

**Topologie- und Formoptimierung
von dünnwandigen Tragwerken**

von

Kurt Maute

Bericht Nr. 25 (1998)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1998

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Kurt Maute

aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. E. Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr. M.P. Bendsøe
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger
Tag der mündlichen Prüfung:	17. Februar 1998



Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 1998

Zusammenfassung

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Topologie- und Formoptimierung von kontinuierlichen, dünnwandigen Tragwerken. Die Aufgabe der Topologieoptimierung ist es, den grundlegenden Aufbau eines Tragwerks in einem vorgegebenen Entwurfsraum zu bestimmen. Die Form der Konturen und Oberflächen eines beispielsweise in der Topologieoptimierung erzeugten Tragwerks wird mit Verfahren der Formoptimierung im Detail optimiert.

Die Topologieoptimierungsaufgabe wird als "0-1" Materialverteilungsproblem formuliert, um beliebig komplexe Geometrien erzeugen zu können. Dies führt auf ein nichtkonvexes Optimierungsproblem, das durch die Einführung von porösen Werkstoffen variabler Dichte regularisiert wird. Werkstoffe mit optimalen Eigenschaften regularisieren das Materialverteilungsproblem vollständig, führen jedoch zu keinen eindeutigen "0-1" Ergebnissen. Daher werden für anwendungsbezogene Aufgabenstellungen suboptimale Werkstoffe vorgezogen. Diese führen auf nahezu reine "0-1" Materialverteilungen, müssen jedoch durch zusätzliche Verfahren stabilisiert werden. Die bestehenden Verfahren der materiellen Topologieoptimierung lösen die Aufgabenstellung "Maximale Steifigkeit bei konstanter Masse im Entwurfsraum" für ein linear elastisches Tragverhalten zuverlässig und robust. Für Steifigkeitsprobleme mit Spannungsnebenbedingungen sowie lineare Eigenwertprobleme der Dynamik und Stabilität treten dagegen noch teilweise ungelöste numerische Instabilitäten auf. Die Notwendigkeit, das nichtlineare Tragverhalten in die Topologieoptimierung mit einzubeziehen, zeigt sich bei der Maximierung der Grenzlast für ein geometrisch nichtlineares Tragverhalten und bei der Maximierung der Duktilität für elastoplastisches Materialverhalten.

Die Ergebnisse der materiellen Topologieoptimierung beschreiben die Geometrie des optimalen Tragwerks nur näherungsweise. Die genaue Form des Tragwerks kann mittels CAGD-orientierter Formoptimierungsverfahren effizient bestimmt werden. Da die Topologieoptimierung oftmals topologisch komplexe Geometrien erzeugt, wird eine flexible Geometriebeschreibung zur Formoptimierung auf vorgegebenen ebenen und räumlich gekrümmten Oberflächen vorgestellt.

Die Genauigkeit und die numerische Effizienz der Optimierungsergebnisse kann durch eine adaptive Vorgehensweise verbessert werden. Hierbei ist zwischen der adaptiven Diskretisierung des mechanischen und des geometrischen Modells zu unterscheiden. Neben dem Diskretisierungsfehler in der Strukturantwort ist es zusätzlich notwendig, den Fehler in den Sensitivitäten der Zustandsgrößen bei adaptiven FE-Verfahren zu berücksichtigen. Eine adaptive Diskretisierung des geometrischen Modells ist bei der Formoptimierung von untergeordneter Bedeutung. Bei der materiellen Topologieoptimierung führt das vorgestellte Verfahren jedoch zu einer deutlichen Effizienzsteigerung wie auch zu einer genaueren Aussage über die Geometrie des optimalen Tragwerks. Die adaptive Verknüpfung von Topologie- und Formoptimierungsverfahren stellt einen vielversprechenden, methodisch anspruchsvollen Ansatz dar.

Abstract

The present thesis deals with topology and shape optimization of continuous, thin-walled structures. The task of topology optimization is to determine the basic layout of a structure in a given design space. The shape of contours and surfaces of structures, e.g. generated by topology optimization, is optimized in detail by shape optimization.

The topology optimization problem is formulated as a “0–1” material distribution problem, in order to generate arbitrarily complex geometries. This leads to a nonconvex optimization problem, which is regularized by introducing porous materials with variable density. Materials with optimal properties regularize correctly the material distribution problem, however they do not lead to definite “0–1” results. Therefore, suboptimal materials are preferred for real world design problems. These materials lead to almost pure “0–1” material distributions, but the solutions have to be additionally stabilized. Today, topology optimization procedures solve robustly the standard optimization problem “maximum stiffness for given mass in the design space”. There are still numerical instabilities for maximum stiffness problems with stress constraints and linear eigenvalue problems arising in dynamics and stability analyses. Studies on maximizing the critical load for geometrical nonlinear response and on maximizing the ductility for an elastoplastic material behavior show the necessity to include the nonlinear structural response within topology optimization.

The material distribution generated by topology optimization describes only roughly the geometry of the optimum structure. The detailed shape can be efficiently determined by CAGD-orientated shape optimization procedures. Since topology optimization often generates geometrically complex structures, a flexible method is presented describing the structural layout on given plane and spatially curved surfaces for shape optimization.

The quality and the numerical efficiency of the optimization results can be improved by adaptive procedures. In structural optimization two kinds of adaptivity have to be distinguished: adaptive discretization of the mechanical model and adaptive discretization of the geometrical model. Using adaptive finite element methods in structural optimization, additionally to the discretization error of the structural response the discretization error of the sensitivities of the structural response ought to be considered. An adaptive discretization of the geometrical model is most often of secondary importance in shape optimization. However in topology optimization the presented adaptive procedure considerably improves the numerical efficiency and leads to geometrically more refined results. The adaptive combination of topology and shape optimization methods is a promising and methodically challenging approach.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1992 bis 1998 während meiner Tätigkeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 230 "Natürliche Konstruktionen – Leichtbau in Architektur und Natur" und des DFG-Forschungsvorhabens "Adaptive Methoden in der Topologieoptimierung".

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm, der mir einen geradezu idealen Rahmen für meine Forschungsarbeit bot. Die intensiven Diskussionen mit ihm waren für mich eine unverzichtbare Quelle der Inspiration und Motivation.

Herrn Professor Dr. M.P. Bendsøe danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts. Ich habe mich sehr über seine spontane Bereitschaft gefreut, meine Arbeit zu begutachten und extra zu meiner Doktorprüfung aus Dänemark anzureisen.

Ein spezieller Dank gebührt Herrn Professor Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger, der mir bereits während seiner Zeit am Institut für Baustatik in Stuttgart hilfreich zur Seite stand und mit seiner Doktorarbeit zur Formoptimierung von Flächentragwerken eine gute Ausgangsbasis für meine eigene Arbeit schuf. Ebenso möchte ich mich bei ihm für die Übernahme des Mitberichts bedanken.

Des weiteren danke ich allen Kollegen des Instituts, die mit Hilfsbereitschaft und gegenseitigem Interesse für die Arbeit des anderen zu einer angenehmen und wissenschaftlich anregenden Atmosphäre beitrugen. Insbesondere möchte ich die produktive Zusammenarbeit mit meinen "Optimierer-Kollegen" Kai-Uwe Bletzinger, Reiner Reitinger, Stefan Schwarz und Roman Kemmler nicht missen. Bei den Mitgliedern des SFB 230 bedanke ich mich für die interessante Zusammenarbeit und die fachübergreifenden Diskussionen, die oftmals Anlaß dazu waren, die eigene Arbeit aus einem anderen Blickwinkel kritisch zu überdenken.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir ein steter Rückhalt waren und mich während meiner gesamten Ausbildung und Zeit als Doktorand nach Kräften unterstützten.

Kurt Maute

Inhalt

Bezeichnungen	XI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	4
1.3 Überblick	6
2 Grundelemente der Strukturoptimierung	9
2.1 Optimierungsmodell	12
2.1.1 Optimierungsverfahren	14
2.2 Entwurfsmodell	20
2.3 Analysemodell	23
2.3.1 Entwurfskriterien	24
2.3.2 Tragwerksanalyse	27
2.3.3 Sensitivitätsanalyse	36
3 Topologieoptimierung	47
3.1 Materielle Topologieoptimierung	51
3.2 Eigenschaften der variationellen Formulierung	53
3.3 Regularisierung – Relaxation – Poröse Werkstoffe	58
3.4 Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen	62
3.5 Werkstoffmodelle	65
3.5.1 Optimale Mikrostrukturen	67
3.5.2 Suboptimale Mikrostrukturen	72
3.5.3 Makroskopische Ansätze	73
4 Ausgewählte Probleme der materiellen Topologieoptimierung	79
4.1 Strukturen maximaler Steifigkeit	79

4.1.1	Einfluß des Werkstoffmodells	82
4.1.2	Stabilisierungsmethoden bei suboptimalen Werkstoffmodellen	86
4.1.3	“Checkerboard”- Moden	89
4.1.4	Erweiterungen auf Platten- und Schalenträgerwerke	91
4.1.5	Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen	96
4.2	Optimierung von Eigenfrequenzen	101
4.3	Maximierung der Grenzlast bei geometrisch nichtlinearem Tragverhalten	108
4.4	Topologieoptimierung bei nichtlinearem Materialverhalten	113
4.4.1	Elastoplastisches Materialverhalten	114
4.4.2	Quasi-sprödes Materialverhalten am Beispiel Stahlbeton	124
4.5	Beurteilung der Verfahren der materiellen Topologieoptimierung	129
5	Formoptimierung	131
5.1	CAGD-orientierte Geometriemodellierung	134
5.2	Beispiel zur Formoptimierung auf gekrümmten Oberflächen	140
6	Adaptive Methoden in der Strukturoptimierung	143
6.1	Adaptive Struktur- und Sensitivitätsanalyse	143
6.1.1	Integration der adaptiven Strukturanalyse in den Optimierungsprozeß	147
6.1.2	Adaptive Sensitivitätsanalyse	152
6.2	Adaptive Entwurfsmodellierung	159
6.2.1	Adaptive Entwurfsmodellierung in der Formoptimierung	160
6.2.2	Adaptive Entwurfsmodellierung in der Topologieoptimierung	165
6.2.3	Beispiele zur adaptiven Topologieoptimierung	173
6.2.4	Integration von adaptiver Topologie- und Formoptimierung	179
6.2.5	Beispiele zur integrierten Topologie- und Formoptimierung	183
7	Bewertung und Ausblick	185
	Literatur	191
	Bildnachweis	208

A	Anhang	209
A1	“Bubble”-Methode	209
A2	Michell-Strukturen	212
A3	“Heuristische” Verfahren in der materiellen Topologieoptimierung	218
A4	Herleitung und Lösung der Homogenisierungsgleichungen	222
A5	OC-Algorithmus für Topologieoptimierungsprobleme	228
A6	Algorithmen zur optimalen Orientierung von orthotropen Werkstoffen	232
A7	Algorithmus zur Adaption des Entwurfsmodells für die Topologie- und Formoptimierung	237
A8	Homogenisierungsergebnisse für die Mikrozelle mit Rechteck-Loch	247
A9	Konvergenzbeweis zu Abschnitt 3.2	252

Bezeichnungen

Auf die folgenden Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen. Lokale Größen werden in den jeweiligen Abschnitten eingeführt.

Abkürzungen

ATO	Adaptive Topologieoptimierung
CAD	Computer Aided Design
CAGD	Computer Aided Geometric Design
CARAT	FEM Programmsystem – Computer Aided Research and Analysis Tool
EP	Edgeworth–Pareto Optimum
FEM	Finite Elemente Methode
MMA	Methode der bewegten Asymptoten – Method of Moving Asymptotes
MP	Mathematische Programmierung
OC	Optimalitätskriterienverfahren
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebung
SLP	Sequentielle Lineare Programmierung
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
ULSAB	Ultra Light Steel Auto Body
Z^2	Fehlerschätzer nach Zienkiewicz, Zhu

Symbole

$(\hat{\cdot})$	Freie Funktionsparameter, Knotenfreiwerte
$(\bar{\cdot})$	Vorgegebene Größen
$(\tilde{\cdot}), (\tilde{\tilde{\cdot}})$	Lokal definierte Größen
$(\underline{\cdot}), (\underline{\underline{\cdot}})$	Lokal definierte Größen
$(\cdot)_e$	Größen auf Elementebene
$(\cdot)_s$	Optimierungsgrößen
$(\cdot)_x$	Mechanische Größen
$(\cdot)_0$	Werte des homogenen, isotropen Ausgangsmaterials
$(\cdot)_{lim}$	Schwellenwerte
$(\cdot)^*$	Lösung des Optimierungsproblems, Werte im Optimum
$(\cdot)^h$	Näherungsfunktion
$(\cdot)^s$	Größen zur Beschreibung der Schalenfläche
$(\cdot)^c$	Größen zur Beschreibung der Konturen auf der Schalenfläche

$(\cdot)^\xi$	Mikroskopische Größen
$(\cdot)^{(k)}$	Iterationsindex im Optimierungsalgorithmus
$(\cdot)^{(m)}$	Iterationsindex im Pfadverfolgungsalgorithmus
$(\cdot)^\sim$	Homogenisierungsoperator
$\delta(\cdot)$	Variation
$d(\cdot)$	Infinitesimales Inkrement
$\Delta(\cdot)$	Endliches Inkrement
$e(\cdot)$	Diskretisierungsfehler
$\tilde{e}(\cdot)$	Geschätzter Diskretisierungsfehler

Gradientenoperatoren

$\nabla_s(\cdot)$	Partielle Ableitung nach der Variablen \hat{s}_i , wobei die Variablen \hat{s}_j für $j \neq i$ als Konstanten betrachtet werden.
$\nabla_s^{\text{ex}}(\cdot)$	Partielle explizite Ableitung nach der Variablen \hat{s}_i , wobei zusätzlich alle Größen, die implizit von \hat{s}_i abhängen, als Konstanten betrachtet werden.
$\bar{\nabla}_s(\cdot)$	Partielle Ableitung nach dem Vektor der Variablen $\hat{\mathbf{s}}$

Funktionsräume, Normen

$H^n(\Omega)$	Sobolev-Raum
$L_p(\Omega)$	Lebesgue-Raum
$C^n(\Omega)$	Raum der n-fach stetigen Funktionen
$C_g^n(\Omega)$	Raum der n-fach geometrisch stetigen Funktionen
$V(\Omega)$	Unterraum
$\mathbf{G}_\rho(\Omega)$	Menge aller Materialtensoren eines porösen Materials der Dichte ρ
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der reellen, positiven Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
$\ \cdot\ _{L_p}$	L_p -Norm (ohne Index: L_2 -Norm)

Optimierungsgrößen

L	Lagrange-Funktion
f	Zielfunktion
\mathbf{f}	Vektor der Zielfunktionen
\mathbf{h}	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
\mathbf{g}	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen

s	Entwurfsfunktion
\hat{s}	Vektor der Optimierungsvariablen
\hat{s}_L, \hat{s}_U	Untere und obere Restriktionen der Optimierungsvariablen
η	Vektor der Lagrange–Multiplikatoren für die Gleichheitsnebenbedingungen
γ	Vektor der Lagrange–Multiplikatoren für die Ungleichheitsnebenbedingungen
\bar{m}	Vorgeschriebene Masse
$\bar{\sigma}$	Maximal zulässige Spannung, Sollwert
\bar{R}	Schranke für die Seminorm der Materialverteilung
w_j	Wichtungsfaktor
n_f	Anzahl der Zielkriterien
n_s	Anzahl der Optimierungsvariablen
n_h	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
n_g	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
$n_{g,\text{aktiv}}$	Anzahl der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen

Geometrie

Φ	Abbildung im Optimierungs– bzw. Deformationsprozeß
χ	Indikatorfunktion, Trägerfunktion
Ω	Kontrollvolumen, Volumen, Entwurfsraum
Γ	Rand
Γ_p	Belasteter Rand
Γ_u	Rand mit vorgegebenen Verschiebungen
x	Ortsvektor im Anschauungsraum
x^k	Ortsvektor eines Kontroll–Knotens
ξ	Ortsvektor im Parameterraum
ξ	Kurvenparamter
J	Jacobi–Matrix
G	Metriktensor
N	Matrix der Ansatzfunktionen
L_j	Verknüpfungsmatrix für den j–ten Kontroll–Knoten

Kinematik

u	Verschiebungen
\ddot{u}	Beschleunigungen
Ψ	Eigenvektor, Eigenform, Beulform

$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{GL}}$	Green–Lagrange–Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}_a$	Adjungierter Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{pso}}$	Pseudo–Anfangsdehnungen
ε_i	Hauptdehnung
$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$	Elastisches Verzerrungsinkrement
$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}$	Plastisches Verzerrungsinkrement
\mathbf{L}	Differentialoperator
\mathbf{B}_e	Diskretisierter, konstanter Differentialoperator
\mathbf{B}_e^1	Diskretisierter, von den Verschiebungen abhängiger Differentialoperator

Kräfte, Lasten, Spannungen

$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{PK2}}$	2. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}_{\text{pso}}$	Pseudo–Anfangsspannungen
σ_i	Hauptspannung
\mathbf{S}	Spannungsdeviator
$\bar{\mathbf{b}}$	Volumenkräfte
$\bar{\mathbf{p}}$	Verteilte Lasten
$\bar{\mathbf{P}}$	Einzellasten
$\hat{\mathbf{P}}$	Knotenlasten
\mathbf{F}	Vektor der inneren Kräfte
$\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}$	Pseudo–Lastvektor
J_2	Zweite Invariante des Spannungsdeviators
λ	Lastfaktor
λ_{kr}	Grenzlast
ω_j	Kreisfrequenz
ϑ_1	Eigenfrequenz

Arbeit, Energie, Steifigkeits- und Massenmatrizen

W	Arbeit
W^i, W^a	Innere, äußere Arbeit
δW	Virtuelle Arbeit
Π	Gesamtpotential
Π^i, Π^a	Innere, äußere Energie

\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_T	Tangentiale Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_g	Geometrische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_u	Anfangsverschiebungsmatrix
\mathbf{M}	Massenmatrix
σ_v	von Mises Spannungen
n_L	Anzahl der Lastfälle

Werkstoff, Material

\mathbf{C}	Elastischer Werkstofftensor
\mathbf{C}^\square	Werkstofftensor im werkstoffeigenen Bezugssystem
\mathbf{C}^{ep}	Elastoplastischer Werkstofftensor
\mathbf{C}_b	Werkstofftensor des Beton–Werkstoffmodells
$\mathbf{C}^{+/-}$	Steifes bzw. weiches Material
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{H}	Modifizierte Inverse der elastischen Tangente
\mathbf{P}_σ	Projektionsmatrix
\mathbf{n}	Normale auf die Fließfläche
ρ	Dichte
θ	Volumenanteil
E	Elastizitätsmodul
E_t	Verfestigungsmodul aus einem eindimensionalen Zugversuch
E_h	Verfestigungsmodul
E_h^{2d}	Modifizierter Verfestigungsmodul für den ebenen Spannungszustand
K	Kompressionsmodul
G	Schubmodul
β	Exponent in den makroskopischen Werkstoffmodellen
Φ_v	Fließfunktion
σ_y	Fließspannung
$\bar{\sigma}_y$	Konstanter Anteil der Fließspannung
κ	Interne Variable des elastoplastischen Werkstoffgesetzes
$d\gamma$	Plastischer Multiplikator
σ_z, σ_d	Maximal ertragbare Zug- bzw. Druckspannung

Optimierungsverfahren

\mathbf{Y}_s	Iterationsvorschrift für die Optimierungsvariablen (OC–Verfahren)
$\mathbf{Y}_\eta, \mathbf{Y}_\gamma$	Iterationsvorschrift für die Lagrange–Multiplikatoren (OC–Verfahren)
α	Schrittweite
$\bar{\epsilon}$	Abbruchkriterium
$\tilde{\mu}, \bar{\mu}$	Shift–Faktoren (OC–Verfahren)

Homogenisierungsverfahren

\mathbf{v}	Charakteristische Verschiebungen
$\boldsymbol{\psi}$	Charakteristischer Verzerrungstensor
Y_i	Abmessungen der Einheitszelle
ζ_c	Charakteristische Länge der Mikroskala
n_ζ	Anzahl der Mikroskalen

Sonstige Größen

\mathbf{A}	Summation über alle Finiten Elemente
\mathbf{I}	Identitätsmatrix
δ_{ij}	Kronecker Delta
$H_i(\cdot)$	Glättungsoperator (Filtermethode)
\bar{r}	Glättungsradius (Filtermethode)
$\bar{\kappa}$	Exponent (Filtermethode)

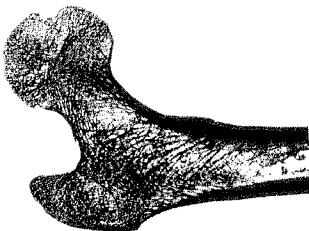
1 Einleitung

1.1 Motivation

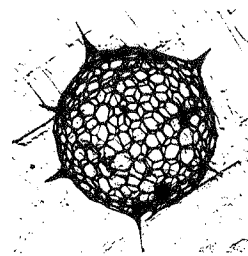
Die Natur fasziniert durch eine Vielzahl von geometrisch komplexen Tragwerken (Bild 1.1). Die Topologie, d.h. der räumliche Aufbau, und die Form dieser "natürlichen Konstruktionen" sind an die äußeren Belastungen optimal angepaßt. Die Spongiosa eines Knochens bildet eine feingliedrige, trajektorienartige Struktur aus. Das Skelett einer Kieselalge stellt eine wabenförmige Gitterschale dar. In beiden Beispielen werden die äußeren Kräfte nahezu ohne Biegung nur durch Normalkräfte abgetragen und dabei das Material gleichmäßig ausgenutzt. Die Tragwerke zeichnen sich durch eine hohe Steifigkeit bei minimalem Gewicht aus.

Diese Tragwerkseigenschaften stellen die klassischen Entwurfsziele des Leichtbaus dar. Der Leichtbau, der ursprünglich eine Domäne der Luft- und Raumfahrttechnik war, gewinnt zunehmend auch im Automobil- und Maschinenbau sowie im Bauwesen an Bedeutung. "Leicht" bedeutet sowohl einen geringeren Materialeinsatz beim Bau des Tragwerks wie auch weniger Energieverbrauch beim Betrieb des Autos bzw. Flugzeugs. Das Gewicht eines Tragwerks kann zum einen durch moderne Materialien, wie Faserverbundwerkstoffe, reduziert werden. Diese Werkstoffe zeichnen sich zwar durch eine hohe Festigkeit bei niedrigem Eigengewicht aus, sind jedoch hinsichtlich Preis, Verarbeitung und Recycling ungünstig. Zum anderen können zahlreiche Konstruktionen deutlich leichter gestaltet werden, wenn deren Topologie und Form den äußeren Belastungen angepaßt wird. Eine aktuelle Machbarkeitsstudie (ULSAB) zeigt beispielsweise, daß das Gewicht einer Stahl-Autokarosserie durch eine geeignete Geometriegestaltung um bis zu 30% gesenkt werden kann.

Das Potential, das mechanische Verhalten eines Tragwerks durch eine den äußeren Belastungen angepaßte Topologie- und Formgebung zu verbessern, ist groß. Die freie Wahl der Geometrie

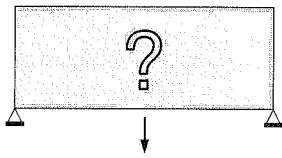


Knochen (Femur)

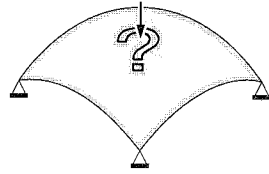


Skelett einer Kieselalge

Bild 1.1: "Natürliche Konstruktionen"



Ebener Entwurfsraum



Räumlich gekrümmter Entwurfsraum

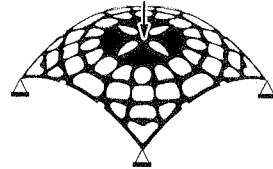
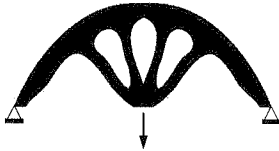


Bild 1.2: Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken

des Tragwerks im Entwurfsprozeß führt auf eine sehr allgemeine Formulierung der Konstruktions- bzw. Entwurfsaufgabe:

Die Topologie und die Form des Tragwerks sind so zu bestimmen, daß dessen mechanisches Verhalten hinsichtlich bestimmter Entwurfskriterien ein Optimum darstellt. Das Tragwerk ist aus einem oder mehreren Werkstoffen aufgebaut. Es sind lediglich die zur Verfügung stehenden Auflager, die äußeren Lasten sowie der Entwurfsraum, in dem sich das Tragwerk befinden soll, vorgegeben (Bild 1.2).

