dA \quad (5.82)$$

definieren den Elementlastvektor:

$$\mathbf{P} = [(\mathbf{F}_p^1)^T \ (\mathbf{F}_c^1)^T \ \dots \ (\mathbf{F}_p^K)^T \ (\mathbf{F}_c^K)^T \ \dots \ (\mathbf{F}_p^{NN})^T \ (\mathbf{F}_c^{NN})^T]^T \quad (5.83)$$

Im weiteren sollen nun die Möglichkeiten der Lasteinleitung einer 5- und 6-Parameter Theorie diskutiert werden, wobei die Anteile der Volumenbelastung unbeachtet bleiben. Dies stellt jedoch keine Einschränkung der gezeigten Vorgehensweise dar, sondern dient ausschließlich der Übersichtlichkeit.

Zur Erläuterung der Belastungsmöglichkeiten wird repräsentativ für eine veränderliche Last die Flächenlastordinate an einem Knoten (keine äquivalenten Knotenkräfte) be-

trachtet. Dabei werden zum besseren Verständnis die unterschiedlichen Lastangriffspunkte am nichtdegenerierten Kontinuumsselement (siehe Bild 5.12 mitte) erläutert. Welche Schalenelemente (3-, 4-, 6-, 8-, 9- oder 16-knotige Elemente) zu dieser Untersuchung herangezogen werden, ist völlig ohne Bedeutung. Wichtig ist nur, daß die Geradlinigkeitshypothese (also 2 Knoten über die Dicke) ihre Gültigkeit behält.

Die auf die Schalenmittelfläche bezogene Belastungsdichte  $\mathbf{p}$  stellt eine Funktion der Flächenkoordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  dar, also eine veränderliche Flächenlast (analog  $\mathbf{c}$ ).

$$\mathbf{p}(\theta^\alpha) = \mathbf{t}^{ob}(\theta^\alpha)\mu^{ob}(\theta^\alpha) + \mathbf{t}^{un}(\theta^\alpha)\mu^{un}(\theta^\alpha) \quad (5.84)$$

$$\mathbf{c}(\theta^\alpha) = \mathbf{t}^{ob}(\theta^\alpha)\mu^{ob}(\theta^\alpha) - \mathbf{t}^{un}(\theta^\alpha)\mu^{un}(\theta^\alpha) \quad (5.85)$$

Betrachtet man die linke Abbildung in Bild 5.13, so wird die Struktur mit einem Kräftepaar in 1-Richtung belastet. Die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^{ob}$  und  $\mathbf{t}^{un}$  haben somit nur in der ersten Komponente einen von null verschiedenen Eintrag, der mit einem kleinen "x" gekennzeichnet ist. Für sie gelten folgende Beziehungen:

$$\mathbf{t}^{ob} = -\mathbf{t}^{un} ; \mu^{ob} = \mu^{un} \longrightarrow \mathbf{p} = (0, 0, 0)^T ; \mathbf{c} = (x, 0, 0)^T \quad (5.86)$$

Ist eine der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen, so würde zusätzlich eine Belastung der Schalenmittelfläche ( $\mathbf{p}$ -Vektor) in 1-Richtung entstehen.

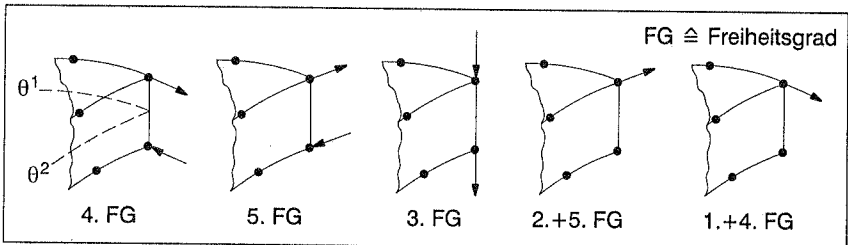


Bild 5.13: Möglichkeiten der Lasteinleitung der 5-Parameter Theorie

Die zweite Abbildung beschreibt das Analogon in 2-Richtung und somit eine Belastung des 5. Freiheitsgrades. Bei der dritten Möglichkeit (antimetrische Belastung) müssen beide Vektoren übereinstimmen  $\mathbf{t}^{ob} = \mathbf{t}^{un}$ , da sonst eine Belastung des 6. Freiheitsgrades entstehen würde, der bei der 5-Parameter Theorie nicht vorhanden ist.

$$\mathbf{t}^{ob} = \mathbf{t}^{un} ; \mu^{ob} = \mu^{un} \longrightarrow \mathbf{p} = (0, 0, x)^T ; \mathbf{c} = (0, 0, 0)^T \quad (5.87)$$

Die beiden letzten Abbildungen beschreiben eine Last an der Oberfläche der Schale in 1- und 2-Richtung. Mit Hilfe der Beziehungen  $\mathbf{t}^{un} = \mathbf{0}$  und  $\mu^{un} = 0$  ergeben sich Belastungen des 2. und 5. bzw. des 1. und 4. Freiheitsgrades.

Alle Belastungsmöglichkeiten in Bild 5.13 können selbstverständlich untereinander kombiniert und auch mit umgekehrten Vorzeichen angesetzt werden.



gen Vektorfunktion  $G(\mathbf{d})$  an der Stelle einer bereits gegebenen Näherungslösung  $\bar{\mathbf{d}}$  erhalten.

$$G(\mathbf{d}) = G(\bar{\mathbf{d}}) + DG(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} + R(\Delta \mathbf{d}) \quad (5.90)$$

wobei das Restglied  $R$  die Eigenschaft hat, schneller gegen 0 zu konvergieren als die ersten Reihenglieder:

$$\lim_{\Delta \mathbf{d} \rightarrow 0} \frac{R(\Delta \mathbf{d})}{|\Delta \mathbf{d}|} = 0 \quad (5.91)$$

Als Linearisierung der Funktion  $G$  an der Stelle  $\bar{\mathbf{d}}$  bezeichnet man den linearen Anteil der Gleichung (5.90).

$$G(\mathbf{d}) = G(\bar{\mathbf{d}}) + DG(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (5.92)$$

Setzt man für die Entwicklungsstelle  $\bar{\mathbf{d}}$  den Nullpunkt ein, so ergibt sich die linearisierte Funktion  $G$  in der Ausgangskonfiguration und damit die entsprechende lineare Theorie. Diese Zusammenhänge finden sich in Bild 5.15 für den eindimensionalen Fall wieder.

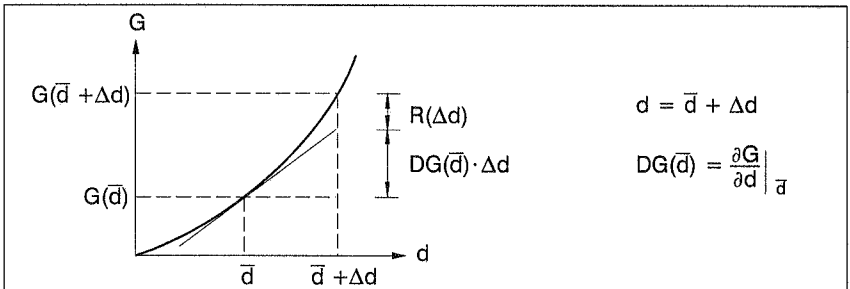


Bild 5.15: Geometrische Interpretation der Taylorreihenentwicklung

Die Ableitung der skalaren Funktion  $G$  an der Stelle  $\bar{\mathbf{d}}$  in Richtung von  $\Delta \mathbf{d}$  liefert die für die weitere Betrachtung wichtige Richtungsableitung oder Gâteaux-Ableitung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} [G(\bar{\mathbf{d}} + \varepsilon \Delta \mathbf{d})]_{\varepsilon=0} &= \left[ \frac{\partial G(\bar{\mathbf{d}} + \varepsilon \Delta \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{d}} + \varepsilon \Delta \mathbf{d})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial G(\bar{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} = DG(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Die Richtungsableitungen vektorieller und tensorieller Größen lassen sich in analoger Weise formulieren. Dieses Prinzip wird nun auf die Arbeitsgleichung (4.68) und (4.69) des 3-dimensionalen Kontinuums angewandt.

Unter der Voraussetzung einer verschiebungsunabhängigen, richtungstreuen Belastung ist die zur Linearisierung erforderliche Richtungsableitung von  $\delta W$  auf die virtuelle innere Arbeit  $\delta W_{\text{int}}$  beschränkt  $\rightarrow D\delta W(\bar{\mathbf{d}}) = D\delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}})$ .

Die Linearisierung der schwachen Formulierung kann somit in geschlossener Form angegeben werden.

$$D\delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}}) \cdot \Delta \mathbf{d} = -\delta W(\bar{\mathbf{d}}) = -(\delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}(\bar{\mathbf{d}})) \quad (5.94)$$

Durch die in den Gleichungen (5.70) und (5.71) eingeführten Bezeichnungen

$$D\delta W_{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot D\mathbf{F}_{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{F}'_{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (5.95)$$

$$= \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial^2 W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}^2} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}) \quad (5.96)$$

läßt sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix in einfacher und kompakter Form darstellen.

$$D\delta W_{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_A (\alpha_{ij} n^{ij} + \beta'_{kl} m^{kl} + \alpha''_{ij} n^{ij} + \beta''_{kl} m^{kl}) dA \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{F}'_{\text{int}} &= \underbrace{\int_A (\alpha_{ij} n^{ij} + \beta'_{kl} m^{kl}) dA}_{\mathbf{K}_{E+U}} + \underbrace{\int_A (\alpha''_{ij} n^{ij} + \beta''_{kl} m^{kl}) dA}_{\mathbf{K}_G} ; (k, l) \neq (3, 3) \quad (5.98) \\ &= \mathbf{K}_{E+U} + \mathbf{K}_G = \mathbf{K}_T \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  beinhaltet den gewöhnlichen linearen, elastischen Anteil  $\mathbf{K}_E$  inklusive einer Anfangsverschiebungsmatrix  $\mathbf{K}_U$  und den geometrischen Anteil  $\mathbf{K}_G$ .

Durch Einsetzen der in Kapitel 5.5 definierten Schnittgrößen in den Steifigkeitsanteil  $\mathbf{K}_{E+U}$  läßt sich die bereits öfter angesprochene Kopplung der unterschiedlichen Deformationsmodes deutlich erkennen.

$$\mathbf{K}_{E+U} = \int_A \left( \alpha_{ij} D_0^{ijkl} \alpha'_{kl} + \beta'_{kl} D_2^{klmn} \beta'_{mn} + \underbrace{\alpha_{ij} D_1^{ijkl} \beta'_{kl} + \beta'_{kl} D_1^{klmn} \alpha'_{mn}}_{\text{Koppelsteifigkeit}} \right) dA \quad (5.99)$$

Die zur Aufstellung der geometrischen Steifigkeitsmatrix benötigten zweiten Ableitungen der Verzerrungskomponenten nach den Knotenparametern können über die Ableitungen der im letzten Kapitel berechneten Variationen (5.75) – (5.79) der Komponenten  $\alpha_{ij}$  und  $\beta_{ij}$  berechnet werden.

$$D\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = D\delta \bar{\mathbf{a}}_3 = D\delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = \mathbf{0} \quad (5.100)$$

– Membranverzerrungen:

$$\begin{aligned} D\delta \alpha_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{d} &= \frac{1}{2} (\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha D \bar{\mathbf{a}}_\beta + \delta \bar{\mathbf{a}}_\beta D \bar{\mathbf{a}}_\alpha) \Delta \mathbf{d} \quad (5.101) \\ &= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}_K (N_{K,\alpha} N_{M,\beta} + N_{K,\beta} N_{M,\alpha}) \mathbf{I} \Delta \mathbf{v}_M = \delta \mathbf{d} \alpha''_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{d} \end{aligned}$$



- Schubverzerrungen:

$$D\delta\alpha_{\alpha 3}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}D\bar{\mathbf{a}}_3 + \delta\bar{\mathbf{a}}_3D\bar{\mathbf{a}}_{\alpha})\Delta\mathbf{d} \quad (5.102)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta\mathbf{v}_K N_{K,\alpha} N_{M,3} \Delta\mathbf{w}_M + \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta\mathbf{w}_K N_{K,3} N_{M,\alpha} \Delta\mathbf{v}_M = \delta\mathbf{d} \alpha''_{\alpha 3} \Delta\mathbf{d}$$

$$D\delta\beta_{\alpha 3}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{\mathbf{a}}_3D\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} + \delta\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}D\bar{\mathbf{a}}_3)\Delta\mathbf{d} \quad (5.103)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta\mathbf{w}_K (N_{K,3} N_{M,\alpha} + N_{K,\alpha} N_{M,3}) \mathbf{I} \Delta\mathbf{w}_M = \delta\mathbf{d} \beta''_{\alpha 3} \Delta\mathbf{d}$$

- Dickenänderung:

$$D\delta\alpha_{33}\Delta\mathbf{d} = \delta\bar{\mathbf{a}}_3D\bar{\mathbf{a}}_3\Delta\mathbf{d} = \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta\mathbf{w}_K N_{K,3} N_{M,3} \mathbf{I} \Delta\mathbf{w}_M = \delta\mathbf{d} \alpha''_{33} \Delta\mathbf{d} \quad (5.104)$$

- Biegung:

$$D\delta\beta_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}D\bar{\mathbf{a}}_{\beta} + \delta\bar{\mathbf{a}}_{\beta}D\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} + \delta\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta}D\bar{\mathbf{a}}_{\alpha} + \delta\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}D\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta})\Delta\mathbf{d} \quad (5.105)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta\mathbf{v}_K (N_{K,\alpha} N_{M,\beta} + N_{K,\beta} N_{M,\alpha}) \Delta\mathbf{w}_M$$

$$+ \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta\mathbf{w}_K (N_{K,\beta} N_{M,\alpha} + N_{K,\alpha} N_{M,\beta}) \Delta\mathbf{v}_M = \delta\mathbf{d} \beta''_{\alpha\beta} \Delta\mathbf{d}$$

## 5.8 "Schwäche" der Formulierung

Die Erweiterung konventioneller Schalentheorien auf eine Formulierung mit 6 Freiheitsgraden pro Knoten, die einen 3-dimensionalen Verzerrungs- und Spannungszustand beschreiben kann, führt dazu, daß der Energieanteil der Normalspannung in Dickenrichtung über den Einfluß der Querkontraktion das Ergebnis verfälscht. Dieser Versteifungseffekt soll nun anhand eines einfachen, isotropen Beispiels erläutert und auf Composites und Laminates mit anisotropem Stoffgesetz übertragen werden.

### 5.8.1 Versteifungseffekt bei isotropem Materialverhalten

In Bild 5.16 wird ein Kragarm mit rechteckigem Querschnitt und linear elastischem, isotropem Material an den Enden mit einem Moment  $M$  belastet.

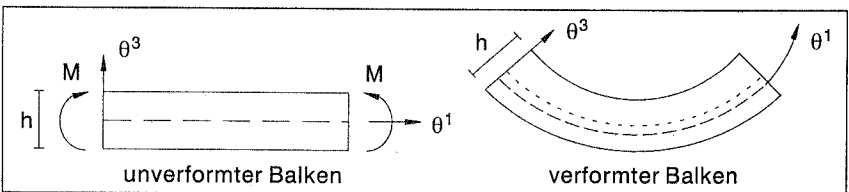
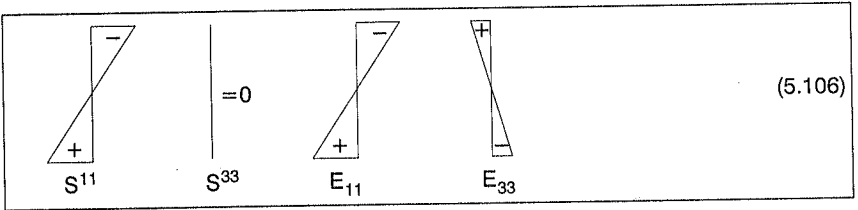


Bild 5.16: Eingespannter Balken unter reiner Biegung

Die entsprechenden Verläufe über die Dicke  $\theta^3$  der Verzerrungen und Spannungen können nach der Elastizitätstheorie unter Voraussetzung des HOOKEschen Gesetzes qualitativ berechnet werden.



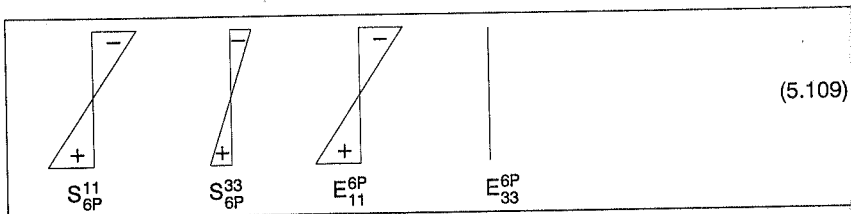
Die dazu gehörenden konstitutiven Gleichungen lauten somit:

$$E_{11} = \frac{1}{E} (S^{11} - \nu S^{33}) = \frac{S^{11}}{E} \quad (5.107)$$

$$E_{33} = \frac{1}{E} (S^{33} - \nu S^{11}) = -\frac{\nu}{E} S^{11} = -\nu E_{11} \quad (5.108)$$

Das aufgebrachte Moment ruft in der oberen Balkenhälfte Druckspannungen und in der unteren Hälfte Zugspannungen hervor, so daß die Spannung  $S^{11}$  einen linearen Verlauf über die Dicke besitzt. Die Normalspannung in Dickenrichtung hingegen muß aufgrund des Gleichgewichts identisch null sein. In der oberen, sich verkürzenden Hälfte des Balkens treten dabei über den Einfluß der Querkontraktion positive Dehnungen in Dickenrichtung auf. Die obere Balkenhälfte wird also dicker. Konsequenterweise verhält sich die untere Hälfte genau umgekehrt, sie wird dünner und länger. Dabei verschiebt sich die geometrische Mittellinie (---) gegenüber der materiellen Mittelfaser (---) nach oben, siehe Bild 5.16.

Da die 6-Parameter Theorie aufgrund des in der Koordinate  $\theta^3$  linear verlaufenden Verschiebungsansatzes auf konstante Dickenänderungen beschränkt ist, die Dicke des gesamten Balkens jedoch konstant bleibt, muß die Dehnung  $E_{33}^{6P}$  identisch null sein. Dabei werden mit dem Index "6P" die entsprechenden Verläufe der 6-Parameter Theorie gekennzeichnet.



Die Dickenänderung  $E_{33}^{6P}$  hat zur Folge, daß lineare Normalspannungen  $S_{6P}^{33}$  in Dickenrichtung entstehen, die für diesen Versteifungseffekt verantwortlich sind.

$$E_{33}^{6P} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{6P}^{33} = \nu S_{6P}^{11} \quad (5.110)$$

$$E_{11}^{6P} = \frac{1 - \nu^2}{E} S_{6P}^{11} \quad (5.111)$$

Mit Hilfe des Gleichgewichts in  $\theta^1$  – Richtung, nämlich  $S^{11} = S_{6P}^{11}$ , können die resultierenden Dehnungen miteinander verglichen werden. Unter dem Lastfall der reinen Biegung ergibt sich somit ein relativer Fehler der 6–Parameter Theorie der Ordnung  $\nu^2$ .

$$\frac{E_{11} - E_{11}^{6P}}{E_{11}} = \frac{\frac{S^{11}}{E} - \frac{(1-\nu^2)S_{6P}^{11}}{E}}{\frac{S^{11}}{E}} = \frac{1 - (1 - \nu^2)}{1} = \nu^2 \quad (5.112)$$

### Bemerkungen:

- Der Versteifungseffekt tritt genau dann auf, wenn Belastungen teilweise oder vollständig über Biegung abgetragen werden.
- Obwohl dünne Strukturen Beanspruchungen eher über Biegung abtragen als dickere Systeme, macht sich dieser Effekt auch bei kleineren Schlankheiten deutlich bemerkbar (siehe Beispiel in Bild 5.17).
- Alleinige Ursache dieser künstlichen Zwangsspannung  $S_{6P}^{33}$  ist der lineare Verschiebungsansatz in Dickenrichtung der Komponente  $u_3$ , der im Falle der reinen Biegung zu einer Dickenänderung identisch null führt. Diese Tatsache repräsentiert das Analogon zu Volumenelementen mit 2 Diskretisierungsknoten über die Dicke, siehe auch Bild 5.12. Da die  $\theta^3$ –Achse die für dieses Blockieren verantwortliche und ausgezeichnete Richtung repräsentiert, soll der Versteifungseffekt auch als **Dickenlocking** bezeichnet werden.
- Das Blockieren der 6–Parameter Theorie steht in keinem Zusammenhang zum verwendeten Differenzvektor  $\mathbf{w}$  zur Aktualisierung des Direktors. Eine in Kapitel 5.2 angesprochene Umparametrisierung in die beiden Komponenten  $s_1$  und  $s_2$  des Rotationsvektors  $\mathbf{s}$  sowie den Dickenänderungsparameter  $\chi$  verbessert die Situation in keiner Weise, siehe Betsch et al. (1995).
- Im Rahmen dieser Arbeit soll unter einer Änderung der Ordnung des Verschiebungsansatzes in der Koordinate  $\theta^3$  auch eine Änderung der entsprechenden **Schalentheorie** verstanden werden. Durch die neu hinzukommenden Freiheitsgrade wäre hierzu eine komplett andere Computerimplementierung nötig (andere Metrik, Verzerrungen und Spannungen, neuer  $\mathbf{B}$ –Operator usw.). Jedoch die Wahl des **Schalenelementes** (3, 4, 6, 8, 9 oder 16 Elementknoten) zieht abgesehen von anderen Formfunktionen keine Änderungen des Programms nach sich.

Mit Hilfe dieser "Definition" läßt sich das oben erläuterte Versteifen eindeutig der verwendeten Schalentheorie zuschreiben, da ausgehend vom Degenerationskonzept (siehe Bild 5.12) 2 Knoten über die Dicke für den linearen Verschiebungsverlauf sorgen. Weder eine  $h$ –Adaption noch eine  $p$ –Adaption in den Elementkoordinaten  $\xi, \eta$  (also ein anderes Schalenelement) würde diesen Defekt beheben. Dies kann leicht durch ein

einfaches Beispiel belegt werden. In Bild 5.17 ist ein eingespannter Balken dargestellt, der am rechten Ende mit einer Linienlast versehen ist.

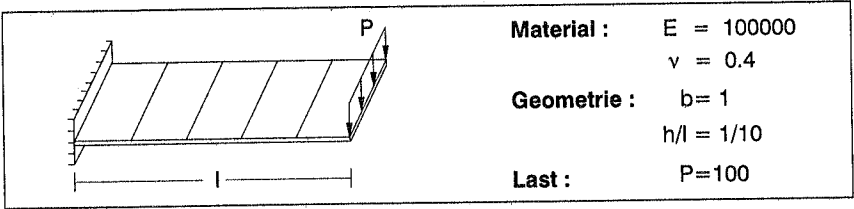


Bild 5.17: Eingespannter Balken

Die Struktur wurde mit quadratischen Verschiebungselementen einer linearen und nichtlinearen Berechnung unterzogen. Die entsprechenden Ergebnisse sind zusammen mit einer 3D – Vergleichslösung in Bild 5.18 dargestellt. Die 3D – Lösung ist eine auf dem "Enhanced Assumed Strain Konzept" basierende hybrid gemischte Formulierung für Volumenelemente, siehe Kapitel 6 und Roehl (1994).

		linear	nichtlinear
$h/l = 1/10$	5x1 8–knotige Elemente	3.281 (18.6%)	2.978 (15.6%)
	3D	4.030	3.530

Bild 5.18: Durchsenkung des Lastangriffspunktes

Das Versteifen der 6–Parameter Theorie ist in beiden Fällen deutlich sichtbar. In Bild 5.19 wurde für lineare Analysen eine Konvergenzstudie durchgeführt, wobei der relative Fehler über der Anzahl der Elemente in Balkenlängsrichtung aufgetragen ist.

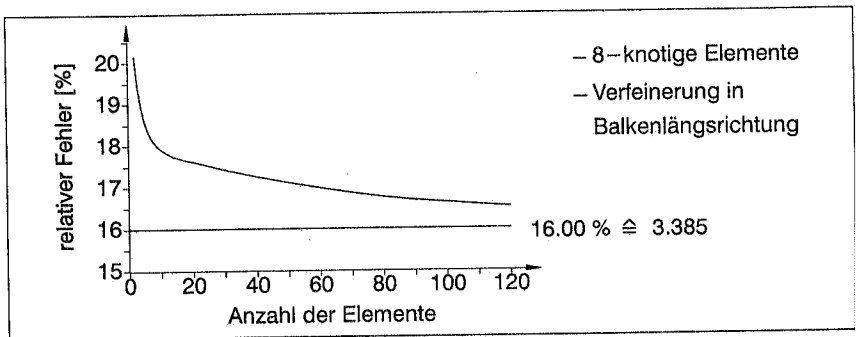


Bild 5.19: Konvergenzstudie

Bei zunehmender Verfeinerung nähert sich der Fehler der in Gleichung (5.112) hergeleiteten Größenordnung  $\sqrt{2} = 16\%$  an. Das exakte Ergebnis wird jedoch selbst bei eine

Unterteilung in 200 Elemente (1003 Knoten) nicht erreicht. Der Wert der Durchsenkung beträgt nur 3.373, was einem relativen Fehler von 16.30 % entspricht.

Die zu steifen Resultate aufgrund der Normalspannung (Zwangsspannung) in Dickenrichtung können bei der 6-Parameter Schalentheorie also weder mit einer Netzverfeinerung noch durch die Wahl eines anderen Schalenelementes behoben werden. Vielmehr liegt die Ursache dieses Versteifungseffektes (isotrop wie anisotrop) in der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte (2 Knoten über die Dicke) versteckt. Diese Feststellung behält auch bei anisotropen Stoffgesetzen ihre Gültigkeit.

### 5.8.2 Versteifungseffekt bei anisotropem Materialverhalten

Das in Bild 5.16 erläuterte Beispiel wird nun unter der Voraussetzung der linearen Elastizität und des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes für homogene, anisotrope Kontinua analysiert. Da die qualitativen Verläufe der Verzerrungen und Spannungen über die Dicke denen des vorigen Kapitels entsprechen, sollen in diesem Abschnitt ausschließlich die formalen Zusammenhänge dargestellt werden. Mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen der Elastizitätstheorie

$$E_{11} = \frac{1}{E_1} (S^{11} - \nu_{13} S^{33}) = \frac{S^{11}}{E_1} \quad (5.113)$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_3} (S^{33} - \nu_{31} S^{11}) = -\frac{\nu_{31}}{E_3} S^{11} = -\nu_{31} \frac{E_1}{E_3} E_{11} = -\nu_{13} E_{11} \quad (5.114)$$

läßt sich auch bei anisotropen Stoffgesetzen die aus der 6-Parameter Theorie resultierende künstliche Zwangsspannung  $S_{6P}^{33}$  in Dickenrichtung berechnen.

$$E_{33}^{6P} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{6P}^{33} = \nu_{31} S_{6P}^{11} \quad (5.115)$$

$$E_{11}^{6P} = \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1} S_{6P}^{11} \quad (5.116)$$

Der sich daraus ergebende Fehler wird (wie bei isotropen Kontinua) ausschließlich durch die Materialkennwerte des anisotropen Werkstoffes bestimmt.

$$\frac{E_{11} - E_{11}^{6P}}{E_{11}} = \frac{\frac{S^{11}}{E_1} - \frac{(1 - \nu_{13} \nu_{31}) S_{6P}^{11}}{E_1}}{\frac{S^{11}}{E_1}} = \frac{1 - (1 - \nu_{13} \nu_{31})}{1} = \nu_{13} \nu_{31} = \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \quad (5.117)$$

Im Gegensatz zur Gleichung (5.112), wo der Fehler nur von der Querkontraktionszahl abhängt, kommt hier eine weitere Komponente hinzu. Neben der POISSONzahl  $\nu_{13}$  spielt auch das Verhältnis der Elastizitätsmoduli  $E_3 : E_1$ , also E-Modul in Dickenrichtung zum E-Modul in Faserrichtung eine wichtige Rolle. Je größer der Unterschied beider Materialkennwerte ist, desto weniger macht sich der Versteifungseffekt bemerkbar, siehe u.a. Beispiel 8.6 und 8.7. Der Fehler schlägt somit am stärksten zu Buche, wenn der Quotient  $E_3 : E_1$  identisch eins ist, also bei isotropem Materialverhalten.

Eine entsprechende Momentenbelastung des Kragarmes um die  $\theta^1$ -Achse würde einen Fehler der Größenordnung

$$\frac{E_{22} - E_{22}^{6P}}{E_{22}} = \nu_{23}\nu_{32} = \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} \quad (5.118)$$

hervorrufen. Da bei anisotropen Materialien weder die 2- noch die 3-Richtung eine ausgezeichnete Richtung in bezug auf die Elastizitätskennwerte repräsentiert, ist das Verhältnis  $E_3 : E_2$  meistens gleich eins, so daß dieser Quotient für die Intensität des Versteifens ohne Bedeutung ist.

**Bemerkung:**

- Es ist leicht festzustellen, daß die Gleichungen des vorangegangenen Kapitels 5.8.1 als Sonderfall in den Beziehungen mit anisotropem Materialverhalten enthalten sind, so daß dortige Bemerkungen auch hier ihre Gültigkeit bewahren.

Die durch den Versteifungseffekt notwendigen Verbesserungen dieser 6-Parameter Schalentheorie sollen im nächsten Abschnitt besprochen werden.

### 5.9 Verbesserungsvorschläge

Das im vorigen Kapitel beschriebene, nicht ausbalancierte Verhältnis zwischen dem resultierenden linearen Verlauf (bezüglich der Dickenkoordinate) der Normalspannung  $S^{33}$  und der konstanten Dehnung  $E_{33} = \alpha_{33}$  führt bei der 6-Parameter Theorie zum Dickenlocking. Um diesen Defekt zu beheben, stehen im wesentlichen zwei Möglichkeiten zur Verfügung.

Zum einen müßte durch eine Kondensation des Stoffgesetzes der Biegeanteil  $S_L^{33}$  zu null gesetzt werden, so daß die Spannung  $S^{33} = S_C^{33}$  nur noch konstante Werte bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$  annehmen kann. Da dieser Weg, der zweifelsohne der herkömmlichen Vorgehensweise entspricht, wiederum auf eine Modifikation der konstitutiven Gleichungen hinausläuft und somit dem Ziel der Verwendung unveränderter Stoffgesetze entgegenwirkt, soll er in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

Die zweite Variante basiert im Gegensatz zur eben beschriebenen Reduktion des Spannungsverlaufes auf einer Erweiterung der Verzerrungskomponenten und im Spezieller der transversalen Normaldehnung  $E_{33} = \alpha_{33}$  auf eine lineare Dickenänderung.

$$E_{33} = \alpha_{33} + \theta^3 \beta_{33} \quad (5.119)$$

Eine Möglichkeit der Realisierung besteht in der Wahl eines quadratischen Ansatzes zu Beschreibung der Schalengeometrie

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + (\theta^3 + \lambda(\theta^3)^2)\bar{\mathbf{a}}_3 \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda(\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R}, \quad (5.120)$$

so daß die entsprechende Verzerrungskomponente  $E_{33}$  eine lineare Funktion in  $\theta^3$  darstellt, siehe Verhoeven (1992), Sansour (1995) für isotrope und Tessler, Saether (1991

für anisotrope Stoffgesetze. Da dieser Ansatz mit der im vorigen Kapitel gegebenen Definition eine andere Schalentheorie zur Folge hat, wird durch den entstehenden 7. Freiheitsgrad  $\lambda$  die Anzahl der unbekanntenen Freiwerte erhöht.

Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch die lineare Dickenänderung direkt über die Verzerrungen eingeführt werden. Die dabei auftretende zusätzliche unabhängige Variable  $\beta_{33}$  wird, wie ursprünglich von Büchter, Ramm (1992b) für isotrope Strukturen vorgeschlagen, über eine hybrid gemischte Formulierung auf Elementebene eingeführt. Diese Vorgehensweise ist mit dem entscheidenden Vorteil versehen, daß die Schalentheorie weiterhin auf 2 Diskretisierungsknoten über die Dicke basiert und somit die Dimension des globalen Lösungsvektors unberührt bleibt.

Eine ausführliche Beschreibung der zur Umsetzung dieser Idee notwendigen Mehrfeldfunktionale, deren Variation, Diskretisierung und Linearisierung erfolgt im nächsten Kapitel.

## 6 Hybrid–gemischte Formulierungen

Auf der Basis einer reinen Verschiebungsformulierung enthalten linear oder quadratisch interpolierte Finite–Elemente bei einer dem Ansatz entsprechenden Integrationsordnung künstliche Versteifungseffekte. Sowohl dieses als "locking" – Phänomen bekannte Problem der  $C^0$ –kontinuierlichen Elemente als auch das im letzten Kapitel erläuterte Blockieren der 6–Parameter Schalentheorie kann die Konvergenz gegen die exakte Lösung stark verschlechtern. Nach einer kurzen Einführung in die unterschiedlichen "locking" – Arten werden zu deren Beseitigung einige in der Literatur bei 5–Parameter Theorien bekannte hybrid–gemischte Finite–Element–Formulierungen vorgestellt und auf die 6–Parameter Theorie übertragen.

### 6.1 Einführung

Die Ursache der Versteifungseffekte des "shear locking" liegt in der Tatsache begründet, daß die Elemente nicht in der Lage sind, reine Biegemodes darzustellen ohne mit Schubverzerrungen durchsetzt zu sein. In analoger Weise sind bei gekrümmten Elementen die konstanten Biegebeanspruchungen mit parasitären Membranverzerrungen gestört ("membrane locking"). Eine intensive Erforschung dieser Probleme für Scheiben–, Platten– und Schalenelemente findet sich in Andelfinger (1991).