Das Wechselspiel zwischen dem mechanischen Verhalten und der Geometrie des Tragwerks wird durch die Gesetze der Mechanik beschrieben. In der Strukturanalyse werden die Verformungen und die innere Beanspruchung eines Tragwerks infolge äußerer Lasten bei einer vorgegebenen Geometrie ermittelt. Die mechanischen Gesetze können jedoch auch in umgekehrter Richtung angewandt werden, um die Geometrie des Tragwerks den äußeren Belastungen anzupassen. Die Topologie und die Form des Tragwerks werden beispielsweise aus den maximal zulässigen Verformungen und der Belastbarkeit des Materials bestimmt. Dieses Umkehrprinzip findet sich einerseits indirekt in empirischen Entwurfsregeln wieder. Die Geometrie des Tragwerks wird traditionell durch eine Modifikation bestehender Entwürfe ermittelt. Grundlegend neue Konstruktionsvarianten können auf diese Weise jedoch nicht erzeugt werden. Diese Aufgabe wird durch die Kreativität und die Intuition des Konstrukteurs gelöst. Andererseits lassen sich aus dem Umkehrprinzip die mathematisch-mechanisch orientierten Methoden der Strukturoptimierung ableiten. Die Topologie und die Form des Tragwerks werden alleine aus den mechanischen Gesetzen entwickelt. Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit, systematisch beliebig komplexe und grundsätzlich neue Tragwerksgeometrien zu finden.

Die Strukturoptimierung ist so alt wie die Mechanik selbst. Bereits Gallilei erkannte 1638, daß sich das Gewicht eines Balkens durch einen den Biegespannungen angepaßten Querschnittsverlauf erheblich reduzieren läßt (Szabo [247]). In der Folge beschäftigten sich zahlreiche bedeutende Wissenschaftler, wie Euler, de Saint-Venant oder Lagrange, mit verschiedenen Problemen der Strukturoptimierung. Hierbei diente das Umkehrprinzip der Strukturoptimierung mehr zur Verifikation von mechanischen Gesetzen als zur Lösung von konkreten Entwurfsaufgaben. Erst mit den Arbeiten von Maxwell [171] wurde 1869 der Versuch unternommen, die Strukturoptimierung als eigenständige Methode zur Konstruktion von Tragwerken einzuführen. Maxwell untersuchte Fachwerke mit minimalem Gewicht bei maximal zulässigen Spannungen. Er stellte fest, daß das Gewicht von Strukturen, die entweder nur auf Zug oder Druck beansprucht werden, durch die äußeren Kräfte festgelegt und für alle Konstruktionsvarianten gleich ist (Wiedemann [274]). Michell führte zu Beginn dieses Jahrhunderts die Arbeiten Maxwells fort und erweiterte die Problemstellung auf Zug und Druck beanspruchte Fachwerke. Michell [174] entwickelte 1904 die notwendigen Bedingungen für gewichtsoptimale Tragwerke. Michell-Strukturen bestehen aus einem unendlich feinen, quasi-kontinuierlichen Netz von orthogonal angeordneten Stäben, die den Verlauf der Trajektorien im Tragwerk nachzeichnen. Diese Strukturen stellen unabhängig vom Tragwerkstyp das absolute Gewichtsminimum für eine maximal zulässige Spannung bei einem Lastfall dar und dienen bis heute als Referenzlösungen. Die Entwurfstheorie Michells ist jedoch u.a. aufgrund der resultierenden, komplexen Geometrien sowie der hochgradigen Spezialisierung der Tragwerke auf einen bestimmten Lastfall für die Lösung anwendungsbezogener Probleme ungeeignet. Sie geriet daher für Jahrzehnte in Vergessenheit. Die grundlegenden Arbeiten Michells wurden erst u.a. von Hemp 1958, Cox 1965, Prager 1967 und Rozvany 1977 fortgeführt und auf allgemeinere Entwurfsaufgaben mit mehreren Entwurfskriterien, wie beispielsweise maximal zulässige Verschiebungen bei mehreren Lastfällen, erweitert (Rozvany et al. [221]). Die Optimierungsprobleme blieben jedoch auf einfache Fach- und Stabtragwerke beschränkt, die mit analytischen Verfahren gelöst werden können.

Erst seit Anfang der siebziger Jahre steht mit dem Computer ein Werkzeug zur Verfügung, um die im allgemeinen nichtlinearen Optimierungsprobleme mit numerischen Verfahren zu lösen. Die Strukturoptimierung bildet heute eine Synthese aus mathematischen Optimierungsalgorithmen, computerorientierten Konstruktionsverfahren, wie dem CAD, und zuverlässigen Methoden zur Simulation des Tragverhaltens, wie der Methode der Finiten Elemente. Die Strukturoptimierung stellt insbesondere in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Automobilbau ein zunehmend wichtiges Werkzeug zum Entwurf und zur Auslegung von Tragwerken und Bauteilen dar. Im Bereich des Bauwesens wird die Strukturoptimierung bislang nur vereinzelt bei der Formfindung von Flächentragwerken, wie Membrane und Schalen, eingesetzt. Zu Beginn der Strukturoptimierung stand in den Arbeiten von Maxwell und Michell die Frage nach dem grundlegenden Aufbau, d.h. der Topologie, des optimalen Tragwerks im Vordergrund. Heute werden die numerischen Optimierungsmethoden überwiegend dazu eingesetzt,

um beispielsweise bestimmte Abmessungen des Tragwerks, wie die Dicke von Blechen, oder die Form von konstruktiven Details, wie den Durchmesser einer kreisförmigen Aussparung, zu optimieren. Die Topologie des Tragwerks wird im Optimierungsprozeß nicht verändert.

Erst in den letzten zehn Jahren werden wieder verstärkt numerische Methoden zur Topologieoptimierung untersucht, um die gesamte Geometrie des Tragwerks an die äußere Belastung anzupassen. Diese Entwicklung wurde vor allem durch die richtungweisende Arbeit von Bendsoe und Kikuchi [26] 1988 eingeleitet, in der eine mathematisch-mechanisch orientierte Methode zur Steifigkeitsoptimierung von kontinuierlichen Tragwerken vorgestellt wird. Die Geometrie des Tragwerks wird hierbei durch die Materialverteilung im Entwurfsraum beschrieben. Die Topologie und Form des optimalen Tragwerks zu bestimmen, bedeutet, die Materialverteilung von porösen Werkstoffen mit variabler Dichte im Entwurfsraum zu optimieren. Der speziell für die Entwurfsaufgabe entwickelte Optimierungsalgorithmus entfernt Material in schwach belasteten Bereichen und lagert Material an stärker belasteten Stellen an. Dieser als materielle Topologieoptimierung bezeichnete Ansatz stößt aufgrund seiner vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten sowie seiner intuitiven, leicht nachvollziehbaren Vorgehensweise bei Ingenieuren in Forschung und Industrie auf ein großes Interesse. Entsprechende Topologieoptimierungsverfahren werden heute bereits im Automobilbau eingesetzt. Jedoch können mit diesen "konventionellen" Verfahren nur sehr vereinfachte Entwurfsprobleme gelöst werden. Zumeist wird die Steifigkeit des Tragwerks für ein linear elastisches Tragverhalten optimiert, wobei die Form der Tragwerkselemente nur in grober Näherung bestimmt werden kann (Bild 1.3a).

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Topologieoptimierung zu einem zuverlässigen Werkzeug für den Entwurf von dünnwandigen Tragwerken weiterzuentwickeln. Die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse wird gesteigert, indem über das Kriterium der Steifigkeit hinaus weitere Entwurfskriterien berücksichtigt sowie ein geometrisch und materiell nicht-lineares Strukturverhalten im Optimierungsprozeß erfaßt werden. Die optimale Geometrie wird durch eine adaptive Entwurfsmodellierung des Topologieoptimierungsproblems und die Integration von CAGD-orientierten Formoptimierungsverfahren bestimmt. Hierbei werden folgende Schwerpunkte gesetzt:

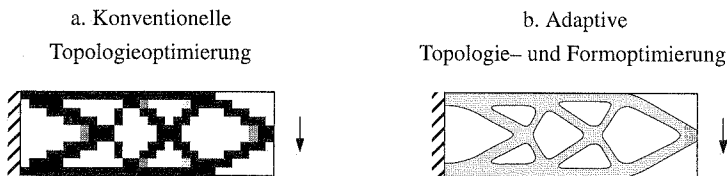
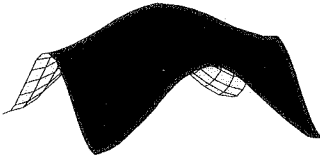


Bild 1.3: Konventionelle und adaptive Verfahren der Topologieoptimierung

a. Formfindung von Schalen



b. Topologie- und Formoptimierung auf Schalenflächen

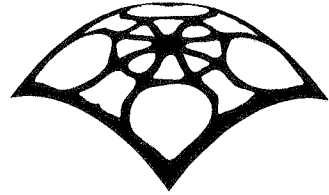


Bild 1.4: Optimierung von Schalenträgwerken

- Die materielle Topologieoptimierung wird oftmals entweder aus einem rein mathematischen Blickwinkel betrachtet oder lediglich als heuristische Methode eingestuft und nimmt daher eine Sonderstellung in der Strukturoptimierung ein. In dieser Arbeit werden die Grundlagen der materiellen Topologieoptimierung von einem ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus aufgearbeitet und die Topologieoptimierungsverfahren in den allgemeinen, modularen Aufbau der Strukturoptimierung eingebettet.
- Die Methode der materiellen Topologieoptimierung wird auf verschiedene Optimierungsprobleme angewandt: Maximierung der Steifigkeit ohne und mit Spannungsnebenbedingungen, Optimierung von Eigenfrequenzen, Maximierung der Grenzlast bei geometrisch nicht-linearem Strukturverhalten und Maximierung der Duktilität für elastoplastisches und quasi-sprödes Materialverhalten. Dabei ist jeweils die Masse im Entwurfsraum vorgeschrieben. Es werden geeignete Optimierungsverfahren entwickelt und anhand von numerischen Beispielen untersucht.
- Die Genauigkeit der Ergebnisse und die numerische Effizienz des Optimierungsprozesses können durch adaptive Verfahren erheblich gesteigert werden. Die Zuverlässigkeit der Strukturanalyse wird durch adaptive FE-Verfahren im Optimierungsprozeß kontrolliert. Die Diskretisierung der Materialverteilung in der Topologieoptimierung oder des CAD-Modells in der Formoptimierung wird den Zwischenergebnissen im Optimierungsprozeß angepaßt. Durch eine adaptive Kombination von materieller Topologieoptimierung und CAD-orientierter Formoptimierung werden sowohl der grundlegende Aufbau des Tragwerks wie auch die Form der Strukturelemente im Detail bestimmt.

In dieser Arbeit werden Topologie- und Formoptimierungsverfahren insbesondere für den Entwurf von Schalenträgwerken entwickelt. Dünnwandige Schalen zeichnen sich durch eine hohe Steifigkeit bei geringem Gewicht aus, wenn die äußeren Lasten hauptsächlich über Membrankräfte abgetragen werden. Ihr Tragverhalten hängt jedoch erheblich von den Lager- und Lastbedingungen, der Form der Schalenfläche sowie der Position und Form von Aussparungen ab. Die Möglichkeiten der Strukturoptimierung zur Formfindung der Schalenoberfläche werden u.a. von Ramm et al. [205] aufgezeigt (Bild 1.4a). In dieser Arbeit wird der Fall betrachtet,

daß die Schalenfläche aufgrund von funktionalen oder gestalterischen Gründen vorgegeben ist. Die Topologie und die Form des Tragwerks auf der Schalenfläche wird durch eine adaptive Form- und Topologieoptimierung bestimmt (Bild 1.4b).

Anmerkung:

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren und Algorithmen wurden in das FE-Programmsystem CARAT implementiert, das am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart unter besonderer Berücksichtigung der Anforderungen der Strukturoptimierung entwickelt wird (Bletzinger [42],[40], Kimmich [135], Reitinger [212]).

1.3 Überblick

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel:

In Kapitel 2 werden zunächst die generelle Systematik und die Grundlagen der Strukturoptimierung erläutert, auf denen die im weiteren entwickelten Methoden aufbauen. Es werden geeignete Optimierungsverfahren für Topologie- und Formoptimierungsprobleme vorgestellt. Der wesentliche Unterschied zwischen Form- und Topologieoptimierung wird anhand einer allgemeinen Betrachtung zur Beschreibung von geometrischen Transformationen verdeutlicht. Die in dieser Arbeit untersuchten mechanischen Problemstellungen werden im Rahmen der Finiten Elemente Methode kurz erläutert. Die Verfahren zur Sensitivitätsanalyse werden auf ihre Eigenschaften in der Topologie- und Formoptimierung untersucht.

Kapitel 3 gibt einen Überblick über die Methode der materiellen Topologieoptimierung. Der mathematische Hintergrund der materiellen Topologieoptimierung wird aufgearbeitet und die Bedeutung der Begriffe "Regularisierung", "Relaxation", "Homogenisierung" in diesem Zusammenhang geklärt. Hierbei wird insbesondere auf die Rolle der verschiedenen Werkstoffmodelle in der materiellen Topologieoptimierung eingegangen.

In Kapitel 4 wird die Methode der materiellen Topologieoptimierung auf verschiedene Optimierungsprobleme für Scheiben-, Platten- und Schalenträgerwerke angewandt. Neben der klassischen Steifigkeitsoptimierung werden Optimierungsprobleme mit Spannungsnebenbedingungen und Eigenfrequenzen untersucht. Die Bedeutung, nichtlineares Tragverhalten im Optimierungsprozeß zu berücksichtigen, wird durch Beispiele zur Maximierung der Grenzlast bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten und zur Maximierung der Duktilität bei elastoplastischem und quasi-sprödem Materialverhalten unterstrichen. Hierbei wird kurz auf die Möglichkeiten der Topologieoptimierung im Stahlbetonbau eingegangen. Numerische Schwierigkeiten, die bei der Lösung der verschiedenen Materialverteilungsaufgaben entstehen, werden aufgezeigt und entsprechende Gegenmaßnahmen erläutert.

In Kapitel 5 sind die Verfahren der Formoptimierung zusammengestellt. Es wird eine CAGD-orientierte Entwurfsmodellierung für die Formoptimierung von topologisch komplexen Schalenträgerwerken eingeführt und an einem Beispiel veranschaulicht.

Kapitel 6 behandelt die verschiedenen Aspekte der Adaptivität in der Strukturoptimierung. Es ist zwischen der bekannten adaptiven Diskretisierung des FE-Modells und der bislang nur selten untersuchten, adaptiven Modellierung des Entwurfsmodells zu unterscheiden. Die Integration von adaptiven FE-Verfahren in den Optimierungsprozess wird am Beispiel der Formoptimierung diskutiert. Üblicherweise wird nur der Diskretisierungsfehler in der Strukturantwort kontrolliert. Es ist jedoch ebenfalls notwendig, den Fehler in den Sensitivitäten der Zustandsgrößen zu berücksichtigen. Die Grundzüge der adaptiven Entwurfsmodellierung werden anhand der Formoptimierung dargestellt und auf die materielle Topologieoptimierung übertragen. Das Verfahren der adaptiven Topologieoptimierung wird am Beispiel der Steifigkeitsoptimierung eines Schalentragswerks veranschaulicht und dessen Vorteile durch weitere Beispiele unterstrichen. Zusätzlich wird ein CAGD-orientiertes Formoptimierungsverfahren in die adaptive Topologieoptimierung integriert, um sowohl den grundlegenden Aufbau wie auch die Form des Tragswerks im Detail zu bestimmen.

Abschließend werden in Kapitel 7 die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefaßt sowie Anregungen für zukünftige Entwicklungen gegeben.

Im Anhang sind Ergänzungen zu einzelnen Themen und algorithmische Details von verschiedenen Verfahren aufgeführt. Die Eigenschaften von geometrisch orientierten Verfahren in der Topologieoptimierung werden am Beispiel der "bubble"-Methode veranschaulicht. Die Grundzüge der Entwurfstheorie von Michell werden am Beispiel der Topologieoptimierung von Fachwerken erläutert. Die wichtigsten, heuristischen Verfahren in der materiellen Topologieoptimierung werden vorgestellt und mit dem in Kapitel 3 erläuterten, mathematisch orientierten Ansatz verglichen. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Algorithmen zur Bestimmung der optimalen Materialverteilung, zur Orientierung von orthotropen Werkstoffen und zur Anpassung des Entwurfsmodells in der adaptiven Topologie- und Formoptimierung sind aufgeführt. Die Homogenisierungsergebnisse für das in der Topologieoptimierung bekannteste Werkstoffmodell, der Mikrozelle mit Rechteck-Loch, sind zusammengestellt.

2 Grundelemente der Strukturoptimierung

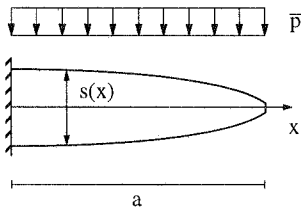
In der Strukturoptimierung werden die Geometrie, d.h. die Topologie und die Form, sowie die materielle Zusammensetzung eines Tragwerks hinsichtlich bestimmter, mechanisch orientierter Entwurfskriterien optimiert. In Bild 2.1 ist ein klassisches Optimierungsproblem skizziert. Gesucht ist der kontinuierliche Verlauf der Balkenhöhe $s(x)$, so daß das Volumen des Balkens minimal wird und die über den Balken gemittelte, vertikale Verschiebung $u(x)$ den Wert u_{\max} nicht überschreitet. Die Verschiebungen $u(x)$ werden durch die statischen Gleichgewichtsbedingungen nach der Bernoulli-Balkentheorie beschrieben. Die Optimierungsaufgabe stellt ein gemischtes Variationsproblem mit Nebenbedingungen in den unbekannten Funktionen $s(x)$, $u(x)$, $\gamma(x)$ sowie dem Parameter η dar.

$$L(s, u, \gamma, \eta) = \int_a \ b \ s \ dx + \eta \left[\int_a \ u \ dx - a \ u_{\max} \right] \quad (2.1)$$

$$+ \int_a \ \gamma(x) \left[\nabla_x^2 (E I \nabla_x^2 u) - \bar{p} \right] dx$$

$$s \in C^0(a) \quad ; \quad u \in H^2(a) \quad ; \quad \gamma \in H^2(a) \quad ; \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Die Nebenbedingungen werden über die Lagrange-Multiplikatoren $\gamma(x)$ und η in die Lagrange-Funktion $L(s, u, \gamma, \eta)$ eingeführt, wobei das statische Gleichgewicht nur in schwacher Form berücksichtigt wird. Die kinematischen und statischen Randbedingungen (RB) werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Aufgabenstellung (2.1) nicht explizit aufgeführt. Das Variationsproblem wird durch den Wertebereich für η und die Funktionenräume für $s(x)$, $u(x)$, $\gamma(x)$ auf $0 \leq x \leq a$ eindeutig definiert. Der optimale Verlauf der Balkenhöhe $s(x)$ wird durch die Stationarität der Lagrange-Funktion $L(s, u, \gamma, \eta)$ beschrieben. Die Lösung



Flächenträgheitsmoment
(Rechteckquerschnitt $s \times b$)

$$I(x, s) = \frac{b}{12} s(x)^3$$

$$\text{Minimales Volumen: } V = \int_0^a b \ s(x) \ dx$$

Nebenbedingungen:

$$1. \quad \int_0^a u \ dx - a \ u_{\max} \leq 0$$

$$2. \quad \nabla_x^2 (E I \nabla_x^2 u) - \bar{p} = 0$$

+ kinematische und statische RB

Bild 2.1: Optimierungsproblem – Balken mit minimalem Volumen

des Optimierungsproblems kann aus den Euler-Gleichungen des Variationsproblems analytisch berechnet werden (Haftka et al. [110]). Die optimale Balkenhöhe nimmt mit der Quadratwurzel zum Ende des Balkens hin ab.

Nur wenige, zumeist akademische Optimierungsprobleme können auf der Basis einer kontinuierlichen Formulierung geschlossen gelöst werden. Daher werden die Entwurfslfunktion $s(\mathbf{x})$, welche die variable Geometrie und die veränderliche materielle Zusammensetzung des Tragwerks beschreibt, und die Strukturantwort, die beispielsweise über die Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ charakterisiert wird, durch Näherungsfunktionen $s^h(\mathbf{x})$ und $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ approximiert.

$$s(\mathbf{x}) \approx s^h(\mathbf{x}) = s^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}) \quad ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) \quad (2.2)$$

Die Vektoren $\hat{\mathbf{s}}$ und $\hat{\mathbf{u}}$ bezeichnen die freien Parameter der Näherungsfunktionen, die im Optimierungsprozeß numerisch bestimmt werden. Das diskretisierte Optimierungsproblem wird in drei Modellen beschrieben (Bild 2.2).

- Im Optimierungsmodell wird das Strukturoptimierungsproblem mathematisch abstrakt formuliert. Das Optimierungsproblem, das durch die Zielfunktion, die Nebenbedingungen und die Optimierungsvariablen definiert ist, wird auf ein System von nichtlinearen Gleichungen und Ungleichungen zurückgeführt und mittels mathematischer Verfahren gelöst.
- Im Entwurfsmodell werden der räumliche Aufbau, die Form und die materielle Zusammensetzung des Tragwerks beschrieben sowie die Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ definiert. Die im Optimierungsmodell als abstrakte Größen eingeführten Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ erhalten im Entwurfsmodell eine geometrische bzw. physikalische Bedeutung.
- Im Analysemodell werden die Strukturantwort bestimmt, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen ausgewertet sowie deren Sensitivitäten bezüglich den Optimierungsvariablen

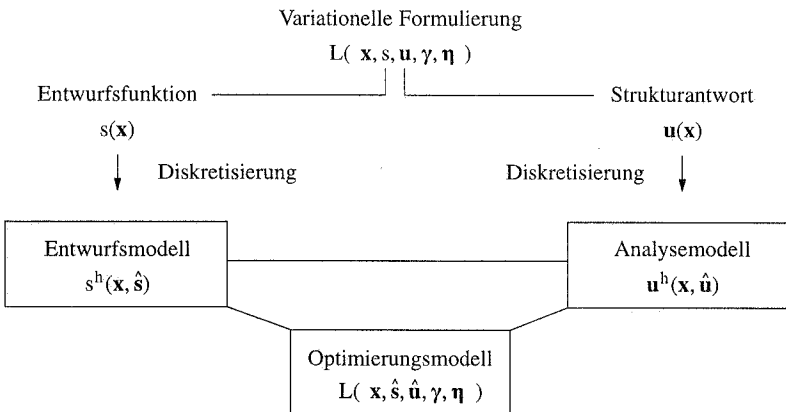


Bild 2.2: Modellierung des diskretisierten Optimierungsproblems

berechnet. Die mechanischen Gleichungen werden auf diese Weise vorab erfüllt und müssen im Optimierungsmodell nicht mehr explizit berücksichtigt werden. In der Strukturoptimierung werden zumeist nur die mechanischen Eigenschaften des Tragwerks berücksichtigt. Doch können im Sinne einer multidisziplinären Optimierung auch weitere physikalische Eigenschaften des Tragwerks, wie das strömungsmechanische Verhalten, und konstruktive Aspekte, wie fertigungstechnische Kriterien, im Analysemodell erfaßt werden.

Die Diskretisierungen im Entwurfs- und im Analysemodell bleiben während des Optimierungsprozesses zumeist unverändert. Wenn sich jedoch die Geometrie bzw. die materielle Zusammensetzung des Tragwerks im Optimierungsprozeß erheblich verändert, werden die kontinuierlichen Lösungen $s(\mathbf{x})$ und $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ durch die Näherungsfunktionen $s^h(\mathbf{x})$ und $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ nur grob approximiert. Folglich sind die Diskretisierungen für die Entwurfslösung $s(\mathbf{x})$ und die Strukturantwort $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ den Veränderungen des Tragwerks während des Optimierungsprozesses anzupassen. In den Kapiteln 2–5 werden zunächst die Grundlagen und die numerischen Verfahren der Topologie- und der Formoptimierung bei einer konstanten Diskretisierung erläutert. In Kapitel 6 werden Methoden zur Adaption der Diskretisierung der Entwurfslösung $s(\mathbf{x})$ und der Strukturantwort $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ im Entwurfsprozeß vorgestellt.

Zu Beginn des Optimierungsprozesses wird basierend auf dem diskretisierten Entwurfsmodell ein erster Entwurf erzeugt. Zur Beurteilung der Qualität des Entwurfs wird zunächst das Strukturverhalten des Ist-Zustands bestimmt. Für die Strukturanalyse wird zumeist die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Die für gradientenorientierte Optimierungsmethoden notwendigen Informationen, wie sich das Strukturverhalten bei einer Variation der Optimierungsvariablen verändert, werden in einer anschließenden Sensitivitätsanalyse berechnet. Das mathematisch abstrakte Problem wird mittels diverser mathematischer Optimierungsmethoden gelöst. Als Ergebnis erhält man einen Satz von modifizierten Optimierungsvariablen, die im Entwurfsmodell einen verbesserten Entwurfsvorschlag darstellen. Da im allgemeinen die Probleme der Strukturoptimierung in den Optimierungsvariablen nichtlinear sind, kann das Optimum nur iterativ bestimmt werden. Hierzu wird die zuvor beschriebene Optimierungsprozedur mit jeweils verbesserten Optimierungsvariablen so lange wiederholt, bis eine ausreichende Konvergenz für die Lösung erreicht ist.