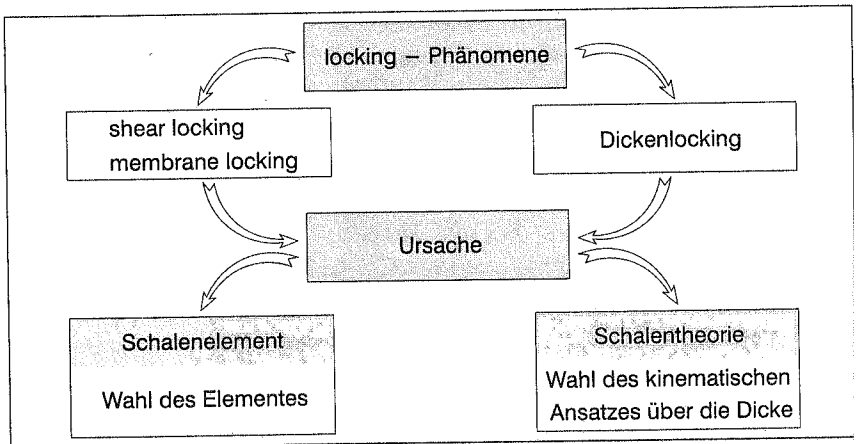


Bild 6.1: Ursachen der Versteifungseffekte

Ein dritter vor allem in der Plastizität oder bei gummiartigen Materialien vorkommende Versteifungseffekt ("volumetric locking") entsteht bei inkompressiblem oder nahezu inkompressiblem Verhalten,  $\nu \approx 0.5$ . Hier sind reine deviatorische Deformationsmode ohne volumetrische Verzerrungen im allgemeinen nicht darstellbar. Ursache dieses Ver



steifungstyps ist die Voraussetzung eines ebenen Verzerrungs- oder eines rotations-symmetrischen Spannungszustandes sowie die Benutzung von Volumen- oder 3-dimensional orientierten Schalenelementen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die eben erläuterten "locking"-Phänomene ausschließlich durch ein nicht ausbalanciertes Verhältnis zwischen der Anzahl der Verschiebungsformen auf der einen Seite und der Anzahl der Verzerrungsformen auf der anderen Seite verursacht werden. Weder die Wahl des kinematischen Ansatzes über die Dicke, also die verwendete Schalentheorie, noch numerische Effekte des Computers sind für diese Probleme verantwortlich, siehe Kapitel 5.8 und Bild 6.1. Sie würden auch bei einem Rechner mit unendlicher Stellenzahl auftreten.

Ein hilfreiches Mittel, die aus dem verwendeten Schalenelement resultierenden, unerwünschten Verzerrungsmoden zu unterbinden, liefert die reduzierte oder selektiv reduzierte Integration (u.a. Zienkiewicz et al. (1971)). Durch dieses Vorgehen handelt man sich allerdings ein anderes Problem ein: Durch die Unterintegration wird nicht genügend Information über das Verformungsverhalten des Elementes erfaßt, so daß Verformungsmuster entstehen, die keinen Energiebeitrag liefern. Im Gegensatz zu den erwünschten, energiefreien Starrkörperbewegungen sind sie schädliche Nullenergieformen ("zero energy modes"). Um dem Rangabfall der Steifigkeitsmatrix entgegenzuwirken, wurde mit der Stabilisierungsmethode diesen Verzerrungsmodes künstliche Steifigkeiten zugeordnet, siehe u.a. Belytschko, Tsay (1983).

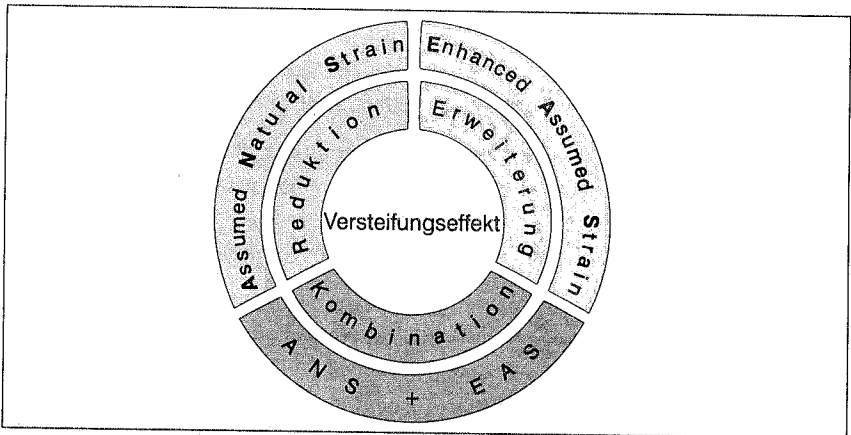


Bild 6.2: Verbesserungen der reinen Verschiebungsmodelle

Um das Versteifen der niedrig interpolierten Elemente zu beseitigen, bieten die hybrid-gemischten Formulierungen einige zuverlässige Möglichkeiten. Bei diesen Methoden werden zusätzlich zu den Verschiebungen Ansätze für die Spannungen oder/und Verzerrungen eingeführt, so daß die entsprechenden Funktionale ihren angenehmen

Extremumscharakter verlieren (Sattelpunktproblem  $\rightarrow$  Lösung kann von oben konvergieren). Im Hinblick auf die "locking" Probleme lassen sie sich in zwei Gruppen aufteilen, siehe Bild 6.2.

Die erste Gruppe beinhaltet die "assumed strain" Methoden, die durch eine Reduktion des kompatiblen Verzerrungsfeldes die parasitären Anteile eliminiert, siehe Hughes, Tezduyar (1981), Dvorkin, Bathe (1984), Bathe, Dvorkin (1985), Parisch (1991). Da diese Vorgehensweise im Endeffekt auf einen veränderten  $\mathbf{B}$ -Operator führt, werden sie teilweise auch  $\bar{\mathbf{B}}$ -Methoden genannt (u.a. Hughes (1987), Oñate et al. (1992)).

Eine weitere Möglichkeit die Versteifungsprobleme zu meistern, bieten die auf dem HELLINGER-REISSNER-Prinzip basierenden "assumed stress" Methoden, bei denen neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  auch Ansätze für die Spannungen  $\mathbf{S}$  eingeführt werden, jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht Gegenstand der Untersuchung sind. Erwähnt seien die Arbeiten von Pian, Sumihara (1984), Simo et al. (1989), Di, Ramm (1994).

Das zur selben Gruppe gehörende 3-Feld-Funktional von HU-WASHIZU mit Ansätzen für die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und die Spannungen  $\mathbf{S}$  enthält als Spezialfall das "enhanced assumed strain" Konzept, das durch Simo, Rifai (1990) für geometrisch lineare Probleme eingeführt wurde. Hier wird im Gegensatz zur "assumed natural strain" Methode das kompatible Verzerrungsfeld um einen Anteil  $\tilde{\mathbf{E}}$  erweitert, um somit ein ausgeglichenes und versteifungsfreies Element zu erhalten.

Beide Kategorien der Verbesserungsvorschläge können natürlich auch, sofern sie sich nicht gegenseitig widersprechen, in Kombination miteinander zur Anwendung kommen, siehe u.a. Andelfinger, Ramm (1993), Betsch et al. (1995).

Da durch die hybrid-gemischten Elemente, im Gegensatz zu echt-gemischten Formulierungen die "einfache" Struktur der Verschiebungsmodelle erhalten bleibt, werden in den nächsten Kapiteln auf der Basis von Mehrfeld HU-WASHIZU-Variationsprinzipien einige dieser Verfahren vorgestellt.

## 6.2 Enhanced assumed strain Konzept

Die Verallgemeinerung der von Wilson et al. (1973), Taylor et al. (1976) entwickelten Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes führt auf das von Simo, Rifai (1990) für die Theorie kleiner Verschiebungen vorgestellte "enhanced assumed strain" Konzept. Da dieses Verfahren auf die üblichen dehnungsgesteuerten Projektionsmethoden der Plastizität ohne Änderungen übertragbar ist, wurde sie von Simo, Armero (1992) auf geometrisch nichtlineare Probleme der Strukturmechanik unter Berücksichtigung großer plastischer Deformationen erweitert, siehe auch Roehl (1994).

### 6.2.1 Variationsformulierung

Innerhalb der Variationsrechnung ist die Basis der erweiterten Dehnungsformulierung das Mehrfeldfunktional von HU–WASHIZU. Durch die Hinzunahme der kinematischen Nebenbedingungen über LAGRANGE–Multiplikatoren (siehe Bufler (1991)) in das Funktional der Verschiebungen (4.68) wird das ursprünglich gebundene Variationsproblem in ein freies Variationsproblem transformiert. In diesem Mehrfeldfunktional sind alle Argumentfunktionen unabhängig voneinander und dürfen frei variiert werden.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_B W_s(\mathbf{E}) \, dV + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \\ & + \int_B \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \, dV + \int_{\partial B_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \, dA \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dabei wurden die LAGRANGE–Multiplikatoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{S}$  als Spannungstensoren 1. bzw. 2. Stufe identifiziert, um ihrer mechanischen Bedeutung gerecht zu werden. Die 1. Variation des Funktionals an der Stelle  $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S})$  in Richtung  $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{E}, \Delta \mathbf{S})$  wird analog zur Gleichung (5.93) durch die Richtungsableitung gewonnen. Um eine unnötig komplizierte Schreibweise zu verhindern, werden im weiteren die Variationen der Funktionen  $\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}$  nicht in die Argumentenliste des Funktionals aufgenommen.

Mit der Variation des rechten CAUCHY–GREEN–Deformationstensors (Gleichung (4.25) und (4.29))

$$\frac{1}{2} \delta \mathbf{C} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T + \delta \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \cdot \delta \mathbf{H}) = \delta \mathbf{E} \quad (6.2)$$

liefert die Stationaritätsbedingung die schwache Form eines nichtlinearen Randwertproblems der Kontinuumsmechanik:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_B \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV + \int_B \delta \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \, dV + \int_B \delta \mathbf{E} : \left( \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} \right) \, dV \\ & - \int_B \mathbf{q} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_u} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial B_u} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \, dA + \underbrace{\int_{\partial B_u} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Über das Fundamentallema der Variationsrechnung resultieren neben der natürlichen Randbedingung der Statik und der erzwungenen Randbedingung der Kinematik auch die EULER–Gleichungen in Form der lokalen Gleichgewichtsbedingung, der kinematischen Bedingung und des Stoffgesetzes.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \varrho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_s(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (6.6)$$

EULER-Differentialgleichungen in B

Im Gegensatz zu der von Simo, Armero (1992) vorgeschlagenen Reparametrisierung des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  soll in dieser Arbeit der GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor in analoger Weise erweitert werden.

$\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{E}^k}_{\text{kompatibel}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}}_{\text{inkompatibel}} \quad \delta \mathbf{E} = \underbrace{\delta \mathbf{E}^k}_{\text{kompatibel}} + \underbrace{\delta \tilde{\mathbf{E}}}_{\text{inkompatibel}} \quad (6.7)$
--

Der zum Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  kompatible GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^k = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}) \quad (6.8)$$

führt mit der in (6.7) angegebenen Reparametrisierung auf das folgende Mehrfeldvariationsprinzip

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) = \int_B W_s(\mathbf{E}^k + \tilde{\mathbf{E}}) \, dV - \int_B \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, dV + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \quad (6.9)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{S}}$  ein unabhängiges Spannungsfeld darstellt und die in Gleichung (6.1) hinzugefügte erzwungene Randbedingung aus Übersichtsgründen nicht berücksichtigt wurde. Mit Hilfe der Gateaux-Ableitung des Funktionals

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) &= \int_B \tilde{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_B \delta \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, dV + \int_B \delta \tilde{\mathbf{E}} : \left( \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{S}} \right) \, dV \\ &\quad - \int_B \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_u} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

lassen sich die gewichteten EULER-Gleichungen in der folgenden Form angeben:

$$\int_B (\operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{S}}) + \varrho \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad (6.11)$$

$$\int_B \delta \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (6.12)$$

$$\int_B \delta \tilde{\mathbf{E}} : \left( -\tilde{\mathbf{S}} + \frac{\partial W_s(\mathbf{E}^k + \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \mathbf{E}} \right) \, dV = 0 \quad (6.13)$$

#### Bemerkungen:

- Für das Kontinuumsproblem ist die lokale EULER-Gleichung  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$  im Körper  $B$  identisch erfüllt, innerhalb der Finite-Element-Approximation gilt jedoch im allgemeinen diese Beziehung nicht mehr,  $\tilde{\mathbf{E}}_h \neq \mathbf{0}$ .

- Sowohl der kompatible als auch der inkompatible Verzerrungstensor beziehen sich auf die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}^i$  im Schalenraum.

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad , \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (6.14)$$

### 6.2.2 Diskretisierte, schwache Formulierung

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und Kompaktheit soll in diesem Kapitel nur die formale Diskretisierung der schwachen Formulierung erklärt werden. Die Darstellung der Vektoren und Matrizen des Verschiebungsmodells entsprechen denen aus Kapitel 5.7.

Neben dem üblichen Übergang der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  vom Kontinuum in den diskreten Zustand  $\mathbf{u}_h$  (siehe Kapitel 5.7)

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h(N^k(\xi), \mathbf{d}_0^k) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi = (\xi, \eta, \zeta) & \text{Elementkoordinaten} \\ \mathbf{d}_0^k = (\mathbf{v}_0^k, \mathbf{w}_0^k) & \text{Elementknotenparameter} \\ N^k & \text{Formfunktionen} \end{array} \right. \quad (6.15)$$

muß nun das zusätzliche Verzerrungsfeld  $\tilde{\mathbf{E}}$  ebenfalls diskretisiert werden. Da die Basisvektoren des Tensors  $\tilde{\mathbf{E}}$  sowohl vom gewählten Finite-Element-Netz abhängig sind, als auch im Element selbst variieren können, macht es wenig Sinn, beim Übergang auf die Vektorschreibweise das Verzerrungsfeld  $\tilde{\mathbf{E}}$  zu diskretisieren. Der gewünschte und geforderte Verlauf von  $\tilde{\mathbf{E}}$  würde durch die Abhängigkeit der Basisvektoren von den Elementkoordinaten  $\xi, \eta$  wieder "verfälscht" werden. Der Grund für diese bei krummlinig, konvektiven Koordinaten auftretende Problematik liegt in der Tatsache begründet, daß die Abhängigkeit eines beliebigen Tensors von den Finite-Element-Koordinaten  $\xi, \eta$  durch seine Komponenten  $u_n$  und die dazugehörige Basis bestimmt wird.

Aus diesen Gründen müssen die erweiterten Verzerrungen auf eine Basis bezogen werden, die den gewünschten Verlauf einer Diskretisierung nicht "verfälscht". Eine solche Basis stellen die kontravarianten Vektoren  $\mathbf{a}_0^i$  an der Schalenmittelfläche im Elementmittelpunkt dar (gekennzeichnet durch den Index "0"). Mit Hilfe einer einfachen Tensorbeziehung wird gefordert, daß die beiden Tensoren  $\tilde{\mathbf{E}}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  gleich sein sollen:

$$\tilde{E}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \tilde{\varepsilon}_{kl} \mathbf{a}_0^k \otimes \mathbf{a}_0^l \quad (6.16)$$

$$\rightarrow \tilde{E}_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{a}_0^k \tilde{\varepsilon}_{kl} \mathbf{a}_0^l \cdot \mathbf{g}_j = \tilde{T}_{ik} \tilde{T}_{jl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \quad \text{mit} \quad \tilde{T}_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{a}_0^k \quad (6.17)$$

Die über die Elementgrenzen diskontinuierlich verlaufende Finite-Element-Approximation des inkompatiblen Anteils

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h = \mathbf{M}_{\xi}(\xi) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e \quad (6.18)$$

ist nun auf eine im Element konstante Basis bezogen und repräsentiert so den geforderten Verlauf.  $\boldsymbol{\alpha}_e \in \mathbb{R}^{n_e}$  stellt dabei die lokalen, konstanten Elementparameter und  $\mathbf{M}_{\xi}(\xi)$  eine Matrix der Dimension  $\mathbb{R}^{n_e} \times \mathbb{R}^{n_e}$  dar, wobei  $n_e$  die Anzahl der zu erweiternden

Verzerrungskomponenten ist.  $\mathbf{M}_{\tilde{\epsilon}}$  besteht aus  $n_{\tilde{\epsilon}}$  unabhängigen Spalten, die die Interpolation des zusätzlichen Verzerrungsfeldes  $\tilde{\epsilon}$  definieren.

**Bemerkung:**

- Entsprechende Finite-Elementansätze im Sinne eines GALERKIN-BUBNOV-Verfahrens gelten auch für die Variationen der Verschiebungen und Verzerrungen.

Die Matrix  $\mathbf{M}_{\tilde{\epsilon}}$  ist jedoch gewissen Einschränkungen unterworfen, um Stabilitäts- und Konsistenzbedingungen zu erfüllen.

1. Bedingung: Die Ansätze des Raumes  $\tilde{\mathcal{E}}_h$  des zusätzlichen Feldes dürfen nicht im Raum  $\mathcal{E}_h$  der kompatiblen Ansätze enthalten sein.

$$\mathcal{E}_h \cap \tilde{\mathcal{E}}_h = \emptyset \quad (6.19)$$

Diese Bedingung sichert die Stabilität der erweiterten Verzerrungsapproximation, da sonst ein singuläres Gleichungssystem entsteht.

2. Bedingung: Um das unabhängige Spannungsfeld  $\tilde{\mathbf{S}}$  in Gleichung (6.9) zu eliminieren, müßte für den Ansatz des inkompatiblen Verzerrungsfeldes  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  die  $L_2$ -Orthogonalität zum Raum der zulässigen Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}_h$  gefordert werden:

$$\langle \tilde{\mathbf{S}}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h \rangle_{L_2(B)} := \int_B \tilde{\mathbf{S}}_h \cdot \tilde{\mathbf{E}}_h \, dV = 0 \quad (6.20)$$

Da diese Bedingung aufgrund der oben erläuterten Verfälschung der Abhängigkeiten durch die Basisvektoren nur sehr schwer (wenn überhaupt) zu erfüllen ist, werden die Verzerrungen auf eine konstante Basis transformiert, siehe Gleichung (6.17).

$$\begin{aligned} \int_B \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, dV &= \int_B \tilde{S}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j : \tilde{E}_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \, dV = \int_B \tilde{S}^{ij} \tilde{E}_{ij} \, dV \quad (6.21) \\ &= \int_B \tilde{S}^{ij} \tilde{T}_{ik} \tilde{T}_{jl} \tilde{\epsilon}_{kl} \, dV = \int_B \tilde{\sigma}^{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} \, dV = \int_B \tilde{\sigma} : \tilde{\epsilon} \, dV = 0 \end{aligned}$$

Der Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$  und der Verzerrungstensor  $\tilde{\epsilon}$  beziehen sich nun auf eine konstante Basis, nämlich  $\mathbf{a}_{0k} \otimes \mathbf{a}_{0l}$  bzw.  $\mathbf{a}_0^k \otimes \mathbf{a}_0^l$ . Die entsprechende diskretisierte Orthogonalitätsbedingung

$$\langle \tilde{\sigma}_h, \tilde{\epsilon}_h \rangle_{L_2(B)} := \int_B \tilde{\sigma}_h \cdot \tilde{\epsilon}_h \, dV = 0 \quad (6.22)$$

läßt sich nun durch passend gewählte Ansätze deutlich leichter erfüllen als Gleichung (6.20). Die  $L_2$ -Orthogonalitätsbedingungen gelten in analoger Weise auch für die entsprechenden variationellen Beziehungen aus Gleichung (6.10).

Die Spannungen  $\tilde{\sigma}_h$  werden nun so diskretisiert, daß sie stückweise konstante Funktionen  $\tilde{\sigma}_0$  enthalten

$$\tilde{\sigma}_h = \mathbf{P}_\xi(\xi) \cdot \beta_e \quad \longrightarrow \quad \tilde{\sigma}_0 = \mathbf{P} \cdot \beta_e \quad (6.23)$$

und somit vor das Integral gezogen werden können, so daß sich die 2. Bedingung umformen läßt.

$$(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\epsilon}_h)_{L_2(B)} := \int_B \tilde{\sigma}_0 \cdot \tilde{\epsilon}_h \, dV = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_B \tilde{\epsilon}_h \, dV = \int_B \mathbf{M}_\xi \, dV = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

Durch Einsetzen der Orthogonalitätsbedingung in Gleichung (6.9) bzw. der entsprechenden variationellen Beziehungen in die Variationsgleichung (6.10) reduziert sich das ursprüngliche 3-Feld-Funktional zu einem 2-Feld-Funktional, in dem das unabhängige Spannungsfeld  $\tilde{\mathbf{S}}$  nicht mehr als variierbare Größe vertreten ist.

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h) = \int_B W_s(\mathbf{E}_h^k + \tilde{\mathbf{E}}_h) \, dV + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_h) = \tilde{\Pi}_{\text{int}}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h) + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_h) \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h) &= \int_B (\delta \mathbf{E}_h^k + \delta \tilde{\mathbf{E}}_h)^T \cdot \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}_h^k} \, dV + \delta \Pi_{\text{ext}} \\ &= \int_B (\delta \mathbf{E}_h^k + \delta \tilde{\mathbf{E}}_h)^T \cdot \mathbf{S}_h \, dV + \delta \Pi_{\text{ext}} = \delta \tilde{\Pi}_{\text{int}} + \delta \Pi_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

### Bemerkungen:

- $\mathbf{S}_h$  sind die von den Verschiebungen  $\mathbf{u}_h$  abhängigen Spannungen.
- Die konstante Diskretisierung der Spannungen  $\tilde{\sigma}$  ist keine zwingend notwendige Bedingung. Die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung (6.22) ist mit dieser Approximation jedoch deutlich leichter zu realisieren. Prinzipiell ist die Wahl der Spannungen in dem Sinne frei, insofern "nur" das Volumenintegral über  $\tilde{\sigma}_h \cdot \tilde{\epsilon}_h$  erfüllt werden muß, durch welche Art der Diskretisierung spielt jedoch keine Rolle.
- Die erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  resultieren dabei aus der Transformation (6.17) der im isoparametrischen Raum angesetzten und auf die konstante Basis  $\mathbf{a}_0^k \otimes \mathbf{a}_0^l$  bezogenen Größen  $\tilde{\epsilon}_h$  auf die veränderliche Basis  $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$  im Schalenraum.

$$\longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}}_h = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\epsilon}_h = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M}_\xi \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.27)$$

Mit den Variationen des inneren und äußeren Potentials für ein beliebiges Element

$$\delta \tilde{\Pi}_{\text{int}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_B (\mathbf{E}_h^k)^T_{,d} \cdot \mathbf{S}_h \, dV + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \int_B (\tilde{\mathbf{E}}_h)^T_{,\alpha} \cdot \mathbf{S}_h \, dV \quad (6.28)$$

$$\delta \Pi_{\text{ext}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \Pi_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{d}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{F}_{\text{ext}}) = \delta \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{P}) \quad , \quad (6.29)$$

der Voraussetzung einer verschiebungsunabhängigen Belastung, sowie der anschließenden konsistenten Linearisierung nach den unbekanntem Knotenparametern  $\mathbf{d}$  und den unbekanntem Elementparametern  $\alpha$  (siehe Kapitel 5.7.3) ergibt sich die linearisierte Form der variationellen Gleichung (6.26):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{D}_{,d} \delta \tilde{\Pi}_{\text{int}}(\mathbf{d}, \alpha) \cdot \Delta \mathbf{d} + \mathbf{D}_{,\alpha} \delta \tilde{\Pi}_{\text{int}}(\mathbf{d}, \alpha) \cdot \Delta \alpha & (6.30) \\
 & = (\delta \mathbf{d}^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,dd} + \delta \alpha^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,d\alpha}) \cdot \Delta \mathbf{d} + (\delta \mathbf{d}^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,d\alpha} + \delta \alpha^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,\alpha\alpha}) \cdot \Delta \alpha \\
 & = - \delta \tilde{\Pi}(\mathbf{d}, \alpha) = - (\delta \Pi_{\text{ext}} + \delta \tilde{\Pi}_{\text{int}}(\mathbf{d}, \alpha)) \\
 & = - \delta \mathbf{d}^T \cdot (\Pi_{\text{ext}})_{,d} - (\delta \mathbf{d}^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,d} + \delta \alpha^T \cdot (\tilde{\Pi}_{\text{int}})_{,\alpha})
 \end{aligned}$$

Werden die entsprechenden Ableitungen des erweiterten inneren Potentials eingesetzt,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}^T & \delta \alpha^T \end{bmatrix} \int_B \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_h^k)_{,d}^T \cdot (\mathbf{S}_h)_{,d} + (\mathbf{E}_h^k)_{,dd}^T \cdot \mathbf{S}_h & (\mathbf{E}_h^k)_{,d}^T \cdot (\mathbf{S}_h)_{,\alpha} \\ (\tilde{\mathbf{E}}_h)_{,\alpha}^T \cdot (\mathbf{S}_h)_{,d} & (\tilde{\mathbf{E}}_h)_{,\alpha}^T \cdot (\mathbf{S}_h)_{,\alpha} \end{bmatrix} dV \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} & (6.31) \\
 & = - (\delta \Pi_{\text{ext}} + \delta \tilde{\Pi}_{\text{int}}(\mathbf{d}, \alpha)) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}^T & \delta \alpha^T \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \int_B \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_h^k)_{,d}^T \cdot \mathbf{S}_h \\ (\tilde{\mathbf{E}}_h)_{,\alpha}^T \cdot \mathbf{S}_h \end{bmatrix} dV \right)
 \end{aligned}$$

so resultiert eine Darstellung, die mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung auf ein gekoppeltes Gleichungssystem in  $\mathbf{d}$  und  $\alpha$  führt.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Die tangentielle Elementsteifigkeit  $\mathbf{K}_T$  des Verschiebungsmodells setzt sich wiederum aus einem materiellen Anteil  $\mathbf{K}_{E+U}$  und einem geometrischen Anteil  $\mathbf{K}_G$  zusammen:

$$\mathbf{K}_T = \int_B \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV + \mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{E+U} + \mathbf{K}_G \quad (6.33)$$

Die Belegung des  $\mathbf{B}$ -Operators entspricht der in Kapitel 5.7 gegebenen Definition. Infolge des zusätzlichen Verzerrungsfeldes  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  entsteht zwischen dem kompatiblen und inkompatiblen Ansatz der Koppelterm  $\mathbf{L}$ .

$$\mathbf{L} = \int_B \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad \mathbf{D} = \int_B \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} dV \quad (6.34)$$

Um bei nichtlinearen Problemen die Last sukzessive zu steigern, wurde in (6.24) der Lastparameter  $\lambda$  eingeführt. Die Vektoren der inneren Kräfte ergeben sich zu:

$$\mathbf{R} = \int_B \mathbf{B}^T \mathbf{S}_h dV \quad \tilde{\mathbf{R}} = \int_B \mathbf{M}^T \mathbf{S}_h dV \quad (6.35)$$



Aufgrund des unstetigen Verlaufes der Finite–Element–Approximation des inkompatiblen Verzerrungsfeldes  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  über die Elementgrenzen besteht die Möglichkeit, die zusätzlichen Parameter  $\alpha$  auf Elementebene zu eliminieren. Durch Auflösen der zweiten Gleichung in (6.32) nach  $\Delta\alpha$

$$\mathbf{L}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{D}\Delta\alpha = -\tilde{\mathbf{R}} \quad \longrightarrow \quad \Delta\alpha = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\Delta\mathbf{d} + \tilde{\mathbf{R}}) \quad (6.36)$$

und anschließendem Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich mit dem Zusammenbau der unterschiedlichen Elementanteile zur globalen, tangentialen Steifigkeitsmatrix und zum Lastvektor über den Operator  $\mathbf{A}$  ("assembly") ein diskretes Gesamtsystem in den unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$ .

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[ (\mathbf{K}_{T_e} - \mathbf{L}_e^T \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{L}_e) \right] \Delta\mathbf{d} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[ \lambda \mathbf{P}_e - \mathbf{R}_e + \mathbf{L}_e^T \mathbf{D}_e^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_e \right] \quad (6.37)$$

### Bemerkungen:

- Im folgenden werden einige Eigenschaften der Matrizen des Gleichungssystems (6.32) erläutert:
  - $\mathbf{D}$  ist positiv definit  $\longrightarrow$   $\mathbf{D}$  ist invertierbar
  - $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$
  - $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}^T$
  - $\mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} = (\mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^T \longrightarrow \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} = (\mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^T$
  - $\mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$  ist positiv definit  $\longrightarrow \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$  ist positiv definit  $\longrightarrow$  invertierbar
- Im Gegensatz zur hier gezeigten Modifikation des GREEN–LAGRANGE–Verzerrungstensors führt eine Erweiterung des Verschiebungsgradienten in einer räumlichen Formulierung zu 3 weiteren geometrischen Steifigkeitsanteilen, siehe z.B. Simo, Armero (1992), Roehl (1994).
- Der Anteil  $\mathbf{K}_{E+U}$  der tangentialen Elementsteifigkeit  $\mathbf{K}_T$  entspricht exakt dem einer reinen Verschiebungsformulierung.
- Selbstverständlich gelten alle in diesem Kapitel gezeigten Formeln entsprechenderweise auch bei der für Schalenelemente typischen expliziten Integration.
- Durch die Kondensation der Elementparameter  $\alpha$  bleiben die wesentlichen Merkmale einer verschiebungsbasierten Vorgehensweise erhalten.
- Um eine eindeutige Lösung und Stabilität des Systems zu garantieren, müssen die das gemischte Funktional repräsentierenden Bilinearformen die Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi Bedingung (LBB oder auch inf–sup Bedingung) in den entsprechenden Hilberträumen erfüllen. Im diskreten Fall werden endlich dimensionale Unterräume gewählt, die die Interpolationsfunktionen mit oder ohne Kontinuitätsbedingungen ( $C^0, C^1, \dots$ ) enthalten. Diese globale und für jede Diskretisierung

gültige Bedingung stellt eine gleichmäßige Schranke für die inversen Operatoren der Operatorform (6.32) dar.

$$\left. \begin{array}{l} \| \mathbf{K}_T^{-1} \| \geq \alpha_1 \\ \| \mathbf{D}^{-1} \| \geq \alpha_2 \end{array} \right\} \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

Sie ist nach dem heutigen Stand der Wissenschaft für Schalenträgerwerke immer noch eine weitgehend offene Frage. (Für spezielle hybride Elemente siehe z.B. Stephan, Weissgerber (1978)). Erst wenn diese gleichmäßigen Schranken nachgewiesen sind, werden Lösbarkeit und Konvergenz gesichert.

### 6.2.3 Nichtlinearer Lösungsalgorithmus

In diesem Abschnitt sollen die in Kapitel 6.2.2 dargelegten nichtlinearen Gleichungen in eine iterative Lösungsprozedur nach dem NEWTON-Verfahren eingebettet werden, so daß eine Folge von linearisierten Problemen resultiert. Der entsprechende Algorithmus ist in Bild 6.3 erläutert.

### 6.2.4 Interpolation der erweiterten Verzerrungen

Das von Simo, Rifai (1990) vorgeschlagene Konzept der erweiterten Dehnungsformulierung wurde ursprünglich zur Verbesserung des Membranverhaltens gekrümmter Strukturen eingeführt. Um das in Kapitel 5.8 und 5.9 erläuterte Dickenlocking einer 6-Parameter Schalentheorie mit Dickenänderung zu beheben, schlugen Büchter, Ramm (1992) vor, die "locking" verursachende konstante Normaldehnung  $E_{33}^k$  in Dickenrichtung durch das EAS-Konzept auf eine lineare Funktion in  $\theta^3$  zu erweitern. Die Übertragung dieser Idee auf elastoplastische Probleme erfolgte in Büchter et al. (1994). Zur Beschreibung einer linearen Dickenänderung in  $\theta^3$ -Richtung wird zum kompatiblen Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}^k$  ein Ausdruck gemäß Gleichung (6.38) hinzuaddiert (dunkelgrau unterlegter Term).

$$\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}^k + \mathbf{E}_{ij}^{\text{ext}} = \begin{cases} \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} \\ \alpha_{33} + \theta^3 \beta_{33} \end{cases} \quad (i, j) \neq (3, 3) \quad (6.38)$$

Die restlichen Terme entstehen aus dem für die 6-Parameter Theorie gewählten Verschiebungsansatz. Folglich wird die in Kapitel 5.6.1 definierte virtuelle, innere Arbeit um einen von den inkompatiblen Verzerrungen resultierenden Beitrag angereichert, siehe auch Gleichung (6.26).

$$\delta \tilde{\Pi}_{\text{int}} = \int_A \left( \delta \alpha_{ij} n^{ij}(\mathbf{E}_{kl}) + \delta \beta_{mn} m^{mn}(\mathbf{E}_{kl}) + \underbrace{\delta \tilde{\beta}_{33} m^{33}(\mathbf{E}_{kl})}_{\text{zusätzlicher Term}} \right) dA \quad (m, n) \neq (3, 3) \quad (6.39)$$

1 Update auf Elementebene

- Knotenverschiebungen

$$\mathbf{d}_e^{k+1} = \mathbf{d}_e^k + \Delta \mathbf{d}_e^k$$

■ müssen gespeichert werden

- Elementparameter

$$\Delta \alpha_e = -(\mathbf{D}_e) (\mathbf{L}_e^T \Delta \mathbf{d}_e^k + \mathbf{F}_e^k)$$

$$\alpha_e^{k+1} = \alpha_e^k + \Delta \alpha_e$$

2 Berechnung auf Elementebene und jedem Integrationspunkt

- Berechnung des erweiterten Verzerrungsfeldes nach (6.27)

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{M} \alpha_e^{k+1}$$

- Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen nach (6.33) und (6.34) sowie der inneren Kräfte nach (6.35)

- Kondensation der Elementparameter  $\alpha_e^{k+1}$

$$\tilde{\mathbf{K}}_e^{k+1} = (\mathbf{K}_{T_e} - \mathbf{L}_e^T \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{L}_e)^{k+1}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_e^{k+1} = (\lambda \mathbf{P} - \mathbf{R} + \mathbf{L}_e^T \mathbf{D}_e^{-1} \tilde{\mathbf{R}})^{k+1}$$

3 Berechnung auf Systemebene

- Zusammenbau der Elementmatrizen zu Systemmatrizen

$$\tilde{\mathbf{K}}^{k+1} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_{\text{elm}} \\ \tilde{\mathbf{K}}_e^{k+1} \\ e=1 \end{matrix} \quad \tilde{\mathbf{F}}^{k+1} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_{\text{elm}} \\ \tilde{\mathbf{F}}_e^{k+1} \\ e=1 \end{matrix}$$

- Lösung des globalen Gleichungssystems

$$\Delta \mathbf{u}^{k+1} = (\tilde{\mathbf{K}}^{k+1})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}^{k+1}$$

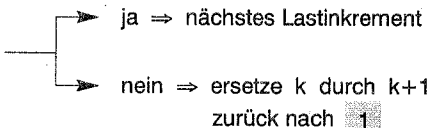
- Konvergenzabfrage 

Bild 6.3: Nichtlinearer, iterativer Lösungsalgorithmus

In Verbindung mit dem quadratischen Serendipity-Element wird für die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  folgende bilineare Finite-Element-Interpolation gewählt:

$$\tilde{\beta}_{33} = \mathbf{M} \cdot \alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}, \quad \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T \quad (6.40)$$

Dabei stellen  $\alpha$  vier lokale Elementparameter und  $\mathbf{M}$  die Interpolationsmatrix im isoparametrischen Raum dar. Da es weder innerhalb der Matrix  $\mathbf{M}$  noch zwischen den Räumen der kompatiblen und der inkompatiblen Ansätze lineare Abhängigkeiten gibt ( $\mathcal{S}_h$  enthält keinen Polynomterm in Dickenrichtung), ist Bedingung (6.19) und somit die Stabilität

gewährleistet. Die Orthogonalitätsbedingung (6.20) wird mit dem erweiterten Verzerrungs- sowie dem unabhängigen Spannungsfeld

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \theta^3 \tilde{\beta}_{33} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3 \quad \tilde{\mathbf{S}}_h = \tilde{\mathbf{S}}^{33} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 \quad (6.41)$$

aufrechterhalten

$$\int_B \tilde{\mathbf{S}}_h \cdot \tilde{\mathbf{E}}_h dV = \int_A \int_{-1}^1 \mu \tilde{\mathbf{S}}^{33} \theta^3 \tilde{\beta}_{33} d\theta^3 dA = \int_A \tilde{m}^{33} \tilde{\beta}_{33} dA = 0, \quad (6.42)$$

wenn die unabhängigen Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}^{33}$  konstant in der Dickenkoordinate  $\theta^3$  angesetzt werden:

$$\tilde{m}^{33} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \tilde{\mathbf{S}}^{33} \text{ const in } \theta^3 \quad (6.43)$$

Dabei entspricht der in Gleichung (6.42) mit den unabhängigen Größen  $\tilde{m}^{33}$  und  $\tilde{\beta}^{33}$  gebildete Arbeitsausdruck nicht dem zusätzlichen Term der virtuellen Arbeitsgleichung (6.39).

### Bemerkungen:

- Die diskretisierten, erweiterten Verzerrungs- und Spannungsanteile der Gleichungen (6.40) – (6.42) bedürfen keiner weiteren Transformation im Sinne des Kapitels 6.2.2. Der Grund dafür ist, daß die zugehörige Metrik  $\mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3$  nicht von  $\theta^3$  abhängt und somit der gewünschte, in  $\theta^3$  lineare Verlauf erzielt werden kann.
- Diese EAS-Erweiterung der transversalen Normaldehnung ist vom verwendeten Schalenelement (3-, 4-, 6-, 8-, 9- oder 16-knotig) unabhängig.
- Da sowohl der in Kapitel 5.9 erwähnte, quadratische Ansatz zur Beschreibung der Schalen geometrie als auch die 6-Parameter Theorie mit EAS-Erweiterung auf eine lineare Dickenänderung führen, wird letztere Formulierung in dieser Arbeit auch als 7-Parameter Theorie bezeichnet. Obwohl dieser Terminus Verwendung findet, ist es wichtig zu bemerken, daß der in der Dickenkoordinate  $\theta^3$  lineare Verschiebungsansatz nicht modifiziert wird.

Um bei verzerrter Netzgeometrie das Membran- und Biegeverhalten bilinear interpolierter Elemente zu verbessern, werden zusätzlich die kompatiblen "in-plane"-Dehnungen durch inkompatible Verzerrungsfelder angereichert. Der übliche bilineare Verschiebungsansatz liefert ein nichtlineares GREEN-LAGRANGE-Verzerrungsfeld

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta - \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}), \quad (6.44)$$

dessen Komponenten unvollständige lineare Polynome in den Koordinaten  $\xi, \eta$  des isoparametrischen Raumes aufspannen.

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta}^k \in \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Um ein vollständig lineares Verzerrungsfeld zu erhalten, müßten die inkompatiblen Anteile mit folgender Interpolationsmatrix angesetzt werden.

$$\mathbf{M}_\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Nach Simo, Rifai (1990) und Andelfinger, Ramm (1993) bringen die 3 Schubterme nur unwesentliche Verbesserungen, so daß sie im weiteren auch im Hinblick auf eine geringere Parameterzahl keine Berücksichtigung finden. Die erweiterten Verzerrungsanteile  $\tilde{\varepsilon}$  werden deshalb bezüglich der konstanten Basis  $\mathbf{a}_0^\alpha$  wie folgt diskretisiert:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \mathbf{M}_\xi \cdot \alpha \quad (6.47)$$

Die Orthogonalitätsbedingung (6.24) kann für diese Erweiterung der Membran- bzw. Biegeverzerrungen leicht verifiziert werden.

$$\int_B \mathbf{M}_\xi dV = \int_B \mathbf{M}_\xi \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\theta^3 = \mathbf{0} \quad (6.48)$$

Auf den ersten Blick könnte der Eindruck entstehen, daß die Bedingung (6.19), die einen Rangabfall der Steifigkeitsmatrix verhindert, durch die Ansätze des Schubtermes in Gleichung (6.47) verletzt wird. Bei der Betrachtung dieser Verzerrungskomponente muß die Bedingung  $\mathfrak{E}_n \cap \tilde{\mathfrak{E}}_n = \emptyset$  jedoch genauer definiert bzw. analysiert werden. Der lineare, kompatible Verzerrungsanteil  $2E_{12}^k$  besteht aus zwei Anteilen, die jeweils unvollständige, lineare Polynome in  $\xi, \eta$  aufspannen.

$2E_{12}^k = \underbrace{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{u}_{,2}}_{\in \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1}}_{\in \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \eta \end{bmatrix}} \quad (6.49)$
---

Der erweiterte Anteil  $2\tilde{\varepsilon}_{12}$  setzt sich deshalb aus  $\eta\alpha_7$  (aufgrund des ersten Termes in Gleichung (6.49)) und entsprechend aus  $\xi\alpha_6$  (aufgrund des zweiten Termes) zusammen. Bei separater Betrachtung der Summanden ist deutlich zu erkennen, daß obige Stabilitätsbedingung für jeden der beiden Anteile erfüllt ist.

Die in Gleichung (6.27) angegebene Matrix  $\tilde{\mathbf{T}}$  als Ergebnis einer 2-stufigen Tensortransformation läßt sich für den gewählten Diskretisierungsansatz explizit angeben:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{11}t_{12} & t_{12}^2 \\ 2t_{11}t_{21} & t_{11}t_{22} + t_{21}t_{12} & 2t_{12}t_{22} \\ t_{21}^2 & t_{21}t_{22} & t_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad t_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{a}_0^\beta \quad (6.50)$$

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{\mathbf{E}}_{11} \quad 2\tilde{\mathbf{E}}_{12} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{22})^T = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M}_\xi \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.51)$$

Dabei kann die Matrix  $\mathbf{M}$  als Ableitung der Formfunktionen eines inkompatiblen Verschiebungsfeldes  $\tilde{\mathbf{u}}$  nach den Referenzkoordinaten interpretiert werden.

### 6.3 Assumed natural strain Methode

Neben der im vorigen Kapitel erläuterten Möglichkeit zur Verbesserung des Membranverhaltens verzerter, bilinear interpolierter Elemente soll in diesem Abschnitt eine Methode zur Beseitigung des "shear-locking" Phänomens vorgestellt werden. Dabei wird das aus 5-Parameter Platten- und Schalentheorien bekannte und auf Dvorkin, Bathe (1984) zurückgehende "assumed natural strain"-Konzept auf die 6-Parameter Theorie übertragen.

#### 6.3.1 Shear-locking Phänomen

Um die Vorteile (keine "zero energy modes", geringe Bandbreite, Effizienz) der 4-knotigen Elemente bei einer dem Verschiebungsansatz entsprechenden Integrationsordnung nutzen zu können, müssen die Elemente in der Lage sein, reine Biegemodes abzubilden. In Bild 6.4 ist ein 8-knotiges Kontinuumselement unter reiner Biegebeanspruchung dargestellt, welches durch das in Kapitel 5.7.1 erläuterte Degenerationsprinzip auf ein 4-knotiges Schalenelement transformiert werden kann.

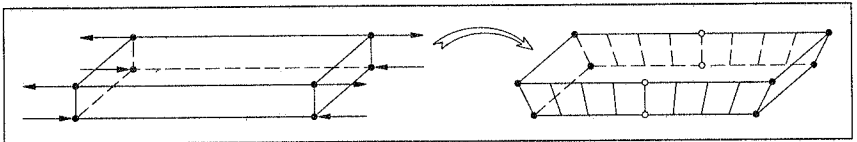


Bild 6.4: Shear-locking-Phänomen

In der rechten Abbildung ist deutlich zu erkennen, daß der Biegemode mit Querschubverzerrungen durchsetzt ist, so daß die Auswertung der in Kapitel 5 erläuterten Gleichungen, und im speziellen der Verzerrungsgleichungen (5.8) an den herkömmlichen GAUSS-Punkten zu Versteifungseffekten führt.

Analog läßt sich das "locking"-Phänomen bei einer Biegebeanspruchung um die zweite Koordinatenachse herleiten.

#### 6.3.2 Prinzip des ANS-Konzeptes

Die "shear-locking" verursachenden, transversalen Schubverzerrungen müssen somit an ganz bestimmten Stellen ("sampling points") ausgewertet und mit speziellen Ansatzfunktionen über das Element interpoliert werden, so daß sich die zu Versteifungen führenden Anteile an den gewöhnlichen Integrationspunkten gerade zu null ergeben. Aus Bild 6.4 ist ersichtlich, daß die zwischen den Punkten "o" liegende Strecke dieser Forderung gerecht wird, da sie die Normale auf der Mittelfläche repräsentiert.

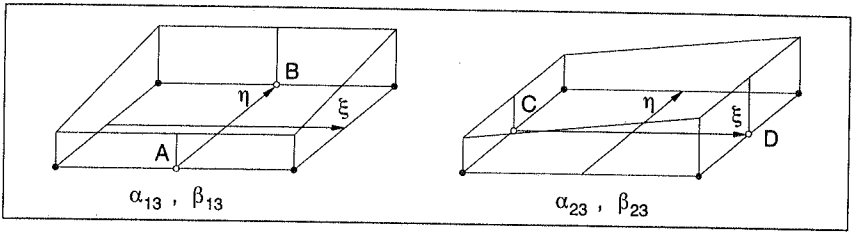


Bild 6.5: ANS-Ansätze des Querschubs

Wird das 8-knotige Kontinuumseslement mit dem Degenerationskonzept auf ein 2-dimensionales, 4-knotiges Element transformiert (Bild 6.5), so wird deutlich, daß der in der Dickenkoordinate konstante und lineare Anteil von  $E_{13}$ , nämlich  $\alpha_{13}$  und  $\beta_{13}$  in den Punkten A und B ausgewertet werden muß. Eine anschließende in der krummlinig konvektiven Koordinate  $\xi$  konstante und in  $\eta$  lineare Interpolation der Werte  $\alpha_{13}^A, \beta_{13}^A, \alpha_{13}^B, \beta_{13}^B$  auf die herkömmlichen GAUSS-Punkte vermeidet folglich die parasitären Querschubanteile bei reinen Biegebeanspruchungen.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{13}^{\text{ass}} \\ \beta_{13}^{\text{ass}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \eta) \begin{bmatrix} \alpha_{13}^A \\ \beta_{13}^A \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(1 + \eta) \begin{bmatrix} \alpha_{13}^B \\ \beta_{13}^B \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Entsprechend können die Komponenten  $\alpha_{23}$  und  $\beta_{23}$  in den Punkten C und D angesetzt und in  $\xi$ -Richtung linear, in  $\eta$ -Richtung konstant interpoliert werden.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{23}^{\text{ass}} \\ \beta_{23}^{\text{ass}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \begin{bmatrix} \alpha_{23}^C \\ \beta_{23}^C \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(1 + \xi) \begin{bmatrix} \alpha_{23}^D \\ \beta_{23}^D \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Die in den Punkten A, B, C und D ausgewerteten Verzerrungen  $\alpha_{\alpha 3}$  und  $\beta_{\alpha 3}$  werden über die Gleichungen (5.8) berechnet,

$$\alpha_{\alpha 3}^A = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}^A \cdot \bar{\mathbf{a}}_3^A - \mathbf{a}_{\alpha}^A \cdot \mathbf{a}_3^A) \quad , \quad \beta_{\alpha 3}^A = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}^A \cdot \bar{\mathbf{a}}_3^A - \mathbf{a}_{3,\alpha}^A \cdot \mathbf{a}_3^A) \quad (6.54)$$

wobei sich die kovarianten Basisvektoren der "sampling points" durch eine herkömmliche Interpolation der Ortsvektoren bzw. der Direktoren der Elementknoten ergeben.

$$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}^A = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha}(\xi^A, \eta^A) \mathbf{r}_K \quad , \quad \bar{\mathbf{a}}_3^A = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi^A, \eta^A) \mathbf{a}_3^K \quad (6.55)$$

Die Gleichungen (6.52) und (6.53) machen den Unterschied der ANS-Methode bei einer 6-Parameter Theorie im Vergleich zu einer Formulierung mit 5 unbekanntenen Funktionen deutlich. Bei einer 5-Parameter Theorie besitzt der Querschub  $E_{\alpha 3}$  aufgrund des Verschiebungsansatzes einen in der Dickenkoordinate konstanten Verlauf  $E_{\alpha 3} = \alpha_{\alpha 3}$ , bei einer 3-dimensionalen Schalentheorie hingegen einen linearen Verlauf  $E_{\alpha 3} = \alpha_{\alpha 3} + \theta^3 \beta_{\alpha 3}$ .

Die geglätteten Schubverzerrungsverläufe  $\alpha_{\alpha 3}^{\text{ass}}$  und  $\beta_{\alpha 3}^{\text{ass}}$  ersetzen im virtuellen Arbeitsausdruck (5.70) diejenigen, die die Biegemodes mit "störenden" Anteilen vermischen.

$$\delta W_{\text{int}} \approx \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_A (\alpha'_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \alpha'_{33} n^{33} + \alpha'_{\alpha 3} n^{\alpha 3}_{\text{ass}} + \beta'_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + \beta'_{\alpha 3} m^{\alpha 3}_{\text{ass}}) dA \quad (6.56)$$

Aus Gleichung (6.56) läßt sich ableiten, daß die "neuen" Verzerrungsverläufe Änderungen im  $\mathbf{B}$ -Operator und durch die Linearisierung auch in der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  zur Folge haben. Die variationelle Einbettung der ANS-Methode wird in Simo, Hughes (1986) diskutiert.



## 7 Mehrschichttheorie (Multidirektortheorie)

Aufgrund unterschiedlicher Schubverformungen der einzelnen Schichten sind im allgemeinen bei beliebigen Dicken – und Steifigkeitsverhältnissen der einzelnen Schichten die Schichtnormalen während eines Deformationsvorganges nicht mehr ausgerichtet. Es bildet sich ein zick – zack Muster über die Dicke der Struktur. Aus diesem Grunde soll in diesem Kapitel eine nichtlineare 3 – dimensionale Schalentheorie mit  $C^0$  – stetigem Verschiebungsfeld über die Dicke des Laminats entwickelt werden. Da in dieser Formulierung mehrere Direktoren für die höhere Schalenkinematik verantwortlich sind, wird diese Schalentheorie als Multidirektortheorie bezeichnet. Aufgrund des in der Formulierung steckenden Verfeinerungspotentials kann "jeder" Verschiebungs –, Verzerungs – und Spannungsverlauf über die Dicke von dünnen und dicken Platten und Schalen simuliert werden.

Zu Beginn wird die aufwendigere und verfeinerte Beschreibung des Schalenraumes in krummlinig konvektiven Koordinaten hergeleitet. Die daraus resultierenden 3 – dimensional Verzerrungs – und Spannungsverläufe bilden die Grundlage der über die Teilvolumina der einzelnen Schichten definierten schwachen Form des Gleichgewichts. Mit der Diskretisierung des Schalenkontinuums und anschließender konsistenter Linearisierung der Arbeitsausdrücke können die Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren angegeben werden. Durch die Beschreibungsmöglichkeit eines bei beliebig geschichteten, dicken Systemen vorkommenden, zick – zack – förmigen Verschiebungsverlaufes gewinnt die Frage einer realistischen Lasteinleitung enorm an Bedeutung. Die Berücksichtigung der Dickenänderung jeder Schicht macht eine Belastung eines Laminats an der Ober – oder Unterseite oder am Interface zweier Schichten möglich. Einige Bemerkungen zur Berechnung der interlaminaren Spannungen und des bei  $C^0$  – stetigen Schichttheorien neu zu diskutierenden Versteifungseffektes werden am Schluß des Kapitels erwähnt.

Da an verschiedenen Stellen dieses Kapitels auf die Analogie zur Singledirektortheorie hingewiesen wird, ist bewußt eine Schreibweise gewählt worden, die der in Kapitel 5 entspricht. Weiterhin können einige Unterkapitel bzw. Herleitungen entweder eins zu eins (z.B. Materialtensoren) übernommen oder in verallgemeinerter Form (Prinzip der virtuellen Arbeit, Diskretisierung, Linearisierung) dargestellt werden, so daß die entsprechenden Passagen einer kürzeren Beschreibung bedürfen.

### 7.1 Beschreibung der Schalengeometrie

Zur Beschreibung der unverformten Geometrie wird die Schale in  $NL$  Schichten unterteilt, die im allgemeinen unterschiedliche Dicken besitzen, siehe Bild 7.1. Sie wird ebenfalls über krummlinig,  $k$  konvektive Koordinaten  $\theta^\alpha$  beschrieben und ist mit einer willkür-

lich gewählten Referenzfläche ausgestattet (hier Schalenmittelfläche). Jeder Punkt dieser Referenzfläche ist mit einer Folge von Direktoren  $\mathbf{a}_{3_L}$  für  $L = 1, \dots, NL$  versehen, um den Schalenraum mit einer höheren Kinematik zu erfassen. Dabei sollen alle Direktoren die gleiche Orientierung besitzen und Vektoren repräsentieren, deren Länge der Dicke der einzelnen Schichten entsprechen.

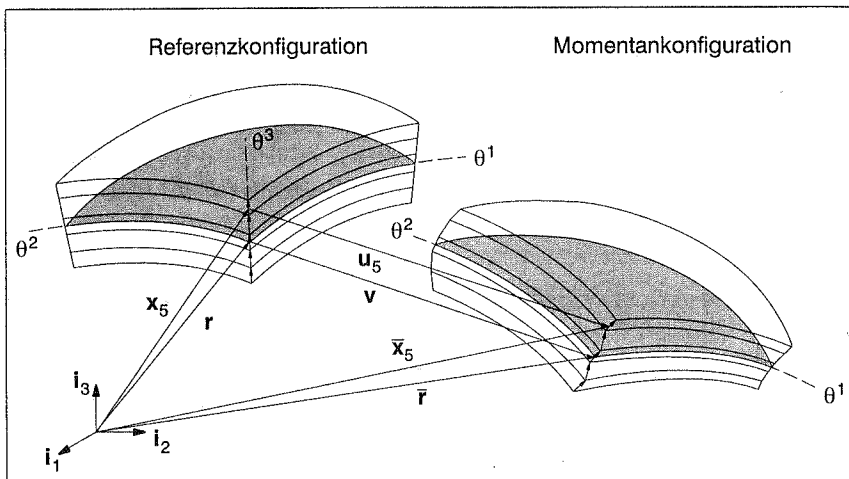


Bild 7.1: Höhere Schalenkinematik im unverformten und verformten Zustand

Um nun die geometrischen und kinematischen Größen im Sinne einer Schalentheorie beschreiben zu können, besteht die Notwendigkeit, die unbekannt Variablen als Funktion der Schalenmittelfläche auszudrücken. Die Erfassung des Schalenraumes über eine Referenzfläche soll im weiteren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) am Beispiel einer 5-schichtigen Struktur erläutert werden, Bild 7.2.

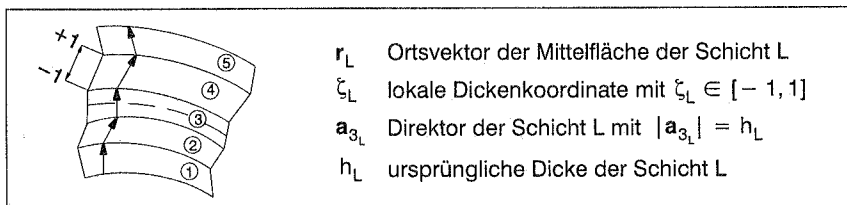


Bild 7.2: Aufbau einer 5-schichtigen Schale

Ausgangspunkt ist die Beschreibung eines Punktes der Schicht L in der Referenzkonfiguration über den Ortsvektor  $\mathbf{r}_L$  der Schichtmittelfläche und den entsprechenden Direktor  $\mathbf{a}_{3_L}$ . Mit Hilfe lokaler Schichtkoordinaten  $\zeta_L \in [-1, 1]$  lässt sich für die Koordinate  $\mathbf{x}_L$  folgende, aus herkömmlichen Schalenformulierungen ausreichend bekannte Beziehung angeben.

$$\mathbf{x}_L(\theta^1, \theta^2, \zeta_L) = \mathbf{r}_L(\theta^1, \theta^2) + \frac{1}{2}\zeta_L \mathbf{a}_{3_L}(\theta^1, \theta^2) \quad , \quad L = 1, \dots, 5 \quad (7.1)$$

Durch die Forderung der  $C^0$ -Kontinuität der Geometrie am "Interface" zwischen zwei angrenzenden Schichten

$$\mathbf{x}_L(\zeta_L=+1) = \mathbf{x}_{L+1}(\zeta_{L+1}=-1) \quad , \quad L = 1, \dots, 4 \quad (7.2)$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_L + \frac{1}{2}(+1)\mathbf{a}_{3_L} = \mathbf{r}_{L+1} + \frac{1}{2}(-1)\mathbf{a}_{3_{L+1}}$$

können die abhängigen Variablen  $\mathbf{r}_L$  sukzessive eliminiert werden. Die Koordinate  $\mathbf{x}_L$  eines Punktes wird nun durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  der Mittelfläche der gesamten Schale und einer Folge von Direktoren charakterisiert.

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{r} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{a}_{3_S} \quad (7.3)$$

Durch die Einhaltung der  $C^0$ -Stetigkeit der Geometrie über die Dicke entstehen Kontinuitätskoeffizienten  $\theta_{LS}^3 = \theta_{LS}^3(\zeta_L)$ , die als Skalierungsfaktoren der Schichtdirektoren interpretiert werden können. Sie lassen sich zur besseren Übersicht in einer "Matrix" anordnen (siehe Bild 7.3), die im wesentlichen aus Konstanten und auf ihrer Hauptdiagonale aus 5 lokalen Schichtkoordinaten besteht.

Besonders zu erwähnen ist die Tatsache, daß diese "Matrix" nicht im Sinne der klassischen Matrizen­theorie mit Zeilen- und Spaltenoperationen zu verstehen ist, sondern wie folgt interpretiert werden muß. Die Zeile L kennzeichnet die aktuelle Schicht in der die Koordinate  $\mathbf{x}_L$  eines Punktes zu bestimmen ist. Die Spalten S hingegen definieren die Schichten, die auf dem Weg von der Schalenmittelschicht zur aktuellen Schicht durchlaufen werden müssen.

		Trajektorie von Mittelschicht zur Schicht L					
		1	2	3	4	5	
aktuelle Schicht L	1	$\frac{1}{2}(\zeta_1 - 1)$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\zeta_L \in [-1, 1]$
	2	0	$\frac{1}{2}(\zeta_2 - 1)$	$-\frac{1}{2}$	0	0	
	3	0	0	$\frac{1}{2}\zeta_3$	0	0	
	4	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\zeta_4 + 1)$	0	
	5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}(\zeta_5 + 1)$	

Bild 7.3: Kontinuitätskoeffizienten  $\theta_{LS}^3$  einer 5-schichtigen Schale

Soll z.B. ein Punkt in der fünften Schicht ( $\rightarrow L = 5$ ) lokalisiert werden, so ergibt sich für dessen Koordinate:  $\mathbf{x}_5(\zeta_5) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_{3_5} + 1\mathbf{a}_{3_4} + \frac{1}{2}(\zeta_5 + 1)\mathbf{a}_{3_5}$ .

Die Koeffizienten  $\theta_{LS}^3$  können auch direkt, ohne das explizite Aufstellen der Kontinuitätsbedingungen und anschließender schrittweisen Elimination der abhängigen Variablen berechnet werden. Die Terme ungleich null lassen sich mit den in Bild 7.4 angegebenen Beziehungen bestimmen. Dabei sind die umrandeten Vorzeichen  $\boxplus$  von der aktuellen Schicht L abhängig. Liegt die Schicht L oberhalb der Schalenmittelfläche, so resultiert ein Pluszeichen, andernfalls ein Minuszeichen. Durch diese Definition ist das zweite Symbol  $\boxminus = -\boxplus$  automatisch festgelegt.

gerade Schichtanzahl:	$\theta_{LS}^3 = \frac{1}{2}(\zeta_L \boxplus 1)$	für	$L = S$
	$\theta_{LS}^3 = \boxminus 1$	für	$L \neq S$
ungerade Schichtanzahl:	$\theta_{LS}^3 = \frac{1}{2}(\zeta_L \boxminus (1 - \delta_{SR}))$	für	$L = S$
	$\theta_{LS}^3 = \boxplus (1 \boxminus \frac{1}{2} \delta_{SR})$	für	$L \neq S$

Bild 7.4: Kontinuitätskoeffizienten ( $R \hat{=}$  Referenzschicht des Laminats)

Unter der Voraussetzung, daß die Direktoren der einzelnen Schichten gerade bleiben, kann auf der Basis einer REISSNER / MINDLIN Kinematik pro Schicht folgendes Verschiebungsfeld angesetzt werden.

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 (\bar{\mathbf{a}}_{3_s} - \mathbf{a}_{3_s}) = \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{w}_S \quad (7.4)$$

Dabei dürfen die Direktoren der einzelnen Schichten während des Deformationsvorganges durchaus ihre Länge ändern, so daß eine Dickenänderung der Schichten und somit der gesamten Struktur beschreibbar ist. Die Wahl des kinematischen Ansatzes impliziert die Definition des Ortsvektors  $\bar{\mathbf{x}}_L$  eines Punktes der Momentankonfiguration.

$$\bar{\mathbf{x}}_L = \mathbf{x}_L + \mathbf{u}_L = (\mathbf{r} + \mathbf{v}) + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 (\mathbf{a}_{3_s} + \mathbf{w}_S) = \bar{\mathbf{r}} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \bar{\mathbf{a}}_{3_s} \quad (7.5)$$

#### Bemerkungen:

- Die kinematische Berücksichtigung einer Schicht "verursacht" aufgrund der Extensibilität der Direktoren 3 zusätzliche Freiheitsgrade.
- Soll die Struktur mit einer einfachen Kinematik, also einem  $C^1$ -stetigen Verschiebungsansatz (aber weiterhin mehreren Materialschichten) analysiert werden, so reduziert sich die "Kontinuitätsmatrix" mit ihren NL lokalen Dickenkoordinaten zu einer skalaren Größe  $\theta^3 = \frac{1}{2}\zeta$ , die die Dicke der gesamten Schale beschreiben kann. Die Gleichungen des Kapitels 5.2 der Singledirektortheorie sind somit all Spezialfall in denen der Multidirektortheorie enthalten.

## 7.2 Deformationsmaß

An jedem Punkt der Schicht L kann durch Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{x}_L$  nach den konvektiven Koordinaten  $\theta^\alpha$  sowie der lokalen Schichtkoordinate  $\zeta_L$  die natürliche, kovariante Vektorbasis angegeben werden.

$$\mathbf{g}_{\alpha L} = \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \mathbf{a}_{3S,\alpha} \quad , \quad \mathbf{g}_{3L} = \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \theta^3} = 2 \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \zeta_L} = \mathbf{a}_{3L} \quad (7.6)$$

Das Skalarprodukt der Basisvektoren definiert die Komponenten des schichtabhängigen, kovarianten Metriktensors

$$\mathbf{g}_L = \mathbf{g}_{iL} \cdot \mathbf{g}_{jL} \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j = g_{ijL} \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j \quad , \quad (7.7)$$

mit dem sich in Analogie zu Gleichung (4.30) über die Differenz der Metriken aus beiden Konfigurationen die GREENSchen Verzerrungsgleichungen eines Punktes der L-ten Schicht herleiten lassen.

$$\mathbf{E}_L = E_{ijL} \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ijL} - g_{ijL}) \mathbf{g}_L^i \otimes \mathbf{g}_L^j \quad (7.8)$$

Unter der Vernachlässigung des quadratischen Anteils lauten die für große Verzerrungen gültigen Komponenten des Verzerrungstensors:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta L} &= \frac{1}{2} \left[ (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta) + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3S,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_{3S,\alpha} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3S,\beta} - \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_{3S,\alpha}) \right] \quad (7.9) \\ &= \alpha_{\alpha\beta} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \beta_{\alpha\beta S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3L} &= \frac{1}{2} \left[ (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3L} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3L}) + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 (\bar{\mathbf{a}}_{3S,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_{3L} - \mathbf{a}_{3S,\alpha} \mathbf{a}_{3L}) \right] \quad (7.10) \\ &= \alpha_{\alpha 3L} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \beta_{\alpha 3LS} \end{aligned}$$

$$E_{33L} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3L} \bar{\mathbf{a}}_{3L} - \mathbf{a}_{3L} \mathbf{a}_{3L}) = \alpha_{33L} \quad (7.11)$$

Auch in diesen Gleichungen ist die Ähnlichkeit und Parallelität zu den Beziehungen des Kapitels 5.3 eines  $C^1$ -stetigen Verschiebungsansatzes deutlich zu erkennen.

## 7.3 Formulierung des Stoffgesetzes

Da in Kapitel 5 ebenfalls auf eine 3-dimensionale Betrachtungsweise großen Wert gelegt wurde, können die in Kapitel 5.4.3 für die Singledirektorthorie hergeleiteten Stoffgesetze ohne jede Änderung auf diese Schalentheorie übertragen werden. Die dieser Formulierung zugrundeliegende höhere Kinematik ist somit für die Wahl des Materialtensors ohne Bedeutung. Die Verknüpfung der statischen und kinematischen Größen

kann unter der Voraussetzung der linearen Elastizität und eines homogenen, anisotropen Kontinuums analog zu Gleichung (5.23) durch die lineare Abbildung

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{C}_L : \mathbf{E}_L \quad \rightarrow \quad S_L^{ij} = C_L^{ijkl} E_{kL} \quad \text{für} \quad L = 1, \dots, NL \quad (7.12)$$

erfolgen. Der auf das natürliche Koordinatensystem  $\{\mathbf{g}_{1L}, \mathbf{g}_{2L}, \mathbf{g}_{3L}\}$  der Schicht L bezogene Materialtensor

$$\mathbf{C}_L = C_L^{ijkl} \mathbf{g}_{iL} \otimes \mathbf{g}_{jL} \otimes \mathbf{g}_{kL} \otimes \mathbf{g}_{lL} \quad (7.13)$$

entstand analog zu Kapitel 5.4.1 aus einer Transformation von einem Koordinatensystem  $\{\mathbf{g}_{1L}^*, \mathbf{g}_{2L}^*, \mathbf{g}_{3L}^*\}$  in Richtung der Materialhauptachsen.

$$\mathbf{C}_L^* = C_L^{ijkl*} \mathbf{g}_{iL}^* \otimes \mathbf{g}_{jL}^* \otimes \mathbf{g}_{kL}^* \otimes \mathbf{g}_{lL}^* \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{kL}^* = T_{kL} \mathbf{g}_{iL} \quad (7.14)$$

## 7.4 Schwache Form des Gleichgewichts

Die variationelle Arbeitsgleichung bestehend aus der virtuellen inneren und äußeren Arbeit des Kapitels 5.6 der Singledirektortheorie wird nun auf die höhere Kinematik erweitert. Dabei soll der für Schalentheorien typische Vorteil der Vorabintegration (explizite Integration) aufrechterhalten werden.

### 7.4.1 Resultierende Arbeit der inneren Kräfte

Die virtuelle, innere Arbeit als Resultat einer gewichteten und integrierten Impulsbilanz läßt sich durch Aufteilen des Volumens der Struktur in Teilvolumina über die einzelnen Schichten in der folgenden Weise angeben.