Die Aufbereitung der diskretisierten Entwurfsaufgabe mittels dieser drei Modelle führt zu einer strengen Modularität und hohen Flexibilität bei der Lösung von verschiedensten Optimierungsaufgaben. Zielfunktion, Nebenbedingungen und Optimierungsvariablen sind formal beliebig austauschbar, ohne daß der Gesamtaufbau der Methode verändert werden muß. Die Verfahren zur Struktur- und Sensitivitätsanalyse können entsprechend der mechanischen Modellbildung gewählt werden. Für unterschiedlich geartete Probleme werden jeweils geeignete Methoden zur Lösung des mathematischen Optimierungsproblems eingesetzt. Die Wechselwirkungen der Modelle untereinander sind jedoch bei der Beurteilung der Optimierungsergebnisse zu beachten.

In den folgenden Abschnitten sind die Grundlagen der numerischen Strukturoptimierung zusammengestellt, die für das weitere Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind. Die Lehrbücher von Haftka et al. [110], Kirsch [137], Banichuk [14] und Olhoff [192] werden für eine umfassendere Einführung in die Methoden der Strukturoptimierung empfohlen. Auf spezielle Literatur zu den einzelnen Themen wird in den jeweiligen Kapiteln verwiesen.

2.1 Optimierungsmodell

Die Entwurfsaufgabe wird im Optimierungsmodell abstrakt beschrieben.

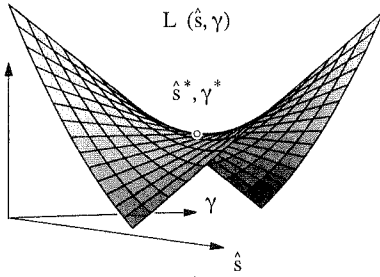
$$\begin{aligned}
 \min_{\hat{\mathbf{s}}} \quad & f(\hat{\mathbf{s}}) && ; \quad f(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R} \\
 & \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} && ; \quad \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\
 & \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) \leq \mathbf{0} && ; \quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_g} \\
 & \hat{\mathbf{s}} = \{ \hat{\mathbf{s}} \in \mathbf{V}_s \mid \hat{\mathbf{s}}_L \leq \hat{\mathbf{s}} \leq \hat{\mathbf{s}}_U \}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Optimierungsvariablen werden mit dem Vektor $\hat{\mathbf{s}}$ der Dimension n_s bezeichnet. Man unterscheidet zwischen diskreten Optimierungsproblemen, bei denen die Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ nur endlich viele oder ganzzahlige Werte annehmen können ($\mathbf{V}_s \subset \mathbb{Z}^{n_s}$), und kontinuierlichen Problemen ($\mathbf{V}_s \subset \mathbb{R}^{n_s}$). Der Wertebereich der Optimierungsvariablen wird zumeist durch obere und untere Schranken $\hat{\mathbf{s}}_L$ und $\hat{\mathbf{s}}_U$ beschränkt, die auch als Restriktionen bezeichnet werden. Jede Optimierungsaufgabe läßt sich so formulieren, daß die Zielfunktion $f(\hat{\mathbf{s}})$ zu minimieren ist. Wird der zulässige Lösungsraum durch Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}})$ bzw. $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}})$ begrenzt, liegt ein beschränktes, ansonsten ein unbeschränktes Optimierungsproblem vor. Das Optimierungsproblem heißt linear oder lineares Programm, wenn alle Gleichungen (2.3) in $\hat{\mathbf{s}}$ linear sind. Ist zumindest eine Gleichung in $\hat{\mathbf{s}}$ nichtlinear, spricht man von einem nichtlinearen Programm.

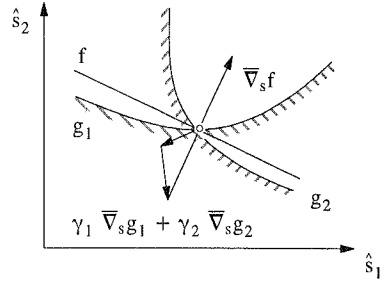
Sämtliche Entwurfsaufgaben, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, lassen sich auf kontinuierliche, nichtlineare, beschränkte Optimierungsprobleme zurückführen. Für eine Einführung in die Theorie der nichtlinearen Optimierung werden die Lehrbücher von Gill et al. [99] und Luenberger [148] empfohlen. An dieser Stelle sollen lediglich die wesentlichen Grundlagen und die in der vorliegenden Arbeit eingesetzten numerischen Lösungsverfahren erläutert werden.

Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen

Die beschränkte Optimierungsaufgabe wird in ein quasi-unbeschränktes Problem transformiert, das effizient gelöst werden kann. Die Lösung des beschränkten Problems wird unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f(\hat{\mathbf{s}})$, $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}})$, $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}})$ bezüglich den Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ zweifach stetig differenzierbar sind, durch den Stationärwert der zugehörigen Lagrange-Funktion $L(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma})$ beschrieben.



a. Sattelpunkt der Lagrange-Funktion



b. Kuhn-Tucker-Bedingungen

Bild 2.3: Grafische Darstellung der Lösung eines beschränkten Optimierungsproblems

$$L(\hat{s}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\hat{s}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{h}(\hat{s}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\hat{s}) \quad (2.4)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_h}$ und $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_g}$ werden auch als duale Variablen bezeichnet. Der Stationärwert der Lagrange-Funktion $L(\hat{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ stellt einen Sattelpunkt im $(n_s + n_h + n_g)$ -dimensionalen Lösungsraum dar (Bild 2.3a).

$$L(\hat{s}^*, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) \leq L(\hat{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \leq L(\hat{s}, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \quad (2.5)$$

Die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen für den Sattelpunkt ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den primalen und dualen Variablen.

$$\bar{\nabla}_s f(\hat{s}^*) + \boldsymbol{\eta}^T \bar{\nabla}_s \mathbf{h}(\hat{s}^*) + \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\nabla}_s \mathbf{g}(\hat{s}^*) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

$$h_j(\hat{s}^*) = 0$$

$$\gamma_j^* g_j(\hat{s}^*) = 0 \quad ; \quad \gamma_j^* \geq 0$$

Der negative Gradient der Zielfunktion $(-\bar{\nabla}_s f)$ läßt sich im Sattelpunkt als eine Linearkombination der Gradienten der im Optimum aktiven Nebenbedingungen darstellen (Bild 2.3b). Mit der Bedingung $\gamma_j \geq 0$ wird ausgeschlossen, daß nichtoptimale Lösungen die Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.6) erfüllen. Die dualen Variablen $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}$ sind jedoch nur dann eindeutig, wenn die im Optimum aktiven Gradienten $\bar{\nabla}_s \mathbf{h}$ und $\bar{\nabla}_s \mathbf{g}$ linear unabhängig sind. Die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum des beschränkten Problems ist die Konvexität der Lagrange-Funktion bezüglich den primalen Variablen in einer endlich kleinen Umgebung der Lösung. Dies entspricht für zweifach stetig differenzierbare Funktionen $f(\hat{s}), \mathbf{h}(\hat{s}), \mathbf{g}(\hat{s})$ der Forderung, daß die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im Sattelpunkt positiv definit ist.

$$\bar{\mathbf{v}}^T \bar{\nabla}_s^2 L \bar{\mathbf{v}} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\mathbf{v}} = \{ \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0} \} \quad (2.7)$$

Es liegt ein globales Optimum vor, wenn die Lagrange-Funktion im gesamten Lösungsraum bezüglich den primalen Variablen konvex ist.

2.1.1 Optimierungsverfahren

Die Entwurfskriterien $f(\hat{s})$, $h(\hat{s})$, $g(\hat{s})$ sind im allgemeinen implizite, nichtlineare Funktionen der Optimierungsvariablen \hat{s} . Die Kuhn–Tucker–Bedingungen können daher nicht geschlossen, sondern nur iterativ gelöst werden. Je nach Art und Größe des nichtlinearen Optimierungsproblems werden diskrete Optimalitätskriterienverfahren¹ (OC) oder Methoden der Mathematischen Programmierung (MP) eingesetzt. Letztere lösen das Optimierungsproblem unabhängig von der zugrunde liegenden Entwurfsaufgabe auf einer rein abstrakten, mathematischen Ebene. Für kontinuierliche Probleme werden u.a. konjugierte Gradienten–, Straffunktions– und Barriere–Verfahren sowie duale und Lagrange–Methoden eingesetzt. Evolutionsstrategien und genetische Algorithmen eignen sich insbesondere für diskontinuierliche und ganzzahlige Optimierungsprobleme. OC–Verfahren sind dagegen für bestimmte Entwurfsaufgaben spezialisiert, wobei das zugrunde liegende mechanische Problem berücksichtigt wird. Eine Mischform von OC– und MP–Verfahren bilden die Approximationsmethoden, bei denen die Entwurfskriterien durch explizite, für die jeweilige Entwurfsaufgabe geeignete Funktionen angenähert werden. Das explizite Problem wird mit MP–Verfahren gelöst. Man unterscheidet globale Approximationsmethoden, wie Multi–Point–Verfahren, und lokale, gradientenorientierte Approximationstechniken, wie die Methode der bewegten Asymptoten (MMA). Die in der Strukturoptimierung eingesetzten Lösungsverfahren sind u.a. in Arora [10], Vanderplaats [263] und Bletzinger [40] ausführlich beschrieben. Die gängigsten Verfahren werden von Schittkowski et al. [227] anhand unterschiedlicher nichtlinearer Optimierungsprobleme miteinander verglichen.

Die Topologieoptimierungsaufgaben, die im weiteren behandelt werden, lassen sich auf kontinuierliche, nichtlineare Optimierungsprobleme (2.3) zurückführen. Sie sind durch eine große Anzahl von Optimierungsvariablen ($n_s > 500$) mit einem lokalen Einfluß auf das Strukturverhalten und durch wenige Nebenbedingungen gekennzeichnet. Für diese Probleme eignen sich vor allem OC–Methoden. Formoptimierungsaufgaben, für die eine kleine bis mittlere Problemgröße ($n_s < 200 - 500$) und stark in \hat{s} nichtlineare Entwurfskriterien typisch sind, werden überwiegend mit MP–Verfahren gelöst. In den letzten Jahren haben sich Lagrange–Methoden, wie das Verfahren der Sequentiellen Linearen Programmierung (SLP) oder das der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP), und lokale Approximationsmethoden durchgesetzt. Im Rahmen dieser Arbeit bewährten sich mathematisch orientierte OC–Methoden zur Lösung von großen Topologieoptimierungsproblemen sowie das SQP–Verfahren für kleinere Topologieoptimierungsaufgaben und für Formoptimierungsprobleme.

1. In der Strukturoptimierung wird zwischen kontinuierlichen (COC) und diskreten (DOC) Optimalitätskriterienverfahren unterschieden. COC–Verfahren lösen die Entwurfsaufgabe auf der Basis einer kontinuierlichen Formulierung (\rightarrow Balkenaufgabe (2.1)). Diese Vorgehensweise wird beispielsweise in den Arbeiten von Prager und Taylor [201] untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird die Entwurfsaufgabe in diskretisierter Form u.a. mit DOC– oder kurz OC–Verfahren gelöst.

Optimalitätskriterienverfahren

Die Gemeinsamkeit aller OC-Verfahren besteht darin, daß Bedingungen formuliert werden, die das zu erreichende Optimum definieren und durch einfache rekursive Iterationsschemen erfüllt werden. OC-Verfahren zeichnen sich durch eine hohe numerische Effizienz und große Robustheit für bestimmte Entwurfsaufgaben aus. Eine aktuelle Zusammenstellung und Bewertung verschiedener OC-Verfahren sowie weiterführende Referenzen sind bei Patnaik et. al. [197] aufgeführt. Für eine leicht verständliche Einführung in die diskreten OC-Verfahren wird Hörnlein [125] empfohlen. Die OC-Verfahren können nach Kirsch [137] in physikalisch intuitive und mathematische Verfahren eingeteilt werden. Aufgrund von mechanisch anschaulichen Überlegungen werden bei der intuitiven Vorgehensweise für jede Entwurfsaufgabe spezifische, einfache Optimalitätsbedingungen einer äquivalenten Aufgabenstellung formuliert. Der bekannteste Vertreter dieser Klasse ist das "Fully Stressed Design"-Verfahren (\rightarrow Anhang A2). Hierbei wird das Gewicht eines Fachwerks minimiert, indem die Querschnitte auf die maximal zulässige Spannung dimensioniert werden. Physikalisch intuitive Verfahren sind jedoch meistens nicht in der Lage, das Optimum des eigentlichen Problems exakt zu bestimmen. Im allgemeinen führen sie nur zu verbesserten, aber nicht zu optimalen Entwürfen.

Mathematische OC-Verfahren lösen direkt die Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.6) des Optimierungsproblems. Die Lösung wird im $(n_s + n_h + n_g)$ -dimensionalen Raum mit Iterationsvorschriften für die Optimierungsvariablen \hat{s}

$$\hat{s}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_s(\hat{s}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}^{(k)}) \quad ; \quad \mathbf{Y}_s \in \mathbb{R}^{n_s} \quad (2.8)$$

und Abschätzungsverfahren für die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}$ der aktiven Nebenbedingungen bestimmt.

$$\boldsymbol{\eta}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_\eta(\hat{s}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}^{(k)}) \quad ; \quad \mathbf{Y}_\eta \in \mathbb{R}^{n_h} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} = \mathbf{Y}_\gamma(\hat{s}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}^{(k)}) \quad ; \quad \mathbf{Y}_\gamma \in \mathbb{R}^{n_{g,aktiv}}$$

Der Index (k) bezeichnet den aktuellen Iterationsschritt im OC-Verfahren. Das Iterationsschema wird entsprechend modifiziert, wenn der Wertebereich für die Optimierungsvariablen durch obere und untere Schranken \hat{s}_L und \hat{s}_U restringiert oder durch eine maximal zulässige Schrittweite $\bar{\alpha}$ beschränkt ist.

$$\hat{s}^{(k+1)} : \quad \hat{s}_L \leq \hat{s}^{(k)} (1 - \bar{\alpha}) \leq \mathbf{Y}_s(\hat{s}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\gamma}^{(n)}) \leq \hat{s}^{(k)} (1 + \bar{\alpha}) \leq \hat{s}_U \quad (2.10)$$

Das Iterationsverfahren wird beendet, wenn die Norm der Gradienten der Lagrange-Funktion oder die Veränderung der Zielfunktion sowie die Differenz zwischen Lagrange- und Zielfunktion ein vorgegebenes Abbruchkriterium $\bar{\epsilon}$ unterschreiten.

$$\| \bar{\nabla}_s L^{(k)} \| \leq \bar{\epsilon} \quad \text{oder} \quad \left| \frac{f^{(k)} - f^{(k-1)}}{f^{(k)}} \right| \leq \bar{\epsilon} \quad (2.11)$$

$$|L^{(k)}| - |f^{(k)}| \leq \sum_{j=1}^{n_h} |\eta_j^{(k)} h_j^{(k)}| + \sum_{j=1}^{n_{g,aktiv}} |\gamma_j^{(k)} g_j^{(k)}| \leq \bar{\epsilon} \quad (2.12)$$

Im Konvergenzkriterium (2.12) ist es ausreichend, nur die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen zu berücksichtigen. Die Iterationsvorschrift \mathbf{Y}_s für die Optimierungsvariablen wird aus der ersten Kuhn–Tucker–Bedingung in (2.6) entwickelt. Im Optimum gilt:

$$\frac{\nabla_s f}{\boldsymbol{\eta}^T \nabla_s \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_s \mathbf{g}} = -1 \quad ; \quad (\boldsymbol{\eta}^T \nabla_s \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_s \mathbf{g}) \neq 0 \quad (2.13)$$

Hieraus kann folgende exponentielle Rekursionsformel abgeleitet werden:

$$\hat{s}_i^{(k+1)} = \hat{s}_i^{(k)} \left[\tilde{Y}_{s_i}^{(k)} \right]^q \quad ; \quad i = 1, \dots, n_s \quad ; \quad q \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

$$\tilde{Y}_{s_i}^{(k)} = \bar{\mu}_s^{(k)} - \left(\frac{\nabla_s f}{\boldsymbol{\eta}^T \nabla_s \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_s \mathbf{g}} \right)^{(k)} \quad ; \quad \tilde{Y}_{s_i}^{(k)} > 0 \quad (2.15)$$

Der Wertebereich für die Optimierungsvariablen ist dabei so zu transformieren, daß die untere Schranke $\hat{s}_L \geq 0$ ist. Zusätzlich wird ein Shift-Faktor $\bar{\mu}_s^{(k)}$ eingeführt, der aus der Bedingung $\tilde{Y}_{s_i}^{(k)} \geq 0$ in jedem Iterationsschritt berechnet wird. Der Parameter q dient zur Steuerung der Schrittweite und des Konvergenzverhaltens des Verfahrens. Die Rekursionsformel (2.14) kann über eine Reihenentwicklung zu einer linearen Iterationsvorschrift vereinfacht werden.

$$\hat{s}_i^{(k+1)} = \hat{s}_i^{(k)} \left[1 + q \left(\tilde{Y}_{s_i}^{(k)} - 1 \right) \right] \quad ; \quad i = 1, \dots, n_s \quad ; \quad q \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

Je nach Entwurfsaufgabe ist die exponentielle oder die lineare Iterationsvorschrift besser geeignet. Ma et al. [152] zeigen, daß die Rekursionsformel (2.14) einem inversen Approximationsverfahren mit einem dualen Lösungsalgorithmus entspricht.

Das globale Konvergenzverhalten der OC-Verfahren wird maßgeblich durch die Qualität der Abschätzung für die Lagrange-Multiplikatoren bestimmt. Entsprechende Rekursionsformeln werden zumeist aus den Kuhn–Tucker–Bedingungen abgeleitet, wonach die aktiven Nebenbedingungen im Optimum Null sind. Die Nebenbedingungen können oftmals in einen vorgegebenen, konstanten Anteil und einen von den Optimierungsvariablen abhängigen Anteil zerlegt werden.

$$\mathbf{h} : \quad \hat{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{s}}) - \bar{\mathbf{h}} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{n_h} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{g} : \quad \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{s}}) - \bar{\mathbf{g}} \leq 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{m_g} \quad (2.18)$$

In diesem Fall lassen sich analog zu den Iterationsvorschriften für die Optimierungsvariablen exponentielle und lineare Abschätzungsvorschriften gewinnen.

$$\text{exponentiell: } \eta_j^{(k+1)} = \eta_j^{(k)} \left[\bar{h}_j^{(k)} / \bar{h}_j \right]^q \quad ; \quad j = 1, \dots, n_h \quad (2.19)$$

$$\text{linear:} \quad \eta_j^{(k+1)} = \eta_j^{(k)} \left[1 + q \left(\frac{\tilde{h}_j^{(k)}}{\bar{h}_j} - 1 \right) \right] \quad ; \quad j = 1, \dots, n_h \quad (2.20)$$

Die Iterationsvorschriften für die Ungleichheitsnebenbedingungen γ_j lauten entsprechend. Die Lagrange–Multiplikatoren nichtaktiver Nebenbedingungen streben im allgemeinen schnell gegen Null, so daß eine explizite Bestimmung des aktiven Satzes der Nebenbedingungen nicht notwendig ist.

In der vorliegenden Arbeit hat sich für Topologieoptimierungsprobleme mit einer Gleichheitsnebenbedingung ein alternatives Verfahren bewährt. Dieses beruht auf einer Linearisierung der Gleichheitsnebenbedingung h bezüglich der primalen Variablen.

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} + (\bar{\nabla}_s h)^{(k)T} \left(\hat{s}^{(k+1)} - \hat{s}^{(k)} \right) = 0 \quad (2.21)$$

Die Linearisierung führt auf eine einfache Beziehung zur Bestimmung des Lagrange–Multiplikators $\eta^{(k)}$, wobei $\hat{s}^{(k+1)}$ durch die exponentielle oder die lineare Iterationsvorschrift (2.14) bzw. (2.16) ersetzt wird. Für die exponentielle Rekursionsformel beispielsweise lautet die Bestimmungsgleichung.

$$\left(\eta^{(k)} \right)^q = \left[(\bar{\nabla}_s h)^{(k)T} \tilde{Y}_s^{(k)} \right] / \left[(\bar{\nabla}_s h)^{(k)T} \hat{s}^{(k)} - h^{(k)} \right] \quad (2.22)$$

$$\tilde{Y}_{s_i}^{(k)} = \hat{s}_i \left[\tilde{\mu}_s^{(k)} - \frac{\nabla_s f^{(k)}}{\nabla_s h^{(k)}} \right]^q \quad (2.23)$$

Der modifizierte Shift–Faktor $\tilde{\mu}_s^{(k)}$ wird so bestimmt, daß die eckige Klammer in (2.23) für alle Optimierungsvariablen größer Null ist. Die Optimierungsvariablen $\hat{s}^{(k+1)}$ können mit dem so ermittelten Lagrange–Multiplikator bestimmt werden. Dies ist jedoch nur iterativ möglich, wenn untere und obere Restriktionen oder eine maximal zulässige Schrittweite den aktuellen Wertebereich für die Optimierungsvariablen nach (2.10) beschränken. Der gesamte OC–Algorithmus ist im Anhang A5 aufgeführt.

Der Einsatz von OC–Verfahren in der Strukturoptimierung wird sehr unterschiedlich beurteilt (Patnaik et al. [197]). Zum einen ist nicht gesichert, daß die Verfahren zu einem Minimum konvergieren, da die zugrunde liegenden Kuhn–Tucker–Bedingungen nur notwendig, aber nicht hinreichend sind. Zudem ist für jede Entwurfsaufgabe ein spezieller Algorithmus erforderlich, wobei die im Optimum aktiven Nebenbedingungen in Einzelfällen mit einer problem-spezifischen Strategie bestimmt werden müssen. Aufgrund der Vereinfachungen bei ihrer Herleitung sind OC–Verfahren nur bedingt geeignet, das Optimum exakt zu bestimmen. Zum anderen nähern sich OC–Verfahren in großen Schritten dem Optimum und können dabei im Fall von nichtkonvexen Problemen lokale Optima überspringen, wenn für die jeweilige Entwurfsaufgabe unter Berücksichtigung der physikalischen Bedeutungen von Zielfunktion und

Nebenbedingungen die geeigneten Iterations- und Abschätzungsvorschriften gefunden werden. Dies ist vor allem für Probleme mit wenigen Nebenbedingungen möglich. Für die Konvergenzeigenschaften und die Effizienz der Verfahren spielt die Anzahl der Optimierungsvariablen kaum eine Rolle. Daher eignen sich OC-Verfahren insbesondere für große Optimierungsprobleme mit – im Idealfall – einer Nebenbedingung.

Sequentielle Quadratische Programmierung

Das SQP-Verfahren zählt zu den Lagrange-Methoden. Diese bestimmen, wie die zuvor beschriebenen OC-Verfahren, das Optimum im Raum der primalen und dualen Variablen. Im Gegensatz zu der eher intuitiven Vorgehensweise der OC-Verfahren löst das SQP-Verfahren die Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.6) durch ein erweitertes Newton-Raphson-Verfahren. Hierzu werden die Kuhn-Tucker-Bedingungen bezüglich der primalen und dualen Variablen linearisiert, woraus sich folgendes Iterationsschema ableiten läßt.

$$\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_s^2 \mathbf{L}^{(k)} & \bar{\nabla}_s \mathbf{g}^{(k)} & \bar{\nabla}_s \mathbf{h}^{(k)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(k)T} \bar{\nabla}_s \mathbf{g}^{(k)} & \mathbf{g}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \bar{\nabla}_s \mathbf{h}^{(k)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\eta}^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_s \mathbf{L}^{(k)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(k)T} \mathbf{g}^{(k)} \\ \mathbf{h}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} = \hat{\mathbf{s}}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \quad ; \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \quad ; \quad \Delta \boldsymbol{\eta}^{(k)} = \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\eta}^{(k)}$$

Das lineare Gleichungssystem (2.24) läßt sich als die notwendigen Bedingungen eines quadratischen Unterproblems deuten.

$$\min_{\hat{\mathbf{s}}} \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)T} \bar{\nabla}_s^2 \mathbf{L}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} + \bar{\nabla}_s \mathbf{f}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \quad (2.25)$$

$$\bar{\nabla}_s \mathbf{g}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} + \mathbf{g}^{(k)} \leq \mathbf{0}$$

$$\bar{\nabla}_s \mathbf{h}^{(k)} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} + \mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{0}$$

Dieses kann mit Verfahren der quadratischen Programmierung effizient gelöst werden, die u.a. bei Gill et al. [99] beschrieben sind. Das quadratische Unterproblem wird in jedem Iterationsschritt (k) aufgestellt und gelöst, woraus sich der Name des Verfahrens ableitet. Im Gegensatz zu anderen Verfahren der Mathematischen Programmierung ist der entscheidende Vorteil dieser Vorgehensweise, daß sowohl die Suchrichtungen $\Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)}$, $\Delta \boldsymbol{\eta}^{(k)}$, $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ wie auch die Schrittweite $\alpha^{(k)}$ gleichzeitig bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(k)} \end{bmatrix} + \alpha^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\eta}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha^{(k)} = 1 \quad (2.26)$$

Der in der vorliegenden Arbeit eingesetzte NLPQL-Algorithmus ist bei Schittkowski [226] und Bletzinger [40] detailliert beschrieben. Im weiteren wird daher nur auf einige wesentliche

Eigenschaften des Algorithmus eingegangen. Es ist häufig numerisch sehr aufwendig, die zweiten Ableitungen der Lagrange-Funktion zu berechnen. Daher wird die zugehörige Hesse-Matrix mit den ersten Ableitungen approximiert. Bewährte Approximationsverfahren sind das DFP-Verfahren von Davidon, Fletcher, Powell und das BFGS-Verfahren von Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno. Die sukzessive Lösung des approximierten, quadratischen Unterproblems entspricht einem Quasi-Newton-Verfahren. Die Schrittweite $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$ wird in diesem Fall durch eine eindimensionale Suche – “Line-Search” – bestimmt. Da die Lagrange-Funktion einen Sattelpunkt beschreibt, ist sie nicht geeignet, den Optimierungsfortschritt im “Line-Search” zu bewerten. An ihrer Stelle werden Abstiegsfunktionen verwendet, die im Lösungspunkt $L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ ein Minimum einnehmen. In Bletzinger [40] werden verschiedene Abstiegsfunktionen beschrieben und einander gegenübergestellt.

Für das globale Konvergenzverhalten ist entscheidend, wie gut die Hesse-Matrix abgeschätzt wird. Dies kann durch eine automatische Skalierung der approximierten Hesse-Matrix direkt im Algorithmus oder von außen durch die Skalierung der Zielfunktion erfolgen. Im günstigsten Fall konvergiert das SQP-Verfahren in der Nähe des Optimums $\hat{\mathbf{s}}^*$ superlinear.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{s}}^*\|}{\|\hat{\mathbf{s}}^{(k)} - \hat{\mathbf{s}}^*\|} = 0 \quad (2.27)$$

Bei Optimierungsproblemen mit stark unterschiedlichen Wertebereichen für die einzelnen Optimierungsvariablen erweist es sich als vorteilhaft, die Optimierungsvariablen auf einen gemeinsamen Wertebereich zu skalieren. Eine Skalierung der Nebenbedingungen dagegen ist beim SQP-Verfahren von untergeordneter Bedeutung, da die Skalierung durch die Lagrange-Multiplikatoren ausgeglichen wird.

Der eingesetzte SQP-Algorithmus erweist sich für kleinere bis mittelgroße Optimierungsprobleme ($n_s < 200$) als robust und effizient. Die Anzahl der Nebenbedingungen spielt keine wesentliche Rolle, wenn nur der aktive Satz von Nebenbedingungen berücksichtigt wird und wenige Nebenbedingungen im Optimum aktiv sind. Für größere Probleme steigt der Speicherbedarf für die approximierte Hesse-Matrix und die linearisierten Nebenbedingungen erheblich an. Darüber hinaus wird festgestellt, daß bei großen Problemen ($n_s > 500$) der verwendete Algorithmus dazu tendiert, in schwachen, lokalen Minima zu stagnieren. In der Nähe der Lösung weist das Verfahren auch bei großen Problemen gute Konvergenzeigenschaften auf. Der NLPQL-Algorithmus wird im weiteren für einige kleinere Topologieoptimierungsprobleme, in erster Linie jedoch in Verbindung mit CAGD-orientierten Formoptimierungsverfahren eingesetzt. Für große Probleme mit wenigen Nebenbedingungen hat sich eine Kombination aus OC- und SQP-Verfahren bewährt. Zunächst wird das Optimum mit einem geeigneten OC-Verfahren in wenigen Schritten näherungsweise berechnet. Die Lösung kann abschließend mit dem SQP-Algorithmus bestimmt werden.

2.2 Entwurfsmodell

Im Entwurfsmodell werden die Geometrie, d.h. die Topologie und die Form, sowie der materielle Aufbau des Ausgangsentwurfs beschrieben und die im Optimierungsprozeß veränderlichen geometrischen und materiellen Größen festgelegt. Der Vektor der Optimierungsvariablen \hat{s} ergibt sich aus einer parametrisierten Darstellung der variablen Größen.

Die Strukturoptimierung kann nach Art der Optimierungsvariablen in Topologie-, Form-, Bemessungs- und Materialoptimierung eingeteilt werden (Bild 2.4).

- Topologieoptimierung: Lage und Anordnung von Tragwerkselementen.
- Formoptimierung: Form von Kanten und Oberflächen des Ausgangsentwurfs.
- Bemessungsoptimierung: einfache geometrische Größen, wie der Durchmesser von Stäben oder die Dicke von Platten.
- Materialoptimierung: materielle Parameter, wie beispielsweise die Orientierung von Fasern in Verbundwerkstoffen.

Topologie-, Form- und Bemessungsoptimierung können als hierarchische Gliederung einer Geometrieoptimierung betrachtet werden. Der grundsätzliche Aufbau des Tragwerks wird mit der Topologieoptimierung bestimmt. Die Form- und die Bemessungsoptimierung legen die geometrischen Details fest. Die Bemessungsoptimierung kann als Spezialfall der Formoptimierung aufgefaßt werden und ist dadurch gekennzeichnet, daß im jeweiligen mechanischen Modell ein expliziter Zusammenhang zwischen dem mechanischen Verhalten der entsprechenden Tragwerkselemente und den variablen Größen besteht. So ist die Steifigkeit eines Stabes proportional zu dessen Querschnitt oder die Steifigkeit einer dünnen Platte eine kubische Funktion deren Dicke. Der enge Zusammenhang zwischen Form- und Bemessungsoptimierung wird deutlich, wenn man beispielsweise einen Balken als 3-dimensionales Kontinuum modelliert. In diesem Fall führt die Variation des Querschnitts auf eine Formoptimierungsaufgabe.

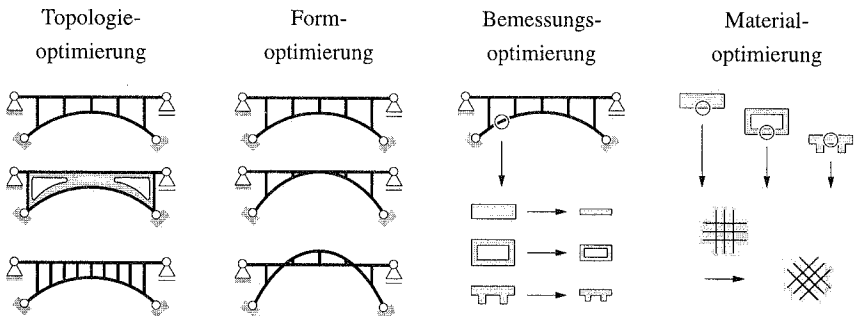


Bild 2.4: Gliederung der Strukturoptimierung

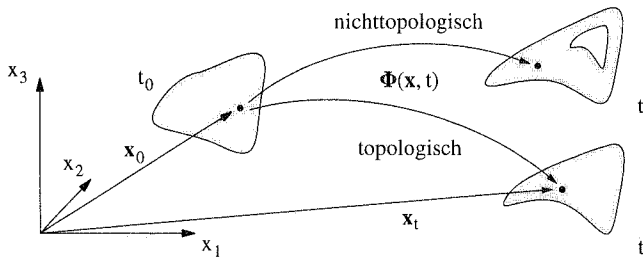


Bild 2.5: Topologische und nichttopologische Abbildungen

Auch die Materialoptimierung läßt sich in diese Hierarchie einreihen, wenn man die Betrachtungsskala vom makroskopischen ins mikroskopische wechselt. Unter dem Mikroskop stellen materielle Parameter geometrische Größen dar.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Topologie- und Formoptimierungsproblemen. Die Modellierung dieser Probleme wird in den Kapiteln 3 und 5 erläutert. In diesem Abschnitt werden vorab die grundsätzlichen Möglichkeiten dargestellt, wie die Geometrie und der materielle Aufbau eines Körpers und deren Veränderungen im Optimierungsprozeß aus einer makroskopischen Sichtweise beschrieben werden können. Zum besseren Verständnis der weiteren Untersuchungen werden diese Möglichkeiten der Darstellung des Deformationsprozesses in der Kontinuumsmechanik gegenübergestellt.

Geometriemodellierung

Ein kontinuierlicher Körper wird in der Kontinuumsmechanik als zusammenhängende Menge von materiellen Punkten – materielles Punkt-Kontinuum – idealisiert. Hierbei wird der mikroskopische (kristalline, molekulare) Aufbau des Körpers vernachlässigt. Von einer makroskopischen Sichtweise aus wird jedem materiellen Punkt ein Material zugeordnet, dessen Eigenschaften sich durch Homogenisierung des mikroskopischen Strukturverhaltens ergeben.

Jedem materiellen Punkt kann zu jedem Zeitpunkt t des Optimierungs- bzw. Deformationsprozesses eindeutig ein Ort $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem im Anschauungsraum \mathbb{R}^3 zugeordnet werden. Die Veränderung des Körpers im Optimierungs- bzw. Deformationsprozeß wird durch eine Abbildung $\Phi(\mathbf{x}, t)$ beschrieben (Bild 2.5). Grundsätzlich werden topologische und nichttopologische Abbildungen² $\Phi(\mathbf{x}, t)$ unterschieden. Topologische oder auch homöomorphe Abbildungen sind stetige, bijektive Transformationen, bei denen der kontinuierliche Zusammenhang zwischen den materiellen Punkten erhalten bleibt. Die Nachbarschaftsbeziehungen der materiellen Punkte werden beibehalten. Geometrisch anschaulich bedeutet dies, daß durch eine topologische Abbildung der Grad des Gebietszusammenhangs nicht geändert wird. Dieser wird auch als Geschlecht einer Fläche bezeichnet und ist dadurch gekennzeichnet, wie viele Schnitte $(n-1)$ notwendig sind, das Gebiet in ein einfach

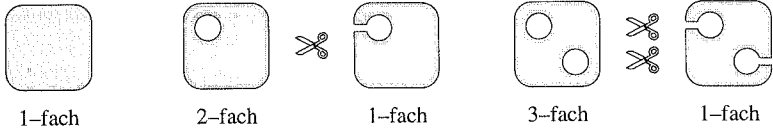


Bild 2.6: Topologische Eigenschaften – Grad des Gebietszusammenhangs

zusammenhängendes Gebiet umzuwandeln (Bild 2.6). Nichttopologische Abbildungen dagegen ändern die Nachbarschaftsbeziehungen der materiellen Punkte und damit den Grad des Gebietszusammenhangs. Man kann sich diesen diskontinuierlichen Vorgang als Einbringen oder Eliminieren eines Loches, als Aufreißen oder Zusammenkleben des Körpers vorstellen.

Werden nur topologische Abbildungen $\Phi(\mathbf{x}, t)$ zugelassen, so kann die Geometrie des Körpers als räumlich und zeitlich stetige Funktion des Ortes \mathbf{x}_0 zum Zeitpunkt $t = t_0$ und der Zeit t in einer materiellen oder Lagrange-Formulierung angegeben werden.

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.28)$$

Diese Abbildung beschreibt die räumliche Bewegung der materiellen Punkte \mathbf{x} . In einer Lagrange-Formulierung werden in der Kontinuumsmechanik die elastische Deformation eines Körpers, in der Strukturoptimierung die Veränderung der Form des Ausgangsentwurfs beschrieben. Die Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ der Formoptimierung ergeben sich aus einer parametrisierten Darstellung der Abbildung $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$.

Es existiert jedoch keine für alle Zeitpunkte t räumlich stetige Abbildungsfunktion, wenn die Topologie des Körpers während des Optimierungs- bzw. Deformationsprozesses verändert wird. Daher müßte in einer materiellen Beschreibung der Geometrieveränderung für jeden materiellen Punkt eine eigene Abbildungsfunktion aufgestellt werden. Statt dessen wird in einer räumlichen oder Euler-Formulierung der materielle Fluß durch ein raumfestes Kontrollvolumen Ω beobachtet. Der Körper ist dadurch definiert, ob zu einem Zeitpunkt t einem räumlichen Punkt \mathbf{x}_0 ein materieller Punkt zugeordnet wird oder nicht.

$$\chi(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{Material} \\ 0 & \rightarrow \text{kein Material} \end{cases} \quad ; \quad \chi \in \{0, 1\}(\Omega) \quad (2.29)$$

-
2. Topologie: Der Begriff der Topologie wurde von Euler und Listing in die Mathematik eingeführt und ursprünglich als Wissenschaft der Lagebeziehungen von Punkten relativ zueinander oder als Geometrie ohne Metrik verstanden (Breitenberger [45]). Heute unterscheidet man in der Mathematik zwischen der ursprünglichen mengentheoretischen und der auf Poincaré zurückgehenden algebraischen Topologie. Jäger [129] gibt eine anschauliche Einführung in die Topologie. Die Bedeutung der Topologie für die Beschreibung und Klassifizierung von Prozessen in Natur und Technik kann u.a. dem Konzeptheft 44 des SFB 230 entnommen werden (Maute [162]).

Formulierung	Beobachter	Veränderlich	Anwendung
Euler	<input type="checkbox"/> raumfest	<input type="radio"/> Material	<input type="radio"/> Topologieoptimierung
Lagrange	<input type="radio"/> körperfest	<input type="checkbox"/> Position	<input checked="" type="checkbox"/> Deformation Formoptimierung

Attribute: materiell räumlich geometrisch

Tabelle 2.1: Materielle und räumliche Beschreibung der Geometrieänderung

Die Bewegung des Körpers ergibt sich aus der Änderung des materiellen “0–1” Zustandes der räumlichen Punkte \mathbf{x}_p . Die Parameter der diskontinuierlich approximierten Materialverteilung im Kontrollraum Ω bilden die Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ der Topologieoptimierung.

Die Attribute “materiell” und “räumlich” sind in Tabelle 2.1 nochmals einander gegenübergestellt, um die Zuordnung dieser Begriffe zu den Transformationen in der Kontinuumsmechanik und in der Strukturoptimierung für die weiteren Betrachtungen klarzustellen. Zusätzlich wird das Attribut “geometrisch” in dieses Schema eingeordnet, da in der Strukturoptimierung oftmals zwischen geometrischen und materiellen Ansätzen unterschieden wird (\rightarrow Kapitel 3).

Materialmodellierung

Neben den geometrischen können auch die materiellen Eigenschaften eines Tragwerks im Optimierungsprozeß verändert werden. Diese Eigenschaften werden entweder auf einer makroskopischen Ebene beschrieben oder analog zu den geometrischen Eigenschaften in einer mikroskopischen Betrachtungsskala modelliert. Der Skalenwechsel vom mikroskopischen zum makroskopischen ist lediglich bei der Kopplung mit dem mechanischen Modell zu berücksichtigen. Die Materialbeschaffenheit kann analog zur Form- und Bemessungsoptimierung kontinuierlich oder im Sinne der Topologieoptimierung diskontinuierlich modelliert werden.

2.3 Analysemodell

Die Berechnung der Funktionswerte und der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen erfolgt im Analysemodell. In der Strukturoptimierung hängen im allgemeinen die Entwurfskriterien von der Strukturantwort des Tragwerks ab. Die Ermittlung der Strukturantwort und deren Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen steht dabei im Mittelpunkt. Im einzelnen werden folgende Probleme im Analysemodell gelöst.

- Mechanische Modellierung des Tragwerks.
- Berechnung der Strukturantwort für den aktuellen Entwurf $\hat{\mathbf{s}}$.

- Ermittlung von Zielfunktion und Nebenbedingungen.
- Berechnung der Sensitivitäten von Zielfunktion und Nebenbedingungen.

Die ersten beiden Punkte bilden die typischen Aufgaben der Tragwerksanalyse. Die mechanische Modellierung des Tragwerks ist vorab durchzuführen. So ist beispielsweise zu entscheiden, ob das Tragverhalten durch eine Stab-, Balken-, Scheiben-, Platten- oder Schalentheorie ausreichend beschrieben werden kann. Es ist zu beachten, welche mechanisch nichtlinearen Effekte, wie Beulen oder Fließen, bei der Lösung der Entwurfsaufgabe von Bedeutung sind. Die bei der mechanischen Modellierung vorgenommenen Vereinfachungen wirken sich direkt auf das Optimierungsergebnis aus. So sind beispielsweise Tragwerke, die unter der Annahme eines geometrisch linearen Tragverhaltens auf Steifigkeit optimiert werden, oftmals stabilitätsempfindlich.

Die Strukturantwort kann für den aktuellen Entwurf \hat{s} in Ausnahmefällen analytisch exakt, muß im allgemeinen jedoch numerisch approximativ berechnet werden. Hierfür wird in der Strukturoptimierung überwiegend die Methode der Finiten Elemente (FEM) eingesetzt. Andere Methoden, wie die Randelemente-Methode oder semi-analytische Verfahren, werden weniger häufig verwendet. Die Berechnung von Zielfunktion und Nebenbedingungen erfolgt in einer Nachlaufrechnung. Die Sensitivitäten der Strukturantwort bezüglich den Optimierungsvariablen werden in der Sensitivitätsanalyse ermittelt.

2.3.1 Entwurfskriterien

Zielfunktionen und Nebenbedingungen können in drei Gruppen eingeteilt werden.

- Globale Entwurfskriterien kennzeichnen das gesamte Strukturverhalten. Hierzu zählen die Grenzlast λ_{kr} stabilitätsgefährdeter oder die Eigenfrequenzen ϑ_i dynamisch beanspruchter Tragwerke.
- Integrale Kriterien mitteln lokale Größen über das gesamte Tragwerk oder entlang von Kanten bzw. Oberflächen. Hierzu zählen Spannungsausgleichsfunktionen oder energetische Größen. Rein formal können auch das Gewicht oder das Volumen des Tragwerks diesen Kriterien zugeordnet werden.
- Lokale Kriterien charakterisieren die Qualität des Entwurfs beispielsweise anhand der Verschiebungen oder Spannungen an einer bestimmten Stelle des Tragwerks. Zumeist werden diese in Form von Nebenbedingungen formuliert.

Mehrkriterienoptimierung

Anwendungsbezogene Entwurfsaufgaben sind zumeist durch mehrere Zielkriterien gekennzeichnet, die gleichzeitig berücksichtigt werden sollen. In diesem Fall liegt ein Mehrkriterienoptimierungsproblem vor. Die Zielfunktion $f(\hat{s})$ in der abstrakten Formulierung des Opti-

mierungsproblems (2.3) ist durch einen Vektor $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_f}$ zu ersetzen. Das Minimum einer vektoriellen Zielfunktion \mathbf{f}^* kann über die Forderung definiert werden, daß jede Komponente f_j im Optimum $\hat{\mathbf{s}}^*$ ein Minimum einnimmt.

$$\mathbf{f}^* = \left\{ \mathbf{f}^* \in \mathbb{R}^{n_f} \mid f_j(\hat{\mathbf{s}}^*) \leq f_j(\hat{\mathbf{s}}) \right\} \quad (2.30)$$

Diese Definition ist jedoch zu restriktiv. Wie der Darstellung des Lösungsraums für $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^2$ in Bild 2.7a zu entnehmen ist, kann sie nur für speziell geformte Lösungsräume erfüllt werden. Daher wird in der Mehrkriterienoptimierung die Definition des Edgeworth–Pareto–Optimums (EP) bevorzugt. Der Vektor der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}^* \in \mathbb{R}^{n_s}$ ist dann EP–optimal, wenn kein zulässiger Vektor $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{n_s}$ existiert, für den mindestens ein Kriterium f_j verbessert werden kann, ohne gleichzeitig ein anderes Kriterium f_m zu verschlechtern. Die Lösung eines Mehrkriterienoptimierungsproblems stellt bei widersprüchlichen Zielkriterien einen Kompromiß dar. In diesem Fall gibt es unendlich viele EP–optimale Punkte (Bild 2.7b). Es ist eine zusätzliche Ordnung der Komponenten der Zielfunktion zueinander notwendig, um eine eindeutige EP–optimale Lösung zu definieren.

Stadler [238] und Eschenauer et. al. [87] geben eine Einführung in die Grundlagen und die Verfahren der Mehrkriterienoptimierung sowie einen Überblick über verschiedene Anwendungsgebiete. Für einen leicht verständlichen Einstieg werden die entsprechenden Abschnitte in der Dissertation von Eberhard [83] empfohlen. In diesem Abschnitt werden im wesentlichen die Verfahren vorgestellt, die im weiteren zur Lösung von Topologie– und Formoptimierungsproblemen eingesetzt werden. Das Vektoroptimierungsproblem kann auf ein skalares Problem nach Gleichung (2.3) reduziert werden, indem der Zielfunktionsvektor \mathbf{f} mittels einer geeigneten Norm auf eine skalare Ersatzzielfunktion $\tilde{f} \in \mathbb{R}$ abgebildet wird.

Wichtungsmethode $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{n_f} w_j f_j \quad w_i \geq 0 \quad (2.31)$

Distanzmethode $\tilde{f} = \left[\sum_{j=1}^{n_f} |f_j - \bar{f}_j|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2.32)$

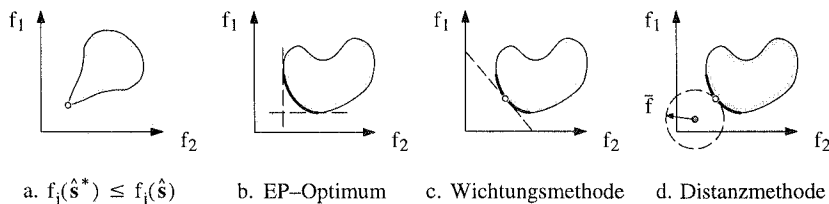


Bild 2.7: Mehrkriterienoptimierung

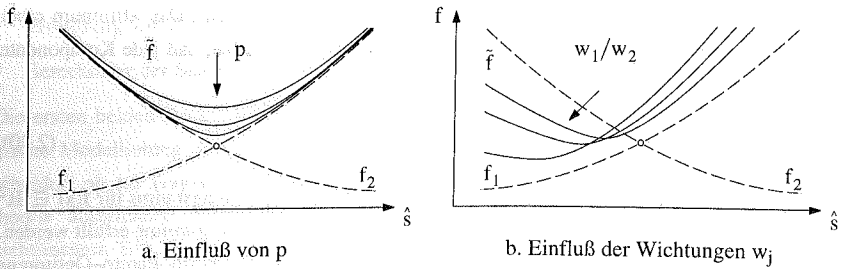


Bild 2.8: Germeiermethode – Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion

Quotientenmethode
$$\bar{f} = \left[\sum_{j=1}^{n_f} \left| f_j / \bar{f}_j \right|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2.33)$$

Germeier–Methode
$$\bar{f} = \frac{1}{p} \ln \left[\sum_{j=1}^{n_f} e^{p w_j f_j} \right] \quad p \geq 0 \quad (2.34)$$

Die Wichtungsmethode wird in der Strukturoptimierung häufig eingesetzt, da der Einfluß der Wichtungsfaktoren w_j auf das Optimierungsergebnis in vielen Fällen vorab leicht abgeschätzt werden kann. Es macht sich nur selten bemerkbar, daß mit der Wichtungsmethode nicht sämtliche EP–optimalen Punkte berechnet werden können, und daß die ermittelten EP–optimalen Punkte nicht eindeutig sind. Ähnliche Eigenschaften besitzen auch die Distanz– und Quotientenmethode. Der Einfluß der Stellgrößen p und \bar{f} ist bei diesen Verfahren jedoch schlechter abschätzbar. Insbesondere können bei ungünstiger Wahl des Referenzvektors \bar{f} auch nicht EP–optimale Punkte ermittelt werden. In der Germeier–Methode wird der Raum der Zielkriterien \mathbb{R}^{n_f} durch die Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion stetig differenzierbar approximiert. Je größer der Wert p gewählt wird, um so genauer ist die Approximation (Bild 2.8a). Der Einfluß der Wichtungsfaktoren w_j ist in Bild 2.8b veranschaulicht. Diese Methode besitzt ähnliche Eigenschaften wie die zuvor aufgeführten, wobei es zu numerischen Problemen kommen kann, wenn der Parameter p zu groß gewählt wird.