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_B \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV = \int_V \delta E_{ij} S^{ij} \, dV = \sum_{L=1}^{NL} \int_{V_L} \delta E_{ijL} S_L^{ij} \, dV_L \quad (7.15)$$

Mit Hilfe der Determinante  $\det J_L = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_{3L}$  kann das differentielle Volumenelement der Schicht L in ein Flächenelement der gesamten Schale und in die entsprechende Integrationsvariable über die Dicke der Schicht aufgespalten werden.

$$dV_L = \frac{1}{2} \det J_L d\theta^1 d\theta^2 d\zeta_L = \frac{1}{2} \frac{\det J_L}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} d\zeta_L dA = \mu_L d\zeta_L dA \quad (7.16)$$

Dabei berücksichtigt der Betrag  $\mu_L$  des Schalenshifters die Veränderung des differentielle Flächenelementes der Schalenmittelfläche zum Flächenelement der Schicht L. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  in Gleichung (7.16) entspringt der Tatsache, daß die Länge des Direktors einer Schicht gerade die Schichtdicke repräsentiert,  $|\mathbf{g}_{3L}| = h_L$ , so daß in der anschließenden Integration über den Einheitswürfel die richtige Schichtdicke erfaßt wird.

$$\rightarrow \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_A \sum_{L=1}^{NL} \int_{-1}^1 \mu_L \delta E_{ijL} S_L^{ij} d\zeta_L dA \quad (7.17)$$

Werden die schichtabhängigen Verzerrungsgleichungen (7.9) – (7.11) in die Beziehung (7.17) eingesetzt

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_A \sum_{L=1}^{NL} \int_{-1}^1 \mu_L \left[ (\delta \alpha_{\alpha\beta} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \delta \beta_{\alpha\beta S}) S_L^{\alpha\beta} + (\delta \alpha_{\alpha 3L} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \delta \beta_{\alpha 3LS}) S_L^{\alpha 3} + \delta \alpha_{33L} S_L^{33} \right] d\zeta_L dA, \quad (7.18)$$

so läßt sich mit der Definition der schichtweisen 2. PIOLA–KIRCHHOFF Spannungsergebnierenden

$$n_L^{ij} = \int_{-1}^1 \mu_L S_L^{ij} d\zeta_L; \quad m_{LS}^{ij} = \int_{-1}^1 \mu_L \theta_{LS}^3 S_L^{ij} d\zeta_L \quad (7.19)$$

die virtuelle, innere Arbeit auch bei der Multidirektortheorie in Schnittgrößen angeben.

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_A \sum_{L=1}^{NL} \left[ \delta \alpha_{ijL} n_L^{ij} + \sum_{S=1}^{NL} (\delta \beta_{\alpha\beta S} m_{LS}^{\alpha\beta} + \delta \beta_{\alpha 3LS} m_{LS}^{\alpha 3}) \right] dA \quad (7.20)$$

Die Spannungsergebnierenden der einzelnen Schichten können zu einer Schnittgröße aufaddiert werden.

#### 7.4.2 Resultierende Arbeit der äußeren Kräfte

Da in der auf die Schalenmittelfläche bezogenen Arbeitsgleichung (5.58) der äußeren Kräfte keine die Kinematik betreffenden Informationen eingegangen sind, kann sie auch für diese  $C^0$ -stetige Schichttheorie als Ausgangsgleichung dienen.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= - \underbrace{\int_B \mathbf{q} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV}_{} - \underbrace{\int_A (\mathbf{t}^{\text{ob}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \cdot \delta \mathbf{u}^{\text{un}} \mu^{\text{un}})}_{\delta W_{\text{ext}}^2} dA \quad (7.21) \\ &= \delta W_{\text{ext}}^1 + \delta W_{\text{ext}}^2 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der variationellen Verschiebungsbeziehungen an der Unter- und Oberseite der Schale

$$\delta \mathbf{u}^{\text{un}} = \delta \mathbf{u}_1(\zeta_1 = -1) = \delta \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{1S}^3(\zeta_1 = -1) \delta \mathbf{w}_S \quad (7.22)$$

$$\delta \mathbf{u}^{\text{ob}} = \delta \mathbf{u}_{NL}(\zeta_{NL} = +1) = \delta \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{(NL)S}^3(\zeta_{NL} = +1) \delta \mathbf{w}_S \quad (7.23)$$

kann die von den Dickenkoordinaten  $\zeta_L$  unabhängige virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte als Funktion der unbekanntenen Verschiebungen  $\delta \mathbf{v}$  und  $\delta \mathbf{w}_S$  angegeben werden.

$$\delta W_{\text{ext}}^2(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_A (\mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}}) \cdot \delta \mathbf{v} dA \quad (7.24)$$

$$- \int_A \sum_{S=1}^{NL} \left[ \mathbf{t}^{ob} \mu^{ob} \theta_{(NL)S}^3(\zeta_{NL}=+1) + \mathbf{t}^{un} \mu^{un} \theta_{1S}^3(\zeta_1=-1) \right] \cdot \delta \mathbf{w}_S dA$$

Die virtuelle Arbeit  $\delta W_{\text{ext}}^1$  der Volumenkräfte läßt sich mit den entsprechenden variationalen Gleichungen analog transformieren.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}}^1(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= - \int_B \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV = - \int_A \sum_{L=1}^{NL} \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \cdot \delta \mathbf{u}_L d\zeta_L dA \quad (7.25) \\ &= - \int_A \left[ \left[ \sum_{L=1}^{NL} \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \left[ \sum_{L=1}^{NL} \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \theta_{LS}^3 d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{w}_S \right] dA \end{aligned}$$

Mit Hilfe der auf die Mittelflächenverschiebung  $\mathbf{v}$  und den Differenzvektor  $\mathbf{w}_S$  der Schicht S bezogenen Belastungsdichten

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}^{ob} \mu^{ob} + \mathbf{t}^{un} \mu^{un} + \sum_{L=1}^{NL} \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L d\zeta_L \quad (7.26)$$

$$\mathbf{c}_S = \mathbf{t}^{ob} \mu^{ob} \theta_{(NL)S}^3(\zeta_{NL}=+1) + \mathbf{t}^{un} \mu^{un} \theta_{1S}^3(\zeta_1=-1) + \sum_{L=1}^{NL} \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \theta_{LS}^3 d\zeta_L \quad (7.27)$$

kann die virtuelle äußere Arbeit im Vergleich zur Gleichung (5.63) der Singledirektortheorie in verallgemeinerter Form definiert werden.

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W_{\text{ext}}^1(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta W_{\text{ext}}^2(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_A \left[ \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \mathbf{c}_S \cdot \delta \mathbf{w}_S \right] dA \quad (7.28)$$

Für die in Kapitel 7.1 beispielhaft dargestellte 5-schichtige Schale würden sich mit den variationellen Verschiebungen

$$\delta \mathbf{u}^{ob} = \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}_3 + \delta \mathbf{w}_4 + \delta \mathbf{w}_5 \quad ; \quad \delta \mathbf{u}^{un} = \delta \mathbf{v} - \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}_3 - \delta \mathbf{w}_2 - \delta \mathbf{w}_1 \quad (7.29)$$

die beiden virtuellen, äußeren Arbeitsanteile wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}}^1(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= - \int_A \left[ \left[ \sum_{L=1}^5 \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{v} + \left[ \int_{\zeta_1} \varrho_1 \mu_1 \mathbf{b}_1 \theta_{11}^3 d\zeta_1 \right] \cdot \delta \mathbf{w}_1 + \right. \quad (7.30) \\ &\quad + \sum_{L=1}^2 \left[ \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \theta_{L2}^3 d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{w}_2 + \sum_{L=1}^5 \left[ \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \theta_{L3}^3 d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{w}_3 + \\ &\quad \left. + \sum_{L=4}^5 \left[ \int_{\zeta_L} \varrho_L \mu_L \mathbf{b}_L \theta_{L4}^3 d\zeta_L \right] \cdot \delta \mathbf{w}_4 + \left[ \int_{\zeta_6} \varrho_5 \mu_5 \mathbf{b}_5 \theta_{55}^3 d\zeta_5 \right] \cdot \delta \mathbf{w}_5 \right] dA \end{aligned}$$



$$\delta W_{\text{ext}}^2(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_A \left[ \left( \mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} + \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}} \right) \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}} \cdot (\delta \mathbf{w}_1 + \delta \mathbf{w}_2) + \right. \quad (7.31)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left( \mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} - \mathbf{t}^{\text{un}} \mu^{\text{un}} \right) \cdot \delta \mathbf{w}_3 + \mathbf{t}^{\text{ob}} \mu^{\text{ob}} \cdot (\delta \mathbf{w}_4 + \delta \mathbf{w}_5) \right] dA$$

## 7.5 Finite-Elemente-Diskretisierung

Aufgrund der höheren Kinematik über die Dicke wird das 3-dimensionale Kontinuum in Analogie zu geschichteten Volumenelementen diskretisiert. Die anschließende schichtweise Degeneration und Elimination der abhängigen Knotenwerte läßt eine flächenhafte Beschreibung des Schalenkontinuums zu. Anschließend werden der resultierende innere Arbeitsausdruck, dessen Linearisierung sowie das in der äußeren Arbeit steckende Potential zur Einleitung von Oberflächenlasten erläutert.

### 7.5.1 Diskretisierte, innere Arbeit und Linearisierung

Durch eine schichtweise Diskretisierung des 3-dimensionalen Kontinuums im unverformten Zustand kann die Finite-Element-Approximation der Koordinate eines Punktes der Schicht L

$$\mathbf{x}_L = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \left( \frac{1 + \zeta_L}{2} \mathbf{x}_{\text{ob}_L}^K + \frac{1 - \zeta_L}{2} \mathbf{x}_{\text{un}_L}^K \right) \quad (7.32)$$

entsprechend Kapitel 5.7.1 aufgebaut werden. Aufgrund der ohnehin komplizierteren Schreibweise der Gleichungen der Multidirektortheorie wird bei der Diskretisierung auf den Index (...) <sub>h</sub> verzichtet.

Die Anwendung des Degenerationsprinzips auf jede der NL Schichten liefert zusammen mit den Abkürzungen

$$\mathbf{r}_L^K = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{\text{ob}_L}^K + \mathbf{x}_{\text{un}_L}^K \right) \quad , \quad \mathbf{a}_{3_L}^K = \mathbf{x}_{\text{ob}_L}^K - \mathbf{x}_{\text{un}_L}^K \quad \text{mit} \quad |\mathbf{a}_{3_L}^K| = h_L^K \quad (7.33)$$

eine Darstellung

$$\mathbf{x}_L = \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{r}_L^K + \frac{1}{2} \zeta_L \sum_{K=1}^{NN} N_K(\xi, \eta) \mathbf{a}_{3_L}^K \quad , \quad (7.34)$$

in der durch die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung in zwei angrenzenden Schichten (Gleichung (7.2)), die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert werden kann, siehe Bild 7.5.

$$\mathbf{x}_L = \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{r}_K + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{a}_{3_S}^K \quad (7.35)$$

Das Laminat der mittleren Abbildung wird durch Gleichung (7.34) beschrieben und besitzt mit NL=3 Schichten insgesamt  $6 \cdot NN \cdot NL = 18 \cdot NN$  Freiheitsgrade. Durch die Einführung der Kontinuität entsteht eine Struktur, die durch die rechte Abbildung bzw.

Gleichung (7.35) erfaßt wird und deren Anzahl an Freiheitsgraden sich auf  $NN \cdot (3 \cdot NL + 3) = 12 \cdot NN$  reduziert hat.

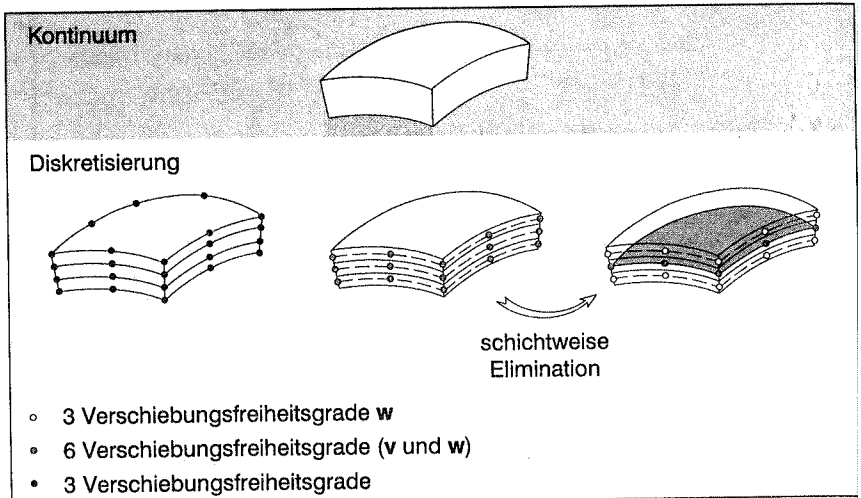


Bild 7.5: Diskretisierung mit höherer Schalenkinematik

Die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade des ersten, durch eine kontinuumstypische Diskretisierung entstandenen Laminats ("brick"-Formulierung), entspricht exakt der Anzahl, die bei der Diskretisierung der Multidirektortheorie entsteht. Diese Feststellung unterstreicht den 3-dimensionalen Charakter dieser  $C^0$ -stetigen Schichttheorie.

Mit Hilfe eines diskretisierten Verschiebungsfeldes auf der Basis einer schichtweisen REISSNER/MINDLIN-Kinematik und einer Dickenänderung der einzelnen Schichten

$$\mathbf{u}_L = \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{v}_K + \sum_{S=1}^{NL} \theta_{LS}^3 \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{w}_S^K \quad (7.36)$$

läßt sich die virtuelle innere Arbeit (7.20) in diskretisierter und Form angeben.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_A \sum_{L=1}^{NL} \left[ \alpha'_{ijL} n_L^j + \sum_{S=1}^{NL} (\beta'_{\alpha\beta S} m_{LS}^{\alpha\beta} + \beta'_{\alpha 3LS} m_{LS}^{\alpha 3}) \right] dA = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \quad (7.37)$$

Dabei muß der Knotenvektor (5.72) der Singledirektortheorie um die "Rotations- und Dickenänderungsanteile" der einzelnen Schichten erweitert werden.

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{d}_1^T \cdots \mathbf{d}_K^T \cdots \mathbf{d}_{NN}^T] \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_K^T = [\mathbf{v}_K^T \ (\mathbf{w}_K^T)_1 \ (\mathbf{w}_K^T)_2 \cdots (\mathbf{w}_K^T)_{NL}] \quad (7.38)$$

Mit Berücksichtigung der Tatsache, daß die Variationen der Direktoren bzw. der Ableitungen derselben von der aktuell zu betrachtenden Schicht abhängig sind,

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_{3L} = \delta \mathbf{w}_L = \sum_{K=1}^{NN} N_K \delta \mathbf{w}_L^K \quad \rightarrow \quad \delta \bar{\mathbf{a}}_{3L,\alpha} = \delta \mathbf{w}_{L,\alpha} = \sum_{K=1}^{NN} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{w}_L^K \quad (7.39)$$

können die variationellen Verzerrungsgleichungen in ähnlicher Form zu Kapitel 5.7.1 entwickelt werden.

– Membranverzerrungen:

$$\delta\alpha_{\alpha\beta L} = \delta\alpha_{\alpha\beta} \rightarrow \text{siehe Gleichung (5.75)} \quad (7.40)$$

– Schubverzerrungen:

$$\delta\alpha_{\alpha 3L} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha} \delta \bar{a}_{3L} + \bar{a}_{3L} \delta \bar{a}_{\alpha}) = \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2}(\bar{a}_{3L} N_{K,\alpha} \delta v_K + \bar{a}_{\alpha} N_{K,3L} \delta w_K) = \alpha'_{\alpha 3L} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \delta\beta_{\alpha 3LS} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{3s,\alpha} \cdot \delta \bar{a}_{3L} + \bar{a}_{3L} \cdot \delta \bar{a}_{3s,\alpha}) \\ &= \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2}(\bar{a}_{3s,\alpha} N_{K,3L} \delta w_L^K + \bar{a}_{3L} N_{K,\alpha} \delta w_S^K) = \beta'_{\alpha 3LS} \cdot \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (7.42)$$

– Dickenänderung:

$$\delta\alpha_{33L} = \bar{a}_{3L} \cdot \delta \bar{a}_{3L} = \sum_{K=1}^{NN} (\bar{a}_{3L} N_{K,3L} \delta w_L^K) = \alpha'_{33L} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (7.43)$$

– Biegung:

$$\begin{aligned} \delta\beta_{\alpha\beta S} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{3s,\alpha} \cdot \delta \bar{a}_{\beta} + \bar{a}_{\beta} \cdot \delta \bar{a}_{3s,\alpha} + \bar{a}_{3s,\beta} \cdot \delta \bar{a}_{\alpha} + \bar{a}_{\alpha} \cdot \delta \bar{a}_{3s,\beta}) \\ &= \sum_{K=1}^{NN} \left[ \frac{1}{2}(\bar{a}_{3s,\alpha} N_{K,\beta} + \bar{a}_{3s,\beta} N_{K,\alpha}) \delta v_K + \frac{1}{2}(\bar{a}_{\beta} N_{K,\alpha} + \bar{a}_{\alpha} N_{K,\beta}) \delta w_S^K \right] = \beta'_{\alpha\beta S} \cdot \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Zur Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix muß die innere Arbeit  $W_{\text{int}}$  zweimal nach den unbekanntenen Knotenvariablen  $\mathbf{d}$  abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} D\delta W_{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{d} &= \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial^2 W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}^2} \cdot \Delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{F}'_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} \\ &= \delta \mathbf{d}^T \cdot \int_A \sum_{L=1}^{NL} \left[ \alpha_{ijL} n_L^{ij} + \sum_{S=1}^{NL} (\beta'_{\alpha\beta S} m_{LS}^{\alpha\beta'} + \beta'_{\alpha 3LS} m_{LS}^{\alpha 3'}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha''_{ijL} n_L^{ij} + \sum_{S=1}^{NL} (\beta''_{\alpha\beta S} m_{LS}^{\alpha\beta''} + \beta''_{\alpha 3LS} m_{LS}^{\alpha 3''}) \right] dA \cdot \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Die dabei benötigte 1. Ableitung der schichtabhängigen Verzerrungsgleichungen zur Bildung der materiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{E+U}$  sowie die 2. Ableitung für den geometrischen Anteil  $\mathbf{K}_G$  lassen sich analog zur Singledirektorthorie entwickeln.

– Membranverzerrungen:

$$D\delta\alpha_{\alpha\beta L} \Delta \mathbf{d} = D\delta\alpha_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{d} \rightarrow \text{siehe Gleichung (5.101)} \quad (7.46)$$

– Schubverzerrungen:

$$D\delta\alpha_{\alpha 3L}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{a}_\alpha D\bar{a}_{3L} + \delta\bar{a}_{3L} D\bar{a}_\alpha)\Delta\mathbf{d} \quad (7.47)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2}(\delta v_K N_{K,\alpha} N_M \Delta w_L^M + \delta w_L^K N_K N_{M,\alpha} \Delta v_M) = \delta\mathbf{d} \alpha''_{\alpha 3L} \Delta\mathbf{d}$$

$$D\delta\beta_{\alpha 3LS}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{a}_{3L} D\bar{a}_{3s,\alpha} + \delta\bar{a}_{3s,\alpha} D\bar{a}_{3L})\Delta\mathbf{d} \quad (7.48)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2}(\delta w_L^K N_K N_{M,\alpha} \mathbf{I} \Delta w_S^M + \delta w_S^K N_{K,\alpha} N_M \mathbf{I} \Delta w_L^M) = \delta\mathbf{d} \beta''_{\alpha 3LS} \Delta\mathbf{d}$$

– Dickenänderung:

$$D\delta\alpha_{33L}\Delta\mathbf{d} = \delta\bar{a}_{3L} D\bar{a}_{3L}\Delta\mathbf{d} = \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta w_L^K N_K N_M \mathbf{I} \Delta w_L^M = \delta\mathbf{d} \alpha''_{33L} \Delta\mathbf{d} \quad (7.49)$$

– Biegung:

$$D\delta\beta_{\alpha\beta S}\Delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta\bar{a}_{3s,\alpha} D\bar{a}_\beta + \delta\bar{a}_\beta D\bar{a}_{3s,\alpha} + \delta\bar{a}_{3s,\beta} D\bar{a}_\alpha + \delta\bar{a}_\alpha D\bar{a}_{3s,\beta})\Delta\mathbf{d} \quad (7.50)$$

$$= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta v_K (N_{K,\alpha} N_{M,\beta} + N_{K,\beta} N_{M,\alpha}) \Delta w_S^M$$

$$+ \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \frac{1}{2} \delta w_S^K (N_{K,\beta} N_{M,\alpha} + N_{K,\alpha} N_{M,\beta}) \Delta v_M = \delta\mathbf{d} \beta''_{\alpha\beta S} \Delta\mathbf{d}$$

## 7.5.2 Oberflächenlasten

Durch die Möglichkeit der Längenänderung der Schichtdirektoren während der Deformation können Dickenänderungen einzelner Schichten oder der gesamten Schale simuliert werden. Auch die Analyse geschichteter Strukturen, deren Belastung an der Ober- oder Unterseite des Laminats oder am Interface zweier angrenzenden Schichten eingeleitet wird, stellt für die 3–dimensionale Schichttheorie kein Problem dar.

Um jedoch die bezüglich der unbekanntenen Knotenvariablen  $\mathbf{d}$  linearisierte schwache Form des Gleichgewichts zu erhalten

$$\delta\mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial^2 W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}^2} \cdot \Delta\mathbf{d} = \delta\mathbf{d}^T \cdot \left( \mathbf{P} - \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \right), \quad (7.51)$$

müssen die äquivalenten Knotenkräfte, repräsentiert durch den Lastvektor  $\mathbf{P}$ , berechnet werden. Mit Hilfe der in Gleichung (7.36) angesprochenen Diskretisierung der Funktionen  $\delta\mathbf{v}$  und  $\delta\mathbf{w}_S$

$$\delta W_{\text{ext}} = - \int_A \left[ \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{v} + \sum_{S=1}^{NL} \mathbf{c}_S \cdot \delta\mathbf{w}_S \right] dA \quad (7.52)$$

$$= - \int_A \left[ \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v}_K + \sum_{S=1}^{NL} \sum_{K=1}^{NN} N_K \mathbf{c}_S \cdot \delta \mathbf{w}_S^K \right] dA \quad (7.53)$$

$$= - \left[ \sum_{K=1}^{NN} \mathbf{F}_P^K \cdot \delta \mathbf{v}_K + \sum_{S=1}^{NL} \sum_{K=1}^{NN} \mathbf{F}_{c_s}^K \cdot \delta \mathbf{w}_S^K \right] = - \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{P} \quad (7.54)$$

und den virtuellen Knotenwerten zugeordneten Kraftkomponenten

$$\mathbf{F}_P^K = \int_A N_K \mathbf{p} dA \quad , \quad \mathbf{F}_{c_s}^K = \int_A N_K \mathbf{c}_S dA \quad (7.55)$$

läßt sich der Elementlastvektor angeben.

$$\mathbf{P} = \left[ (\mathbf{F}_P^1)^T \ (\mathbf{F}_{c_1}^1)^T \ \dots \ (\mathbf{F}_{c_{NL}}^1)^T \ \dots \dots \ (\mathbf{F}_P^{NN})^T \ (\mathbf{F}_{c_1}^{NN})^T \ \dots \ (\mathbf{F}_{c_{NL}}^{NN})^T \right]^T \quad (7.56)$$

Analog zur 6-Parameter Theorie kann jede beliebige Lastkombination an den Laibungen der Schale berücksichtigt werden. Bei  $C^0$ -stetigen Schichttheorien, die die Zwangsbedingungen der Inextensibilität der Direktoren der einzelnen Schichten beinhalten, sind trotz der höheren Kinematik über die Dicke des Laminats bestimmte Lastrichtungen und Angriffspunkte auch weiterhin ausgeschlossen, siehe Bild 5.14.

#### Bemerkung:

- Entsprechende Aussagen lassen sich auch für die Berücksichtigung von Randbedingungen treffen. Durch die Beschreibung der Dickenänderungen der Schichten sind die Mehrschichttheorien in der Lage, das Deformationsverhalten von Strukturen zu simulieren, deren Randbedingungen sich an der Ober- bzw. Unterseite oder am Rand befinden.

## 7.6 Interlaminare Spannungen

Obwohl die "in-plane"-Spannungen von dünnen Laminaten durch "alle" Verschiebungsmodelle und von mäßig dicken bis dicken Strukturen durch die Mehrschichtmodelle sehr gut approximiert werden (siehe Beispiele 8.8 bis 8.10), stellt die Rückrechnung der transversalen Komponenten  $S^{13}$ ,  $S^{23}$  und  $S^{33}$  die eigentliche Problematik der Spannungsberechnung dar. Diese Spannungsanteile sind für die bei Laminaten häufig anzutreffende Versagensform der Delamination verantwortlich. So entstehen z.B. an freien Rändern geschichteter Strukturen, aufgrund unterschiedlicher Querkontraktionen der einzelnen Schichten, starke interlaminare Schubspannungen (Randspannungseffekt  $\rightarrow$  Randdelamination), siehe Pipes, Pagano (1970), Pagano, Pipes (1971). Eine genaue Vorhersage dieser Komponenten ist somit von großer Bedeutung.

Die Multidirektortheorie kann zwar den maximalen Wert eines transversalen Schubspannungsverlaufes recht gut abschätzen (Beispiel 8.8 und 8.9), die Erfüllung der beiden folgenden Bedingungen

- Spannungsfrei an der Ober- und Unterseite der Struktur bezüglich der Schubspannungen  $S^{13}$  und  $S^{23}$ .
- $C^0$ -Kontinuität der transversalen Spannungskomponenten in bezug auf die Dickenkoordinate.

läßt sich jedoch mit herkömmlichen Verschiebungsformulierungen (unabhängig von der verwendeten Kinematik), bei denen die Spannungen über das konstitutive Gesetz berechnet werden, nicht realisieren. Die Schichttheorien bieten aufgrund ihres Verfeinerungspotentials in Dickenrichtung eine qualitative Verbesserung an. Durch die Unterteilung der einzelnen Materialschichten in mehrere kinematische Unterschichten wird der geforderte Verlauf der Elastizitätstheorie besser angenähert. Die beiden Bedingungen können jedoch weiterhin nicht exakt befriedigt werden.

Abhilfe bietet erst die Einführung hybrid-gemischter Formulierungen, wo neben den Verschiebungsfunktionen auch Ansätze für die Spannungsverläufe auf der Basis eines HELLINGER-REISSNER-Funktional eingeführt werden. In diesen Ansätzen können die  $2(NL - 1) + 4$  Bedingungen

$$S_L^{\alpha 3}(\zeta_L = +1) = S_{L+1}^{\alpha 3}(\zeta_{L+1} = -1) \quad \text{mit} \quad L = 1, \dots, NL - 1 \quad (7.57)$$

$$S_1^{\alpha 3}(\zeta_1 = -1) = S_{NL}^{\alpha 3}(\zeta_{NL} = +1) = 0 \quad (7.58)$$

explizit integriert werden. So modifizierten Spilker (1982) und Liou, Sun (1987) im Rahmen einer 3D Finite-Elemente-Formulierung alle 6 Spannungskomponenten durch 75 bzw. 55 zusätzliche Parameter pro Schicht. Um die Vorteile der Verschiebungs- und der hybriden Formulierungen zu nutzen, berechnen Jing, Liao (1989) die Spannungen  $S^{11}$ ,  $S^{22}$ ,  $S^{12}$  und  $S^{33}$  auf die konventionelle Art und Weise (über das Stoffgesetz) und über 42 Spannungsparameter die beiden Komponenten  $S^{13}$  und  $S^{23}$  eines 3-schichtigen Laminats. Alle drei Formulierungen sind aufgrund des immensen Aufwandes auf lineare Analysen beschränkt, liefern dort jedoch sehr gute Übereinstimmungen zu analytischen Lösungen. Weiterhin sei die Arbeit von Di, Ramm (1993) erwähnt, die auf der Basis eines modifizierten HELLINGER-REISSNER-Prinzips ein hybrides, 4-Knoten Element zur linear elastischen Analyse anisotrop geschichteter Platten und Schalen entwickelten.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die beiden transversalen Schubspannungen aus den Gleichgewichtsbeziehungen am differentiellen Volumenelement

$$S^{11}|_1 + S^{12}|_2 + S^{13}|_3 = 0 \quad (7.59)$$

$$S^{21}|_1 + S^{22}|_2 + S^{23}|_3 = 0 \quad (7.60)$$

durch Integration nach der Dickenkoordinate  $\theta^3$  in einer Nachlaufrechnung zu bestimmen. Mit Hilfe der Gleichung (A.39) des Anhangs A und den durch die unbestimmte Integration entstandenen Integrationskonstanten können die Oberflächen- und die Kon-

tinuitätsbedingungen in die beiden Gleichungen (7.59) und (7.60) eingebaut werden. Die dabei benötigten Ableitungen der Verzerrungen  $E_{ij,1}$  und  $E_{ij,2}$  bzw. der kovarianten Basisvektoren und somit die zweiten Ableitungen der Verschiebungen lassen sich über die Formfunktionen analytisch berechnen.

## 7.7 Versteifungseffekt

Der in Kapitel 5.8 festgestellte Versteifungseffekt (Dickenlocking) bedarf bei anisotropen Strukturen, die mit einer  $C^0$ -stetigen Schichttheorie analysiert werden, einer weiteren Diskussion. Die zentrale Aussage des Unterkapitels 5.8.2 war die Tatsache, daß das Dickenlocking bei Systemen, bestehend aus Faserverbundwerkstoffen, u.a. vom Verhältnis des Elastizitätsmodul  $E_3$  in Dickenrichtung zum E-Modul  $E_1$  in Faserrichtung abhängt. Bei stark ausgeprägter Anisotropie kann somit bereits die 6-Parameter Theorie sehr gute Ergebnisse liefern, so daß die EAS-Erweiterung nicht zur Anwendung kommen muß, siehe Beispiel 8.7.

Durch die Verwendung der Multidirektorthorie auf faserverstärkte Lamine kommt in bezug auf den Versteifungseffekt ein weiterer begünstigender Faktor hinzu. Die höhere Kinematik dieser verfeinerten Schalenformulierung nähert den von der 3-dimensionalen Elastizitätstheorie geforderten linearen Verlauf der transversalen Normaldehnung  $E_{33}$  durch eine schichtweise konstante Treppenfunktion an. Diese Approximation "verursacht" von vornherein einen geringeren Fehler als der konstante Verlauf von  $E_{33}$  der Singledirektorthorie.

Aus diesen genannten Gründen kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß im Hinblick auf den numerischen Aufwand und der geringen Verbesserung der Ergebnisse auf eine Erweiterung der transversalen Normaldehnung  $E_{33L}$  jeder Schicht L auf eine schichtweise, in der Koordinate  $\xi_L$  lineare Dickenänderung mittels der EAS-Methode verzichtet wird.

## 8 Numerische Beispiele

Anhand einer interessanten Auswahl an Berechnungsbeispielen werden die Möglichkeiten und Vorzüge aber auch die Grenzen der Single- und Multidirektortheorie diskutiert und überprüft. Hierzu wurden die in den vorigen Kapiteln entwickelten Schalentheorien in das Programmsystem C A R A T des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert. Die Wahl der Beispiele erfolgte dabei nach dem Gesichtspunkt der Abdeckung eines möglichst großen Anwendungsbereiches. Er soll geometrisch nichtlineares Verhalten (große Rotationen und Verzerrungen), Stabilitätsanalysen und einen unsymmetrischen Laminataufbau beliebiger Schalenträgerwerke beinhalten.

Zum Vergleich werden die in der Literatur bekannten Beispiele und Versuchsergebnisse herangezogen.

Die Methoden zur Berechnung von Stabilitätspunkten sowie entsprechende Kurvenverfolgungsverfahren zur Durchführung nichtlinearer Strukturanalysen sind u.a. in Wagner (1991) und Reitinger (1994) nachzulesen.

### 8.1 Isotroper Balken

Das in Kapitel 5.8.1 zur Erläuterung des Versteifungseffektes der 6-Parameter Theorie eingeführte, einfache Beispiel (Bild 5.17) wird nun erneut behandelt, um einige der beschriebenen, grundlegenden Phänomene aufzuzeigen und um die Tauglichkeit der 7-Parameter Theorie zu prüfen. In Bild 8.1 sind mit einer Diskretisierung von fünf 8-knotigen Elementen in Balkenlängsrichtung die Ergebnisse einer linearen und nicht-linearen Analyse gegenübergestellt.

		linear	nichtlinear
$\eta/\xi = 1/10$	6-Parameter Theorie	3.281 (18.6%)	2.978 (15.6%)
	7-Parameter Theorie	3.978 (1.5%)	3.479 (1.4%)
	3D	4.030	3.530

Bild 8.1: Durchsenkung des Lastangriffspunktes

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß der Fehler der 6-Parameter Theorie mit Hilfe des EAS-Ansatzes deutlich reduziert werden kann, so daß der von der 3-dimensionalen Elastizitätstheorie geforderte lineare Verlauf der Dickenänderung mit guter Genauigkeit approximiert wird. Die verbleibenden Abweichungen von 1.5% bzw. 1.4% sind auf die relativ grobe Diskretisierung zurückzuführen. Aus diesem Grunde wurden Konvergenzstudien durchgeführt (Bild 8.2), die mit einer Verfeinerung entlang der Balkenachse die Konvergenz gegen die exakte Lösung bestätigen.