Häufig treten Mehrkriterienoptimierungsprobleme in der Form von min–max–Problemen auf: Minimiere die Komponente des Zielfunktionsvektors mit maximalem Absolutwert.

$$\min_{\hat{s}} \max_j |f_j| \quad ; \quad j = 1, \dots, n_f \quad (2.35)$$

Beispiele hierfür sind die Minimierung der maximalen Spannung an verschiedenen Stellen des Tragwerks oder – in inverser Form – die Maximierung der minimalen Eigenfrequenz. Das min–max–Problem (2.35) ist im allgemeinen nicht stetig differenzierbar. Damit es mit Gradientenverfahren gelöst werden kann, wird es durch glatte Näherungsfunktionen approximiert. Die Differenzen– und Quotientenmethode sowie die Kreisselmeier–Steinhauser–

Funktion beschreiben das min–max–Problem für $p \rightarrow \infty$ exakt. Diese Ansätze stellen für endliche Werte von p eine stetig differenzierbare Approximation dar, mit der das min–max–Problem näherungsweise gelöst werden kann.

2.3.2 Tragwerksanalyse

Für das weitere Verständnis der vorliegenden Arbeit sind Grundkenntnisse in der Kontinuumsmechanik, der Elastizitätstheorie und der Methode der Finiten Elemente (FEM) notwendig. Hierfür steht eine umfangreiche Literatur zur Verfügung, aus der u.a. Malvern [154], Becker, Bürger [21] und Betten [38] für eine Einführung in die Kontinuumsmechanik empfohlen werden können. Die Grundlagen der Elastizitätstheorie sind bei Marsden, Hughes [155] und Ciarlet [62] beschrieben. Die Finite Elemente Methode wird aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht in den Standardwerken von Bathe [19] und Zienkiewicz, Taylor [290] dargestellt. Die numerischen Verfahren der FEM sind bei Bathe [19] und Crisfield [67], [68] erläutert. In diesem Abschnitt werden lediglich einige Grundbegriffe eingeführt, auf die im weiteren zurückgegriffen wird. Die diskretisierten Zustandsgleichungen werden für ein linear elastisches Strukturverhalten angegeben und auf elastoplastisches Materialverhalten erweitert. Die Eigenwertprobleme werden für eine klassische Stabilitätsanalyse und für eine Schwingungsuntersuchung in der linearen Dynamik aufgestellt. Dabei beschränken sich die Betrachtungen auf die Verschiebungsformulierung der Finiten Elemente Methode.

Das statische Gleichgewicht ist in schwacher Form durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) gegeben. Die Gleichgewichtsbeziehungen können für kleine Verschiebungen anstatt am deformierten, direkt am undeformierten Körper Ω_x aufgestellt werden.

$$\delta W(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \delta W^i(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \delta W^a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad ; \quad \delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_u(\Omega_x) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_x) \quad (2.36)$$

Ein Körper Ω_x ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit δW gleich Null ist. Die virtuelle, innere Arbeit δW^i wird von den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ auf den kinematisch zulässigen, virtuellen Dehnungen $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ verrichtet. Die virtuelle, äußere Arbeit δW^a setzt sich aus den Arbeiten der Volumenkräfte $\bar{\mathbf{b}}$ und der entlang dem Krafrand Γ_p vorgegebenen Kräfte $\bar{\mathbf{p}}$ auf den kinematisch zulässigen, virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ zusammen (Bild 2.9).

$$\delta W^i = \int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_x \quad (2.37)$$

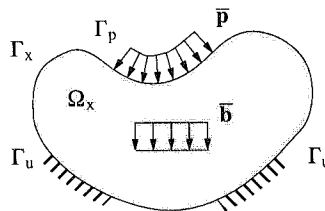


Bild 2.9: Belasteter Körper

$$\delta W^a = - \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega_x - \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma_p \quad (2.38)$$

Die linearen kinematischen Beziehungen lauten:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_x \quad (2.39)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2.40)$$

Der Differentialoperator wird mit \mathbf{L} bezeichnet. Die Spannungen und die Dehnungen sind über das Hookesche Werkstoffgesetz durch den Werkstofftensor \mathbf{C} gekoppelt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.41)$$

Das elastische Werkstoffgesetz (2.41) beruht auf der Annahme, daß die Spannungen nur von den aktuellen Verformungen, nicht aber von der Verformungsgeschichte abhängen. Es existiert ein Gesamtpotential Π , da die von den Spannungen geleistete Arbeit vom Belastungspfad unabhängig ist.

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi^i(\mathbf{u}) + \Pi^a(\mathbf{u}) \quad (2.42)$$

$$\Pi^i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x \quad (2.43)$$

$$\Pi^a(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega_x} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \, dv - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma_p \quad (2.44)$$

Die schwache Form des Gleichgewichts (2.36) kann in diesem Fall auch aus dem Prinzip des Minimums des Gesamtpotentials abgeleitet werden.

$$\min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) \quad \rightarrow \quad \delta \Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}_u(\Omega) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (2.45)$$

Die Methode der Finiten Elemente baut auf der schwachen Form des Gleichgewichts (2.36) bzw. (2.45) auf. Der unendlichdimensionale Raum $\mathbf{V}_u(\Omega)$ wird durch einen endlichdimensionalen Raum $\mathbf{V}_u^h(\Omega)$ ersetzt, um die Lösung mit numerischen Verfahren näherungsweise bestimmen zu können.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) \quad ; \quad \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_u^h(\Omega) \subseteq \mathbf{V}_u(\Omega) \quad (2.46)$$

Die freien Funktionsparameter $\hat{\mathbf{u}}$ stellen die "Optimierungsvariablen" eines Parameteroptimierungsproblems dar. Die globalen Verschiebungen \mathbf{u} werden durch lokale Ritz-Ansätze \mathbf{u}_e elementweise approximiert.

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\zeta}) \hat{\mathbf{u}}_e \quad (2.47)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{N}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (2.49)$$

Die Matrix der Ansatzfunktionen wird mit \mathbf{N}_e , die lokalen Koordinaten im Parameterraum der Ansatzfunktionen mit $\boldsymbol{\zeta}$ bezeichnet. Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}_e$ stellt die diskreten Knotenfreiwerte, \mathbf{B}_e die diskretisierte Operatormatrix dar. Die Verschiebungen \mathbf{u} und die Geometrie des Körpers \mathbf{x} werden bei isoparametrischen Elementen mit denselben Ansätzen elementweise approximiert.

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\zeta}) \hat{\mathbf{x}}_e \quad (2.50)$$

Die diskretisierten Arbeitsterme (2.37) und (2.38) lauten:

$$\begin{aligned} \delta W_h^i &= \sum_{\text{Elemente}} \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e d\Omega_e \hat{\mathbf{u}}_e \\ &= \sum_{\text{Elemente}} \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \delta W_h^a &= \sum_{\text{Elemente}} \mathbf{A} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}}_e \Omega_e + \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{p}}_e d\Gamma_{pe} \right] + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}} \\ &= \sum_{\text{Elemente}} \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \bar{\mathbf{P}}_e + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}} \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

\mathbf{A} symbolisiert die Summation über alle Elemente entsprechend der Elementtopologien. Die Matrix \mathbf{K}_e stellt die Elementsteifigkeitsmatrix und \mathbf{K} die globale Steifigkeitsmatrix dar. $\bar{\mathbf{P}}_e$ bezeichnet den Elementlastvektor, $\bar{\mathbf{P}}$ die idealisierten, in den Knoten angreifenden Einzelkräfte und $\hat{\mathbf{P}}$ den globalen Vektor der äquivalenten Knotenlasten.

Die Integrationen über das Volumen Ω_e und die Oberfläche Γ_e der Elemente werden im Parameterraum der Ansatzfunktionen mit einer Gauß–Legendre–Quadratur numerisch durchgeführt. Mit $|\mathbf{J}_e|$ ist die Determinante der Jacobi–Matrix, mit $|\mathbf{G}_e|$ die Determinante des Metrikensors bezeichnet.

$$d\Omega_e = |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad ; \quad \mathbf{J}_e = \bar{\nabla}_{\boldsymbol{\zeta}} \mathbf{x}_e \quad (2.53)$$

$$d\Gamma_e = \sqrt{|\mathbf{G}_e|} d\zeta_k d\zeta_l \quad ; \quad \mathbf{G}_e = \mathbf{J}_e^a{}^T \mathbf{J}_e^a \quad ; \quad \mathbf{J}_e^a = \left[\nabla_{\zeta_k} \mathbf{x}_e, \nabla_{\zeta_l} \mathbf{x}_e \right] \quad (2.54)$$

Die Elementmatrizen und Vektoren werden in Abhängigkeit des mechanischen Modells sowie vom Interpolationsgrad der Ansatzfunktionen aufgestellt. Die dünnwandigen Tragwerke, die

im weiteren untersucht werden, sind mit isoparametrischen Scheibenelementen für den ebenen Spannungszustand sowie mit isoparametrischen Schalenelementen nach einer 5-Parameter-Schalentheorie diskretisiert. Die Elementformulierungen für das Scheibenelement sind u.a. bei Bathe [19] und für das Schalenelement bei Ramm [204] beschrieben.

Aus dem PvV folgt mit den diskretisierten Arbeitstermen (2.51), (2.52):

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{P}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \quad (2.55)$$

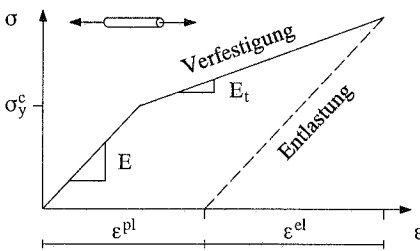
Die diskretisierten Zustandsgleichungen ergeben unter der Annahme eines linear elastischen Tragverhaltens ein lineares Gleichungssystem. Je nach Problemstellung wird das Gleichungssystem mit direkten oder iterativen Verfahren gelöst. Einige Standardverfahren sind u.a. bei Bathe [19] beschrieben.

Elastoplastisches Materialverhalten

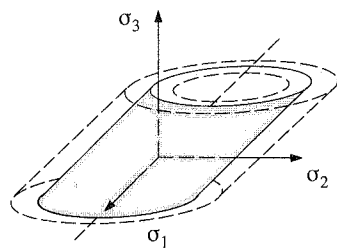
Das tatsächliche Materialverhalten vieler Werkstoffe wird durch ein lineares Werkstoffgesetz (2.41) nur unzureichend beschrieben. Die Werkstoffeigenschaften sind im allgemeinen von der Größe der Belastung und vom Belastungspfad abhängig. So nimmt beispielsweise die Festigkeit eines Stabes im Zugversuch deutlich ab, wenn die Fließgrenze $\bar{\sigma}_y$ des Materials überschritten wird. Bei einer Entlastung bleibt ein plastischer Dehnungsanteil bestehen (Bild 2.10a). In der vorliegenden Arbeit wird dieses Verhalten im Rahmen einer J_2 -von Mises Plastizität mit isotroper Ver- und Entfestigung für kleine Verzerrungen berücksichtigt. Im folgenden sind lediglich die wichtigsten Gleichungen zur Beschreibung des elastoplastischen Materialverhaltens zusammengestellt. Dieses Thema wird in der zu Anfang des Abschnittes erwähnten Literatur sowie bei Matzenmiller [160] ausführlicher beschrieben.

Das von Mises Fließkriterium Φ_v beschreibt eine Ungleichung, wonach die von Mises Spannung σ_v immer kleiner oder gleich der Fließspannung σ_y ist.

$$\Phi_v = \sigma_v - \sigma_y = \sqrt{3 J_2} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.56)$$



a. Eindimensionaler Zugversuch



b. von Mises - Fließfläche

Bild 2.10: Elastoplastisches Materialverhalten

Die Fließfunktion Φ_v kann äquivalent in der zweiten Invariante J_2 bzw. in der Norm des Spannungsdeviators \mathbf{S} formuliert werden. Der Spannungsdeviator \mathbf{S} ergibt sich aus der Projektion \mathbf{P}_σ des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ auf die Normale zur hydrostatischen Achse im Raum der Hauptspannungen.

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \quad ; \quad \|\mathbf{S}\|^2 = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \quad (2.57)$$

Die Fließspannung σ_y setzt sich aus einem konstanten Anteil $\bar{\sigma}_y$ und einem Anteil $k(\kappa)$ zusammen, der die Ver- bzw. Entfestigung berücksichtigt.

$$\sigma_y(\kappa) = \bar{\sigma}_y + k(\kappa) \quad (2.58)$$

Die interne Variable κ ist ein Maß für die im Belastungsprozeß aufgetretenen, plastischen Verzerrungen. Die Fließfläche $\Phi_v = 0$ stellt einen Zylinder entlang der hydrostatischen Achse mit dem Radius $\sqrt{2/3} \sigma_y$ im Raum der Hauptspannungen dar (Bild 2.10b). Spannungspunkte innerhalb des Zylinders $\Phi_v < 0$ kennzeichnen den elastischen Zustand, Punkte auf dem Zylinder den Zustand des plastischen Fließens. Spannungspunkte außerhalb des Zylinders sind physikalisch nicht möglich. Der Zylinder weitet sich bei isotroper Verfestigung auf und zieht sich bei isotroper Entfestigung zusammen.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung wird für Materialeigenschaften, die vom Belastungspfad abhängen, in inkrementeller Form angegeben.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \int d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.59)$$

Das Spannungskrement $d\boldsymbol{\sigma}$ hängt nur von den elastischen Dehnungen $d\boldsymbol{\epsilon}^{el}$ ab, die sich aus einer additiven Zerlegung der Gesamtdehnungen $d\boldsymbol{\epsilon}$ in einen elastischen $d\boldsymbol{\epsilon}^{el}$ und einen plastischen Anteil $d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ ergeben.

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^{el} + d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \int d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.60)$$

Die plastischen Dehnungen werden über die Fließregel bestimmt, die den Fließvorgang auf der Fließfläche im Spannungsraum beschreibt. Das Verhalten von metallischen Werkstoffen wird durch eine assoziierte Fließregel beschrieben, die aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik und dem Postulat der maximalen Dissipation hergeleitet wird. Danach ändert sich der Spannungszustand auf der Fließfläche so, daß die Arbeit der Spannungen auf den plastischen Dehnungen maximal wird. Unter Berücksichtigung des Fließkriteriums (2.56) kann hieraus ein global konvexes Optimierungsproblem mit Nebenbedingung abgeleitet werden. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$L(\boldsymbol{\sigma}, d\boldsymbol{\gamma}) = - \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} + d\boldsymbol{\gamma} \Phi_v(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.61)$$

Der Lagrange-Multiplikator $d\boldsymbol{\gamma}$ wird auch als plastischer Multiplikator bezeichnet. Die zugehörigen Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten:

$$\bar{\nabla}_{\sigma} L = -d\epsilon^{pl} + \sqrt{\frac{3}{2}} d\gamma \mathbf{n} \quad ; \quad \bar{\nabla}_{\sigma} \Phi_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \quad (2.62)$$

$$\nabla_{d\gamma} L = \Phi_v(\sigma) = 0 \quad (2.63)$$

Die algorithmisch konsistente Fließregel erhält man, analog zur Vorgehensweise beim SQP-Verfahren, aus der Linearisierung der Kuhn-Tucker-Bedingungen bezüglich den Spannungen.

$$d\epsilon^{pl} = \left(C^{-1} + d\gamma \bar{\nabla}_{\sigma}^2 \Phi_v \right) d\sigma + \sqrt{\frac{3}{2}} d\gamma \mathbf{n} \quad (2.64)$$

Der plastische Multiplikator $d\gamma$ folgt aus der Konsistenzbedingung.

$$d\Phi_v = \bar{\nabla}_{\sigma} \Phi_v^T d\sigma + \nabla_{\kappa} \Phi_v d\kappa = 0 \quad (2.65)$$

Der Gradient der Fließfläche bezüglich der inneren Variablen κ beschreibt die isotrope Ver- oder Entfestigung.

$$\nabla_{\kappa} \Phi_v = -E_h \quad ; \quad E_h = \frac{E E_t}{E - E_t} \quad (2.66)$$

Der Verfestigungsmodul E_h ist ein Maß, wie sich die Fließfläche bei einer Zunahme der plastischen Dehnungen bzw. der plastischen Arbeit aufweitet ($E_h > 0$) oder zusammenzieht ($E_h < 0$). Er wird aus dem Elastizitätsmodul E und der Steifigkeit E_t im plastischen Bereich berechnet (Bild 2.10a). Diese Materialkenngrößen können in einaxialen Versuchen ermittelt werden. Für das von Mises Fließkriterium führen sowohl die Modelle der Dehnungs- wie auch der Arbeitsverfestigung zu:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}^T d\sigma - E_h d\gamma = 0 \quad (2.67)$$

Das Spannungsinkrement kann mit (2.60), (2.64), (2.67) in (2.59) in Abhängigkeit des Inkrements für die Gesamtdehnungen angegeben werden.

$$d\sigma = \left[\mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1}}{\frac{2}{3} E_h + \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{n}} \right] d\epsilon = C^{cp} d\epsilon \quad (2.68)$$

$$\mathbf{H} = C^{-1} + d\gamma \nabla_{\sigma}^2 \Phi \quad (2.69)$$

Bei der Herleitung des elastoplastischen Werkstoffgesetzes für den zweidimensionalen Spannungszustand ist die Normale \mathbf{n} auf die Fließfläche in die $\sigma_1\sigma_2$ -Ebene zu projizieren (Simo, Taylor [235]). Die daraus resultierenden Veränderungen lassen sich in einem modifizierten Verfestigungsmodul E_h^{2d} zusammenfassen.

$$E_h^{2d} = \frac{E_h}{1 - 2/3 E_h d\gamma} \quad (2.70)$$

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung wird bei einem elastoplastischen Materialverhalten durch ein inkrementelles Werkstoffgesetz beschrieben, wobei die algorithmisch konsistente, elasto-

plastische Materialtangente \mathbf{C}^{ep} selbst eine Funktion der Spannungen ist. Daher wird das Gleichgewicht durch ein Newton–Raphson–Verfahren iterativ bestimmt. Zur Steuerung des Iterationsverfahrens wird der Lastfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ in das PvV eingeführt.

$$\int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_x = \lambda \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega_x + \lambda \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma_p \quad (2.71)$$

Das PvV (2.71) wird bezüglich den Verschiebungen \mathbf{u} und dem Lastfaktor λ linearisiert und wie zuvor erläutert diskretisiert. Unter der Annahme, daß die Lasten von der Verformung unabhängig sind, lauten die linearisierten Gleichungen in diskreter Form zur Berechnung des endlichen Verschiebungsincrements $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ im Lastschritt (m):

$$\mathbf{F}_i^{(m)} + \mathbf{K}_T^{(m)} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)} = \left(\lambda^{(m)} + \Delta \lambda^{(m)} \right) \hat{\mathbf{P}} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{F}_i^{(m)} - \lambda^{(m)} \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{F}_i^{(m)} = \mathbf{A}_{\text{Elemente}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e^{(m)} \, d\Omega_e \quad (2.74)$$

$$\mathbf{K}_T^{(m)} = \mathbf{A}_{\text{Elemente}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}^{\text{ep}(m)} \mathbf{B}_e \, d\Omega_e \quad (2.75)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_e^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_e^{(i)} \quad ; \quad \lambda^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta \lambda^{(i)} \quad (2.76)$$

Mit $\mathbf{F}_i^{(m)}$ wird der Vektor der inneren Kräfte, mit $\mathbf{K}_T^{(m)}$ die tangentielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Zur Steuerung des Iterationsverfahrens wird das Lastinkrement $\Delta \lambda^{(m)}$ bei elastoplastischem Materialverhalten zumeist über das Verschiebungsincrement eines bestimmten Freiheitsgrades $\Delta \bar{u}_i^{(m)}$ gesteuert.

$$\Delta \lambda^{(m)} = \Delta \bar{u}_i^{(m)} / \left(\mathbf{K}_T^{-1} \hat{\mathbf{P}} \right)_i^{(m)} \quad (2.77)$$

Die elastoplastische Materialtangente $\mathbf{C}^{\text{ep}(m)}$ sowie die endlichen Spannungs– und Dehnungsincremente $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(m)}$, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ werden mit einem Euler–Rückwärts–Algorithmus in jedem Gauß–Punkte der Finiten Elemente berechnet.

Klassische Stabilitätsanalyse

Die Grenzlaster kann mit einer sogenannten klassischen Stabilitätsanalyse abgeschätzt werden. Dieses Verfahren wird neben den bereits erwähnten Literaturstellen ausführlich u.a. bei Ramm [204], Brendel [46] und Wagner [269] behandelt. In diesem Abschnitt wird das Eigenwertproblem zur Bestimmung der Grenzlaster anhand der diskretisierten Beziehungen aufgestellt.

Für große Verschiebungen wird das Gleichgewicht an der deformierten Struktur aufgestellt. Hierfür wird eine nichtlineare Kinematik in diskreter, inkrementeller Form auf Elementebene eingeführt.

$$d\boldsymbol{\epsilon}_e^{\text{GL}} = (\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^l(\mathbf{u}_e)) d\hat{\mathbf{u}}_e \quad (2.78)$$

Die Green–Lagrange–Verzerrungen sind mit $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{GL}}$ bezeichnet. \mathbf{B}_e ist die Operatormatrix (2.48) für kleine Verschiebungen. Die von den Verschiebungen abhängigen Dehnungsanteile werden durch die Operatormatrix $\mathbf{B}_e^l(\mathbf{u}_e)$ erfaßt, die eine lineare Funktion der Verschiebungen ist. Zur Berechnung des Verschiebungsinkrements $d\hat{\mathbf{u}}_e$ bzw. $d\hat{\mathbf{u}}$ wird das PvV (2.71) in den Green–Lagrange–Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{GL}}$ und den zweiten Piola–Kirchhoff–Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^{\text{PK2}}$ für ein lineares Materialverhalten nach Saint–Venant, Kirchhoff aufgestellt. Unter der Annahme von verformungsunabhängigen Lasten lauten die linearisierten und diskretisierten Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{K}_T d\hat{\mathbf{u}} = (\lambda + d\lambda) \hat{\mathbf{P}} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{F}_i - \lambda \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{F}_i = \underset{\text{Elemente}}{\mathbf{A}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^l)^T \boldsymbol{\sigma}_e^{\text{PK2}} d\Omega_e \quad (2.81)$$

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T kann in die linear elastische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} für kleine Verschiebungen nach (2.51), die Anfangsverschiebungsmatrix \mathbf{K}_u und die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g aufgespalten werden.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g \quad (2.82)$$

$$\mathbf{K}_u = \underset{\text{Elemente}}{\mathbf{A}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e^l + \mathbf{B}_e^{lT} \mathbf{C} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^{lT} \mathbf{C} \mathbf{B}_e^l) d\Omega_e \quad (2.83)$$

$$\mathbf{K}_g = \underset{\text{Elemente}}{\mathbf{A}} \int_{\Omega_e} \bar{\nabla}_u \mathbf{B}_e^{lT} \boldsymbol{\sigma}_e^{\text{PK2}} d\Omega_e \quad (2.84)$$

Die Grenzlast λ_{kr} ist dadurch gekennzeichnet, daß in der Nähe eines Gleichgewichtszustands $\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}}$ ein weiterer Gleichgewichtszustand $(\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}})$ für dasselbe Lastniveau λ_{kr} existiert. Die Gleichgewichtslage ist instabil, d.h. nicht mehr eindeutig. Es existiert ein homogenes Gleichungssystem mit einer nichttrivialen Lösung $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}}$.

$$\mathbf{K}_T (\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}}, \lambda_{\text{kr}}) \Delta\hat{\mathbf{u}}_{\text{kr}} = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

Das zugehörige nichtlineare Eigenwertproblem lautet:

$$(\mathbf{K}_T - \lambda_j \mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\Psi}}_j = \mathbf{0} \quad (2.86)$$

Der kleinste Eigenwert $\lambda_j \geq 0$ entspricht der Grenzlast λ_{kr} . Der Eigenvektor $\hat{\Psi}_{kr}$ stellt die zugehörige Beulform dar. Für viele Probleme ist es ausreichend, die Grenzlast mit einer linearen Eigenwertanalyse abzuschätzen. Hierfür wird von einem linearen Vorbeulverhalten ($\mathbf{u} < \hat{\mathbf{u}}_{kr}$) ausgegangen. In der klassischen Stabilitätsanalyse bleiben zudem die Verformungen im Vorbeulbereich unberücksichtigt. Das reduzierte Eigenwertproblem lautet:

$$\left(\mathbf{K} + \lambda_j \tilde{\mathbf{K}}_g \right) \hat{\Psi}_j = 0 \quad (2.87)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_g = \mathbf{K}_g(\hat{\mathbf{u}}^p) \quad ; \quad \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}^p = \hat{\mathbf{P}} \quad (2.88)$$

Die klassische Stabilitätsanalyse führt bei Tragwerken, deren Vorbeulverhalten durch einen "steifen" Membranzustand gekennzeichnet ist, wie beispielsweise beim perfekten Euler-Stab, zu zuverlässigen Ergebnissen. Die Untersuchungen von Brendel [46] jedoch zeigen, daß die Grenzlast bei biegebeanspruchten Tragwerken nur unzureichend abgeschätzt wird.