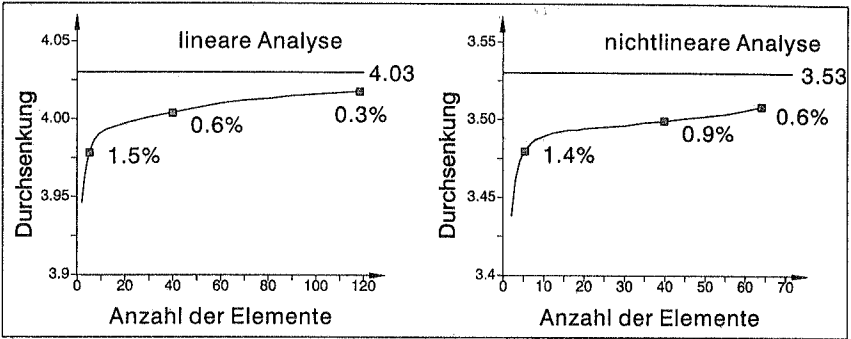


Bild 8.2: Konvergenzstudie

Anhand dieses einfachen Kragarmes soll weiter gezeigt werden, daß auch die Multidirektortheorie imstande ist, das Dickenlocking zu beseitigen. Dabei wird der Balken in mehrere Schichten unterteilt, so daß die kinematische Beschreibung in Dickenrichtung verfeinert wird. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß diese Unterteilung keinen mechanischen Hintergrund besitzt. Alle Geometrie- und Materialdaten der Struktur bleiben unverändert.

Die Berechnungen in Bild 8.3 zeigen, daß die Abweichungen der Multidirektortheorie im Vergleich zur exakten Lösung mit einer steigenden Anzahl an Schichten abnehmen. Der Grund für dieses Phänomen ist offensichtlich. Der in der Dickenkoordinate lineare Verlauf der transversalen Normaldehnung wird hierbei durch eine schichtweise konstante Funktion (Treppenfunktion) approximiert. Eine Erhöhung der Schichtanzahl liefert somit eine bessere Annäherung der linearen Verteilung.

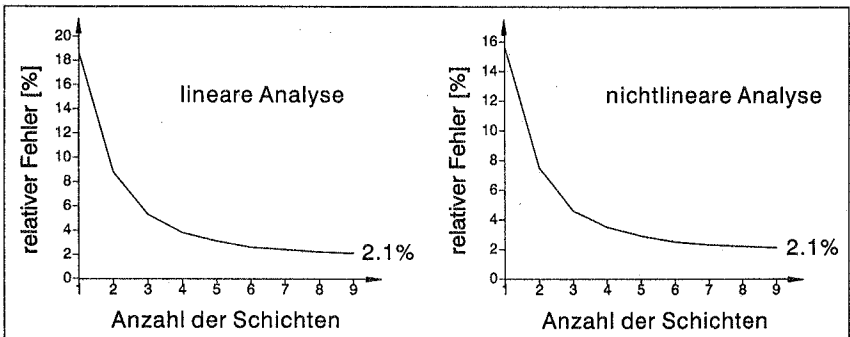


Bild 8.3: Balken mit isotropen Schichten

Da diese Analysen ebenfalls mit fünf Elementen durchgeführt wurden, können die restlichen Fehler von 2.1% bei entsprechend feinerer Diskretisierung ebenfalls beseitigt werden.

## 8.2 Isotroper Kreiszylinder ohne Endscheiben

Dieses Beispiel kann als Test für Schalenelemente interpretiert werden, um ihre Zuverlässigkeit bezüglich großer Deformationen (Verzerrungen und Rotationen) zu überprüfen. Die entsprechenden Geometrie- und Materialdaten sind in Bild 8.4 dargestellt.

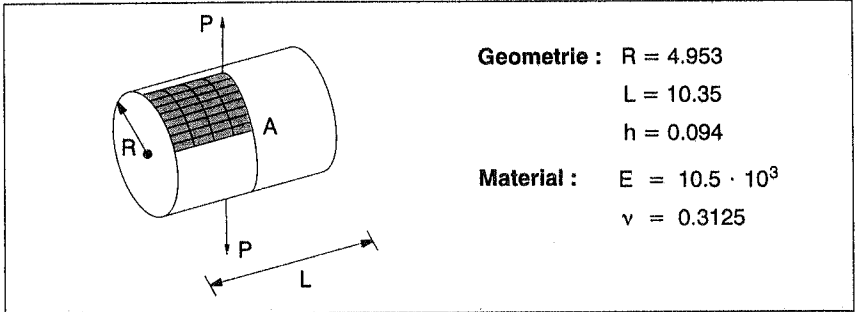


Bild 8.4: Kreiszylinder unter diametralen Einzellasten

Die Schale wurde mit einer konventionellen 5-Parameter Theorie (mit modifiziertem Stoffgesetz) sowie mit den bereits bekannten 3-dimensionalen Formulierungen berechnet. Um Vergleiche ziehen zu können, ist mit 20-knotigen Serendipity-Volumenelementen eine zusätzliche Analyse durchgeführt worden. Das resultierende Last-Verschiebungsdiagramm des Punktes A, Bild 8.5, läßt sich in zwei Bereiche unterteilen.

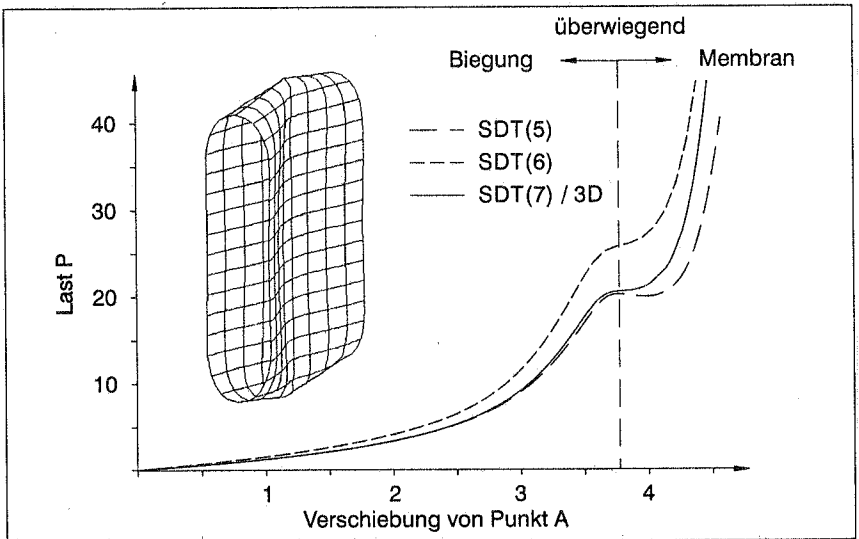
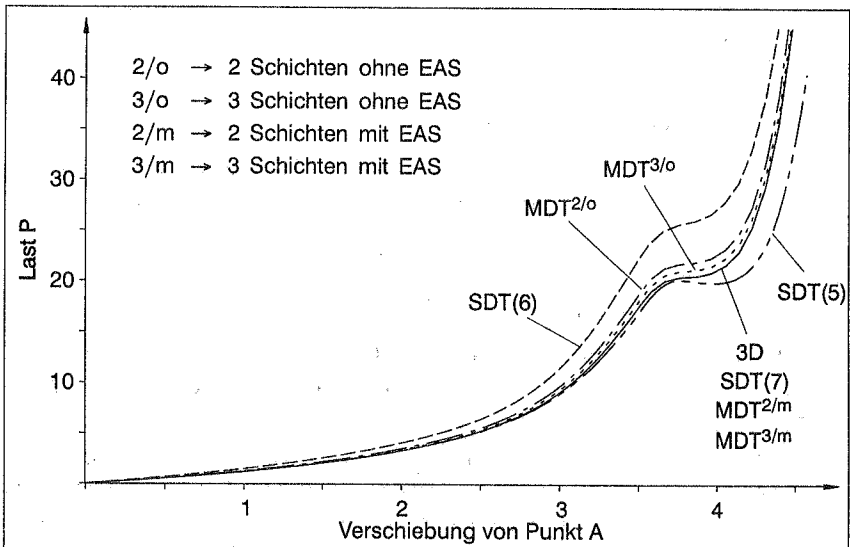


Bild 8.5: Last-Verschiebungskurve

Im Bereich bis zur gestrichelten Linie wird die Belastung zum größten Teil über Biegung abgetragen. Da der Defekt der 6-Parameter Theorie in biegedominanten Lastfällen auftritt, weicht ihre Lösung von allen anderen Formulierungen ab. Bei einer Verschiebung von ungefähr 3.8 schlägt die Struktur fast durch und es entwickelt sich ein Knick an der Oberseite des Zylinders. Aufgrund des nachlassenden Biegeeinflusses (rechts von der gestrichelten Linie) nähert sich die 6-Parameter Theorie wieder der 3D-Lösung an. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten der 5-Parameter Theorie liegt in der Tatsache begründet, daß diese Formulierung wegen ihres restriktiven Verschiebungsansatzes zwar große Rotationen, aber nur kleine Verzerrungen abbilden kann. Die fehlende Berücksichtigung der Dickenänderung und die damit verbundene Kondensation des Stoffgesetzes können dem zunehmenden Einfluß der Normalspannung in Dickenrichtung nicht gerecht werden.

Die gute Übereinstimmung der 7-Parameter Theorie mit der 3D-Kurve während des gesamten Deformationsvorganges unterstreicht den 3-dimensionalen Charakter der vorgestellten Formulierung und zeigt, daß auch bei großen Deformationen zuverlässige Ergebnisse erzielt werden.

Analog zum eingespannten Balken des vorangegangenen Kapitels wird der Zylinder wieder in mehrere Schichten unterteilt, Bild 8.6.



*Bild 8.6: Verminderung des Versteifungseffektes*

Der Abbildung ist zu entnehmen, daß bereits eine Unterteilung in zwei Schichten den Fehler der 6-Parameter Theorie um ungefähr 75% reduziert. Eine Verfeinerung in drei Schichten approximiert den wahren Verlauf schon recht gut. Da die 7-Parameter Theo-

rie bereits mit der 3D-Kurve übereinstimmt, ist es selbstverständlich, daß die Anwendung des EAS-Konzeptes auf die einzelnen Schichten der Multidirektorthorie ( $\cong$  lineare Dickenänderung pro Schicht) die selben Ergebnisse liefert. Auch in diesem Beispiel wird die abnehmende Bedeutung der EAS-Erweiterung deutlich, wenn sie auf die Multidirektorthorie angewendet wird.

### 8.3 Zweischicht-Zugprobe

Dieses Beispiel soll die Computersimulation eines Zugversuches an einem Kreuz- und Winkelverbund repräsentieren. Dabei werden die Auswirkungen eines unsymmetrischen Schichtaufbaus auf das Deformationsverhalten der Flachzugproben aufgezeigt. Die wesentlichen Strukturdaten der Faserverbundplatte sind in Bild 8.7 beschrieben.

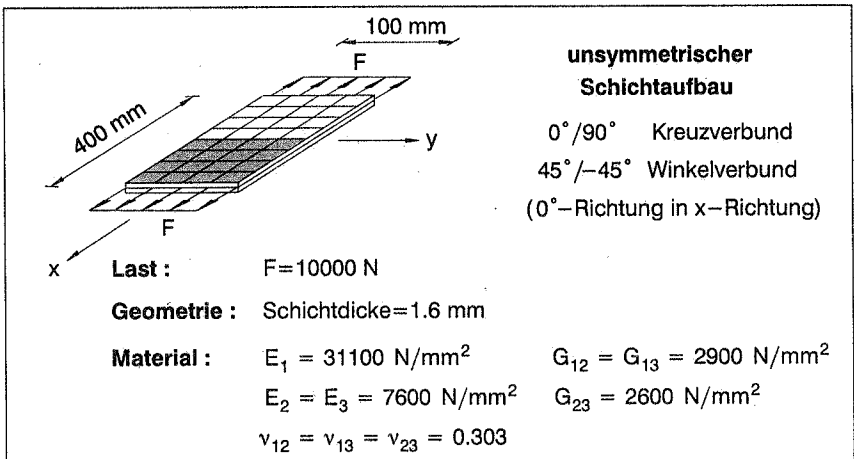


Bild 8.7: Zweischicht-Zugprobe

Die Platte wurde mit 8-knotigen Elementen analysiert. Zur Simulation eines Einspannbackens sind an den Seiten der Krafteinleitung bis auf die Verschiebung in x-Richtung alle Freiheitsgrade behindert.

Dabei stellen sich unter der Belastung F die für unsymmetrische Laminare typischen Kopplungseffekte unterschiedlicher Deformationsmodes ein, siehe Bild 8.8. Bei reiner Membranbeanspruchung entstehen beim Kreuzverbund Verschiebungen aus der Plattebene; der Verbund zeigt eine Biegeverformung. Entsprechend sind beim Winkelverbund die Dehnungen mit einer Torsionsverformung gekoppelt.

Beide Faserverbundlaminare wurden in einer linearen Analyse von Lehar (1985) und Dorninger (1989) untersucht. Letzterer führte auch geometrisch nichtlineare Berechnungen durch, so daß diese Ergebnisse als Vergleich herangezogen werden.

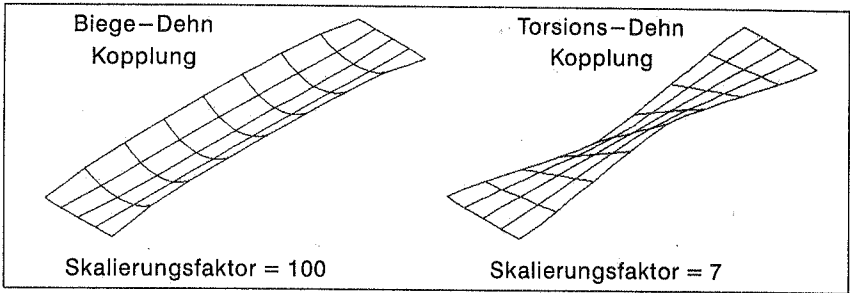


Bild 8.8: Verformte Struktur

In Bild 8.9 ist die Durchsenkung  $w$  entlang der  $y$ -Achse für die entsprechenden Schichtkonfigurationen aufgetragen.

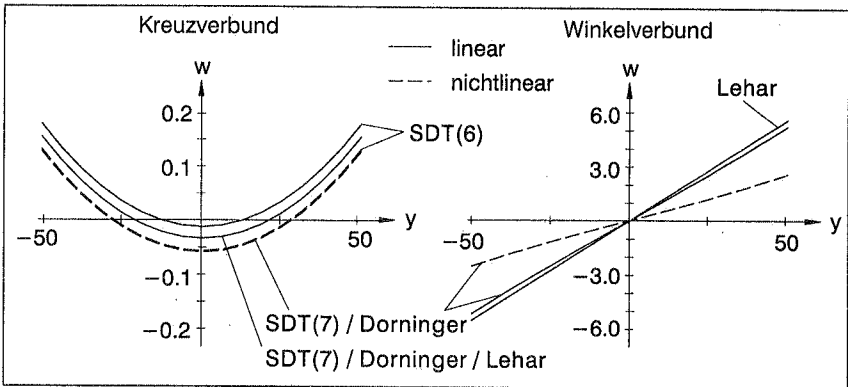


Bild 8.9: Verformungsverlauf

Die Ergebnisse der 7-Parameter Theorie zeigen für lineare und nichtlineare Berechnungen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten von Dorninger (1989). Da der Kreuzverbund Kopplungen der Dehnungs- und Biegeanteile beinhaltet, zeigt die 6-Parameter Theorie im linearen Fall starke, im nichtlinearen Fall hingegen schwache Versteifungseffekte. Beim Winkelverbund liefert sie aufgrund der sehr geringen Biegemomente  $m^{11}$  und  $m^{22}$  im Rahmen der graphischen Genauigkeit die selben Resultate wie die mit dem EAS-Konzept erweiterte Formulierung.

Auffällig ist die Tatsache, daß bei Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte eine erhebliche Versteifung des Systems eintritt.

## 8.4 Beullast einer Quadratplatte

Mit Hilfe dieses Beispiels soll der Einfluß des Schichtaufbaus auf die Stabilitätsgrenze einer Faserverbund–Quadratplatte unter Scheibenbelastung untersucht werden. Dabei wird durch die Variation der Faserorientierung anhand eines 24–schichtigen Winkelverbundes der Laminataufbau bezüglich der kritischen Last (Beullast) optimiert, siehe auch Kapitel 2.2.1. Der ausgeglichene und symmetrische Graphit–Epoxy–Verbund, Bild 8.10, besteht aus 24 Schichten  $(+\alpha, -\alpha)_{6s}$  und wird für folgende Randbedingungen analysiert: einfach unterstützt (Querverschiebung ist behindert) bzw. eingespannt an allen Rändern (Querverschiebung und beide Rotationen sind behindert).

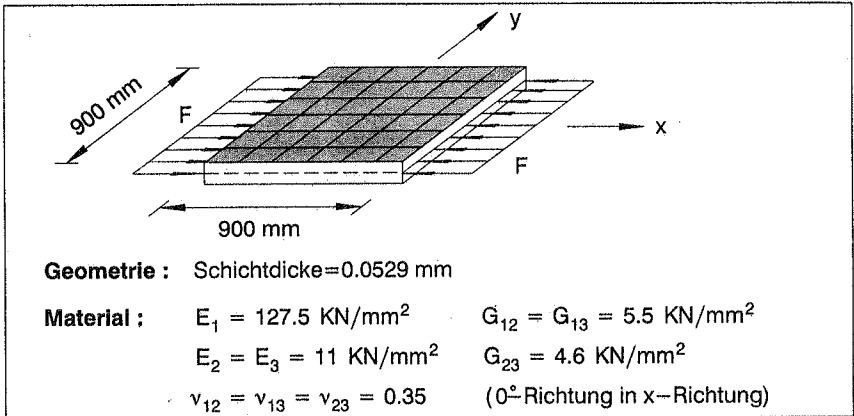


Bild 8.10: Quadratplatte unter Druckbelastung

Im Rahmen der Methode der Finiten Elemente können Stabilitätspunkte in erster Näherung durch die sogenannte klassische Beulanalyse ermittelt werden. Dabei berechnet sich die maximal ertragbare Last durch Multiplikation der gerade aufgebracht Belastung mit dem kleinsten Eigenwert eines linearisierten Eigenwertproblems. Aufgrund fehlender nichtlinearer Vorbeuldeformationen kann in diesem Beispiel auf begleitende Eigenwertberechnungen verzichtet werden.

In Bild 8.11 sind die Ergebnisse der Anfangsstabilitätsanalysen mit  $6 \times 6$  16–knotigen Elementen für unterschiedliche Faserorientierungen der eingespannten und der gelenkig gelagerten Platte dargestellt und mit linearen Beul–Finite–Element–Lösungen von Nemeth (1986) verglichen.

Der Abbildung ist zu entnehmen, daß sowohl die Beullast als auch der entsprechende Beulmode stark vom gewählten Faserwinkel abhängen. Die Schwankungen der kritischen Last betragen für beide Randbedingungen bis zu 50%. Dabei stimmen die Ergebnisse der 7–Parameter Theorie mit den Referenzwerten im einen Fall exakt und im anderen Fall recht gut überein. Die 6–Parameter Theorie hingegen überschätzt die

kritische Last für beide Strukturen. Die Modewechsel bei 51° und 60° wurden jedoch von beiden Theorien festgestellt, bleiben aber in Nemeth (1986) unerwähnt.

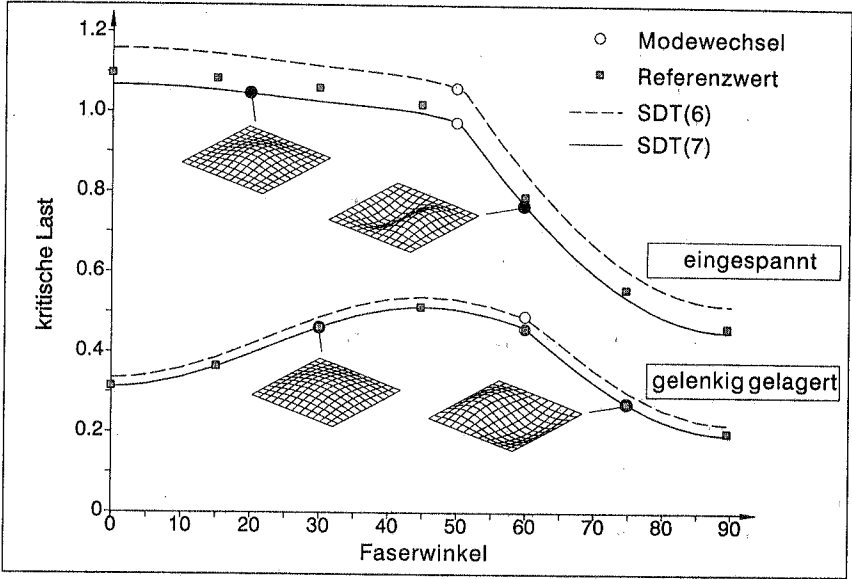


Bild 8.11: Abhängigkeit der Beullast vom Faserwinkel

Die Veränderung der Eigen- bzw. Beulformen über die Variationsbreite der Faserwinkel ist in Bild 8.12 für die gelenkig gelagerte Platte graphisch aufgetragen.

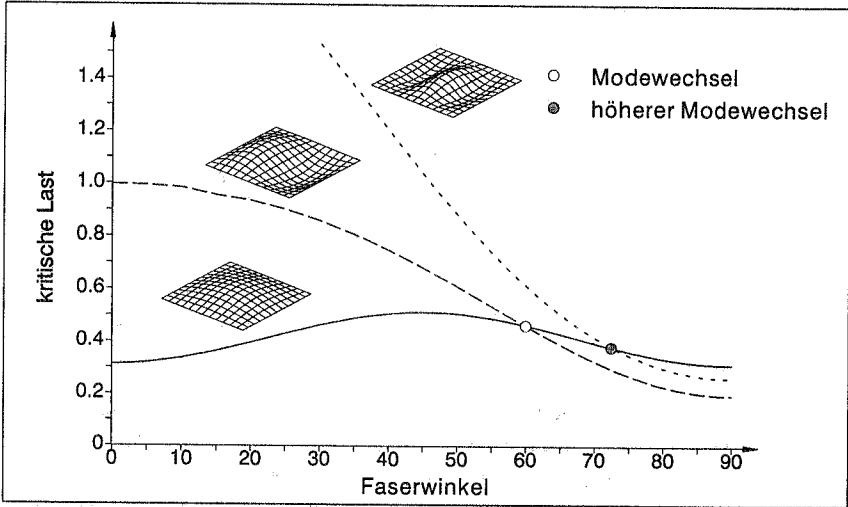


Bild 8.12: Wechsel der Eigenformen der gelenkig gelagerten Platte

Dorninger (1991) stellt bei der Analyse der Platte mit eingespannten Rändern bei einer Diskretisierung von  $4 \times 4$  16-knotigen Elementen (=169 Knoten) bei ungefähr  $75^\circ$  einen weiteren Modewechsel fest. Diese Aussage kann jedoch sowohl für die hier gewählte Diskretisierung als auch bei einer Netzverfeinerung auf  $8 \times 8$  16-knotige Elemente (=613 Knoten) oder  $14 \times 14$  8-knotige Elemente (=645 Knoten) nicht bestätigt werden. Der angesprochene weitere Modewechsel ist somit eindeutig auf die grobe Diskretisierung zurückzuführen.

Für die praktische Anwendung ergibt sich für die gelenkig gelagerte Platte im Hinblick auf die maximale Beullast ein optimaler Faserwinkel von  $45^\circ$ , bei eingespannten Rändern hingegen ein Winkel von  $0^\circ$  (unidirektionale Ausrichtung).

## 8.5 Durchschlagen einer Zylinderschale

Mit dem in Bild 8.13 dargestellten Zylindersegment soll das geometrisch nichtlineare Strukturverhalten einer geschichteten Schale analysiert und der Einfluß scheinbarer Symmetriebedingungen bei anisotropen Systemen untersucht werden. Das gelenkig gelagerte Laminate wird zum einen als Dreischicht-Kreuzverbund  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  und zum anderen als Zweischicht-Winkelverbund  $45^\circ/-45^\circ$  berechnet. Dabei ist die  $0^\circ$ -Richtung in Umfangsrichtung orientiert.

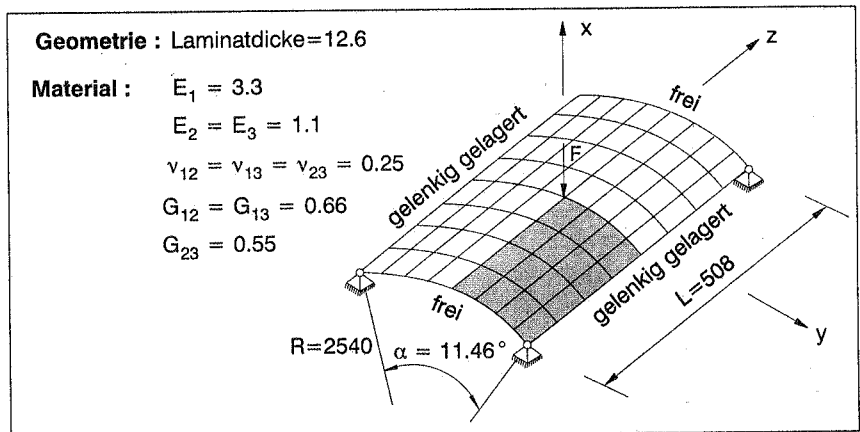


Bild 8.13: Zylindersegment unter Einzellast

Zum Vergleich des unterschiedlichen Strukturverhaltens beider Laminatsysteme sind in Bild 8.14 die Last-Verschiebungskurven des Lastangriffspunktes aufgetragen. Der Abbildung ist zu entnehmen, daß der Winkelverbund über den kompletten Deformationsvorgang das steifere Verhalten zeigt, da die Fasern beider Schichten in bezug auf die Lastabtragung günstiger orientiert sind. Ein weiterer fundamentaler Unterschied



besteht in der Tatsache, daß der Lastpfad des Winkelverbundes ausschließlich positive, der des Kreuzverbundes hingegen positive wie negative Werte enthält. Das Zweischicht-Laminat besitzt somit ein Rücksprungpotential, welches bei Entlastung zur Geltung kommt. Beim Dreischicht-Verbund muß eine Richtungsumkehr der Belastung das erneute Durchschlagen verursachen.

Für beide Schichtanordnungen ist das Versteifen der 6-Parameter Theorie deutlich erkennbar. Dabei sind die Abweichungen zum Zeitpunkt des Durchschlagens am größten, da dort die Biegespannungen ihre Extremwerte annehmen.

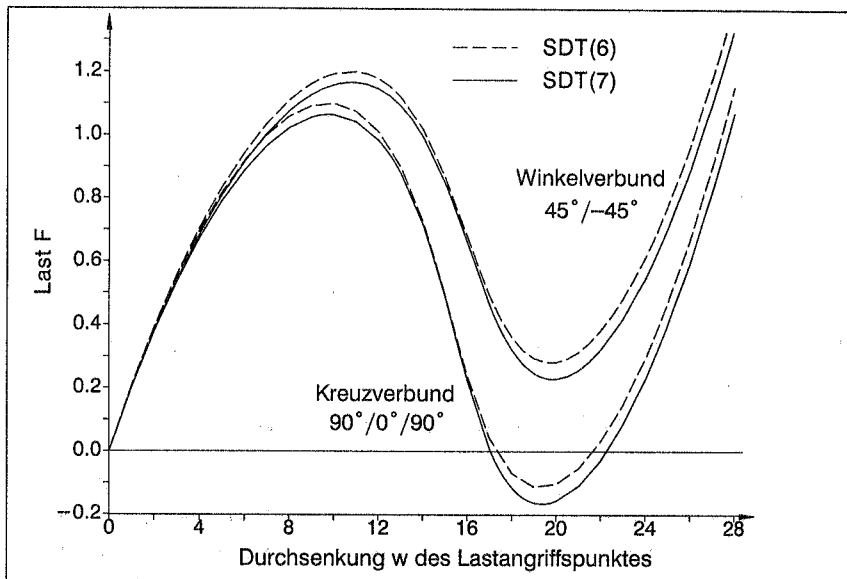


Bild 8.14: Last-Verschiebungskurven des Winkel- und Kreuzverbundes

Da der Kreuzverbund bezüglich Geometrie und Material symmetrisch ist, genügt es ein Viertel der Schale zu diskretisieren. Die Auswirkungen auf das Strukturverhalten einer Analyse eines Viertelmodells des  $45^\circ/-45^\circ$ -Laminats sind in Bild 8.15 erläutert. Die Graphik spiegelt die Abweichungen der Last-Verschiebungskurven der Viertelmodelle gegenüber der des vollen Systems deutlich wider. Bei Symmetrieüberlegungen muß somit die korrekte Berücksichtigung der Anisotropie beachtet werden.

Um sowohl das Durchschlagsverhalten als auch die Nachbeulverzweigungen im instabilen Bereich zu berechnen, wurde eine begleitende Eigenwertanalyse durchgeführt. Neben den beiden Durchschlagspunkten A(10.8, 1.166) und C(19.86, 0.228) existiert im Punkt B(15.5, 0.756) eine Verzweigung. Die dazugehörige Eigenform ist in Bild 8.15 angegeben. Da diese Beulform nicht doppelt symmetrisch ist, würde sie somit bei Modellierung eines Viertels des Zylindersegmentes nicht auftreten.

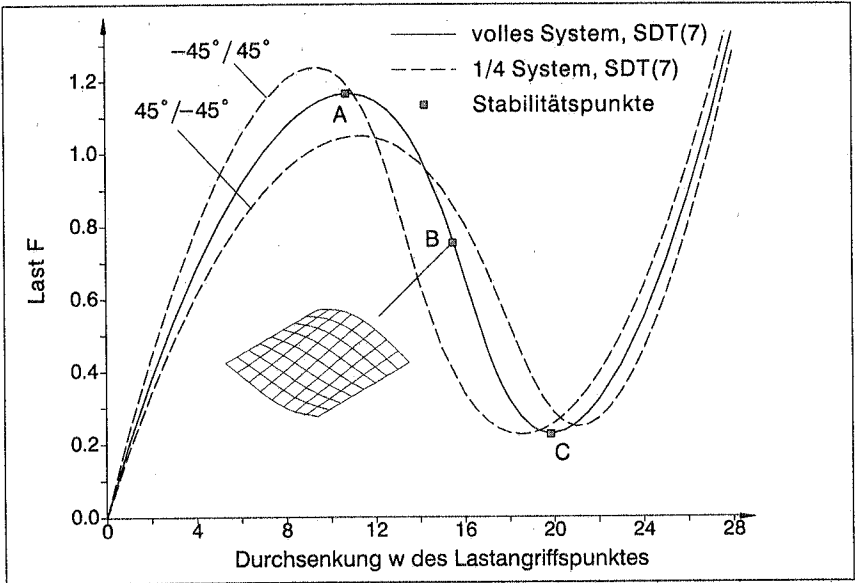


Bild 8.15: Last-Verschiebungskurven und 2. Beulform des Winkelverbundes

### 8.6 Anisotroper Kreiszylinder ohne Endscheiben

Um die Brauchbarkeit der in Kapitel 6.3 vorgestellten ANS-Methode auf die 3-dimensionalen 6- und 7-Parameter Theorien aufzuzeigen, wurde ein anisotroper Zylinder durch zwei Einzelkräfte entsprechend Bild 8.16 belastet. Die dreischichtige  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  Schale wird mit 4-knotigen Elementen diskretisiert, um die Anwendung der ANS-Formulierung auf starke Nichtlinearitäten, nämlich große Verzerrungen und große Rotationen zu demonstrieren. Dabei soll die  $0^\circ$ -Richtung der Fasern in Umfangsrichtung verlaufen. Die wesentlichen Strukturdaten des Laminats sind der Abbildung zu entnehmen.

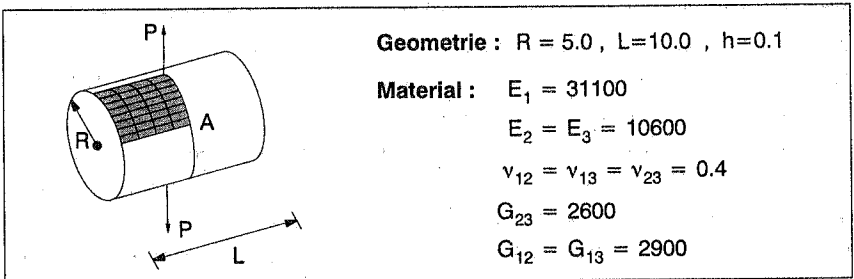
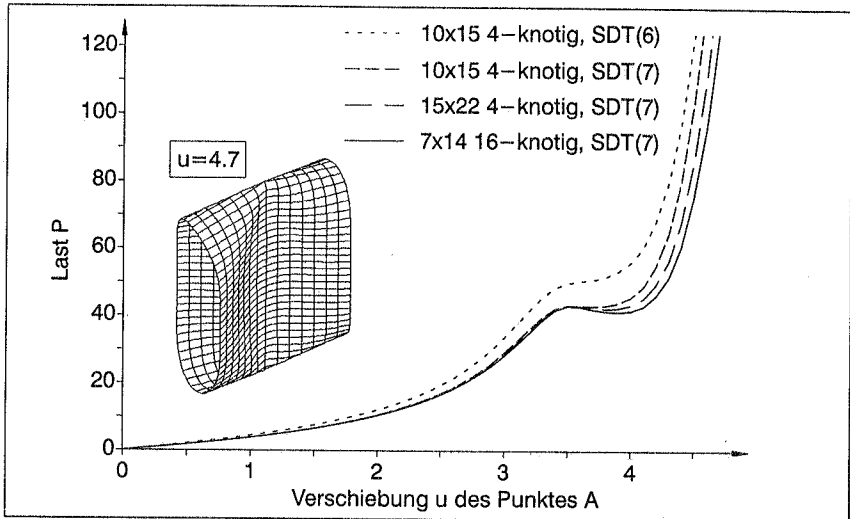


Bild 8.16: Kreiszylinder unter gegenüberliegenden Einzelkräften

Die resultierenden Last–Verschiebungskurven mit entsprechenden Konvergenzuntersuchungen sind in Bild 8.17 zusammengefaßt. Da das Verhältnis der Festigkeitskennwerte  $E_3$  und  $E_1$  nur in einer Größenordnung von ungefähr 1 zu 3 liegt, führt die 6–Parameter Theorie mit einer Diskretisierung von 10 mal 15 Elementen zu einem deutlichen Fehler (Dickenlocking). Dieser Versteifungseffekt kann jedoch bei einem größeren Verhältnis der Elastizitätsmoduli  $E_3 : E_1$  fast völlig verschwinden, siehe Beispiel 8.7.