Das lineare Eigenwertproblem (2.87) wird entweder mit Vektoriterationalgorithmen oder Transformationsverfahren gelöst. Zur Berechnung von mehreren Eigenwerten eignen sich insbesondere Subspace-Verfahren in Verbindung mit einem QZ- oder Jacobi-Transformationsverfahren. Diese Verfahren sind u.a. bei Bathe [19] beschrieben.

Eigenfrequenzanalyse

Die Eigenschaften von dynamisch beanspruchten Strukturen können anhand ihrer Eigenfrequenzen ϑ_j abgeschätzt und im Optimierungsprozeß berücksichtigt werden. Zur Berechnung der Eigenfrequenzen von ungedämpften Strukturen wird das PvV nach dem d'Alembertschen Prinzip um die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte erweitert. Die Eigenfrequenzen und Eigenformen sind die nichttrivialen Lösungen der homogenen Bewegungsgleichung.

$$\int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) \, d\Omega_x + \int_{\Omega_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}) \, d\Omega_x = 0 \quad (2.89)$$

Die Beschleunigungen sind mit $\ddot{\mathbf{u}}$, die Dichte des Material mit ρ gekennzeichnet. Für kleine Verzerrungen, d.h. für eine lineare Kinematik, und elastisches Materialverhalten lauten die diskretisierten Bewegungsgleichungen:

$$\mathbf{M} \hat{\ddot{\mathbf{u}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{M} = \underset{\text{Elemente}}{\mathbf{A}} \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \, d\Omega_e \quad (2.91)$$

Jede freie Schwingung läßt sich als Superposition der Eigenschwingungen der Struktur ausdrücken. Für einen multiplikativen Ansatz der Verschiebungen in Zeit und Raum

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=1}^{n_u} a_j \hat{\Psi}_j e^{i\omega_j t} ; \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = - \sum_{j=1}^{n_u} a_j \omega_j^2 \hat{\Psi}_j e^{i\omega_j t} ; \quad a_j, \omega_j \in \mathbb{R} \quad (2.92)$$

folgt aus der Orthogonalität der Eigenvektoren $\hat{\Psi}_i^T \hat{\Psi}_j = \delta_{ij}$ das lineare Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M} \right) \hat{\Psi}_j = \mathbf{0} \quad ; \quad \omega_j = 2 \pi \vartheta_j \quad (2.93)$$

Mit ω_j wird die Kreisfrequenz bezeichnet. Das lineare Eigenwertproblem (2.93) kann mit demselben Verfahren wie die Grenzlast bei einer klassischen Stabilitätsanalyse (2.87) berechnet werden.

2.3.3 Sensitivitätsanalyse

Die Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen bezüglich der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ werden in der Sensitivitätsanalyse ermittelt. Diese beschreiben die Veränderungen des mechanischen Verhaltens des deformierten Tragwerks infolge einer Änderung der Geometrie oder des materiellen Aufbaus des undeformierten Tragwerks. Die Sensitivitätsanalyse nimmt eine Schlüsselposition im Optimierungsprozeß ein. Zum einen hängen die Konvergenzeigenschaften von nichtlinearen Optimierungsverfahren wesentlich von der Güte der Gradienten ab. Zum anderen erfordert die Sensitivitätsanalyse bis zu 90% des Rechenaufwands im gesamten Optimierungsprozeß. Insbesondere bei vielen Optimierungsvariablen entscheidet die Qualität und die numerische Effizienz der Gradientenermittlung darüber, ob ein Optimierungsproblem überhaupt mit vertretbarem numerischem Aufwand gelöst werden kann.

In der Strukturoptimierung ist die Sensitivitätsanalyse zumeist auf die Ermittlung der ersten Ableitungen beschränkt, da die Berechnung von höheren Ableitungen zu aufwendig ist. Die einfachste Möglichkeit, die Gradienten der Entwurfskriterien bezüglich der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}_i$, wie beispielsweise die der Zielfunktion f , näherungsweise zu bestimmen, sind rein numerische Verfahren, wie das Vorwärts- oder das zentrale Differenzenverfahren.

$$\nabla_{\mathbf{s}} f \approx \frac{f(\hat{\mathbf{s}} + \Delta \hat{\mathbf{s}}) - f(\hat{\mathbf{s}})}{\Delta \hat{\mathbf{s}}_i} ; \quad \nabla_{\mathbf{s}} f \approx \frac{f(\hat{\mathbf{s}} + \Delta \hat{\mathbf{s}}) - f(\hat{\mathbf{s}} - \Delta \hat{\mathbf{s}})}{2\Delta \hat{\mathbf{s}}_i} ; \quad \Delta \hat{\mathbf{s}}_j = \delta_{ij} \Delta \hat{\mathbf{s}}_i \quad (2.94)$$

Hierzu sind lediglich die Funktionswerte für verschiedene Entwürfe auszuwerten. Die Genauigkeit dieser Verfahren hängt jedoch von der Wahl der Schrittweite $\Delta \hat{\mathbf{s}}_i$ ab. Je nach Optimierungsproblem können zu große bzw. zu kleine Schrittweiten zu falschen Ergebnissen führen. Zudem steigt der numerische Aufwand mit der Anzahl der Optimierungsvariablen stark an, da für jede Optimierungsvariable ein oder zwei zusätzliche Tragwerksanalysen mit anschließender Berechnung der Funktionswerte durchzuführen sind. Dieser Effekt macht sich insbesondere dann bemerkbar, wenn die Anzahl der Knotenfreiwerte \hat{u}_j groß ist. Daher kommen für eine genaue und numerisch effiziente Gradientenermittlung nur analytische Methoden in Betracht. Für die Herleitung der analytischen Verfahren wird die Modellierung des Optimierungsproblems im Entwurfs- und Analysemodell zusammen betrachtet (Bild 2.11). Die deformierte

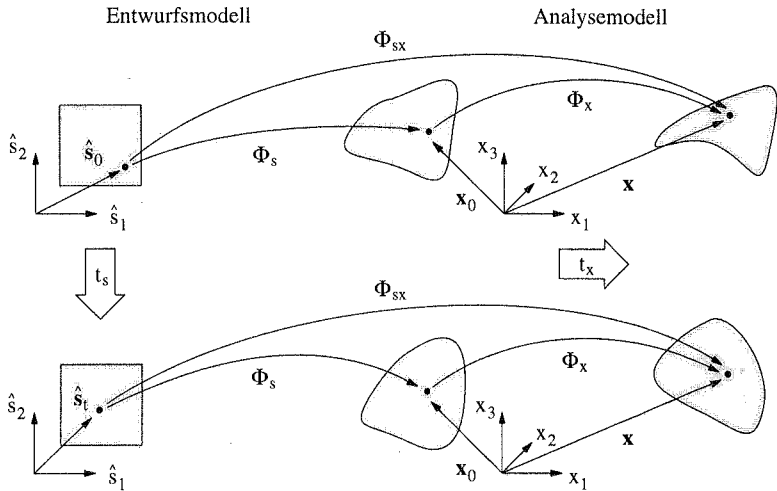


Bild 2.11: Optimierungsprozeß – Deformationsprozeß

Struktur \mathbf{x} und die auf ihr definierten Funktionen, wie beispielsweise die Zielfunktion f , sind das Ergebnis der Abbildungen Φ_s im Entwurfsmodell sowie der Abbildungen Φ_x im Analysemodell (Haber [105], Barthold [17]). Die Abbildung $\mathbf{x}_0 = \Phi_s(\hat{\mathbf{s}})$ bildet den Entwurf zum Zeitpunkt t_s des Optimierungsprozesses vom Parameterraum der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ auf den undeformierten Körper im Anschauungsraum \mathbb{R}^3 ab. Die mechanische Deformation des Körpers wird durch die Abbildung $\mathbf{x} = \Phi_x(\mathbf{x}_0)$ beschrieben. Dem Deformationsprozeß wird die Zeit t_x zugeordnet. Beide Abbildungen zusammen ergeben die Abbildung $\Phi_{sx}(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{x}_0)$.

$$f = f(\Phi_{sx}(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{x}_0)) = f(\Phi_s(\hat{\mathbf{s}}), \Phi_x(\mathbf{x}_0(\Phi_s(\hat{\mathbf{s}})))) \quad ; \quad f = f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{x}_0(\hat{\mathbf{s}})) \quad (2.95)$$

Dieses Modell kann anschaulich auf die Geometrie des Tragwerks \mathbf{x}_0 , aber auch auf jede der Struktur zugeordneten Materialeigenschaft als Entwurfsgröße angewandt werden. In diesem Fall ist die folgende Schreibweise verständlicher:

$$f = f(\Phi_s(\hat{\mathbf{s}}), \mathbf{u}(\Phi_s(\hat{\mathbf{s}}))) \quad ; \quad f = f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}})) \quad (2.96)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\Phi_x(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{x}_0$$

Der Gradient der Zielfunktion f bezüglich der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}_i$ berechnet sich je nach Formulierung (2.95) oder (2.96) aus:

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \bar{\nabla}_{\mathbf{x}_0} f^T \nabla_s \mathbf{x}_0 \quad (2.97)$$

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} f^T \nabla_s \mathbf{u} \quad (2.98)$$

Die Formulierung (2.97) wird als Materialableitung verstanden, da sie die Veränderung der Funktion f in einem materiellen Punkt im Optimierungsprozeß mit der Zeit t_s mißt. Der Gradient setzt sich aus einem lokalen und einem konvektiven Anteil zusammen. Der Term $\nabla_s \mathbf{x}_0$ wird in diesem Zusammenhang als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld bezeichnet.

Die analytischen Verfahren der Sensitivitätsanalyse werden in diskrete und variationelle Methoden eingeteilt. Diskrete Methoden gehen von einer bereits diskretisierten Formulierung des zugrunde liegenden mechanischen Problems aus und leiten diese ab. Variationelle Methoden leiten zunächst das kontinuierliche Problem ab und diskretisieren anschließend die abgeleiteten Gleichungen. Beide Methoden führen zu demselben Ergebnis, wenn sowohl die Strukturantwort wie auch die Sensitivitäten mit derselben Diskretisierung berechnet werden. Der numerische Aufwand hängt im wesentlichen von der jeweiligen Implementierung der Methoden ab. Für bestimmte Entwurfskriterien und Optimierungsvariablen ist die variationelle Vorgehensweise deutlich effizienter als die diskrete.

Die Verfahren der Sensitivitätsanalyse werden ausführlich bei Haug et al. [118] sowie Kleiber et al. [140] beschrieben. Darüber hinaus sind die entsprechenden Kapitel bei Haftka et al. [110] für eine kurze Einführung in diese Thematik empfehlenswert. In den folgenden Abschnitten werden die in der weiteren Arbeit verwendeten Verfahren der diskreten und der variationellen Sensitivitätsanalyse bei elastischem Materialverhalten sowie kleinen Verschiebungen und Verzerrungen erläutert. Die explizite Unterscheidung zwischen der deformierten und der undeformierten Konfiguration wird daher im weiteren vernachlässigt. Auf die Sensitivitätsanalyse bei elastoplastischem Materialverhalten wird gesondert in Kapitel 4.4 eingegangen.

Diskrete Sensitivitätsanalyse

Die Entwurfskriterien werden auf der Basis einer Verschiebungsformulierung der FEM als Funktionen der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ und der diskreten Knotenfreiwerte $\hat{\mathbf{u}}$ ausgedrückt. Zur Berechnung des Gradienten nach der Formulierung (2.98) ist zunächst die Ableitung der Knotenfreiwerte $\hat{\mathbf{u}}$ nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i zu bestimmen. Hierzu werden die diskretisierten Zustandsgleichungen für linear elastische Probleme (2.55) abgeleitet.

$$\nabla_s \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \nabla_s \hat{\mathbf{P}} \quad (2.99)$$

Die Ableitung der Knotenfreiwerte $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ kann durch die Einführung eines Pseudo-Lastvektors $\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}$ formal wie die Knotenfreiwerte $\hat{\mathbf{u}}$ berechnet werden.

$$\mathbf{K} \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}} \quad (2.100)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}} = \nabla_s \hat{\mathbf{P}} - \nabla_s \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.101)$$

Der Pseudo-Lastvektor wird analytisch oder numerisch bestimmt. Für die analytische Berechnung der Sensitivitäten werden die Ableitungen der Elementlastvektoren $\hat{\mathbf{P}}_e$ (2.52) und der Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e (2.51) im Parameterraum auf Elementebene ermittelt.

$$\nabla_e \bar{\mathbf{P}}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \left(\nabla_e \bar{\mathbf{b}}_e |\mathbf{J}_e| + \bar{\mathbf{b}}_e \nabla_e |\mathbf{J}_e| \right) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (2.102)$$

$$+ \int_{\Gamma_{cp}} \mathbf{N}_e^T \left(\nabla_e \bar{\mathbf{p}}_e \sqrt{|\mathbf{G}_e|} + \bar{\mathbf{p}}_e \nabla_e \sqrt{|\mathbf{G}_e|} \right) d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$\nabla_e \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \left(\nabla_e \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^T \nabla_e \mathbf{C} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \nabla_e \mathbf{B}_e \right) |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (2.103)$$

$$+ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \nabla_e |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

Der Operator $\nabla_e(\cdot)$ bezeichnet die Ableitung nach einer variablen Elementgröße \hat{s}_e . Der Vektor dieser Ableitungen $\bar{\nabla}_e(\cdot)$ wird mit den Ableitungen der Elementvariablen \hat{s}_e nach der globalen Optimierungsvariablen \hat{s}_i vormultipliziert, um den Gradienten bezüglich \hat{s}_i zu erhalten.

$$\nabla_s(\cdot) = \nabla_s \hat{s}_e^T \bar{\nabla}_e(\cdot) \quad (2.104)$$

Die rechte Seite in (2.104) stellt ein Skalarprodukt dar, d.h. die mit $\nabla_s \hat{s}_e$ multiplizierten Ableitungen nach den variablen Elementgrößen werden aufsummiert. In der Formoptimierung beispielsweise werden zunächst die Ableitungen der Koordinaten der FE-Knoten $\nabla_s \hat{\mathbf{x}}_e$ nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i bestimmt und anschließend die Ableitungen der Elementlastvektoren und Steifigkeitsmatrizen nach den Koordinaten der FE-Knoten berechnet.

$$\nabla_s(\cdot) = \nabla_s \hat{\mathbf{x}}_e^T \bar{\nabla}_e(\cdot) \quad (2.105)$$

Der Term $\nabla_s \hat{\mathbf{x}}_e$ stellt das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld (2.97) in diskretisierter Form dar. Die variablen Knotenkoordinaten gehen in die Ableitungen auf Elementebene (2.102), (2.103) formal wie jeder andere Entwurfparameter ein. Dieses Vorgehen wird in der Formoptimierung daher auch als Referenzvolumen-Ansatz bezeichnet. Der Referenzvolumen-Ansatz und die Formulierung als Materialableitung führen auf dieselben Ausdrücke zur Berechnung der Gradienten (u.a. Arora et al. [11]).

Der Pseudo-Lastvektor folgt aus:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}} = \nabla_s \bar{\mathbf{P}} + \sum_{\text{Elemente}} \nabla_s \hat{s}_e^T \bar{\nabla}_e \bar{\mathbf{P}}_e - \sum_{\text{Elemente}} \nabla_s \hat{s}_e^T \bar{\nabla}_e \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (2.106)$$

Die Ableitungen des in der vorliegenden Arbeit eingesetzten Schalenelements sind bei Kimmich [135] angegeben. Hieraus können direkt die entsprechenden Ausdrücke für das Scheibenelement gewonnen werden. Die analytische Vorgehensweise erfordert die explizite Ableitung der Elementformulierung. Statt dessen kann der Pseudo-Lastvektor mit einem Vorwärts- oder einem zentralen Differenzenverfahren (2.94) berechnet werden.

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{ps0}} \approx \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta \hat{s}_i} - \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta \hat{s}_i} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.107)$$

Dieses als semi-analytisch bezeichnete Verfahren kombiniert die Vorteile des rein analytischen und des rein numerischen Vorgehens. Die Gradienten der Knotenfreiwerte werden numerisch effizient bestimmt, ohne daß auf die jeweilige Elementformulierung eingegangen werden muß. Das Verfahren bietet sich vor allem zur Implementierung in kommerziellen FE-Programmen an. Die semi-analytische Sensitivitätsanalyse kann jedoch bei der Formoptimierung von schlanken Tragwerken zu erheblichen Fehlern führen (u.a. Barthelemy et al. [16]).

Mlejnek [177] führt diesen Defekt darauf zurück, daß fälschlicherweise Ableitungen aus Starrkörperrotationen im Pseudo-Lastvektor (2.107) enthalten sind. Diese als zusätzliche Momente interpretierbaren Anteile sind um so größer, je schlanker das Tragwerk ist. Der "exakte" Pseudo-Lastvektor kann für bestimmte Elementformulierungen mit dem Korrekturverfahren von Olhoff und Rasmussen [191] berechnet werden. Bei diesem Verfahren werden die Komponenten der numerisch differenzierten Elementsteifigkeitsmatrix je nach Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen mit einem Faktor multipliziert, der vorab zu ermitteln ist. Für den Fall, daß B-Operator und Jacobi-Determinante linear von den Optimierungsvariablen abhängen, kann das Verfahren unter der Annahme, daß der Materialtensor \mathbf{C} symmetrisch ist und dessen Ableitungen $\nabla_e \mathbf{C}$ gleich Null sind, wie folgt vereinfacht werden (Sienz [232]):

$$\begin{aligned} \nabla_e \mathbf{K}_e \approx & 2 \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \frac{\mathbf{B}(\hat{\mathbf{s}} + \Delta_e \hat{\mathbf{s}}) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{s}})}{\Delta \hat{s}_e} |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ & + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \frac{|\mathbf{J}_e(\hat{\mathbf{s}} + \Delta_e \hat{\mathbf{s}})| - |\mathbf{J}_e(\hat{\mathbf{s}})|}{\Delta \hat{s}_e} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \end{aligned} \quad (2.108)$$

In gleicher Weise ist die Ableitung der Elementlastvektoren durchzuführen. Generell kann die Genauigkeit des Pseudo-Lastvektors durch die Aufspaltung des Differenzenschritts nach (2.108) verbessert werden. Da diese Korrekturverfahren jedoch die Kenntnisse des Aufbaus der Elementsteifigkeitsmatrix voraussetzen, ist der Aufwand, diese Verfahren in ein Programm zu implementieren, nur noch unwesentlich geringer als bei der rein analytischen Vorgehensweise.

Es stehen zwei Strategien für die Berechnung der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen zur Verfügung. Die Ableitung der Zielfunktion (2.98) wird aus den Ableitungen der diskreten Knotenfreiwerte (2.100) berechnet.

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \bar{\nabla}_u f^T \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\text{ps0}} \quad (2.109)$$

Die Inverse \mathbf{K}^{-1} der Steifigkeitsmatrix liegt bei Verwendung von direkten Gleichungslösern bereits aus der Tragwerksanalyse vor. In Abhängigkeit von der Reihenfolge, in welcher der zweite Term ausgewertet wird, unterscheidet man die direkte Methode

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \bar{\nabla}_u f^T \left(\mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}} \right) \quad (2.110)$$

und die adjungierte Methode.

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \left(\mathbf{K}^{-1} \bar{\nabla}_u f \right)^T \hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}} \quad (2.111)$$

Die direkte Methode ist effizienter, wenn die Anzahl von Zielfunktion und Nebenbedingungen ($n_f + n_h + n_g$) größer ist als die Anzahl der Optimierungsvariablen n_s , da die numerisch aufwendigere Matrizenmultiplikation ($\mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}$) nur n_s -mal auszuführen ist. Bei der adjungierten Methode ist der Term ($\mathbf{K}^{-1} \bar{\nabla}_u f$) dagegen ($n_f + n_h + n_g$)-mal zu berechnen. Der Unterschied zwischen beiden Methoden ist allerdings bezogen auf den gesamten numerischen Aufwand zur Erstellung der abgeleiteten Matrizen und Vektoren bei der diskreten Sensitivitätsanalyse im allgemeinen gering (Kimmich [135]).

Die diskrete Sensitivitätsanalyse für lineare Eigenwertprobleme wird am Beispiel der Stabilitätslastberechnung (2.87) erläutert, wobei das Auftreten von mehrfachen Eigenwerten zunächst ausgeschlossen wird. Die Ableitung des Eigenwertproblems nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i ergibt:

$$\left(\nabla_s \mathbf{K} + \nabla_s \lambda_j \bar{\mathbf{K}}_g + \lambda_j \nabla_s \bar{\mathbf{K}}_g \right) \hat{\Psi}_j + \left(\mathbf{K} + \lambda_j \bar{\mathbf{K}}_g \right) \nabla_s \hat{\Psi}_j = 0 \quad (2.112)$$

Die Ableitung der Eigenvektoren muß nicht explizit berechnet werden. Hierzu wird (2.112) von links mit dem Eigenvektor $\hat{\Psi}_j^T$ multipliziert. Aus dem Eigenwertproblem (2.87) folgt:

$$\nabla_s \lambda_j = - \hat{\Psi}_j^T \left(\nabla_s \mathbf{K} + \lambda_j \nabla_s \bar{\mathbf{K}}_g \right) \hat{\Psi}_j \quad ; \quad \hat{\Psi}_j^T \bar{\mathbf{K}}_g \hat{\Psi}_j = 1 \quad (2.113)$$

Die Ableitung der elastischen Steifigkeitsmatrix $\nabla_s \mathbf{K}$ setzt sich aus den Gradienten der Elementsteifigkeitsmatrizen (2.103) zusammen. Bei der Ableitung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\nabla_s \bar{\mathbf{K}}_g$ ist zu berücksichtigen, daß diese von den Spannungen (2.84) und damit von den Verschiebungen abhängt. Bei der direkten Methode wird zunächst die Ableitung der Verschiebungen (2.88) wie zuvor beschrieben entweder analytisch oder semi-analytisch berechnet. Anschließend kann die geometrische Steifigkeitsmatrix auf Elementebene ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \nabla_e \bar{\mathbf{K}}_{g_e} = & \int_{\Omega_e} \left[\nabla_e \left(\bar{\nabla}_u \mathbf{B}_e^1 \right)^T \sigma_e^{\text{PK2}} + \bar{\nabla}_u \mathbf{B}_e^1 \nabla_e \sigma_e^{\text{PK2}} \right] |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \\ & + \int_{\Omega_e} \left[\bar{\nabla}_u \mathbf{B}_e^1 \sigma_e^{\text{PK2}} \right] \nabla_e |\mathbf{J}_e| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Die Ableitung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors folgt für ein lineares Materialverhalten aus:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}}^{\text{PK2}} &= \nabla_{\mathbf{e}}^{\text{ex}} \mathbf{C} (\mathbf{B}_{\mathbf{e}} + \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^l) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} + \mathbf{C} \nabla_{\mathbf{e}}^{\text{ex}} (\mathbf{B}_{\mathbf{e}} + \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^l) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} \\ &+ \mathbf{C} (\mathbf{B}_{\mathbf{e}} + \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^l + \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^l \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}}) \nabla_{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Der Gradient der Verschiebungen in (2.115) entspricht bei einer klassischen Stabilitätsanalyse der Ableitung $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}^{\text{P}}$, die direkt durch Differentiation der diskretisierten, linearen Gleichgewichtsbeziehung (2.88) bestimmt wird. Der Zusammenbau der abgeleiteten, geometrischen Gesamtsteifigkeitsmatrix erfolgt analog zum Pseudo-Lastvektor (2.106).

In Optimierungsaufgaben, bei denen das Stabilitätsverhalten der Struktur berücksichtigt wird, ist die Anzahl der Entwurfskriterien zumeist deutlich geringer als die Anzahl der Optimierungsvariablen. Daher werden die Ableitungen der Eigenwerte mit einem adjungierten Verfahren effizienter berechnet. Hierzu wird der Ausdruck für die Ableitungen der Eigenwerte (2.113) umgeformt.

$$\nabla_s \lambda_j = - \hat{\Psi}_j^T \left(\nabla_s \mathbf{K} + \lambda_j \nabla_s^{\text{ex}} \bar{\mathbf{K}}_g \right) \hat{\Psi}_j - \lambda_j \hat{\Psi}_j^T \left(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{K}}_g \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \right) \hat{\Psi}_j \quad (2.116)$$

Der zweite Term in (2.116) wird in folgender Reihenfolge ausgewertet:

$$\hat{\Psi}_j^T \left(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{K}}_g \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \right) \hat{\Psi}_j = \left(\mathbf{K}^{-1} \left(\hat{\Psi}_j^T \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{K}}_g \hat{\Psi}_j \right) \right)^T \hat{\mathbf{P}}_{\text{pseudo}} \quad (2.117)$$

Die Berechnung der Gradienten von Eigenwerten vereinfacht sich für die Ableitung von Kreis- und Eigenfrequenzen ω_j bzw. ϑ_j (2.93) in der Dynamik, da die Massenmatrix \mathbf{M} nicht von den Verschiebungen abhängt. Die Ableitung der Eigenfrequenzen werden aus dem Gradienten des Quadrats der Kreisfrequenz ω_j und (2.93) ermittelt.

$$\nabla_s (\omega_j^2) = \hat{\Psi}_j^T \left(\nabla_s \mathbf{K} - \omega_j^2 \nabla_s \mathbf{M} \right) \hat{\Psi}_j \quad ; \quad \hat{\Psi}_j^T \mathbf{M} \hat{\Psi}_j = 1 \quad (2.118)$$

$$\nabla_s \mathbf{M} = \underset{\text{Elemente}}{\mathbf{A}} \nabla_s \hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{e}} \int_{\Omega_{\mathbf{e}}} \left[\nabla_{\alpha} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{e}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{e}} |\mathbf{J}_{\mathbf{e}}| + \rho \mathbf{N}_{\mathbf{e}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{e}} \nabla_{\mathbf{e}} |\mathbf{J}_{\mathbf{e}}| \right] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (2.119)$$

$$\nabla_s \vartheta_j = \frac{\nabla_s (\omega_j^2)}{4 \pi \omega_j} = \frac{\nabla_s (\omega_j^2)}{8 \pi^2 \vartheta_j} \quad (2.120)$$

Im Optimierungsprozeß kommt es oftmals vor, daß sich die Reihenfolge der Eigenformen vertauscht, wobei sich die zugehörigen Eigenwerte kreuzen. Im Kreuzungspunkt fallen die Eigenwerte der betreffenden Eigenformen zusammen. Die Fréchet-Ableitungen der Eigenwerte existieren in diesem Fall nicht. Es können nur die Richtungsableitungen berechnet werden (Seyranian et al. [231]).

Variationelle Sensitivitätsanalyse

Die variationelle Sensitivitätsanalyse stellt eine formal äquivalente und je nach Implementierung für bestimmte Optimierungsprobleme effizientere Alternative zur diskreten Vorgehens-

weise dar. Die Betrachtungen in diesem Abschnitt beschränken sich auf Materialparameter als Optimierungsvariablen, d.h. die Form des Tragwerks wird im Optimierungsprozeß nicht verändert. Für die variationelle Sensitivitätsanalyse von Formoptimierungsproblemen wird auf u.a. Haug et al. [118], Dems, Mroz [71] und Barthold [17] verwiesen.

Die variationelle Sensitivitätsanalyse wird ebenfalls in direkte und adjungierte Methoden unterteilt, wobei von der Formulierung (2.98) zur Berechnung der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen ausgegangen wird. Bei der direkten Methode werden zunächst die Ableitungen der Verschiebungen \mathbf{u} nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i berechnet. Für statische, linear elastische Probleme werden die kontinuierlichen Zustandsgleichungen nach dem PvV (2.36) abgeleitet. Unter der Annahme, daß die Form der Struktur nicht variiert wird und die Lasten nicht von den Materialparametern abhängen, folgt:

$$\int_{\Omega_x} \left(\nabla_s(\delta\boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \nabla_s \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega_x = 0 \quad (2.121)$$

Die Dehnungen werden aus der linearen Dehnungs–Verschiebungsbeziehung (2.39) berechnet. Da der Differentialoperator \mathbf{L} keine Funktion der Materialparameter ist sowie die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ beliebig und damit ebenfalls von den Optimierungsvariablen unabhängig sind, ist die Ableitung der virtuellen Dehnungen $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ gleich Null.

$$\nabla_s(\delta\boldsymbol{\epsilon}) = \delta(\nabla_s \boldsymbol{\epsilon}) = \delta(\nabla_s \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{L} \nabla_s \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{L} \nabla_s \mathbf{u}) = \mathbf{L} \nabla_s(\delta\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.122)$$

Die Ableitung der Spannungen kann für ein lineares Werkstoffgesetz wie folgt aufgespalten werden:

$$\nabla_s \boldsymbol{\sigma} = \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{C} \nabla_s \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.123)$$

Die Ableitung der Dehnungen $\nabla_s \boldsymbol{\epsilon}$ wird mit (2.123) in (2.121) formal wie die Dehnungen mit einer veränderten rechten Seite berechnet.

$$\int_{\Omega_x} \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \nabla_s \boldsymbol{\epsilon} d\Omega_x = - \int_{\Omega_x} \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega_x \quad (2.124)$$

In der diskreten Sensitivitätsanalyse wird die neue rechte Seite als Pseudo–Last bezeichnet. In der variationellen Sensitivitätsanalyse wird diese als Pseudo–Anfangsdehnungen und Pseudo–Anfangsspannungen interpretiert.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pso}} = - \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.125)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{pso}} = \mathbf{C} (\nabla_s \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pso}}) \quad (2.126)$$

$$\int_{\Omega_x} \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{pso}} d\Omega_x = 0 \quad (2.127)$$

Die variationelle, direkte Vorgehensweise führt exakt auf dieselben diskreten Gleichungen zur Bestimmung der Ableitungen der Entwurfskriterien (2.110), wenn die kontinuierlichen Gleichungen (2.124) bzw. (2.127) diskretisiert werden. Der numerische Aufwand ist für die direkte Methode beim diskreten und beim variationellen Ansatz prinzipiell gleich groß. Tatsächliche Unterschiede in der Rechenzeit sind nur mit der jeweiligen Implementierung der Methoden im Programm zu erklären.

Die Ableitungen von integralen Entwurfskriterien können jedoch effizienter mit der adjungierten Methode berechnet werden. Zunächst wird ein Entwurfskriterium vom Typ

$$f = \int_{\Omega_x} q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x \quad (2.128)$$

betrachtet. Die Ableitung von (2.128) nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i führt mit (2.98) auf:

$$\nabla_s f = \int_{\Omega_x} \nabla_s^{\text{ex}} q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \nabla_s \mathbf{u}^T \bar{\nabla}_u q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x \quad (2.129)$$

Die adjungierten Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ werden infolge einer Belastung der Struktur mit dem Vektor $\nabla_u q(\hat{s}, \mathbf{u})$ berechnet.

$$\int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_a \, d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_u q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x \quad (2.130)$$

Zwischen dem zweiten Integral in (2.129) und den adjungierten Dehnungen nach (2.130) besteht folgender Zusammenhang. Mit $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_a$ in (2.124)

$$\int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \mathbf{C} \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x = - \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x \quad (2.131)$$

sowie $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{u}$ in (2.130)

$$\int_{\Omega_x} \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_a \, d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \nabla_s \mathbf{u}^T \bar{\nabla}_u q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x \quad (2.132)$$

folgt unter Ausnützung der Symmetrie des Materialtensors \mathbf{C} :

$$\int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x = - \int_{\Omega_x} \nabla_s \mathbf{u}^T \bar{\nabla}_u q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x \quad (2.133)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Ableitungen der Verschiebungen bzw. Dehnungen kinematisch zulässig sind. Die Ableitung des integralen Entwurfskriteriums berechnet sich mit (2.133) aus:

$$\nabla_s f = \int_{\Omega_x} \nabla_s^{\text{ex}} q(\hat{s}, \mathbf{u}) \, d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x \quad (2.134)$$

In ähnlicher Weise können die Ableitungen auch für Entwurfskriterien vom Typ

$$f = \int_{\Omega_x} q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x \quad (2.135)$$

mit

$$\nabla_s f = \int_{\Omega_x} \nabla_s^{\text{ex}} q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \nabla_s \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\nabla}_\sigma q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x \quad (2.136)$$

bestimmt werden. Die partielle Ableitung des Integranden $q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma})$ nach dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ergibt einen zweistufigen Tensor. Die adjungierten Dehnungen berechnen sich durch:

$$\int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_a \, d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \bar{\nabla}_\sigma q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x \quad (2.137)$$

Aus der Äquivalenz von

$$\int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x = - \int_{\Omega_x} \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \bar{\nabla}_\sigma q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x \quad (2.138)$$

folgt mit der Ableitung der Spannungen (2.123) in (2.136):

$$\nabla_s f = \int_{\Omega_x} \nabla_s^{\text{ex}} q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C} (\bar{\nabla}_\sigma q(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\varepsilon}_a) \, d\Omega_x \quad (2.139)$$

Die Gleichungen (2.130) bzw. (2.137) sind zunächst zu diskretisieren, um die adjungierten Dehnungen numerisch zu bestimmen. Mit den diskreten, adjungierten Dehnungen werden die Ableitungen der Zielfunktion (2.134) bzw. (2.139) auf Elementebene ausgewertet, wobei die entsprechenden Gleichungen ebenfalls zu diskretisieren sind.

Rein formal führt auch die variationelle, adjungierte Vorgehensweise auf diskretisierte Gleichungen, die den Beziehungen aus der diskreten Vorgehensweise entsprechen. Aus algorithmischer Sicht ergeben sich jedoch für die zuletzt betrachteten Entwurfskriterien erhebliche Vorteile, da die meisten Operationen auf Elementebene durchgeführt werden können und nur wenige Daten gespeichert werden müssen. Dieser Vorteil macht sich insbesondere bei Problemen der Topologieoptimierung mit vielen Optimierungsvariablen bemerkbar.

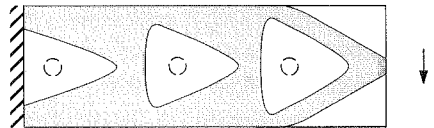
3 Topologieoptimierung

Die umfassendste Methode der Strukturoptimierung, die Geometrie eines Tragwerks zu verändern, ist die Topologieoptimierung. Dabei wird der grundlegende Aufbau des Tragwerks optimiert sowie die Form und die Abmessungen der einzelnen Bauteile näherungsweise bestimmt. Die Entwurfsaufgabe ist durch den zur Verfügung stehenden Entwurfsraum Ω_s , die angreifenden Lasten, mögliche Auflager und die Materialien, aus denen das Tragwerk bestehen soll, spezifiziert. Die Entwurfskriterien der Topologieoptimierung charakterisieren das globale Strukturverhalten. Hierzu zählen das Gewicht, das Spannungsvolumen, die Steifigkeit, die Traglast oder die Eigenfrequenzen des Tragwerks. Die explizite Vorgabe von lokalen Entwurfskriterien, wie Verschiebungen oder Spannungen, ist nur in Lastangriffspunkten oder in Auflagerbereichen sinnvoll.

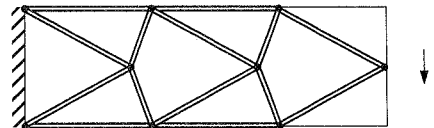
Die Verfahren der Topologieoptimierung können in geometrische und materielle Methoden eingeteilt werden (\rightarrow Abschnitt 2.2). In der geometrischen Topologieoptimierung wird die Geometrie des Tragwerks durch die Form der Kanten und Oberflächen in einer Lagrange-Formulierung (2.28) beschrieben (Bild 3.1a). Die Vorgehensweise der wenigen bislang entwickelten, geometrischen Verfahren gliedert sich in zwei Schritte. Zunächst werden ein bzw. mehrere zusätzliche Löcher in das Tragwerk eingebracht oder bestehende Aussparungen aus dem Tragwerk entfernt. Hierdurch wird die Topologie des Tragwerks geändert. Anschließend wird die optimale Form für die vorliegende Topologie bestimmt (\rightarrow Kapitel 5). Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis die Zielfunktion durch eine Veränderung der Topologie nicht mehr verbessert werden kann. Rosen und Grosse [215] schlagen ein heuristisches Verfahren vor, das zusätzliche Löcher an Stellen mit geringen Vergleichsspannungen einbringt. In der

a. Geometrisch (“bubble-Methode”)

○ “bubble”



b. Materiell diskret (Hemp [119])



c. Materiell kontinuierlich

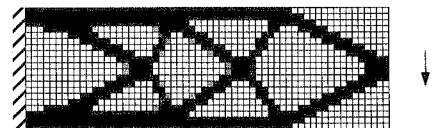


Bild 3.1: Geometrische und materielle Methoden der Topologieoptimierung

von Eschenauer et al. [88] und Schumacher [229] entwickelten “bubble”-Methode wird dagegen die Position der zusätzlichen Löcher (“bubbles”) über die Sensitivität der Zielfunktion bezüglich der Größe der “bubbles” bestimmt. Die Grundzüge der “bubble”-Methode werden an einem Beispiel im Anhang A1 erläutert. Die Vorteile der geometrischen Verfahren beruhen auf der direkten Einbindung der Formoptimierung in den Topologieoptimierungsprozeß. Mit wenigen Optimierungsvariablen kann die Form des Tragwerks diskretisiert und optimiert werden. Das grundlegende Problem der geometrischen Topologieoptimierung besteht jedoch in der Lagrange-Beschreibung der Topologieänderung. Wird ein Loch endlicher Größe in das Tragwerk eingebracht, so führt dies zu einem Wechsel des mechanischen Problems und damit zu einem irreversiblen, nichtdifferenzierbaren Schritt im Optimierungsprozeß.

Daher werden in der Topologieoptimierung meistens materielle Verfahren bevorzugt. In der materiellen Topologieoptimierung wird die Geometrie des Tragwerks über die Materialverteilung im Entwurfsraum in einer räumlichen Euler-Formulierung (2.29) beschrieben. Es sind diskrete und kontinuierliche Ansätze zu unterscheiden. In der klassischen “Layout”-Optimierung wird das Material im Entwurfsraum als System von diskreten Stäben und Balken idealisiert. Im Optimierungsprozeß werden diejenigen Elemente identifiziert, aus welchen das optimale Tragwerk zusammengesetzt ist. Dieser Ansatz schließt Tragwerke mit einer endlichen Anzahl von diskreten Strukturelementen sowie quasi-kontinuierliche Systeme ein. Hierzu zählen Fachwerke, Balkenroste, Gitterschalen, Kabelnetze sowie Rippensysteme zur Versteifung von Scheiben, Platten und Schalen. Die “Layout”-Optimierung basiert auf der Grundannahme, daß der Einfluß der Knoten auf das mechanische Verhalten und auf die Entwurfskriterien des Tragwerks vernachlässigt werden kann. Diese Annahme ist jedoch nur zulässig, wenn die Länge der Strukturelemente im Vergleich zu den Abmessungen der Querschnitte groß ist. Folglich ist die “Layout”-Optimierung auf die Optimierung von Tragwerken mit einem äußerst geringen Volumenanteil beschränkt.

Die besondere Stellung der “Layout”-Optimierung innerhalb der Strukturoptimierung liegt vielmehr in ihrem analytischen Zugang sowie ihrer historischen Bedeutung begründet. So fanden bereits Maxwell [171] 1869 und Michell [174] 1904 für einen Lastfall und bei linear elastischem Strukturverhalten die grundlegenden Prinzipien für Tragwerke mit minimalem Gewicht. Die Betrachtungen gehen dabei von einem quasi-kontinuierlichen mit Stäben belegten Entwurfsraum (“structural universe”) aus. Diese Arbeiten wurden in der Folge von Cox [66] 1965, Hemp [119] 1973, Prager und Rozvany [202] 1977 fortgeführt und verallgemeinert. Die Entwicklung ist bei Rozvany et al. [221] ausführlich beschrieben. Die auch als “exakt-analytisch” bezeichnete Formulierung des quasi-kontinuierlichen Topologieoptimierungsproblems liefert zwar die grundlegenden Bedingungen für den Aufbau von Tragwerken mit minimalem Gewicht und maximaler Steifigkeit. Diese Formulierung führt jedoch auf keine Methode, mit der für allgemeine Entwurfsaufgaben das Optimum direkt bestimmt werden kann. Daher gewann mit der zunehmenden Leistungsfähigkeit von Computern die in der Litera-

tur als "approximierte-diskretisierte" bezeichnete Formulierung der "Layout"-Optimierung an Bedeutung. Zu Beginn des Optimierungsprozesses wird eine Grundstruktur aus endlich vielen Stäben oder Balken in den Entwurfsraum gelegt. Hierdurch wird der Lösungsraum im Vergleich zur "exakt-analytischen" Formulierung auf einen endlichen Unterraum beschränkt. Die Topologieoptimierungsaufgabe wird in ein Bemessungsoptimierungsproblem überführt, wobei die Querschnittswerte der einzelnen Strukturelemente die Optimierungsvariablen darstellen. Ein Wechsel der Topologie findet statt, wenn Querschnitte zu Null werden oder, wenn dies aus numerischen Gründen nicht möglich ist, einen sehr kleinen Wert annehmen. Die Grundstrukturtechnik wurde von Dorn [80] 1964 eingeführt und seither auf zahlreiche Fragestellungen angewandt. Ein ausführlicher Überblick wird beispielsweise in Bendsøe [34], Kirsch [136] und Rozvany et al. [221] gegeben.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Topologieoptimierungsverfahren basieren auf kontinuierlichen Ansätzen. Diese stellen einen allgemeinen Zugang zur Topologieoptimierung dar, da beliebige Materialanordnungen im Entwurfsraum zugelassen werden. Im Gegensatz zur "Layout"-Optimierung erstreckt sich der Geltungsbereich der kontinuierlichen Methoden auf beliebig massive oder fein strukturierte Tragwerke. Da im Optimierungsprozeß durch die Bestimmung der optimalen Materialverteilung zugleich die Topologie und die Form des Tragwerks bestimmt werden, wird dieser Ansatz von Rozvany et al. [221] auch als "verallgemeinerte Formoptimierung" bezeichnet.

Die ersten Versuche, die Topologieoptimierungsaufgabe als kontinuierliches Materialverteilungsproblem zu lösen, gehen auf Rossow und Taylor [216] 1973 zurück. Sie führten die Dicke von Scheibenelementen eines FE-Modells als Optimierungsvariable ein und leiteten aus der optimierten Dickenverteilung die Topologie des optimalen Tragwerks ab. Aufgrund einer zu meist glatten Verteilung der Dicke im Entwurfsraum ist diese Vorgehensweise mit großen Unsicherheiten verbunden, welche Bereiche schließlich als Löcher interpretiert werden können. Olhoff [187] 1974 sowie Armand, Lodier [8] 1978 bestimmten die Dickenverteilung von Kirchhoff-Platten und stellten fest, daß bei Beschränkung der maximalen Plattendicke die Optimierungsergebnisse sehr stark von der Diskretisierung abhängen. Je feiner die Diskretisierung gewählt wird, um so feiner sind die Rippen der optimierten Platte. Hieraus schlossen Cheng und Olhoff [55] 1981, daß die exakte Lösung unendlich viele Rippen besitzt. Dieselben Autoren [56] führten daher 1982 zusätzlich zur Plattendicke die lokale Konzentration der Rippen als Optimierungsvariable ein. Die Biegesteifigkeit der Platte in Abhängigkeit der Rippendichte wird über einen Mittelungsprozeß bestimmt. Die numerische Instabilität des ursprünglichen Dickenoptimierungsproblems läßt sich darauf zurückführen, daß das zugrunde liegende Variationsproblem keine Lösung besitzt. Bereits 1970 wiesen Lurie [150] bei entsprechenden Problemen in der Elektrodynamik sowie 1975 Tartar [248] und 1977 Murat [181] allgemein bei Systemen, deren Verhalten durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird, darauf hin, daß für bestimmte Optimierungsprobleme keine Lösung existiert. Diese Problematik

wurde in den folgenden Jahren unter anderem von Lurie [151] 1980, Velte und Villaggio [265] 1982, Armand [9] 1983 genauer untersucht. Kohn und Strang [143] zeigten 1983 am Beispiel der Maximierung der Torsionssteifigkeit von Balken bei rein plastischem Materialverhalten einen mathematisch fundierten und für zahlreiche Entwurfsaufgaben geeigneten Weg auf, um Topologieoptimierungsprobleme zu lösen. Sie erweiterten 1986 diese Vorgehensweise auf ebene, linear elastische Probleme [144]. Die Methode verknüpft drei Disziplinen miteinander:

- Strukturoptimierung
- Relaxation von nichtkonvexen Funktionalen
- Homogenisierung von mikrostrukturierten Werkstoffen

Das ursprüngliche “0–1” Problem, ein homogenes Material optimal im Entwurfsraum zu verteilen, wird durch die Aufgabe ersetzt, die optimale räumliche Verteilung der Materialparameter eines speziell strukturierten, porösen Werkstoffs zu bestimmen. Das durch die Einführung poröser Materialien relaxierte Problem besitzt eine Lösung, die mit numerischen Verfahren ermittelt werden kann. Die mechanischen Eigenschaften des porösen Werkstoffs werden in Abhängigkeit von den Materialparametern mit Homogenisierungsverfahren berechnet. In einer rapiden, bis heute andauernden Entwicklung wurden diesem Weg folgend zahlreiche Topologieoptimierungsprobleme für Scheiben, Platten, Schalen sowie 3–dimensionale Kontinua untersucht. Aus den vielen Veröffentlichungen der letzten Jahre ist sicherlich der Beitrag von Bendsøe und Kikuchi 1988 [26] hervorzuheben, in dem die Autoren einen einfachen und robusten Algorithmus vorstellen, um Scheibentragwerke mit maximaler Steifigkeit bei vorgegebenem Gewicht numerisch zu bestimmen. Auf die wesentlichen Entwicklungen und Anwendungen der Topologieoptimierung wird in den entsprechenden Abschnitten dieser Arbeit eingegangen. Für einen detaillierten Überblick werden das Buch von Bendsøe [34], die Konferenzbände von Eschenauer, Olhoff [86], Bendsøe, Mota Soares [29] und Pedersen [199] sowie die Übersichtsaufsätze von Olhoff, Taylor [189] und Rozvany et al. [221] empfohlen.

Die materielle Topologieoptimierung kann in diskrete und kontinuierliche Ansätze getrennt werden. Die Arbeiten zur kontinuierlichen Topologieoptimierung beziehen sich jedoch oftmals auf die Untersuchungen der “Layout”–Optimierung, die als ein Grenzfall der kontinuierlichen Ansätze angesehen werden kann. Im Anhang A2 wird die typische Vorgehensweise der “Layout”–Optimierung am Beispiel von Michell–Strukturen erläutert. In diesem Kapitel wird die Theorie der kontinuierlichen, materiellen Topologieoptimierung vorgestellt³.

3. Die weiteren Betrachtungen zur materiellen Topologieoptimierung beziehen sich vorwiegend auf die kontinuierlichen Ansätze. Daher wird im folgenden auf eine Unterscheidung zwischen diskreten und kontinuierlichen Verfahren verzichtet. Die diskreten und quasi–kontinuierlichen Ansätze werden unter dem Begriff “Layout”–Optimierung zusammengefasst. Die kontinuierlichen Ansätze werden kurz als materielle Topologieoptimierung (von kontinuierlichen Tragwerken) bezeichnet.

3.1 Materielle Topologieoptimierung

In den vergangenen Jahren wurden eine Vielzahl von theoretisch fundierten und heuristischen Topologieoptimierungsverfahren entwickelt, in denen die Optimierungsaufgabe als kontinuierliches Materialverteilungsproblem formuliert wird. Einige der bedeutendsten heuristischen Verfahren werden im Anhang A3 kurz vorgestellt. In den folgenden Abschnitten wird der theoretische Hintergrund der mathematisch–mechanisch orientierten Verfahren am Beispiel von Tragwerken maximaler Steifigkeit erläutert.

Eine bestimmte Menge eines isotropen Materials ist so zu verteilen, daß die Dehnungsenergie im Entwurfsraum Ω_s minimal wird. Das statische Gleichgewicht wird in schwacher Form erfüllt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit Volumenkräfte vernachlässigt werden. Die Materialverteilung im Entwurfsraum Ω_s kann durch verschiedene physikalische Größen beschrieben werden. Bei dünnwandigen Tragwerken liegt es nahe, die Materialverteilung im Entwurfsraum anhand der Dicke $h(\mathbf{x})$ darzustellen. Im 3–dimensionalen Fall kann die Materialverteilung im Entwurfsraum durch bestimmte Materialparameter oder allgemein den Materialtensor $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ beschrieben werden.

$$\min_{\mathbf{C}} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_0 \chi(\mathbf{x}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0$$

$$\int_{\Omega_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_s = \int_{\Gamma_{ps}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma_{ps} \quad ; \quad \delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_u(\Omega_s) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_s)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathbf{C}_0 \quad ; \quad \chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_m \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \setminus \Omega_m \end{cases} \quad ; \quad \chi \in V_\chi \subseteq L_\infty(\Omega_s)$$

Der Ort aller Materialpunkte $\Omega_m \in \Omega_s$ wird durch die beliebig diskontinuierliche Indikatorfunktion $\chi(\mathbf{x})$ – auch Trägerfunktion genannt – beschrieben. Die Masse des verfügbaren Materials \bar{m} ist konstant. Der Tensor \mathbf{C}_0 bezeichnet den Materialtensor, ρ_0 die Dichte des isotropen, homogenen Materials. Das Variationsproblem (3.1) kann im allgemeinen nur mit numerischen Methoden gelöst werden. Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} und die Indikatorfunktion χ werden mit elementweise stetigen Ansätzen auf demselben FE–Netz approximiert.