*Bild 8.17: Last–Verformungsverhalten 4–knotiger Elemente*

Jedoch im Bereich starker Nichtlinearitäten (bei einer Verschiebung von ungefähr 3.7) ist eine Netzverfeinerung nötig, um die Abweichungen zur "Referenzlösung" mit 7x14 16–knotigen Elementen zu verringern und somit die großen Verzerrungen möglichst gut abzubilden. Die entsprechende Adaption auf 15 mal 22 4–knotige Elemente kann die Deformation besser wiedergeben.

## 8.7 Hyperbolische Schale unter diametralen Einzellasten

Die Abhängigkeit des Versteifungseffektes vom Verhältnis der Elastizitätsmoduli  $E_3 : E_1$  soll mit der in Bild 8.18 dargestellten und auf Bařar et al. (1993) zurückgehenden hyperbolischen Schale verdeutlicht werden. Sie wird durch zwei gegenüberliegende Einzelkräfte belastet und für zwei unterschiedliche Kreuzverbundschichtungen, nämlich  $90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$  und  $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ , analysiert ( $0^\circ$ –Richtung in Umfangsrichtung). Aus Symmetriegründen bezüglich Geometrie und Material kann die Diskretisierung auf ein Achtel der Struktur beschränkt werden.

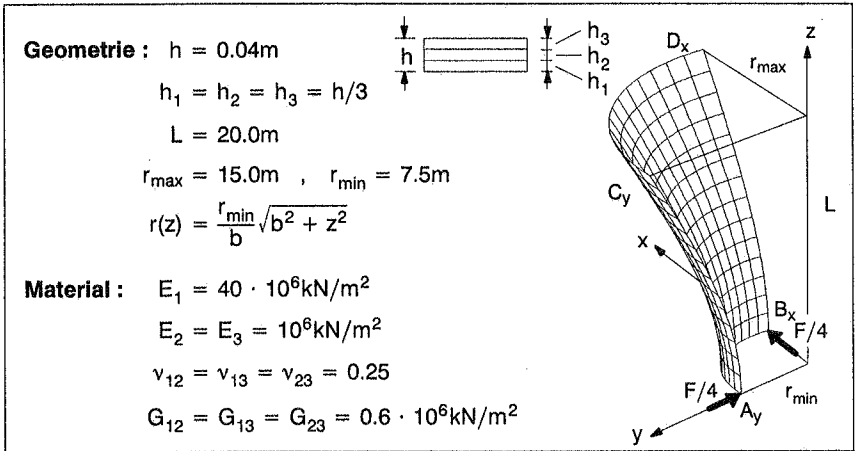


Bild 8.18: Hyperbolische Schale

In Bild 8.19 sind die Last–Verschiebungskurven der 4 Eckpunkte  $A_y, B_x, C_y, D_x$  des  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  – Laminats aufgetragen.

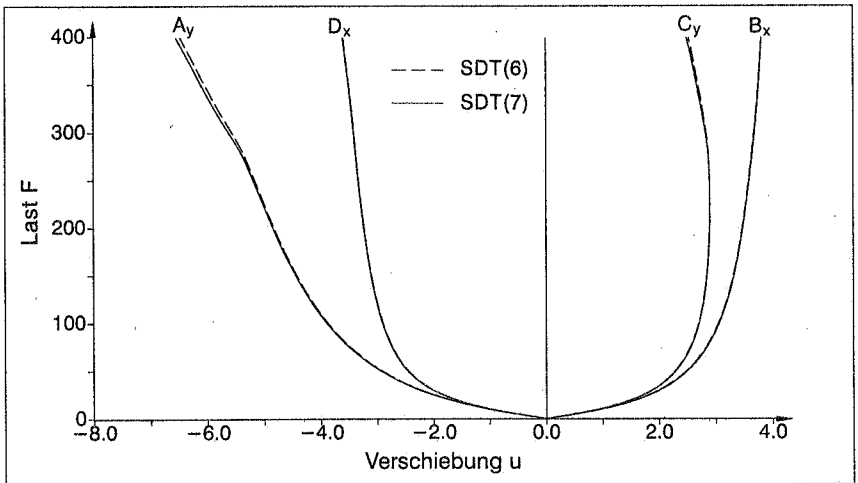


Bild 8.19: Last–Verschiebungsdiagramm des  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  –Laminats

Es zeigt sich kein merklicher Versteifungseffekt der 6–Parameter Theorie (SDT(6)) gegenüber der mit dem EAS–Konzept erweiterten Formulierung (SDT(7)). Der Grund hierfür ist das große Verhältnis des Elastizitätsmoduls  $E_3$  in Dickenrichtung zum E–Modul  $E_1$  in Faserrichtung von 1 zu 40, so daß die in Gleichung (5.115) hergeleitete Zwangsspannung  $S_{6P}^{33}$  vernachlässigbar klein ist. Da diese Spannung für das numeri-

sche Versteifen verantwortlich ist, bleiben der resultierende Fehler (5.117) und somit die "locking"-Probleme sehr gering.

Sowohl die durch große Verschiebungen und große Rotationen verursachten starken Nichtlinearitäten als auch den beträchtlichen Einfluß der Schichtfolge auf das Deformationsverhalten sind in Bild 8.20 dargestellt. Beide Verformungsfiguren entstehen unter einer Last von 303kN. Ein Laminataufbau von  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  zeigt das deutlich steifere Verhalten, da hier zwei Schichten existieren, in denen die Fasern in Umfangsrichtung verlaufen und somit in Richtung der größten Biegespannungen orientiert sind.

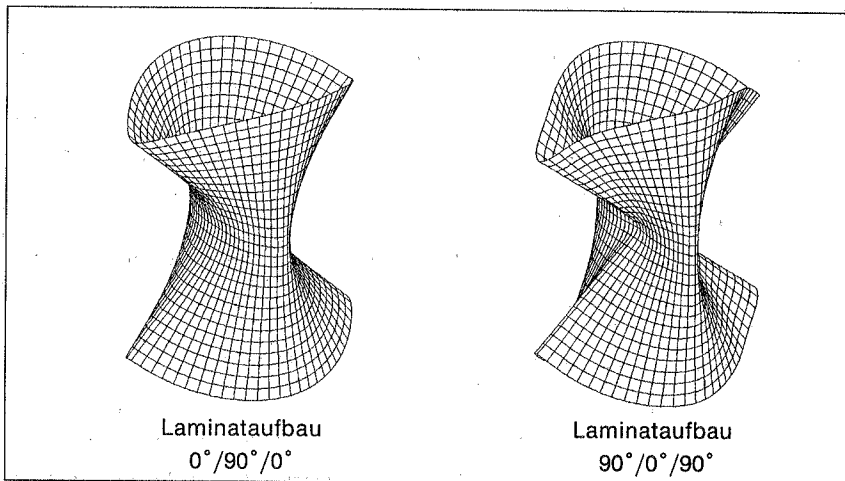


Bild 8.20: Verformte Konfiguration bei Laststufe  $F=303\text{kN}$

Aufgrund der Abhängigkeit des Versteifungseffektes vom Verhältnis  $E_3 : E_1$  kann die 6-Parameter Theorie bei anisotropen Strukturen auch in biegedominanten Lastfällen (im Gegensatz zu isotropen Systemen) zu guten Ergebnissen führen.

## 8.8 Rechteckplatte unter sinusförmiger Flächenlast

Die in Bild 8.21 beschriebene, gelenkig gelagerte Platte soll zum einen die Grenzen einer Platten- oder Schalentheorie aufzeigen, die auf einem  $C^1$ -stetigen Verschiebungsansatz (bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$ ) basiert. Zum anderen werden gleichzeitig die Vorteile einer  $C^0$ -stetigen Schichttheorie (Multidirektortheorie) und die Bedeutung einer korrekten Lasteinleitung bei dickeren, geschichteten Strukturen herausgearbeitet. Das Laminat wird mit einer sinusförmig verteilten Flächenlast  $p(x, y) = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$  versehen und besteht aus 3 Materialschichten, die in bezug auf das globale Plattenkoordinatensystem um die Winkel  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  orientiert sind.

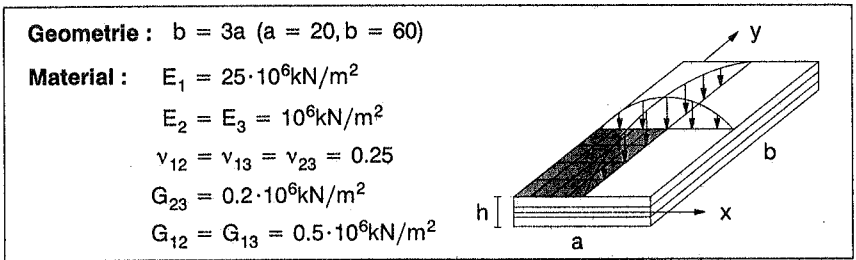


Bild 8.21: Rechteckige Platte: Geometrie und Materialdaten

Um die Genauigkeit der vorgestellten Theorien zu prüfen, wurden die Abweichungen der Durchsenkung des Mittelpunktes der Single- und der Multidirektortheorie von der Lösung nach der 3-dimensionalen Elastizitätstheorie von Pagano (1970) berechnet. In Bild 8.22 sind die relativen Fehler für unterschiedliche Schlankheiten dargestellt.

Schlankheit $S=a/h$	100	50	30	20	10	4
SDT(7)	0.4%	1.2%	3.5%	7.2%	18.0%	26.9%
MDT	0.0%	0.0%	0.4%	0.8%	1.2%	1.3%

Bild 8.22: Fehlerverteilung der Durchsenkung des Mittelpunktes

Die  $C^1$ -stetige Formulierung (SDT) liefert mit zunehmender Dicke der Platte immer größere Abweichungen. Auch die EAS-Erweiterung der 6-Parameter Theorie bringt keine signifikante Verbesserung (ca. 1/2%) der Ergebnisse. Die Multidirektortheorie hingegen stimmt für größere Schlankheiten ( $S > 50$ ) exakt mit der analytischen Lösung nach Pagano überein und zeigt für dicke Strukturen eine sehr gute Übereinstimmung. Selbstverständlich nähern sich alle vorgestellten Theorien für zunehmende Schlankheiten der klassischen Laminattheorie an, siehe Braun et al. (1994b).

Die Ursache des schlechten Abschneidens der Singledirektortheorien liegt im unterschiedlichen Materialverhalten der einzelnen Schichten begründet. Diese Werkstoffeigenschaft resultiert bei dickeren Laminaten in einer zick-zack Verteilung der "in-plane"-Verschiebungen über die Dicke, die durch die sogenannten Einschichtmodelle (siehe Kapitel 3.1.2) nicht beschrieben werden kann. In Bild 8.23 ist die normalisierte Verschiebung

$$\bar{u} = \frac{100 E_2 h^2}{p_0 a^3} u \quad , \quad \bar{z} = \frac{z}{h}$$

des Punktes  $P(0, \frac{b}{2})$  über die Dicke der Platte aufgetragen. Mit dieser Normalisierung wird die Lösung nach der klassischen Laminattheorie von der Schlankheit des Systems unabhängig, siehe Braun et al. (1994b).

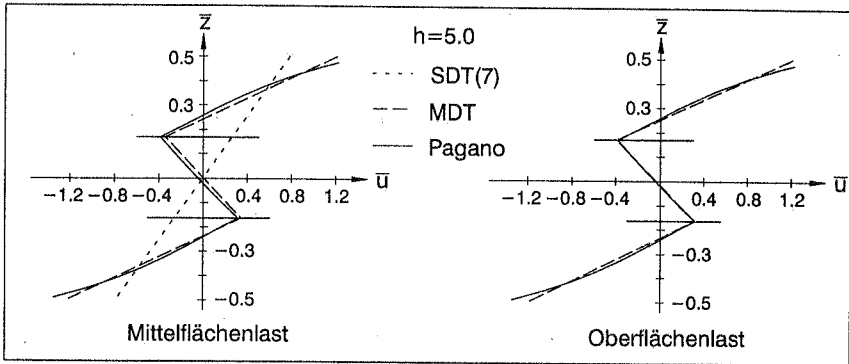


Bild 8.23: Normalisierte Verschiebung über die Plattendicke

Das rechte Diagramm in Bild 8.23 verdeutlicht den Effekt einer korrekten Lasteinleitung. Nur durch die Berücksichtigung der Dickenänderung jeder einzelnen Schicht kann eine Belastung an der Ober- oder Unterseite einer Struktur oder am Interface zweier Schichten realistisch erfasst werden. Der resultierende und nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems gehende Verlauf der Verschiebungen zeigt eine noch bessere Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

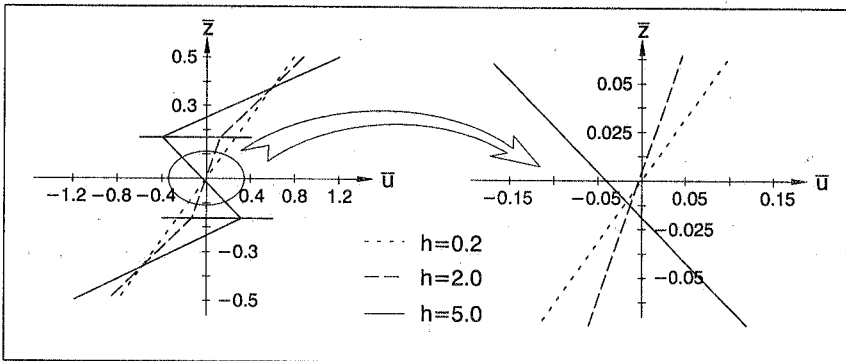


Bild 8.24: Einfluß der Oberflächenlasten bei zunehmender Schlankheit

Bild 8.24 (linke Abbildung) demonstriert den abnehmenden Einfluß des transversalen Schubs bei zunehmender Schlankheit des Systems. Auch die korrekte Lasteinleitung an der Oberseite des Laminats verliert bei dünneren Strukturen ihre Bedeutung. Die Kurven für  $h=0.2/2.0$  nähern sich dem Ursprung des Koordinatensystems, siehe rechtes Diagramm.

Die sehr gute Übereinstimmung der Verschiebungen mit der Referenzlösung läßt befriedigende Resultate der Spannungsberechnung erwarten. In Bild 8.25 wurden Normal-

spannungen aus den entsprechenden, konstitutiven Beziehungen an der Ober- und Unterseite des Laminats und der mittleren Schicht sowohl mit der analytischen Lösung nach Pagano als auch mit der in Kapitel 7.6 erläuterten hybriden 3D Finite-Element-Lösung nach Liou, Sun (1987) verglichen. Dabei sind folgende normalisierte Spannungs-komponenten verwendet worden.

$$(\bar{S}^{11}, \bar{S}^{22}) = \frac{h^2}{\rho_0 a^2} (S^{11}, S^{22}) \quad , \quad (\bar{S}^{13}, \bar{S}^{23}) = \frac{h}{\rho_0 a} (S^{13}, S^{23})$$

		$\bar{S}^{11}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{1}{2})$	$\bar{S}^{22}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{1}{6})$
S=a/h=4	Pagano (1970)	-1.14    1.10	-0.109    0.119
	MDT	-1.006    0.969	-0.104    0.117
	Liou, Sun (1987)	-1.077    0.975	-0.108    0.118
S=a/h=10	Pagano (1970)	-0.726    0.725	-0.0418    0.0435
	MDT	-0.707    0.706	-0.0411    0.0429
	Liou, Sun (1987)	-0.709    0.707	-0.0429    0.0448
S=a/h=20	Pagano (1970)	-0.650    0.650	-0.0294    0.0299
	MDT	-0.649    0.649	-0.0299    0.0304
	Liou, Sun (1987)	-0.653    0.646	-0.0298    0.0304

Bild 8.25: Normalisierte "in-plane"-Spannungen

Abgesehen von der Normalspannung  $\bar{S}^{11}$  bei einer Schlankheit von S=4 liefert die Multidirektorthorie im Vergleich zur aufwendigen Spannungsberechnung der hybriden Formulierung durchaus konkurrierende und in einigen Fällen sogar bessere Ergebnisse. Die vollständigen und wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, über die Dicke un stetigen

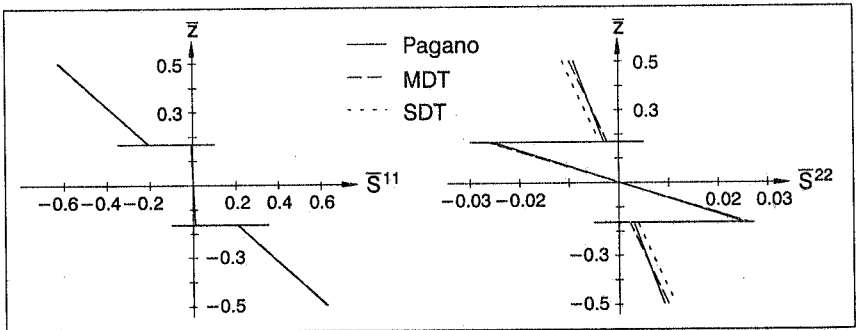


Bild 8.26: Normalisierte Spannungsverteilung über die Plattendicke (S=100)



Verläufe sind in Bild 8.26 für eine Schlankheit von  $S=100$  graphisch aufgetragen. Die Abbildung bestätigt die für die Verschiebungen getroffene Aussage, daß die unterschiedlichen Formulierungen bei größeren Schlankheiten gegen die klassische Laminattheorie konvergieren, auch für die Spannungsverläufe. Bei dickeren Strukturen hingegen, zeigen sich deutliche Unterschiede, siehe Bild 8.27. Während die Singledirektortheorie für beide Normalspannungen große Abweichungen aufzeigt, liefert die Multidirektortheorie exzellente Übereinstimmungen zur exakten Lösung.

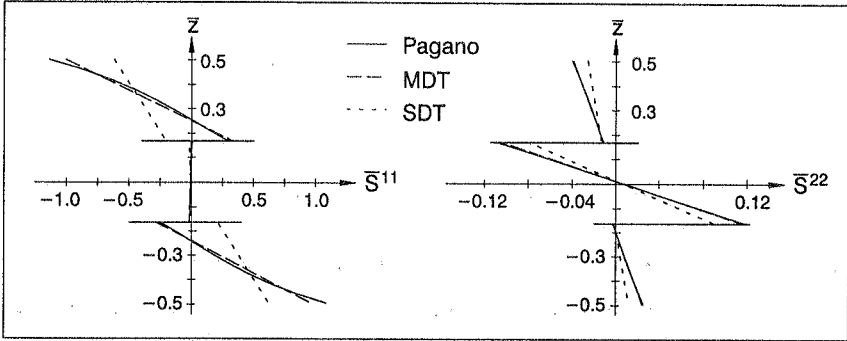


Bild 8.27: Normalisierte Spannungsverteilung über die Plattendicke ( $S=4$ )

Wie in Kapitel 7.6 bereits erwähnt, erweist sich die Berechnung der interlaminaren Schubspannungen bei geschichteten Strukturen als problematisch. Die Maximalwerte (an der Plattenmittelfläche) der Schubkomponenten können durch die Multidirektortheorie über das Stoffgesetz recht gut abgeschätzt werden, siehe Bild 8.28.

		$\bar{S}^{13}(0, \frac{b}{2}, 0)$	$\bar{S}^{23}(\frac{a}{2}, 0, 0)$
$S=a/h=4$	Pagano (1970)	-0,351	-0,0334
	MDT	-0,485	-0,0338
	Liou, Sun (1987)	-0,360	-0,0326
$S=a/h=100$	Pagano (1970)	-0,439	-0,0108
	MDT	-0,448	-0,0115
	Liou, Sun (1987)	---	---

Bild 8.28: Normalisierte, transversale Schubspannungen

Werden jedoch die vollständigen Spannungsverläufe über die Dicke des Laminats aufgetragen, Bild 8.29, so wird deutlich, daß die Bedingungen der Kontinuität am Interface zweier Schichten sowie die Spannungsfreiheit an der Ober- und Unterseite der Struk-

tur nicht erfüllt werden. Weiterhin ist zu beobachten, daß die von der Multidirektortheorie errechneten Spannungsverteilungen in jeder Schicht einen Durchschnittswert des analytischen Verlaufes von Pagano repräsentieren.

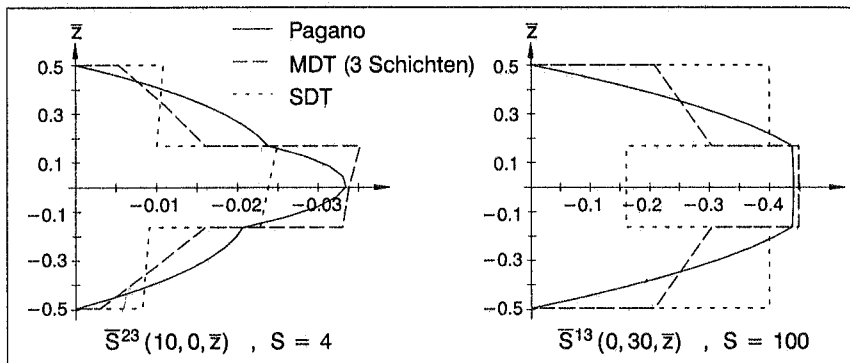


Bild 8.29: Normalisierte Schubspannungsverteilung über das Stoffgesetz

Um ein qualitativ besseres Ergebnis zu erhalten, wurden die beiden äußeren Schichten jeweils in 4 Unterschichten unterteilt, Bild 8.30. Aus Gründen der Übersicht und im Hinblick darauf, daß die Werte Durchschnittsgrößen darstellen, wird dabei nur der Wert an der Schicht- bzw. Unterschichtmittelfläche eingezeichnet. Der wahre Verlauf wird bei beiden Schlankheiten gut approximiert.

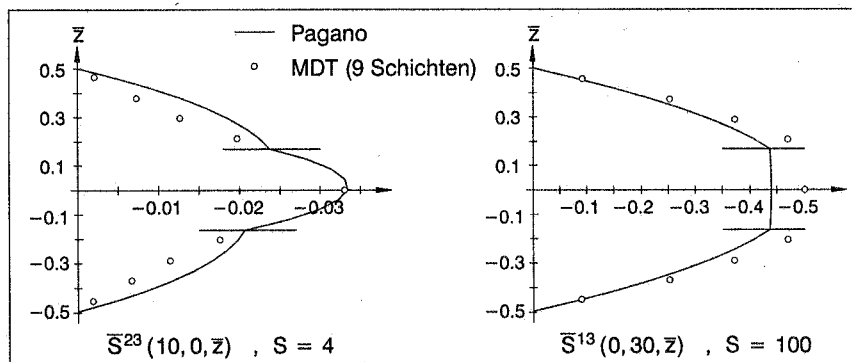


Bild 8.30: Normalisierte Schubspannungsverteilung – Verfeinerung

Wenn die Spannungen, wie in Kapitel 7.6 erläutert, über die Gleichgewichtsbeziehungen am differentiellen Volumenelement für die SDT berechnet werden, stellt sich für hohe Schlankheiten für  $\bar{S}^{13}$  eine sehr gute und für  $\bar{S}^{23}$  eine akzeptable Übereinstimmung zur analytischen Lösung ein, siehe Bild 8.31. Es ist deutlich zu erkennen, daß die beiden Bedingungen am Interface sowie an der Ober- und Unterseite exakt erfüllt sind.

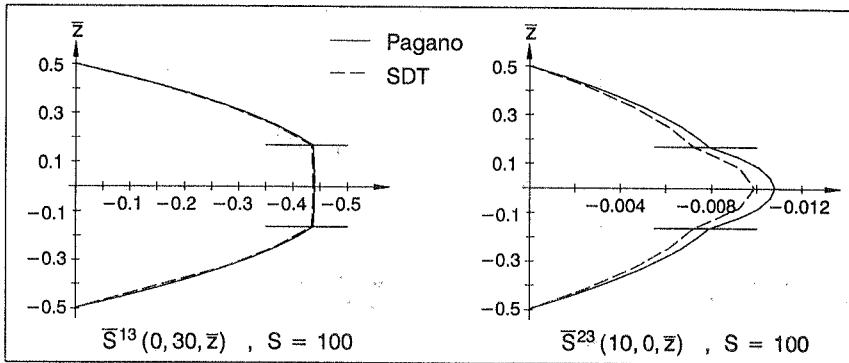


Bild 8.31: Normalisierte Schubspannungsverteilung aus dem Gleichgewicht

Da die Singledirektortheorie den komplizierten Verschiebungsverlauf über die Dicke bei mäßig dicken bis dicken Laminaten nicht beschreiben kann, ist es nicht verwunderlich, daß auch die Spannungsrückrechnung aus dem Gleichgewicht für geringe Schlankheiten starke Abweichungen liefert (Bild 8.32).

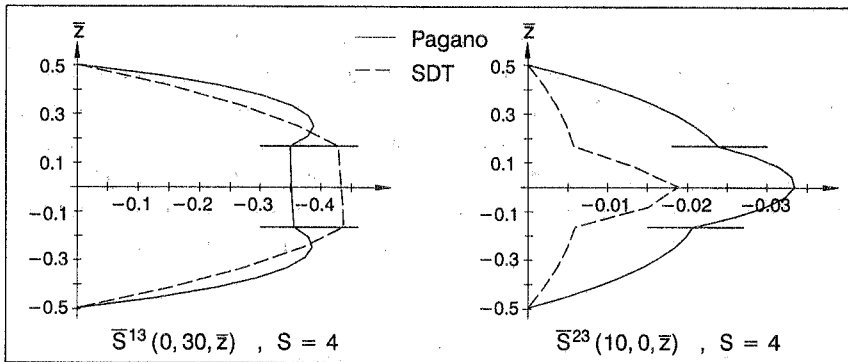


Bild 8.32: Normalisierte Schubspannungsverteilung aus dem Gleichgewicht

## 8.9 Sandwich-Platte

Die in Bild 8.33 beschriebene, gelenkig gelagerte Sandwich-Platte soll die Anwendung der Multidirektortheorie auf Laminats aufzeigen, die sich durch extreme Dicken- und Steifigkeitsunterschiede der einzelnen Schichten auszeichnen. Da die Schlankheit der Außenschichten  $1/10$  von der des Laminats beträgt, läßt sich somit die Simulation des Deformationsverhalten von sehr dünnen Strukturen demonstrieren. Das Material der äußeren Lagen ist deutlich steifer als das des Kerns, der in der 1-2 Ebene ( $\hat{=}$  xy-Ebene) als transversal isotrop angenommen wurde.

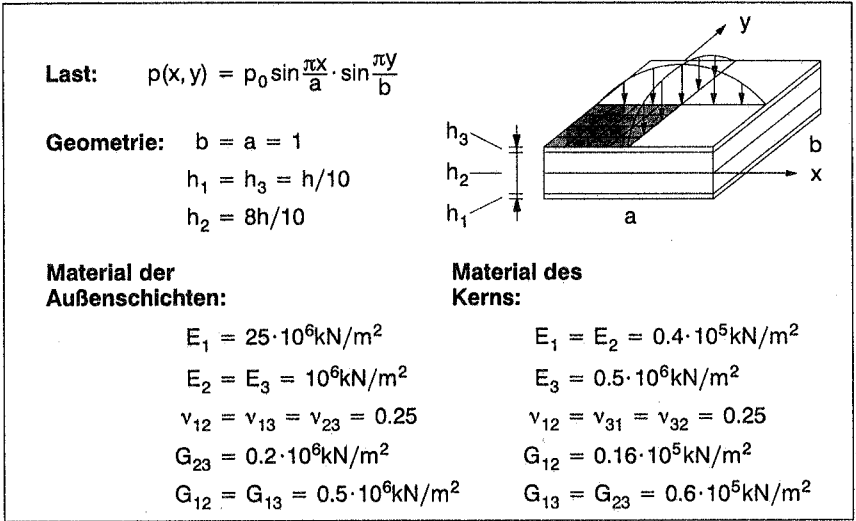


Bild 8.33: Sandwich-Laminat: Geometrie und Materialdaten der Schichten

Mit Hilfe der im vorigen Beispiel erwähnten Normalisierungen der Verschiebungen und Spannungen lassen sich die Werte bzw. die Verläufe prägnanter Punkte auftragen. In der linken Abbildung in Bild 8.34 zeigt sich aufgrund der deutlich unterschiedlichen Festigkeitskennwerte der Außenschichten gegenüber dem Kern ein extrem ausgeprägter Verschiebungsverlauf über die Sandwichdicke, der von der Singledirektortheorie selbstverständlich nicht erfaßt werden kann. Die Konvergenz gegen die klassische Laminattheorie bei abnehmender Strukturdicke ist in der rechten Abbildung zu erkennen.

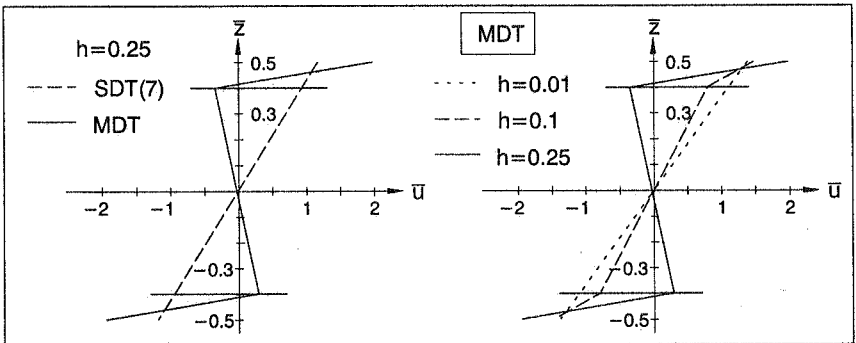


Bild 8.34: Normalisierte Verschiebung über die Plattendicke des Punktes  $(0, a/2)$

Obwohl kein analytischer Verlauf der Verschiebungen vorliegt, zeigt sich in den Normalspannungen, daß für dicke wie für dünne Strukturen mit der Multidirektortheorie sehr

gute Ergebnisse erzielt werden, siehe Bild 8.35. Die Abweichungen zur analytischen Lösung nach Pagano (1970) liegen für kleine Schlankheiten ( $S=4$ ) zwischen 3.5 und 4.5%, für hohe Schlankheiten ( $S=100$ ) hingegen bei 0.0 bis 0.2%. Die Singledirektortheorie liefert, ähnlich wie in Beispiel 8.8, erst für dünne Systeme ( $S > 50$ ) akzeptable Resultate.

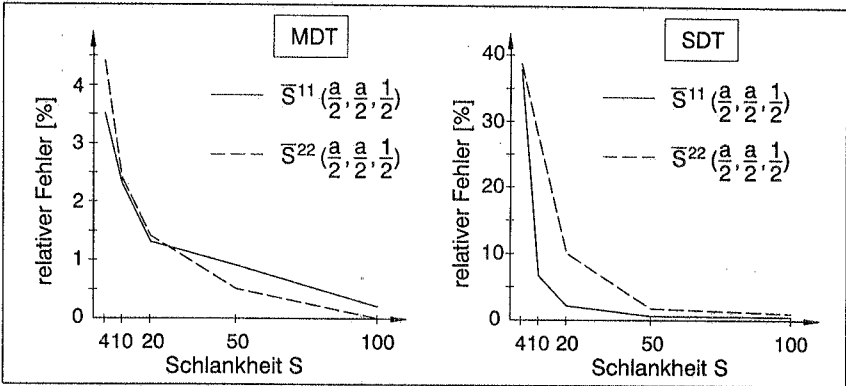


Bild 8.35: Abweichungen der Normalspannungen von SDT und MDT

Auch bei der Analyse von Sandwichlaminaten zeigt sich eine befriedigende Abschätzung der maximalen Schubspannungswerte an der Plattenmittelfläche, siehe Bild 8.36.

		$\bar{S}^{13}(0, \frac{a}{2}, 0)$	$\bar{S}^{23}(\frac{a}{2}, 0, 0)$
S=a/h=4	Pagano (1970)	-0.239	-0.1072
	MDT	-0.261	-0.1075
S=a/h=10	Pagano (1970)	-0.300	-0.0527
	MDT	-0.310	-0.0541
S=a/h=100	Pagano (1970)	-0.324	-0.0297
	MDT	-0.329	-0.0331

Bild 8.36: Normalisierte transversale Schubspannungen

Die Multidirektortheorie liefert auch bei dünnen Laminaten sehr gute Verschiebungs- und "in-plane"-Spannungsergebnisse, denn bei einer Schlankheit der Struktur von  $S_L = 100$  beträgt die Schlankheit der Außenschichten gleich 1 zu 1000.

## 8.10 Wandartiger Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

Dieses Beispiel soll die Vielseitigkeit der Multidirektortheorie bezüglich der korrekten Erfassung lokaler Oberflächenlasten demonstrieren. Ein wandartiger Einfeldträger, der im Silo- und Behälterbau Bestandteil der Baukonstruktion ist, wird üblicherweise im ebenen Spannungszustand als Scheibentragwerk analysiert, Theimer (1975). Im Rahmen dieser Arbeit wird der Träger jedoch über die Höhe mit einem Element diskretisiert. Jedes Element besteht aus 5 Schichten, so daß der Einfeldträger als dicker, geschichteter Balken interpretiert werden kann, siehe Bild 8.37.

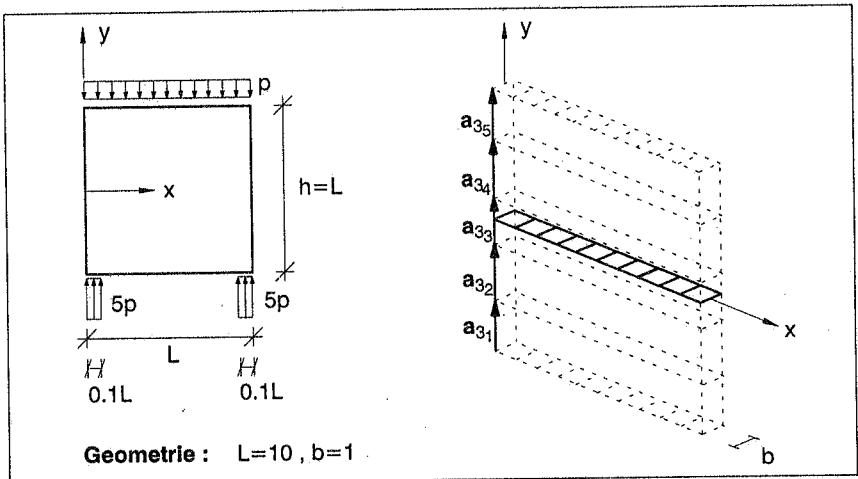


Bild 8.37: Ebenes Spannungsproblem: Strukturdaten und Diskretisierung

Die Ergebnisse der Multidirektortheorie werden mit der analytischen Lösung nach Schleeh (1964) verglichen. Durch die Einführung der Airyschen Spannungsfunktion können die 2 Gleichgewichtsbeziehungen, die 3 geometrischen Bedingungen und die 3 elastostatischen Gleichungen in eine homogene, partielle Differentialgleichung vierter Ordnung transformiert werden. Diese sogenannte Scheibengleichung oder Bipotentiale Gleichung ist von den Elastizitätskonstanten  $E$  und  $\nu$  unabhängig und gilt somit für jeden homogenen und isotropen Werkstoff, der dem Hookeschen Gesetz genügt.

In Bild 8.38 sind die Normalspannungen bezüglich des globalen Koordinatensystems über die Dicke des "Balkens" aufgetragen. Die Spannungsverteilung in  $x$ -Richtung der Multidirektortheorie zeigt eine gute Übereinstimmung zur analytischen Lösung nach Schleeh. Aufgrund des  $C^0$ -stetigen Verschiebungsansatzes und einer Poissonzahl  $\nu$  von 0.0 ergibt sich die transversale Normalspannung ( $y$ -Richtung) als "schichtweise" konstante Treppenfunktion, die jedoch die exakte Spannungsverteilung zufriedenstel-

lend approximiert. Die Einleitung der Last an der Oberseite des "Balkens" wird von der Multidirektortheorie sehr gut berücksichtigt, denn die Abweichung beträgt nur 3.7%.

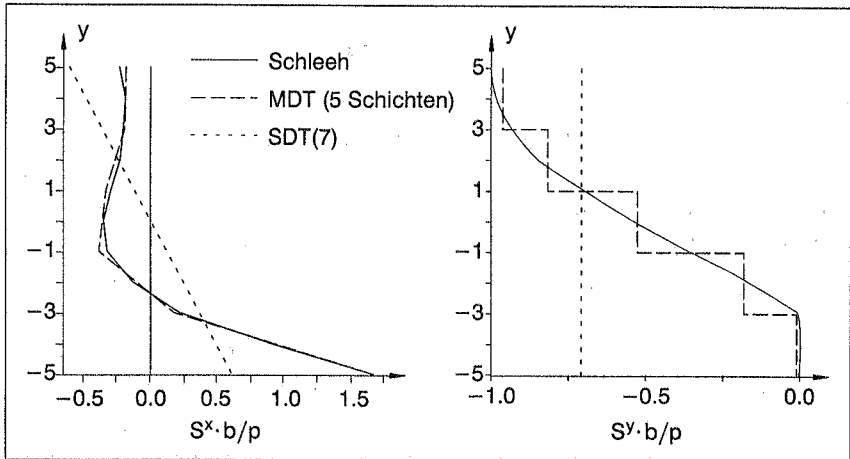


Bild 8.38: Normalisierte Spannungsverteilung im Punkt  $x=L/2$

Eine Erhöhung der Schichtanzahl auf 9 reduziert den relativen Fehler unter der Last auf 1.4%, siehe Bild 8.39.

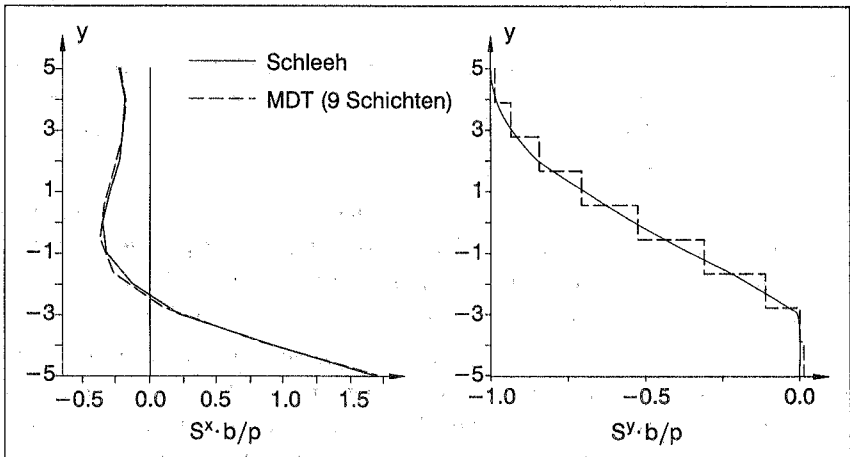


Bild 8.39: Normalisierte Spannungsverteilung im Punkt  $x=L/2$

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung und Bewertung

Ausgangspunkt für diese Arbeit ist der aus dem zunehmenden Bedarf und der weit verbreiteten Verwendung von Faserverbundwerkstoffen für Flächentragwerke resultierende Wunsch, für jede physikalisch und anwendungstechnisch sinnvolle Laminatkonstruktion ein adäquates Berechnungsmodell zur Verfügung zu stellen. Besondere Aufmerksamkeit soll dabei auf die folgenden Gesichtspunkte gelegt werden:

- Auf der Basis 3–dimensionaler Stoffgesetze sollen geometrisch nichtlineares Strukturverhalten und im speziellen große Deformationen (Verzerrungen und Rotationen) beschreibbar sein. Der damit verbundene mögliche Verlust der Tragfähigkeit muß durch entsprechende Stabilitätsanalysen diskutiert werden.
- Auf Materialebene muß nahezu jeder beliebige Schichtaufbau zugelassen sein, d.h. beliebig viele Schichten, jede Schicht mit beliebiger Dicke, orthotropem Material und beliebiger Lage der Orthotropieachsen innerhalb der Schalenebene.
- Als direkte Folge dieser beiden Punkte wird eine bezüglich der Dickenkoordinate  $C^0$ –stetige Schichttheorie entwickelt, die durch die Erfassung der Dickenänderungen der einzelnen Schichten und somit des gesamten Laminats lokale Effekte beschreiben kann.

Zur Realisierung dieser Forderungen und zur Umsetzung in nichtlineare Schalentheorien wurden zunächst durch eine systematische Herleitung (Kapitel 2) der charakteristischen Merkmale der Faserverbundwerkstoffe die wesentlichen Unterschiede dieser "Werkstoffe nach Maß" zu konventionellen Materialien aufgezeigt.

Eine intensive Aufbereitung (Kapitel 3) der in der Literatur zahlreich vorhandenen, unterschiedlichen kinematischen Ansätze sowie ein breites differentialgeometrisches und kontinuumsmechanisches Fundament (Kapitel 4) komplettieren das Rüstzeug zur Entwicklung nichtlinearer Schalenformulierungen für geschichtete Strukturen.

Um einen 3–dimensionalen Verzerrungs– und Spannungszustand beschreiben zu können, wurde in eine herkömmliche Schalentheorie mit  $C^1$ –stetigem Verschiebungsfeld (bezüglich der Dickenkoordinate) die Dickenänderung als sechster Freiheitsgrad mitaufgenommen (Singledirektortheorie, Kapitel 5). Dieser Übergang von einer 2–dimensionalen Betrachtungsweise zu einem 3D–Kontinuum ermöglicht zum einen die Berücksichtigung großer Deformationen und zum anderen den Einsatz beliebiger, unveränderter 3–dimensionaler Stoffgesetze. Bei der Analyse isotroper Strukturen, die die Belastung primär über Biegung abtragen, zeigt die Theorie jedoch einen Versteifungseffekt (Dickenlocking) der Größenordnung  $v^2$ , der durch entsprechende Metho-



den der  $h$ - oder  $p$ -Adaption nicht behoben werden kann. Es wurde gezeigt, daß der Fehler bei anisotropen Tragwerken vom Quotient des Elastizitätsmodul  $E_3$  in Dickenrichtung zum  $E$ -Modul  $E_1$  in Faserrichtung und von den beiden Querdehnzahlen  $\nu_{13}$  und  $\nu_{23}$  abhängt.

Der Versteifungseffekt wurde durch das "enhanced assumed strain" Konzept auf der Basis einer hybrid-gemischten Formulierung (Kapitel 6) beseitigt. Dabei wird auf Elementebene über eine zusätzliche Variable  $\beta_{33}$  (7-Parameter Theorie), jedoch bei gleichbleibender Gesamtanzahl an Unbekannten, der benötigte, lineare Normaldehnungsverlauf erzeugt. Weiterhin wurden die aus herkömmlichen Schalentheorien (5 Parameter) bekannte "assumed natural strain" Methode und das "enhanced assumed strain" Konzept zur Beseitigung des "shear"- und "membrane-locking" niedrig interpolierter Schalenelemente auf die Singledirektorthorie übertragen. Somit besteht die Möglichkeit, Analysen anisotrop geschichteter Flächentragwerke mit vollintegrierten 4-knotigen Elementen durchführen zu können.

Zur Berechnung anisotrop geschichteter Laminates mit "beliebigen" Dicken- und/oder Steifigkeitsverhältnissen der einzelnen Schichten ist eine nichtlineare, 3-dimensionale,  $C^0$ -stetige Schichttheorie (Multidirektorthorie, Kapitel 7) entwickelt worden, die die Singledirektorthorie als Spezialfall enthält. Unter Berücksichtigung schalentypischer Eigenschaften, wie z.B. Beschreibung des Schalenraumes über eine Referenzfläche, 2-dimensionale Netzgenerierung und explizite Integration der Steifigkeitsmatrix kann die Formulierung Lasteinleitungsprobleme, lokale, interlaminare Effekte und Dickenänderungen der einzelnen Schichten simulieren. Der angesprochene Versteifungseffekt (Dickenlocking) spielt bei Schichttheorien für Laminates aus zwei Gründen eine untergeordnete Rolle. Unabhängig von der verwendeten Kinematik ist bei stark ausgeprägter Anisotropie der Fehler sehr gering. Zusätzlich wird der geforderte lineare Verlauf der transversalen Normaldehnung aufgrund der höheren Kinematik durch eine stückweise konstante Treppenfunktion angenähert. Der resultierende Fehler ist somit ohnehin geringer als bei der Singledirektorthorie, die den linearen Verlauf durch eine konstante Funktion approximiert. Auf die erwähnte EAS-Erweiterung zur Beschreibung einer schichtweise linearen Dickenänderung kann somit, auch im Hinblick auf den hohen numerischen Aufwand verzichtet werden.

Zahlreiche und in bezug auf den Anwendungsbereich breit gestreute Testbeispiele (Kapitel 8) dokumentieren die Brauchbarkeit der Single- und Multidirektorthorie:

- Die Analyse eines isotropen, eingespannten Balkens (Beispiel 8.1) sowie die Erfassung großer Deformationen eines isotropen Kreiszyllinders (Beispiel 8.2) zeigen eindrucksvoll, daß sowohl die Singledirektorthorie (7 Parameter) als auch die Multidirektorthorie das Dickenlocking vollständig beseitigen. Aufgrund der kinematischen Verfeinerung in Dickenrichtung (mehrere Schichten) durch die Multi-

- direktortheorie verliert die Anwendung der EAS–Erweiterung auf die einzelnen Schichten deutlich an Bedeutung. Die gute Übereinstimmung der vorgestellten Theorien mit 3D–Vergleichsrechnungen unterstreichen, im Gegensatz zu herkömmlichen 5–Parameter Theorien, den 3–dimensionalen Charakter beider Schalenformulierungen.
- Einfache Zugversuche an unsymmetrisch geschichteten Flachzugproben (Beispiel 8.3) demonstrieren die Kopplung unterschiedlicher Deformationsmodes. Unter reiner Membranbeanspruchung entstehen beim Kreuzverbund Biegeverformungen, beim Winkelverbund hingegen Torsionsverformungen.
  - Anhand eines 24–schichtigen Winkelverbundes (Beispiel 8.4) unter Scheibenbelastung werden die Faserwinkel der einzelnen Schichten bezüglich der kritischen Last (Beullast) optimiert. Dabei ergeben sich für beide Randbedingungen (gelenkig gelagert und fest eingespannt) starke Abhängigkeiten der Beullast und der zugehörigen Beulmodes vom gewählten Winkel mit Unterschieden der Stabilitätsgrenze bis zu 50%. Auch in diesem Beispiel ist das Versteifen der 6–Parameter Theorie zu erkennen. Die maximal ertragbare Last wird bei gelenkig gelagerten Rändern bei einem Faserwinkel von  $45^\circ$ , bei eingespannten Rändern hingegen bei  $0^\circ$  erzielt.
  - Ein gelenkig gelagertes Zylindersegment (Beispiel 8.5) unter mittiger Einzelkraft dient zur Untersuchung des Einflusses scheinbarer Symmetriebedingungen anisotroper Lamine auf das Struktur– und Stabilitätsverhalten. Die geometrisch nichtlineare Analyse eines Zweischicht–Winkelverbundes unter Ausnutzung geometrischer Symmetriebedingungen zeigt deutliche Abweichungen gegenüber den Berechnungen am vollen System. Die entsprechenden, nicht doppelt symmetrischen Beulformen können am Viertelmodell nicht festgestellt werden. Ein weiteres interessantes Ergebnis ist die starke Abhängigkeit des Durchschlagverhaltens vom Schichtaufbau des Zylinders. Während der zweischichtige Winkelverbund bei Entlastung ein Rücksprungverhalten (nur positive Lastwerte) zeigt, muß bei einem Dreischicht–Kreuzverbund eine Umkehr der Belastung das erneute Durchschlagen verursachen (positive und negative Lastwerte).
  - Die Analyse eines anisotropen Zylinders unter gegenüberliegenden Einzelkräften (Beispiel 8.6) bestätigt die Anwendung der assumed natural strain Methode auf die Singledirektortheorien. Dabei liefert die 6–Parameter Theorie bei der Beschreibung der großen Deformationen aufgrund des geringen Verhältnisses  $E_3 : E_1$  der Elastizitätsmoduli von 1 zu 3 deutliche Versteifungseffekte. Bei größeren Unterschieden der Elastizitätskennwerte  $E_3$  und  $E_1$  kann das Dickenlocking jedoch vollkommen verschwinden, wie die geometrisch nichtlineare Berechnung der dreischichtigen, hyperbolischen Schale (Beispiel 8.7) demonstriert. Das Verhältnis der E–Moduli liegt in der Größenordnung von 1 zu 40, so daß die resultierende Zwangsspannung sehr

- gering und der "locking"-Fehler vernachlässigbar ist. Eine wichtige Schlussfolgerung ist die Aussage, daß auch die 6-Parameter Theorie bei Berechnungen anisotrop geschichteter Lamine, die die Belastung über Biegung abtragen, sehr gute Resultate liefern kann (im Gegensatz zu isotropen Strukturen).
- Die Untersuchungen einer 3-schichtigen, gelenkig gelagerten Platte (Beispiel 8.8) verdeutlichen die Grenzen einer Schalenformulierung mit  $C^1$ -stetigem Verschiebungsfeld. Unterschiedliche Schubverformungen der einzelnen Schichten lassen aus einer ursprünglichen Normalen auf der Mittelfläche nach der Deformation eine zick-zack Linie entstehen. Da der Einfluß des Schubes bei größeren Schlankheiten abnimmt (Konvergenz gegen klassische Laminattheorie), kann die Singledirektortheorie erst für Schlankheiten größer 30 befriedigende Resultate der Verschiebungs- und "in-plane"-Spannungsverläufe liefern. Die Multidirektortheorie hingegen ist sowohl für dünne als auch für dicke Lamine einsetzbar. Weiterhin wurden Probleme der korrekten Lasteinleitung sowie der Beschreibung interlaminaer Schubspannungen diskutiert. Die Maximalwerte der transversalen Schubkomponenten werden durch die Multidirektortheorie über das Stoffgesetz recht gut abgeschätzt. Jedoch die Bedingungen der Kontinuität am Interface benachbarter Schichten und der Spannungsfreiheit an der Ober- und Unterseite der Struktur lassen sich bei Berechnungen über die konstitutiven Gleichungen nicht realisieren. Eine qualitative Verbesserung liefert das in der Schichttheorie steckende Verfeinerungspotential, indem einzelne Schichten in Unterschichten unterteilt werden. Ein genauerer Verlauf der Spannungen kann aber erst durch die Rückrechnung über die Gleichgewichtsbeziehungen erreicht werden. Die für dieses Beispiel getroffenen Aussagen können eins zu eins auf das gelenkig gelagerte Sandwich Laminat (Beispiel 8.9) übertragen werden. Die Multidirektortheorie kann somit auch auf Systeme mit extrem unterschiedlichen Dickenverhältnissen bei einer Schlankheit einzelner Schichten von 1 zu 1000 angewendet werden.
  - Die Berechnung der Spannungsverteilung eines wandartigen Einfeldträgers (Beispiel 8.10) spiegelt das Anwendungspotential der Multidirektortheorie wider. Durch die Berücksichtigung der Dickenänderungen der einzelnen Schichten können Lasteinleitungsprobleme an der Ober- oder Unterseite einer Struktur bewältigt werden. Die Analyse des Trägers mit einem Element über die Dicke (bestehend aus fünf bzw. neun Schichten) liefert einen relativen Fehler der Normalspannungen unter der Last von 3.7%, bei einer Verfeinerung auf neun Schichten nur noch 1.4%.

## 9.2 Fazit und Ausblick

Alle Platten- und Schalentheorien zur Analyse des Deformationsverhaltens beliebig geschichteter Strukturen basieren im wesentlichen auf 2 Säulen, die mit den Begriffen Kinematikmodell und Materialmodell umschrieben werden können. Der heutige Forschungsstand beider Anteile steht zueinander in einem konträren Verhältnis.

Die Entwicklung von Schalentheorien mit unterschiedlichen Approximationsstufen des Verschiebungsansatzes über die Strukturdicke kann als abgeschlossen angesehen werden. Alle physikalischen Größen (Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen) eines beliebig aufgebauten Laminats unter Lasteinwirkung lassen sich mit exzellenter Genauigkeit berechnen.

Auf Materialebene hingegen stehen die Forschungsaktivitäten erst am Anfang ihrer Entwicklung. Dies ist aufgrund des relativ jungen Werkstoffes (im Sinne der industriellen Nutzung) nicht verwunderlich, wenn bedacht wird, daß selbst das nichtlineare Material- und Schädigungsverhalten des deutlich älteren und etablierteren Werkstoffes Beton oder Stahlbeton bis zum heutigen Tage noch nicht hundertprozentig einer Computersimulation zugänglich ist. Die zahlreichen und komplizierten mikromechanischen Bruchvorgänge im Faser-Matrix-Verbund mit möglichen Auswirkungen auf das globale Strukturverhalten, Rißbeginn, beliebiger Rißfortschritt sowie elasto-plastisches Materialverhalten des Laminats lassen keine eindeutige und befriedigende Versagens- und Schädigungscharakteristik zu. Auch die Beschreibung des interlaminaren Versagens, d.h sowohl der Delaminationsbeginn als auch der Fortschritt ist keineswegs geklärt. So kommt Rinderknecht (1994) in seiner Arbeit über Delamination in Faserverbundplatten zu folgender Schlußfolgerung:

*...Inbesondere zur Simulation der zweidimensional fortschreitenden Delamination sowie zur Verwendung schadensmechanischer Ansätze sind bis dato nur wenig Veröffentlichungen erschienen und noch viele Fragen offen.*

# A Anhang

In diesem Kapitel werden, zum besseren Verständnis der Arbeit, einige wichtige Rechenregeln der Tensoralgebra und Tensoranalysis im EUKLIDischen Vektorraum  $\mathcal{E}_3$  erläutert. Diese Zusammenstellung erhebt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ausführliche Erklärungen zur Tensorrechnung finden sich u.a. in de Boer (1982), Klingbeil (1989).

## A.1 Tensorbegriff

Die Definition eines Tensors kann als lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  eingeführt werden.

$$\mathbf{T} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \\ \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v} \end{array} \right. \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \quad (\text{A.1})$$

wobei folgende Linearitätseigenschaften ihre Gültigkeit besitzen.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v} \\ \mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{v} \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden die beiden Räume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  mit dem EUKLIDischen Vektorraum  $\mathcal{E}_3$  identifiziert. Durch das tensorielle oder dyadische Produkt zweier Tensoren 1. Stufe

$$\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad (\text{A.3})$$

kann im Produktraum  $\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$  ein Tensor 2. Stufe definiert werden. Er genügt folglich auch den Eigenschaften (A.1) und (A.2). Mit Hilfe der Darstellung eines Vektors  $\mathbf{u}$  in seiner ko- und kontravarianten Basis

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i \quad (\text{A.4})$$

läßt sich der Tensor 2. Stufe bezüglich seiner Basis umschreiben.

$$\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (\text{A.5})$$

Analog können Tensoren n-ter Stufe definiert werden:

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \mathbf{g}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} = T_{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}^{i_1} \otimes \mathbf{g}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{i_n} \quad (\text{A.6})$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß auch gemischt-variante Tensoren n-ter Stufe existieren, die aber in dieser Zusammenstellung keine Berücksichtigung finden.

## A.2 Tensoralgebra

- Multiplikation eines Tensors mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{R} = \lambda \mathbf{S} = \lambda S^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} = R^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n}$$

- Addition zweier Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n}, & \mathbf{T} &= T^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{S} + \mathbf{T} = (S^{i_1 \dots i_n} + T^{i_1 \dots i_n}) \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} \\ &= R^{i_1 \dots i_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_n} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

- Einfache Kontraktion (Verjüngung) zweier Tensoren

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^i \mathbf{g}_i) \cdot (T^j \mathbf{g}_j) = S^i T^j \mathbf{g}_{ij} = S^i T_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (T^k \mathbf{g}_k) = S^{ij} T^k \mathbf{g}_{jk} \mathbf{g}_i = S^{ij} T_j \mathbf{g}_i = R^i \mathbf{g}_i \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^i \mathbf{g}_i) \cdot (T^{jk} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k) = S^i T^{jk} \mathbf{g}_{ij} \mathbf{g}_k = S_j T^{jk} \mathbf{g}_k = R^k \mathbf{g}_k \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = S^{ij} T^{kl} \mathbf{g}_{jk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_l = R^{il} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_l \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \cdot (T^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n) \\ &= S^{ijkl} T^{mn} \mathbf{g}_{lm} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_n = R^{ijkn} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_n \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

- Doppelte Kontraktion zweier Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{S} : \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) : (T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = S^{ij} T^{kl} \mathbf{g}_{ik} \mathbf{g}_{jl} = S^{ij} T_{ji} \\ &= S_{ij} T^{ij} = \mathbf{T} : \mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = S^{ij} T^{kl} \mathbf{g}_{il} \mathbf{g}_{jk} = S^{ij} T_{ji} = \mathbf{S} : \mathbf{T} \\ &= S_{ij} T^{ji} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{S} : \mathbf{T} = (S^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) : (T^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n) \\ &= S^{ijkl} T^{mn} \mathbf{g}_{km} \mathbf{g}_{ln} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = S^{ijkl} T_{kl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = R^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{S} : \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) : (T^{klmn} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n) \\ &= S^{ij} T^{klmn} \mathbf{g}_{ik} \mathbf{g}_{jl} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n = S_{kl} T^{klmn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n = R^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

- Tensorprodukt zweier Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S^{i_1 \dots i_m} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_m}, & \mathbf{T} &= T^{j_1 \dots j_n} \mathbf{g}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{j_n} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} = S^{i_1 \dots i_m} T^{j_1 \dots j_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_m} \otimes \mathbf{g}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{j_n} \\ &= R^{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_m+n} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

- Metriktensor  $\mathbf{g}$  ist Einheitstensor

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{g}_i \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \cdot (A_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l) = A_{kl} \mathbf{g}_{ij} \mathbf{g}^{jk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^l = A_{il} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^l = \mathbf{A} \quad (\text{A.18})$$

- Transponierter Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \longrightarrow \mathbf{T}^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = v^i u^j \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i = T^{ij} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) &= (R^i \mathbf{g}_i) \cdot (S^{jk} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k) \cdot (T^l \mathbf{g}_l) = (R^i \mathbf{g}_i) \cdot (S^{jk} T_k \mathbf{g}_j) = R_j S^{jk} T_k \quad (\text{A.20}) \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{T} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^T = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S}^T \quad (\text{A.21})$$

- Spur eines Tensors 2. Stufe

$$\text{tr} \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{S}^T) = \mathbf{S} : \mathbf{g} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) : (g^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = S^{ij} g^{kl} g_{lk} g_{jl} = S^{ij} g_{jj} \quad (\text{A.22})$$

$$\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{S} : \mathbf{T} = (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) : (T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = S^{ij} T_{jj} = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T) \quad (\text{A.23})$$

$$\text{tr}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \text{tr} \mathbf{S} + \text{tr} \mathbf{T} \quad (\text{A.24})$$

- Determinante eines Tensors 2. Stufe

$$\det(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = \det \mathbf{S} \det \mathbf{T} \quad (\text{A.25})$$

$$\det(\alpha \mathbf{S}) = \alpha^3 \det \mathbf{S} \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.26})$$

$$\det(\mathbf{S}^{-1}) = (\det \mathbf{S})^{-1} \quad (\text{A.27})$$

- Rechenregeln

$$\mathbf{R} \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{R} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{R} \otimes \mathbf{T} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{R} \otimes (\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}) \otimes \mathbf{T} \quad (\text{A.29})$$

$$\lambda(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \lambda \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} = \mathbf{S} \otimes \lambda \mathbf{T} = (\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} \quad (\text{A.31})$$

$$(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})^T \quad (\text{A.32})$$

- Ein Tensor 2. Stufe kann als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Anteils dargestellt werden.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) = \mathbf{S}_{\text{sym}} + \mathbf{S}_{\text{asym}} \quad (\text{A.33})$$

### Bemerkung:

- Alle hier aufgeführten Regeln und Rechenvorschriften gelten unter Zuhilfenahme des Kroneckersymbols selbstverständlich auch für Verknüpfungen einer ko- mit einer kontravarianten Größe.

## A.3 Tensoranalysis

- Partielle Ableitung bezüglich krummliniger Koordinaten  $\theta^i$

$$(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^i} \quad (\text{A.34})$$

- Ableitungsgleichungen nach GAUSS und WEINGARTEN ( $\hat{=}$  partielle Ableitungen der kovarianten Basisvektoren)

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{g}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \mathbf{g}_3 \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{g}_{3,\alpha} = \Gamma_{3\alpha}^\beta \mathbf{g}_\beta \quad (\text{A.36})$$

- Kovariante Ableitung bezüglich des Schalenraumes

$$S^l|_j = S_{,j}^l + S^k \Gamma_{kj}^l \quad (\text{A.37})$$

$$S_i|_j = S_{i,j} - S_k \Gamma_{ij}^k \quad (\text{A.38})$$

$$S^{ij}|_k = S_{,k}^{ij} + S^{il} \Gamma_{kl}^i + S^{il} \Gamma_{kl}^j \quad (\text{A.39})$$

$$S_{ij}|_k = S_{ij,k} - S_{ij} \Gamma_{ik}^l - S_{il} \Gamma_{jk}^l \quad (\text{A.40})$$

- CHRISTOFFEL–Symbole im Schalenraum

CHRISTOFFEL–Symbole sind definiert, um die partiellen Ableitungen der kovarianten Basisvektoren, Gleichung (A.35) und (A.36), auf die Basis zurückzuführen. Sie repräsentieren die Komponenten dieser differentiellen Änderung in Richtung der tangentialen, kovarianten Basisvektoren.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}^\gamma = -\mathbf{g}_{,\alpha}^\gamma \cdot \mathbf{g}_\beta = \mathbf{g}_{\beta,\alpha} \cdot \mathbf{g}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \quad (\text{A.41})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_{\beta,\alpha} \cdot \mathbf{g}_3 = \Gamma_{\beta\alpha}^3 \quad (\text{A.42})$$

$$\rightarrow \mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{g}_{,j}^i = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{g}^k \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{,3}^3 = \mathbf{g}_{3,3} = \mathbf{0} \quad (\text{A.43})$$

- Felder

$$\text{Skalarfeld: } \alpha, \beta : \mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.44})$$

$$\text{Vektorfeld: } \mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3 \quad (\text{A.45})$$

$$\text{Tensorfeld der Ordnung } n: \mathbf{S}, \mathbf{T} : \mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3 \rightarrow \underbrace{\mathcal{E}_3 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_3}_{n\text{-mal}} \quad (\text{A.46})$$

- Gradient eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\mathbf{x}(\theta^i)$

Die Gradientenbildung eines Feldes liefert immer ein um 1 höherstufiges Feld, so ist z.B. der Gradient eines Skalarfeldes ein Vektorfeld.

$$\mathbf{s} = \text{grad } \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \alpha_{,x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \mathbf{i}^i = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial x^i} \mathbf{i}^i = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta^i} \mathbf{g}^i = \alpha_{,i} \mathbf{g}^i \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \text{grad } \mathbf{s} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{s}_{,x} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^i} \otimes \mathbf{i}^i = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial x^i} \otimes \mathbf{i}^i = \mathbf{s}_{,i} \otimes \mathbf{g}^i = (s_j \mathbf{g}^j)_{,i} \otimes \mathbf{g}^i \quad (\text{A.48}) \\ &= (s_{j,i} \mathbf{g}^j + s_j \mathbf{g}_{,i}^j) \otimes \mathbf{g}^i = (s_{j,i} \mathbf{g}^j - s_j \Gamma_{mi}^j \mathbf{g}^m) \otimes \mathbf{g}^i \\ &= (s_{j,i} - s_k \Gamma_{ij}^k) \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^i = s_j|_i \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^i \end{aligned}$$

- Gradient eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\bar{\mathbf{x}}(\theta^i)$

$$\mathbf{s} = \overline{\text{grad}} \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \alpha_{,\bar{x}} = \alpha_{,i} \bar{\mathbf{g}}^i \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{S} = \overline{\text{grad}} \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{s}_{,\bar{x}} = \mathbf{s}_{,i} \otimes \bar{\mathbf{g}}^i \quad (\text{A.50})$$

- Rechenregeln bei der Gradientenbildung

$$\text{grad}(\alpha\beta) = \alpha \text{grad} \beta + \beta \text{grad} \alpha \quad (\text{A.51})$$



$$\text{grad}(\alpha \mathbf{s}) = \mathbf{s} \otimes \text{grad} \alpha + \alpha \text{grad} \mathbf{s} \quad (\text{A.52})$$

$$\text{grad}(\alpha \mathbf{S}) = \mathbf{S} \otimes \text{grad} \alpha + \alpha \text{grad} \mathbf{S} \quad (\text{A.53})$$

$$\text{grad}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) = (\text{grad}^T \mathbf{s}) \cdot \mathbf{t} + (\text{grad}^T \mathbf{t}) \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.54})$$

- Divergenz eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\mathbf{x}(\theta^i)$

Bei der Divergenzbildung eines Feldes wird die Stufe um 1 erniedrigt, so ist z.B. die Divergenz eines Tensorfeldes ein Vektorfeld.

$$\begin{aligned} \alpha = \text{div} \mathbf{s} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^i} \cdot \mathbf{i}^i = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta^i} \cdot \mathbf{g}^i = s_{,i}^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^i + s^k \mathbf{g}_{k,i} \cdot \mathbf{g}^i = s_{,i}^i + s^k \Gamma_{ki}^i \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i \\ &= s_{,i}^i + s^k \Gamma_{ki}^i = s_{,i}^i + s^k \Gamma_{ik}^i = s^i |_{,i} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = \text{div} \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^k} \cdot \mathbf{i}^k = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta^k} \cdot \mathbf{g}^k = \mathbf{S}_{,k} \cdot \mathbf{g}^k \\ &= (S_{,k}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}^k + (S^{ij} \mathbf{g}_{i,k} \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}^k + (S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_{j,k}) \cdot \mathbf{g}^k \\ &= S_{,j}^{ij} \mathbf{g}_i + S^{ij} \mathbf{g}_{i,j} + S^{ij} \mathbf{g}_i (\mathbf{g}_{j,k} \cdot \mathbf{g}^k) \\ &= (S_{,j}^{ij} + S^{kl} \Gamma_{kl}^i + S^{ij} \Gamma_{jk}^k) \mathbf{g}_i = S^{ij} |_{,j} \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

- Divergenz eines Feldes bezüglich des Ortsvektors  $\bar{\mathbf{x}}(\theta^i)$

$$\alpha = \overline{\text{div}} \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta^i} \cdot \mathbf{i}^i = \mathbf{s}_{,i} \cdot \bar{\mathbf{g}}^i \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{s} = \overline{\text{div}} \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta^k} \cdot \bar{\mathbf{g}}^k = \mathbf{S}_{,k} \cdot \bar{\mathbf{g}}^k \quad (\text{A.58})$$

- Rechenregeln bei der Divergenzbildung

$$\text{div}(\alpha \mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot \text{grad} \alpha + \alpha \text{div} \mathbf{s} \quad (\text{A.59})$$

$$\text{div}(\alpha \mathbf{S}) = \mathbf{S} \cdot \text{grad} \alpha + \alpha \text{div} \mathbf{S} \quad (\text{A.60})$$

$$\text{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{S}^T : \text{grad} \mathbf{s} + (\text{div} \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.61})$$

$$\text{div}(\mathbf{s} \otimes \mathbf{t}) = (\text{grad} \mathbf{s}) \cdot \mathbf{t} + (\text{div} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.62})$$

## A.4 Integralsätze

- GAUSS–Integralsatz (Umwandlung von Volumen– in Flächenintegrale)

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{s} = s^i \mathbf{g}_i \quad (\text{A.63})$$

$$\int_V \text{div} \mathbf{S} dV = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA \quad \text{mit} \quad d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA \quad (\mathbf{n} \triangleq \text{Normaleneinheitsvektor}) \quad (\text{A.64})$$

$$\int_V \text{div} \mathbf{s} dV = \int_A \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.65})$$

## A.5 Satz zur mehrdimensionalen Analysis

Die im folgenden aufgeführten Sätze und Erläuterungen sind einem Lehrbuch der mehrdimensionalen Analysis entnommen, siehe Heuser (1986).

Ist  $G$  eine nichtleere, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $m$  eine natürliche Zahl, so wird mit  $C^m(G)$  die Menge aller Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet, die auf  $G$  definiert und deren partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq m$  alle auf  $G$  vorhanden und stetig sind.

- **Satz von Schwarz:** Für jede Funktion  $f \in C^m(G)$  sind die partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq m$  unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

# B Anhang

## B.1 Basisvektoren der Materialhaupttrichtungen

Die in Kapitel 5.4.1 dargelegte Herleitung der Basisvektoren der Materialhaupttrichtungen eines anisotropen Werkstoffes, der um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der  $i_3$ -Achse orientiert ist, wird in diesem Abschnitt an einem konkreten Beispiel näher erläutert. Zusätzlich werden die formalen Zusammenhänge bei einer Orientierung der Fasern in einer um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der  $i_1$ - und  $i_2$ -Achse gedrehten Richtung angegeben. In Bild B.1 ist ein Viertelbogen dargestellt, bei dem die Fasern entlang der gekrümmten Kanten verlaufen sollen.

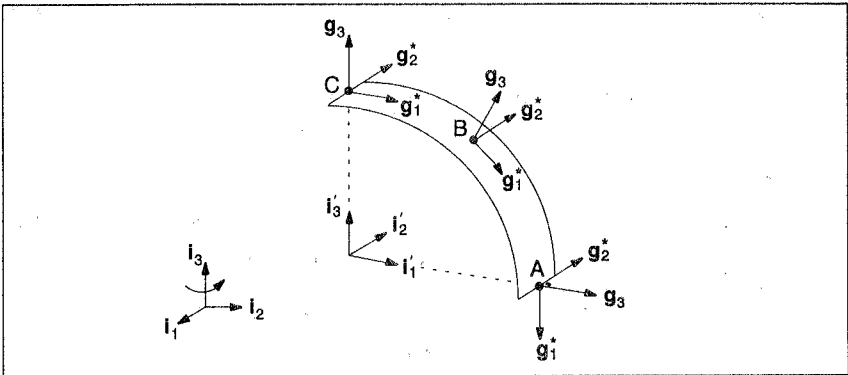


Bild B.1: Beispiel einer Rotation um die  $i_3$ -Achse von  $90^\circ$

Die notwendige Rotation von  $90^\circ$  des globalen Koordinatensystems  $\{i_1, i_2, i_3\}$  um die  $i_3$ -Achse liefert ein ebenfalls orthonormales Basissystem  $\{i'_1, i'_2, i'_3\}$ . Dieses Koordinatensystem liegt, abgesehen vom Punkt C, in keinem Punkt des Bogens tangential an die Schalenmittelfläche und muß somit mit dem in Kapitel 5.4.1 erläuterten Formalismus in die Tangentialebene transformiert werden. Zur besseren Übersicht sind die benötigten Formeln nochmals kurz zusammengefaßt.

In allen Punkten des Bogens (mit Ausnahme des Punktes A) können die Basisvektoren  $\{g_1^*, g_2^*, g_3^*\}$  der Materialhaupttrichtungen mit den Gleichungen (B.1) berechnet werden, da die umrahmte Bedingung erfüllt ist. Die Fasern verlaufen nun in die gewünschte Richtung entlang der gekrümmten Kanten und sind somit von der erforderlichen Vernetzung der Struktur unabhängig.

- Rotation um die  $i_3$  - Achse:

$$\boxed{i'_1 \times g_3 \neq 0} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} i''_1 &= i'_1 \times g_3 & g_2^* &= g_3 \times g_1^* \\ g_1^* &= g_3 \times i''_1 & g_3^* &= g_3 \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\boxed{\mathbf{i}'_1 \times \mathbf{g}_3 = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_2^* \times \mathbf{g}_3 \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{g}_2^* = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{g}_3$$

Im Punkt C jedoch existiert eine Singularität, da der Direktor parallel zur  $\mathbf{i}'_1$ -Achse liegt. Wird nun das Koordinatensystem entsprechend der Vorschrift (B.2) gebildet, so entsteht eine Basis, die den stetigen Verlauf der Vektoren über den Viertelbogen hinweg komplettiert.

Mit diesem Formalismus wird die Beschreibung eines anisotropen Werkstoffgesetzes von der Form der Elemente und von der Netzdichte unabhängig. Mit Hilfe entsprechender Elementarrotationen um die  $\mathbf{i}'_1$ - bzw.  $\mathbf{i}'_2$ -Achse

$$\mathbf{R}_{\mathbf{i}'_1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{i}'_2}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

lassen sich mit den beiden Algorithmen (B.4) – (B.5) und (B.6) – (B.7) die benötigten Basisvektoren zur Erfassung der Faserrichtung berechnen.

- Rotation um die  $\mathbf{i}_2$  – Achse:

$$\boxed{\mathbf{i}'_3 \times \mathbf{g}_3 \neq 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{i}''_3 = \mathbf{i}'_3 \times \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_2^* = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1^* \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{i}''_3 \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3$$

$$\boxed{\mathbf{i}'_3 \times \mathbf{g}_3 = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_2^* \times \mathbf{g}_3 \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{g}_2^* = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{g}_3$$

- Rotation um die  $\mathbf{i}_1$  – Achse:

$$\boxed{\mathbf{i}'_2 \times \mathbf{g}_3 \neq 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{i}''_2 = \mathbf{i}'_2 \times \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_2^* = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1^* \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{i}''_2 \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3$$

$$\boxed{\mathbf{i}'_2 \times \mathbf{g}_3 = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_2^* \times \mathbf{g}_3 \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{g}_2^* = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{g}_3$$

# Literatur

- Abele, R. (1993):** Composites reif für die Serie. VDI Nachrichten, Nr. **49** (10.12.1993) Seite 24.
- Actis, R.L., Szabó, B.A. (1993):** Hierarchic Models for Bidirectional Composites. Finite Elements in Analysis and Design, **13**, 149–168.
- Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1970):** Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **2**, 419–451.
- Andelfinger, U. (1991):** Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Andelfinger, U., Ramm, E. (1993):** EAS–Elements for 2D–, 3D–, Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR–Elements. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **36**, 1311–1337.
- Babuška, I., Szabó, B.A., Actis, R.L. (1992):** Hierarchic Models for Laminated Composites. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **33**, 503–535.
- Barbero, E.J., Reddy, J.N., Tepy, J.L. (1990b):** An Accurate Determination of Stresses in Thick Laminates Using a Generalized Plate Theory. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **29**, 1–14.
- Başar, Y., Krätzig, W.B. (1985):** Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Başar, Y. (1993):** Finite–Rotation Theories for Composite Laminates. Acta Mechanica, **98**, 159–176.
- Başar, Y., Ding, Y., Schultz, R. (1993):** Refined Shear–Deformation Models for Composite Laminates with Finite Rotations. Int. J. of Solids and Structures, **30**, 2611–2638.
- Başar, Y., Ding, Y. (1994):** Interlaminar Stress Analysis of Composites: Layer–wise Shell Finite Elements Including Transverse Strains. (to appear in Composites Engineering).
- Bathe, K.J., Dvorkin, E.N. (1985):** A Four–Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **21**, 367–383.
- Bathe K.J. (1986):** Finite–Elemente–Methoden. Springer–Verlag, Berlin etc.
- Becker E., Bürger, W. (1975):** Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher, Stuttgart.

- Belsare, S., Haririan, M. (1993):** Optimum Design of Composite Laminates with STROPT. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **9**, 863–871.
- Belytschko, T., Tsay, C.S. (1983):** A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One–Point Quadrature. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 405–420.
- Bergmann H.W. (1992):** *Konstruktionsgrundlagen für Faserverbundbauteile*. Springer–Verlag, Berlin etc.
- Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E. (1995):** A 4–Node Finite Shell Element for the Implementation of General Hyperelastic 3D–Elasticity at Finite Strains. (to appear in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*)
- Betten J. (1993):** *Kontinuumsmechanik*. Springer–Verlag, Berlin etc.
- Bhaskar, K., Varadan, T.K. (1991):** A Higher–Order Theory for Bending Analysis of Laminated Shells of Revolution. *Computers and Structures*, **40**, 815–819.
- de Boer R. (1982):** *Vektor– und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer–Verlag.
- de Borst, R., Feenstra, P.H. (1990):** Studies in Anisotropic Plasticity with Reference to the Hill Criterion. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 315–336.
- Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E. (1994a):** Nonlinear Shell Formulations for Complete Three–Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates. *Computational Mechanics*, **15**, 1–18.
- Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E. (1994b):** Nonlinear Three–Dimensional Analysis of Composite and Laminated Plate and Shell Structures. In: "Recent Developments in Finite Element Analysis", A Book dedicated to R.L. Taylor, (eds. T.J.R. Hughes, E. Oñate, O.C. Zienkiewicz), CIMNE, Barcelona, Spain, 215–224.
- Büchter, N. (1992):** Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992a):** Shell Theory versus Degeneration – a Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 39–59.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992b):** 3D–Extension of Nonlinear Shell Equations based on the Enhanced Assumed Strain Concept. *Computational Methods in Applied Sciences*. Ch. Hirsch (ed.), Elsevier Science Publishers B.V., 55–62.
- Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D. (1994):** Three–Dimensional Extension of Non–linear Shell Formulation based on the Enhanced Assumed Strain Concept. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2551–2568.

- Bufler, H. (1991):** Energiemethoden – Vorlesungsmanuskript. Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Chambers, R.E. (1993):** Plastics Composites for 21st Century Construction. Proceedings of a Session Sponsored by the Materials Engineering Division of the American Society of Civil Engineers in Conjunction with the ASCE Convention in Dallas, Texas, October 24–28, (Edited by R.E. Chambers), Published by ASCE.
- Chawla, K.K. (1987):** Composite Materials, Science and Engineering. Springer Verlag.
- Cheng, G. (1987):** On the Symmetry of Laminated Composite Rectangular Plates. Communications in Applied Numerical Methods, **3**, 547–551.
- Chou, T.W. (1993):** Structure and Properties of Composites. Material Science and Technology, Volume **13**, R.W. Cahn, P. Haasen, E.J. Kramer (ed.), VCH Publishers.
- Ciarlet, P. (1990):** Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures; An Asymptotic Analysis. Masson Paris und Springer-Verlag, Berlin etc.
- Ciarlet, P., Miara, B. (1992):** Justification of the Two-Dimensional Equations of a Linearly Elastic Shallow Shell. Communications on Pure and Applied Mathematics, **45**, 327–360.
- Di, S., Ramm, E. (1993):** Hybrid Stress Formulation for Higher-Order Theory of Laminated Shell Analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **109**, 359–376.
- Di, S., Ramm, E. (1994):** On Alternative Hybrid Stress 2D and 3D Elements. Engineering Computations, **11**, 49–68.
- Di Sciuva, M. (1985):** Development of an Anisotropic, Multilayered, Shear-Deformable Rectangular Plate Element. Computers and Structures, **21**, 789–796.
- Di Sciuva, M. (1987):** An Improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates. J. of Applied Mechanics, **54**, 589–596.
- Di Sciuva, M. (1993):** A General Quadrilateral Multilayered Plate Element with Continuous Interlaminar Stresses. Computers and Structures, **47**, 91–105.
- Dorninger, K. (1989):** Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen. Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 18, Nr. **65**. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Dorninger, K., Rammerstorfer, F.G. (1990b):** A Layered Composite Shell Element for Elastic and Thermoelastic Stress and Stability Analysis at Large Deformations. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **30**, 833–858.
- Dorninger, K. (1991):** A Nonlinear Layered Shell Finite Element with Improved Transverse Shear Behavior. Composites Engineering, **1**, 211–224.

- Dvorkin, E.N., Bathe, K.J. (1984):** A Continuum Mechanics Based Four–Node Shell Element for General Nonlinear Analysis. *Engineering Computations*, **1**, 77–88.
- Epstein, M., Glockner, P.G. (1977):** Nonlinear Analysis of Multilayered Shells. *Int. J. of Solids and Structures*, **13**, 1081–1089.
- Epstein, M., Huttelmaier, H.P. (1983):** A Finite Element Formulation for Multilayered and Thick Plates. *Computers and Structures*, **16**, 645–650.
- Erkl, M.A., Rizkalla, S.H. (1993):** FRP Reinforcement for Concrete Structures. *Concrete International*, **15**, 48–53.
- Eschenauer, H. (1984):** Optimierung ebener Flächentragwerke aus Verbundwerkstoff. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, **8**, 367–378.
- Fukunaga, H., Vanderplaats, G.N. (1991):** Stiffness Optimization of Orthotropic Laminated Composites Using Lamination Parameters. *AIAA Journal*, **29**, 641–646.
- Girkmann, K. (1963):** Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten Schalen und Faltwerke. Springer–Verlag, Wien.
- Green, A.E., Zerna, W. (1968):** Theoretical Elasticity. Clarendon Press, second edition.
- Grüninger, G. (1991):** Berechnung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen. Deutsche Forschungsanstalt für Luft– und Raumfahrt e.V., Universität Stuttgart, Vorlesung WS 91/92.
- Gruttmann, F. (1988):** Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot–Spannungen. Forschungs– und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Ph.D.–Dissertation, Bericht–Nr. F88/1.
- Gruttmann, F., Wagner, W., Meyer, L., Wriggers, P. (1993):** A Nonlinear Composite Shell Element with Continuous Interlaminar Shear Stresses. *Computational Mechanics*, **13**, 175–188
- Gruttmann, F., Wagner, W. (1994):** On the Numerical Analysis of local effects in Composite Structures. (to appear in *Composite Structures*, **20**)
- Gruttmann, F., Wagner, W. (1995):** Coupling of 2D– and 3D–Composite Shell Elements in Linear and Nonlinear Applications. (to appear in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*)
- Gürdal, Z., Haftka, R.T. (1993):** Optimization of Composite Laminates. Optimization of Large Structural Systems, Vol II, G.I.N. Rozvany (ed.), Kluwer Academic Publishers, 623–648.
- Ha, K.H. (1990):** Finite Element Analysis of Sandwich Plates: An Overview. *Computers and Structures*, **37**, 397–403.



- Herrmann, K.P. (1991):** Kontinuumsmechanische Modellierung elementarer Schädigungsmechanismen in eigengespannten Verbundwerkstoffmodellen. ZAMM – Zeitschrift für angew. Math. und Mech., **71**, T33–T40.
- Heuser, H. (1986):** Lehrbuch der Analysis Teil 2. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Hill, R. (1948):** A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. Proceedings of the Royal Society, Series A, **193**, 281–297.
- Hoffmann, O. (1967):** The Brittle Strength of Orthotropic Materials. J. of Composite Materials, **1**, 200–206.
- Hughes, T.J.R., Tezduyar, T.E. (1981):** Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four–Node Isoparametric Element. J. of Applied Mechanics, **48**, 587–596.
- Hughes, T.J.R. (1987):** The Finite Element Method. Prentice–Hall.
- Hüttinger, K.J., Pieschnick, T.W. (1994):** Monocrystalline  $\text{Si}_3\text{N}_4$  Filaments. Advanced Materials, **6**, 62–64.
- Huttelmaier, H.P., Epstein, M. (1985):** A Finite Element Formulation for Multilayered and Thick Shells. Computers and Structures, **21**, 1181–1185.
- Janssen, B. (1994):** Leichtbau verändert industrielle Strukturen. VDI Nachrichten, Nr. **12** (25.03.1994) Seite 17.
- Jing, H.S., Liao, M.L. (1989):** Partial Hybrid Stress Element for the Analysis of Thick Laminated Composite Plates. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **28**, 2813–2827.
- Khalifa, M.A., Kuska, S.S.B., Krieger, J. (1993):** Bridges Constructed Using Fiber Reinforced Plastics. Concrete International, **15**, 43–47.
- Klarmann, R. (1991):** Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt. Ph.D.–Dissertation, Schriftenreihe Heft 12, Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH).
- Klarmann, R., Schweizerhof, K. (1993):** A Priori Verbesserung von Schubkorrekturfaktoren zur Berechnung von geschichteten anisotropen Schalenträgwerken. Archive of Applied Mechanics, **63**, 73–85.
- Kleine, E. (1993):** Datenbank schließt Informationslücke bei faserverstärkten Kunststoffen. VDI Nachrichten, Nr. **38** (24.09.1993) Seite 33.
- Klingbeil E. (1989):** Tensorrechnung für Ingenieure. BI–Hochschultaschenbuch, 197.
- Kühhorn, A. (1991):** Geometrisch nichtlineare Theorie für Sandwichschalen unter Einbeziehung des Knitterphänomens. Fortschritt–Berichte, VDI Reihe 18, Nr. **100**. VDI–Verlag, Düsseldorf.

- Kühhorn, A., Schoop, H. (1992):** A Nonlinear Theory for Sandwich Shells Including the Wrinkling Phenomenon. *Archive of Applied Mechanics*, **62**, 413–427.
- Kwon, Y.W., Akin, J.E. (1987):** Analysis of Layered Composite Plates Using a High–Order Deformation Theory. *Computers and Structures*, **27**, 619–623.
- Lee, S.M. (1993):** Handbook of Composite Reinforcements. VCH Publishers.
- Lehar, H. (1985):** Beitrag zur numerischen Behandlung ebener, anisotroper Schichtverbunde mittels der Methode der finiten Elemente. Ph.D.–Dissertation, Institut für Baustatik und verstärkte Kunststoffe, Universität Innsbruck.
- Li, Z.H., Owen, D.R.J. (1989):** Elastic–Plastic Analysis of Laminated Anisotropic Shells by a Refined Finite Element Laminated Model. *Computers and Structures*, **32**, 1005–1024.
- Liou, W.J., Sun, C.T. (1987):** A Three–Dimensional Hybrid Stress Isoparametric Element for the Analysis of Laminated Composite Plates. *Computers and Structures*, **25**, 241–249.
- Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. (1977b):** A High–Order Theory of Plate Deformation–Part 2: Laminated Plates. *J. of Applied Mechanics*, **44**, 669–676.
- Luenberger, D.G. (1984):** Linear and Nonlinear Programming. Addison–Wesley Publishing Company, Reading.
- Mackerle, J. (1994):** Finite Element and Boundary Element Library for Composites – A Bibliography (1991–1993). *Finite Elements in Analysis and Design*, **17**, 155–165.
- Maier, M. (1990):** Experimentelle Untersuchung und numerische Simulation des Crashverhaltens von Faserverbundwerkstoffen. Ph.D.–Dissertation, Fachbereich Maschinenwesen, Universität Kaiserslautern.
- Marsden, J.E., Hughes, T.J.R. (1983):** Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- Meier, U. (1992):** Carbon Fiber–Reinforced Polymers: Modern Materials in Bridge Engineering. *Structural Engineering International*, **2**, 7–12.
- Naaman, A.F., Reinhardt, H.W., Fritz, C., Alwan, J. (1993):** Nonlinear Analysis of RC Beams Using high Performance FRC matrices. Proceedings of the Symposium on Structural Engineering in Natural Hazards Mitigation, Irvine, CA USA, Published by ASCE, New–York, 1396–1401.
- Naaman, A.F., Reinhardt, H.W., Fritz, C., Alwan, J. (1994):** Non–linear Analysis of RC Beams Using a SIFCON Matrix. *Material Structure*, **26**, 522–531.
- Nemeth, M.P. (1986):** Importance of Anisotropy on Buckling of Compression–Loaded Symmetric Composite Plates. *AIAA Journal*, **24**, 1831–1835.

- Niederstadt, G., Block, J., Geier, B., Rohwer, K., Weiß, R. (1985):** Leichtbau mit kohlenstoffaserverstärkten Kunststoffen. Expert Verlag, Sindelfingen.
- Noor, A.K., Burton, W.S. (1989):** Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. *Applied Mechanics Reviews*, **42**, 1–13.
- Noor, A.K., Peters, J.M. (1989):** A Posteriori Estimates for Shear Correction Factors in Multilayered Composite Cylinder. *J. of Engineering Mechanics*, **115**, 1225–1244.
- Noor, A.K., Burton, W.S. (1990):** Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells. *Applied Mechanics Reviews*, **43**, 67–97.
- Ogden, R.W. (1984):** Non-Linear Deformations. Ellis Horwood, Chichester.
- Oñate, E., Zienkiewicz, O.C., Suarez, B., Taylor, R.L. (1992):** A General Methodology for Deriving Shear Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 345–367.
- Ophey, L. (1986):** Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffe. VDI-Z, Entwicklung, Konstruktion, Produktion, Band **128**, Nr. 20, 817–824.
- Owen, D.R.J., Figueiras, J.A. (1983a):** Elasto-Plastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by the Semiloof Element. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 521–539.
- Owen, D.R.J., Figueiras, J.A. (1983b):** Anisotropic Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 541–566.
- Owen, D.R.J., Li, Z.H. (1987a):** A Refined Analysis of Laminated Plates by Finite Element Displacement Methods—I. Fundamentals and Static Analysis. *Computers and Structures*, **26**, 907–914.
- Owen, D.R.J., Li, Z.H. (1987b):** A Refined Analysis of Laminated Plates by Finite Element Displacement Methods—II. Vibration and Stability. *Computers and Structures*, **26**, 915–923.
- Pagano, N.J. (1969):** Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *J. of Composite Materials*, **3**, 398–411.
- Pagano, N.J. (1970a):** Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *J. of Composite Materials*, **4**, 20–34.
- Pagano, N.J. (1970b):** Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates. *J. of Composite Materials*, **4**, 330–343.
- Pagano, N.J., Pipes, R.B. (1971):** The Influence of Stacking Sequence on Laminate Strength. *J. of Composite Materials*, **5**, 50–57.
- Pagano, N.J., Hatfield, S.J. (1972):** Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites. *AIAA Journal*, **10**, 931–933.

- Panda, S.C., Natarajan, R. (1979):** Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **14**, 69–79.
- Pandya, B.N., Kant, T. (1988):** Higher–Order Shear Deformable Theories for Flexure of Sandwich Plates–Finite Element Evaluations. *Int. J. of Solids and Structures*, **24**, 1267–1286.
- Parisch, H. (1991):** An Investigation of a Finite Rotation Four Node Assumed Strain Shell Element. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 127–150.
- Pedersen, P. (1993):** Optimal Orientation of Anisotropic Materials. Optimal Distribution of Anisotropic Materials. Optimal Shape Design with Anisotropic Materials. Optimal Design for a Class of Non–Linear Elasticity Optimization of Large Structural Systems, Vol II, G.I.N. Rozvany (ed.), Kluwer Academic Publishers, 649–681.
- Phan, N.D., Reddy, J.N. (1985):** Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher–Order Shear Deformation Theory. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 2201–2219.
- Pian, T.H.H., Sumihara, K. (1984):** Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **20**, 1685–1695.
- Pinsky, P.M., Kim, K.O. (1986):** A Multi–Director Formulation for Elastic–Viscoelastic Layered Shells. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 2213–2244.
- Pipes, R.B., Pagano, N.J. (1970):** Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension. *J. of Composite Materials*, **4**, 538–548.
- Putcha, N.S., Reddy, J.N. (1986):** A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for the Nonlinear Analysis of Laminated Plates. *Computers and Structures*, **22**, 529–538.
- Ramm, E. (1976):** Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Habilitation, Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Ramm, E., Bischoff, M., Braun, M. (1994):** Higher Order Nonlinear Shell Formulations – A Step Back into Three–Dimensions. In: "From Finite Elements to the Troll Platform", Ivar Holand 70th Anniversary. Department of Structural Engineering, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway, (Edited by Kolbein Bell), Printed by Tapir, 65–88.
- Ramm, E., Braun, M., Bischoff, M. (1995):** Higher Order Nonlinear Shell Formulations – Theory and Application. IASS – Symposium 1995, June 5–9, Milano, Italy.
- Rammerstorfer, F.G., Dorninger, K., Starlinger, A. (1992):** Composite and Sandwich Shells. In: "Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements", (Edited by F.G. Rammerstorfer), CISM, Courses and Lectures, No. 328, Wien – New York, Springer Verlag, 131–194.

- Rammerstorfer, F.G., Starlinger, A., Dorninger, K. (1994):** Combined Micro– and Macromechanical Considerations of Layered Composite Shells. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2609–2629.
- Reddy, J.N. (1984a):** A Simple Higher–Order Theory for Laminated Composite Plates. *J. of Applied Mechanics*, **51**, 745–752.
- Reddy, J.N. (1984b):** A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation. *Int. J. of Solids and Structures*, **20**, 881–896.
- Reddy, J.N. (1987):** A Generalization of Two–Dimensional Theories of Laminated Composite Plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, **3**, 173–180.
- Reddy, J.N., Barbero, E.J. (1987):** A Refined Nonlinear Theory of Laminate Composite Plates. *Proceedings of The Fourth Annual Review, Center for Composite Materials and Structures, VPI & SU, Blacksburg, May 1987.*
- Reddy, J.N., Pandey, A.K. (1987):** A First–Ply Failure Analysis of Composite Laminates. *Computers and Structures*, **25**, 371–393.
- Reddy, J.N., Barbero, E.J., Tepy, J.L. (1989):** A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminate Plate Theory. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 2275–2292.
- Reddy, J.N. (1990):** A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates. *Shock and Vibration Digest*, **22**, 3–17.
- Reitinger, R. (1994):** Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Rinderknecht, S. (1994):** Delamination in Faserverbundplatten – Ein vereinfachtes Berechnungsmodell. Ph.D.–Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Luft– und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Robbins, JR. D.H., Reddy, J.N. (1993a):** Modelling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 655–677.
- Robbins, D.H., Reddy, J.N. (1993b):** On the Modelling of Free–Edge Stress Fields and Delaminations in Thick Composite Laminates. In: "Composite Structures: Testing, Analysis and Design", (eds. J.N. Reddy, A.V. Krishna Murty), Springer–Verlag, Narosa Publishing House, 33–74.
- Roehl, D. (1994):** Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

- Rostasy, F.S. (1991):** Faserverbundwerkstoffe im Stahlbeton– und Spannbetonbau. Vorträge Betontag, Deutscher Beton–Verein E.V., 172–197.
- Rotherth, H., Di, S. (1994):** Geometrically Nonlinear Analysis of Laminated Shells by Hybrid Formulation and Higher–Order Theory. IASS–Bulletin, **35**, 15–32.
- Sansour, C. (1992):** Auf der polaren Zerlegung basierende Schalentheorie endlicher Rotationen und ihre Finite–Element Diskretisierung. Ph.D.–Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Sansour, C., Bufler, H. (1992):** An Exact Finite Rotation Shell Theory, Its Mixed Variational Formulation and Its Finite Element Implementation. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **34**, 73–115.
- Sansour, C. (1995):** A Theory and Finite Element Formulation of Shells at Finite Deformations Including Thickness Change: Circumventing The Use of a Rotation Tensor. (to appear in Archive of Applied Mechanics).
- Schellekens, J.C.J., de Borst, R. (1990):** The Use of the Hoffman Yield Criterion in Finite Element Analysis of Anisotropic Composites. Computers and Structures, **37**, 1087–1096.
- Schellekens, J.C.J. (1992):** Computational Strategies for Composite Structures. Ph.D.–Dissertation, Department of Civil Engineering/TNO Institute for Building Materials and Structures, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Schleeh, W. (1964):** Ein einfaches Verfahren zur Lösung von Scheibenaufgaben. Beton– und Stahlbetonbau, Heft 3, 49–56; Heft 4, 91–94; Heft 5, 111–119.
- Schmid, A. (1988):** Beitrag zur Berechnung geschichteter Schalentragwerke mittels der Methode der finiten Elemente. Ph.D.–Dissertation, Institut für Baustatik und verstärkte Kunststoffe, Universität Innsbruck.
- Schwab, C. (1994):** Hierarchische Modelle elliptischer Randwertprobleme auf dünnen Gebieten – a–posteriori Fehlerschätzung und Fourieranalyse. Habilitation, Mathematisches Institut A, Lehrstuhl 6, Universität Stuttgart.
- Shah, C.G., Krishna Murty, A.V. (1991):** Analysis of Edge Delaminations in Laminates Through Combined Use of Quasi–Three–Dimensional, Eight–Noded, Two–Noded and Transition Elements. Computers and Structures, **39**, 231–242.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1986):** On Variational Foundations of Assumed Strains Methods. J. of Applied Mechanics, **53**, 51–54.
- Simo, J.C., Fox, D.D., Rifai, M.S. (1989):** On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory; Computational Aspects. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **73**, 53–92.

- Simo, J.C., Rifai, M.S., Fox, D.D. (1990b):** On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with Through-the-Thickness Stretching. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **81**, 91–126.
- Simo, J.C., Rifai, S. (1990):** A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1595–1638.
- Simo, J.C., Armero, F. (1992):** Geometrically Non-linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1413–1449.
- Spilker, R.L. (1982):** Hybrid-Stress Eight-Node Elements for Thin and Thick Multi-layer Laminated Plates. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **18**, 801–828.
- Starlinger, A. (1991):** Development of Efficient Finite Shell Elements for the Analysis of Sandwich Structures Under Large Deformations and Global as well as Local Instabilities. *Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 18, Nr. 93*. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Stein, E., Barthold, F.-J. (1992):** Unterlagen zur Vorlesung Elastizitätstheorie. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, WS 92/93.
- Stephan, E.P., Weissgerber, V. (1978):** Zur Approximation von Schalen mit hybriden Elementen. *Computing*, **20**, 75–94.
- Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L. (1976):** A Non-Conforming Element for Stress Analysis. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **10**, 1211–1220.
- Tessler, A., Saether, E. (1991):** A Computationally Viable Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 1069–1086.
- Theimer, O.F. (1975):** Hilfstafeln zur Berechnung wandartiger Stahlbetonträger. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin–München–Düsseldorf.
- Tsai, S.W., Wu, E.M. (1971):** A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *J. of Composite Materials*, **5**, 58–80.
- Truesdell, C., Noll, W. (1965):** The Nonlinear Field Theories of Mechanics. *Encyclopedia of Physics*, Vol III/3 (Ed. S. Flügge), Springer-Verlag.
- Verhoeven, H. (1992):** Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung. Ph.D.-Dissertation, Reihe Maschinenbau, Technische Universität Berlin.
- Vlachoutsis, S. (1992):** Shear Correction Factors for Plates and Shells. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1537–1552.

- Wagner, W. (1991):** Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Habilitation, Bericht-Nr. F91/1.
- Wagner, W., Gruttmann, F. (1994):** A Simple Finite Rotation Formulation for Composite Shell Elements. *Engineering Computations*, **11**, 145–176.
- Weber, A. (1990):** Technische Aspekte zum Einsatz von Kunststoffen im Automobilbau. *Kunststoffe*, **80**, 338–341.
- Wei, J., Zhao, J.H. (1991):** Three-Dimensional Finite Element Analysis on Interlaminar Stresses of Symmetric Laminates. *Computers and Structures*, **41**, 561–567.
- Whitney, J.M. (1972):** Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates. *J. of Composite Materials*, **6**, 426–441.
- Whitney, J.M. (1973):** Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load. *J. of Applied Mechanics*, **40**, 302–304.
- Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J. (1973):** Incompatible Displacement Models. In: *Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics*, S.T. Fenves et al. eds., Academic Press, 43–57.
- Wriggers, P. (1988):** Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Habilitation, Bericht-Nr. F88/4.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Too, J.M. (1971):** Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **3**, 275–290.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1989):** *The Finite Element Method, Volume 1.* McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991):** *The Finite Element Method, Volume 2.* McGraw-Hill.



## **Lebenslauf**

Name	Markus Braun
Geburtstag	06.10.1964
Geburtsort	Landau in der Pfalz
Familienstand	seit 05.03.1993 verheiratet mit Susanne Braun geb. Hauenstein Sohn Silvio: 03.04.1995
Eltern	Albert Braun Gertrud Braun geb. Heuberger
1971 – 1975	Grundschule Horst, Landau
1975 – 1984	Eduard–Spranger–Gymnasium, Landau Abschluß: Hochschulreife 06/1984
10/1984 – 10/1985	12–monatiger Grundwehrdienst in Mannheim und Mayen
10/1985 – 03/1987	Studium der Technomathematik an der Universität Kaiserslautern
04/1987 – 09/1991	Studium der Technomathematik an der Universität Karlsruhe (TH) Abschluß: Diplom–Technomathematiker 09/1991
10/1991 – 09/1994	Stipendiat im von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Graduiertenkolleg an der Universität Stuttgart: Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen
10/1994 – 03/1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Uni- versität Stuttgart
seit April 1995	Forschungsingenieur in der Konzern–Forschung der HILTI Aktiengesellschaft im Fürstentum Liechtenstein

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Satellagern endlicher Breite.
- 80-2 **R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.

- 80-3 **J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 **L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyinders.
- 82-2 **K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 **H.-P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.

- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid–gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehi:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.