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{N}, \hat{\mathbf{u}}) \quad ; \quad \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_u^h(\Omega_s) \subseteq \mathbf{V}_u(\Omega_s) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_s) \quad (3.2)$$

$$\chi \approx \chi^h(\hat{\chi}) \quad ; \quad \chi^h \in V_\chi^h(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s) \quad (3.3)$$

Die Indikatorfunktion χ^h kann durch elementweise konstante Ansätze beschrieben werden, womit eine diskontinuierliche Materialverteilung dargestellt wird. Die Finiten Elemente mit

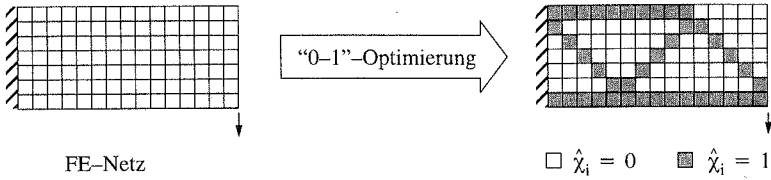


Bild 3.2: “0–1” Formulierung des materiellen Topologieoptimierungsproblems

$\hat{\chi}_i = 0$ bzw. $\hat{\chi}_i = 1$ sind in einem ganzzahligen “0–1” Optimierungsproblem zu bestimmen (Bild 3.2). Die Formulierung des Topologieoptimierungsproblems als ganzzahlige Optimierungsaufgabe weist jedoch mehrere gravierende Nachteile auf.

- Die Optimierungsergebnisse hängen erheblich von der gewählten Diskretisierung ab.
- Das diskretisierte “0–1” Optimierungsproblem besitzt zahlreiche lokale Minima.
- Das “0–1” Problem stellt eine ganzzahlige, kombinatorische Optimierungsaufgabe dar, die nur mit großem numerischen Aufwand gelöst werden kann⁴.

Kohn und Strang [144] führen die starke Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der zugrunde liegenden Diskretisierung und das Auftreten zahlreicher lokaler Minima bei der “0–1” Formulierung darauf zurück, daß das Variationsproblem (3.1) keine Lösung in $\mathbf{u}^h \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$, $\chi^h \in H^1(\Omega_s)$ besitzt. Auf diese Problematik wird zwar in der Literatur wiederholt hingewiesen, ohne daß jedoch der Zusammenhang zwischen der Ursache und den numerischen Effekten des Problems anschaulich erläutert wird. Die Charakteristika des Variationsproblems (3.1) werden zunächst an einem eindimensionalen Beispiel diskutiert. In den weiteren Abschnitten wird aufgezeigt, wie das Topologieoptimierungsproblem mit Hilfe von Regularisierungs- und Homogenisierungsverfahren gelöst werden kann. Zur Vertiefung dieser Thematik werden dem mathematisch orientierten Leser darüber hinaus die Beiträge von Allaire, Kohn [2], Cherkaev [57] und Kohn, Strang [144] empfohlen. Zunächst wird von einem elastischen Materialverhalten bei kleinen Verzerrungen ausgegangen. In Abschnitt 4.4 wird die Methode der materiellen Topologieoptimierung auf nichtlineares Materialverhalten erweitert. Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf das Problem, die optimale Verteilung eines isotropen Materials im Entwurfsraum zu bestimmen. Die zugrunde liegende Theorie und die daraus entwickelten Verfahren können jedoch direkt auf Materialverteilungsprobleme mit mehreren, anisotropen Materialien erweitert werden (u.a. Thomsen [256]).

4. Anagnostou et al. [7] verwenden beispielsweise einen “simulated annealing”-Algorithmus, um die Materialverteilung in einem mit wenigen Elementen diskretisierten Entwurfsraum zu optimieren. Eine feinere Diskretisierung übersteigt jedoch schnell die numerische Kapazität von ganzzahligen Optimierungsverfahren.

3.2. Eigenschaften der variationellen Formulierung

Die mathematischen Eigenschaften des Variationsproblems (3.1) werden an einem eindimensionalen, weitgehend abstrakten Modell erläutert.

$$\min_u \frac{1}{2} \int_0^1 E_0 |\nabla_x u(x)|^2 dx \quad ; \quad u \in V_u(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s) \quad (3.4)$$

$$\int_0^1 \rho_0 \chi(x) dx - \bar{m} = 0$$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \forall \nabla_x u \neq 0 \\ 0 & \forall \nabla_x u = 0 \end{cases} \quad ; \quad \chi \in V_\chi(\Omega_s) \subseteq L_\infty(\Omega_s)$$

Der eindimensionale Entwurfsraum Ω_s kann näherungsweise als Stab der Länge 1 mit der Querschnittsfläche 1 interpretiert werden. Der Elastizitätsmodul des isotropen Materials wird mit E_0 bezeichnet. Der Stab ist an der Stelle $x = 0$ fest eingespannt: $u(0) = 0$. Die vorgeschriebene Verschiebung an der Stelle $x = 1$ beträgt $u(1) = \bar{u}$. Es greifen keine zusätzlichen äußeren Kräfte am Stab an. In der Aufgabenstellung (3.4) ist bereits berücksichtigt, daß nur dort im Entwurfsraum Material $\chi = 1$ notwendig ist, wo die Spannungen $\sigma = E_0 \nabla_x u$ ungleich Null sind. Die Lagrange-Formulierung des Optimierungsproblems (3.4) lautet:

$$\max_\eta \min_u L(u, \eta) = \int_0^1 \left(\eta \rho_0 \chi(x) + \frac{1}{2} E_0 |\nabla_x u(x)|^2 \right) dx - \eta \bar{m} \quad (3.5)$$

Für die Charakterisierung des Variationsproblems ist es ausreichend, das Minimierungsproblem in den Verschiebungen u bei festem Lagrange-Multiplikator η zu betrachten. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit werden $\eta = \rho_0 = 1$, $E_0 = 2$ gewählt.

$$\min_u \tilde{f} = \int_0^1 \tilde{q} dx \quad ; \quad \tilde{q} = \begin{cases} 1 + |\nabla_x u|^2 & \forall |\nabla_x u| > 0 \\ 0 & \forall |\nabla_x u| = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Variationsprobleme können entweder mit direkten oder indirekten Methoden gelöst werden. Letztere bestimmen die Nullstellen der zugehörigen Euler-Gleichungen entweder analytisch oder numerisch mit Differenzenverfahren. Direkte Methoden, wie das Ritzsche Verfahren bzw. die Finite Elemente Methode, sind für das vorliegende Randwertproblem (3.4) bzw. (3.6) besser geeignet. Die Verschiebungen u werden durch lokale oder globale Ansätze u^h approximiert. Für eine gewählte Diskretisierung minimiert die Näherungslösung u^h das Funktional $\tilde{f}(u^h)$. Der unendlichdimensionale Funktionenraum $V_u(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s)$ für $u \in V_u(\Omega_s)$ wird

auf einen endlichdimensionalen Unterraum $V_u^h(\Omega_s) \subseteq V_u(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s)$ für $u^h \in V_u^h(\Omega_s)$ beschränkt. Der Unterraum $V_u^h(\Omega_s)$ ist die Menge aller Funktionen bezüglich der gewählten Diskretisierung in $H^1(\Omega_s)$. Diese Vorgehensweise ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn für eine zunehmende Verfeinerung der Diskretisierung oder Erhöhung der Ordnung der Ansatzfunktionen, d.h. $h \rightarrow 0$, die Näherungslösungen u^h gegen die kontinuierliche Lösung u konvergieren. Jede so erzeugte Folge von Näherungslösungen bildet in diesem Fall eine sogenannte Minimalfolge $\{u^h\}$. Darüber hinaus sind die Eindeutigkeit und Stabilität des Variationsproblems nachzuweisen. Eine allgemeine und verständliche Einführung in die Variationsrechnung findet man bei Funk [97]. Auf die Lösbarkeit von Variationsproblemen mit direkten Methoden gehen Ekeland, Temam [84] sowie Dacorogna [69] ausführlich ein.

Für die Existenz einer Minimalfolge ist es notwendig, daß das Funktional in einem gegebenen Funktionenraum schwach unterhalb stetig ist.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\inf \tilde{f}(u^h) \right) \geq \tilde{f}(u) \quad (3.7)$$

Diese Bedingung stellt eine Erweiterung des Satzes von Bolzano–Weierstraß dar, wonach jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Minimum und ein Maximum einnimmt. Ist man nur an einem Minimum interessiert, so kann die Stetigkeitsanforderung auf die notwendige Bedingung zurückgenommen werden, daß die Funktion im betrachteten Intervall unterhalb stetig ist. In der Bedingung (3.7) ist zu beachten, daß nicht der Grenzwert von Funktionswerten, sondern die Konvergenz von Funktionalen in Abhängigkeit von Funktionen betrachtet wird. Man unterscheidet in (3.7) zwischen einer starken und einer schwachen Konvergenz. Eine starke Konvergenz in $H^1(\Omega_s)$ liegt vor, wenn gilt:

$$\tilde{f}(u^h) \rightarrow \tilde{f}(u) \quad \text{für} \quad \|u^h - u\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

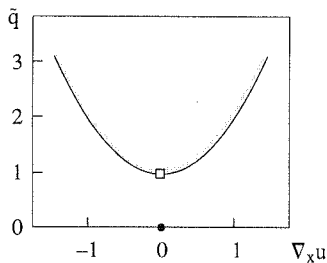
Für die Existenz einer Minimalfolge ist es allerdings ausreichend, wenn das Infimum von $\tilde{f}(u^h)$ schwach gegen $\tilde{f}(u)$ konvergiert.

$$\tilde{f}(u^h) \rightarrow \tilde{f}(u) \quad \text{für} \quad \langle \tilde{G}, u^h \rangle \rightarrow \langle \tilde{G}, u \rangle \quad ; \quad \tilde{G} \in H^{-1}(\Omega_s) \quad (3.9)$$

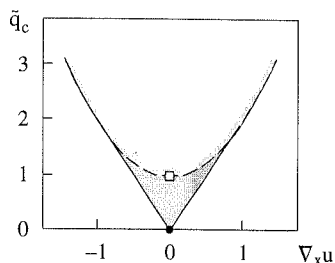
Der Dualraum $H^{-1}(\Omega_s)$ bildet die Menge aller linearen Funktionale auf $H^1(\Omega_s)$.

$$\langle \tilde{G}, u^h \rangle = \int_0^1 (\tilde{g}_1 u^h + \tilde{g}_2 \nabla u^h) \, dx \quad ; \quad \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in L_2(\Omega_s) \quad (3.10)$$

Jedem \tilde{G} sind die Funktionen \tilde{g}_1 und \tilde{g}_2 eindeutig zugeordnet. Das Funktional (3.6) ist nur dann in $H^1(\Omega_s)$ schwach unterhalb stetig, wenn dessen Integrand $\tilde{q}(\nabla_x u)$ in $\nabla_x u$ konvex ist⁵ (Dacorogna [69]). Der Graph des Integranden $\tilde{q}(\nabla_x u)$ zeigt jedoch, daß dies hier nicht der Fall ist (Bild 3.3a). Dieses Problem kann rein anschaulich dadurch behoben werden, daß eine konvexe Hülle \tilde{f}_c um \tilde{f} gelegt wird (Bild 3.3b). Das so “konvexifizierte” Ersatzproblem \tilde{f}_c besitzt eine Minimalfolge, die gegen die kontinuierliche Lösung konvergiert.



a. Ausgangsproblem (3.5)



b. Konvexifiziertes Problem (3.11)

Bild 3.3: Integrand des Modellproblems

$$\min_u \bar{f}_c = \int_0^1 \bar{q}_c \, dx \quad ; \quad \bar{q}_c = \begin{cases} 1 + |\nabla_x u|^2 & \forall |\nabla_x u| \geq 1 \\ 2|\nabla_x u| & \forall |\nabla_x u| < 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Die Eigenschaften des Ausgangs- und des konvexifizierten Problems werden anhand eines expliziten Beweises, daß das reduzierte Variationsproblem (3.6) in $H^1(\Omega_s)$ nicht schwach unterhalb stetig ist, eingehender untersucht. Es wird gezeigt, daß für bestimmte Randbedingungen $u(1) = \bar{u}$ eine schwach konvergente Folge $\{u^h\}$ konstruiert werden kann, für die gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\inf F(u^h) \right) < F(\bar{u}) \quad ; \quad \bar{u} \in V_u(\Omega_s) \quad (3.12)$$

Die Funktion \bar{u} kann frei in $H^1(\Omega_s)$ gewählt werden. Für den folgenden Beweis ist:

$$\bar{u}(x) = \bar{u} \, x \quad (3.13)$$

Die Folge $\{u^h\}$ wird, wie in Bild 3.4 dargestellt, gewählt. Der Entwurfsraum Ω_s wird in $1/h$ Teilintervalle der Länge h eingeteilt. Jedes Teilintervall selbst wird in einen Bereich mit konstantem u^h der Länge $h(n-1)/n$ und einem Bereich mit linear ansteigendem u^h der Länge h/n aufgespalten. Im i -ten Teilintervall berechnet sich u^h aus:

$$u^h = \begin{cases} \bar{u} \, h \, (i - 1) & \forall h \, (i - 1) \leq x \leq h \, (i - 1/n) \\ \bar{u} \, n \, x - \bar{u} \, h \, i \, (n - 1) & \forall h \, (i - 1/n) < x \leq i \, h \end{cases} \quad i = 1, \dots, 1/h \quad (3.14)$$

-
5. Die Existenz einer Lösung bei mehrdimensionalen Problemen $u \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$ wird durch die Quasi-Konvexität bzw. Poly-Konvexität des Integranden gesichert (Dacorogna [69]). Die Konvexität von Funktionalen ist von dem in Abschnitt 2.1 eingeführten Konvexitätsbegriff für Parameteroptimierungsprobleme zu unterscheiden. Die Konvexität eines Funktionales sichert die Existenz einer Lösung für verschiedene Diskretisierungen. Die Konvexität des Parameterproblems dagegen sichert die Existenz einer Lösung für eine bestimmte Diskretisierung.

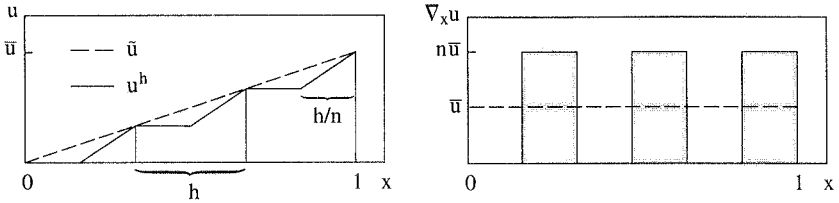


Bild 3.4: Konstruktion einer Näherungslösung für das Modellproblem (3.6)

Die Funktionale für die Verschiebung \bar{u} und die Folge $\{u^h\}$ ergeben sich für das reduzierte Optimierungsproblem (3.6) zu:

$$\tilde{f}(\bar{u}) = 1 + \bar{u}^2 \quad ; \quad \tilde{f}(u^h) = \frac{1}{n} + \bar{u}^2 n \quad (3.15)$$

Der Faktor $n \geq 1$ wird nun so gewählt, daß das Funktional $\tilde{f}(u^h)$ minimal wird. Mit einer optimal angepaßten Intervallunterteilung

$$n = \begin{cases} 1 & \forall \quad |\bar{u}| \geq 1 \\ 1/|\bar{u}| & \forall \quad |\bar{u}| < 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

folgt für das diskretisierte Funktional (3.15) :

$$\tilde{f}(u^h) = \begin{cases} 1 + |\bar{u}|^2 & \forall \quad |\bar{u}| \geq 1 \\ 2 |\bar{u}| & \forall \quad |\bar{u}| < 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Somit gilt für $|\bar{u}| < 1$:

$$\tilde{f}(u^h) < \tilde{f}(\bar{u}) \quad (3.18)$$

wobei die Folge $\{u^h\}$ schwach gegen \bar{u} konvergiert (\rightarrow Anhang A9). Damit ist der Beweis vollständig, daß das Variationsproblem (3.4) in $H^1(\Omega_s)$ nicht schwach unterhalb stetig ist. Es besitzt daher keine Lösung in diesem Funktionenraum.

Anhand der Näherungslösung u^h können einige Effekte verdeutlicht werden, die bei dem Versuch auftreten, das Ausgangsproblem numerisch zu lösen.

- Aus der Anpassung der Diskretisierung (3.16) wird ersichtlich, daß die Näherungslösung mit einer zunehmend feinen Diskretisierung für $|\bar{u}| \rightarrow 0$ immer heftiger oszilliert (Bild 3.5). Dies erklärt, daß die numerische Lösung von Topologieoptimierungsproblemen in der "0-1" Formulierung (3.1) bei einer Verfeinerung des FE-Netzes im Entwurfsraum nicht konvergiert und die optimierte Materialverteilung in einem erheblichen Maße von der gewählten Diskretisierung abhängig ist.
- Für $|\bar{u}| \leq 1$ beträgt die Amplitude $\nabla_x u^h = \pm 1$. Die Feinheit der Diskretisierung hat keinen Einfluß auf das Minimum des Funktionals $\tilde{f}(u^h)$. So führen beispielsweise die beiden Ver-

läufe von $\nabla_x u^h$ für $\bar{u} = 0.5$ zu demselben Minimum $\bar{f}(u^h) = 1$. Dies erklärt das Auftreten zahlreicher lokaler Minima und die Instabilität der numerischen Näherungslösung der "0-1" Formulierung.

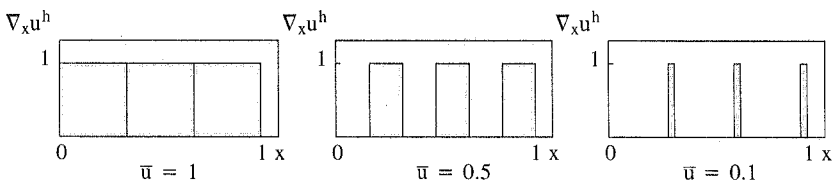
Die Eigenschaften und die daraus resultierenden numerischen Probleme der variationellen Formulierung des Topologieoptimierungsproblems (3.1) wurden anhand des Modellproblems (3.6) exemplarisch aufgezeigt. Abschließend wird an diesem Beispiel ein Weg skizziert, wie das Optimierungsproblem zu formulieren ist, damit es mit direkten Methoden gelöst werden kann. Die lokale Diskretisierung von u^h und damit die lokale Materialverteilung χ^h sind in (3.17) durch eine entsprechende Intervallunterteilung n (3.16) den Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(1) = \bar{u}$ optimal angepaßt. Das Ergebnis der optimierten Diskretisierung (3.17) entspricht der Lösung $\nabla_x u = \bar{u}$ des konvexifizierten Variationsproblems (3.11). Diese Betrachtung führt zu folgenden Schlüssen, die im folgenden Abschnitt verallgemeinert werden.

- Die optimalen, hochfrequenten Schwingungen können im Integral, d.h. im Mittel, beschrieben werden. Der konvexe Integrand (3.11) bzw. (3.17) ergibt sich aus den glatten Verschiebungen $u_c(x)$, wenn die Dichte und der Elastizitätsmodul Funktionen der Dehnung $\nabla_x u$ darstellen.

$$u_c(x) = \bar{u} x \quad ; \quad \rho \sim \nabla_x u \rho_0 \quad ; \quad E \sim \frac{1}{\nabla_x u} E_0 \quad ; \quad \nabla_x u < 1 \quad (3.19)$$

Die Verschiebung $u_c(x)$ ist eine Lösung des konvexen Ersatzproblems, für das die Existenz einer Lösung in $H^1(\Omega_s)$ gesichert ist. Die Eindeutigkeit der Lösung kann jedoch nicht garantiert werden.

Diskretisierung: $h = 1/3$



Diskretisierung: $h = 1/9$

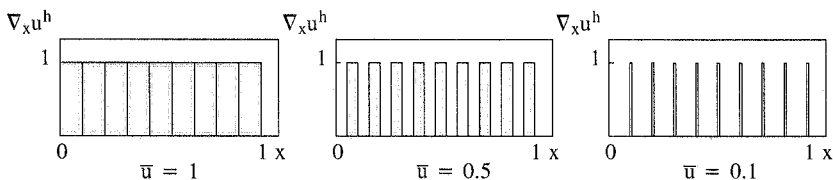


Bild 3.5: Einfluß der Randbedingung \bar{u} und der Diskretisierung h auf die Lösung

- Der Integrand des Ersatzproblems bildet eine konvexe Hülle um den ursprünglichen Integranden. Wie dieses Beispiel anschaulich zeigt, entsprechen die Punkte auf der konvexen Hülle den lokalen Energien einer, für das jeweilige $\bar{\mathbf{u}}$ optimalen, lokalen Materialverteilung.

Anmerkung:

Das statische Gleichgewicht eines linear elastischen Tragwerks folgt aus der Lösung des Variationsproblems (2.42). Die Verschiebungen \mathbf{u} minimieren das Funktional “potentielle Energie Π ”. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1$ wird auf die Beschränktheit und V-Elliptizität der Bilinearform des Variationsproblems zurückgeführt (u.a. Eriksson et al. [85]). Es wird zumeist nicht explizit bewiesen, daß die potentielle Energie Π nach (3.7) schwach unterhalb stetig ist. Die numerischen Ergebnisse von FE-Berechnungen mit Verschiebungselementen weisen jedoch darauf hin, daß diese Bedingung ebenfalls erfüllt wird. So werden die potentielle Energie des Tragwerks überschätzt, die innere Energie und die Verschiebungen unterschätzt.

3.3 Regularisierung – Relaxation – Poröse Werkstoffe

Das Topologieoptimierungsproblem kann in der variationellen Formulierung (3.1) mit numerischen Methoden nicht gelöst werden. In der optimalen Materialverteilung treten hochfrequente Oszillationen in den Verschiebungen auf (\rightarrow Abschnitt 3.2). Der Funktionenraum der Verschiebungen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ ist für beliebig diskontinuierliche Materialanordnungen $\chi \in L_\infty(\Omega_s)$ nicht geschlossen (Bendsøe [24]). Es bestehen zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, das Variationsproblem zu regularisieren, d.h. das Optimierungsproblem so zu formulieren, daß eine Lösung in $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$ existiert. Zum einen kann der Funktionenraum für χ auf $L_2(\Omega_s)$ eingeschränkt werden, indem beispielsweise der Umfang der Gebiete Ω_m begrenzt wird. In der diskretisierten Formulierung des Optimierungsproblems berechnet sich der Umfang aus dem Integral der Sprünge der Indikatorfunktion über die Elementkanten a_j im Entwurfsraum.

$$\sum_{\text{Kanten}} \left(\hat{\chi}_j^{(+)} - \hat{\chi}_j^{(-)} \right)^2 a_j - \bar{R} \leq 0 \quad ; \quad \hat{\chi}^{(+)}, \hat{\chi}^{(-)} \in \{0, 1\} \quad ; \quad \bar{R} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.20)$$

Diese Form der Regularisierung sichert lediglich die Existenz einer Lösung. Das Optimierungsproblem weist jedoch eine große Anzahl von lokalen Minima auf, so daß die Lösung numerisch nicht stabil ist. Die Nachteile eines ganzzahligen Optimierungsproblems bleiben bestehen.

Anstatt den Funktionenraum für die Indikatorfunktion χ zu verkleinern, kann der Funktionenraum für die Verschiebungen \mathbf{u} erweitert werden. Dieses Verfahren wird als Relaxation bezeichnet. Das Auftreten von hochfrequenten Oszillationen bedeutet, daß das optimale Tragwerk beliebig viele und beliebig kleine Löcher besitzt. Wenn die optimale Porengröße gegen

Null strebt, hat das Optimierungsproblem keine “geometrische” Lösung (Kohn, Strang [144]). Das optimale Tragwerk besteht vielmehr aus einem porösen, im allgemeinen anisotropen Werkstoff mit einer räumlich veränderlichen Dichte $0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_0$. Der poröse Werkstoff ist aus dem isotropen, homogenen Ausgangsmaterials aufgebaut, das im weiteren mit dem Index “0” gekennzeichnet wird. Die effektiven Werkstoffeigenschaften werden mit Homogenisierungsverfahren ermittelt. Die makroskopischen Verschiebungen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ werden aus den Zustandsgleichungen mit dem effektiven Werkstofftensor $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho)$ berechnet. Sie beschreiben das mikroskopische, stark oszillierende Verhalten des porösen Werkstoffs im lokalen Mittel. Diese Form der Regularisierung ermöglicht es, die Komplexität des Topologieoptimierungsproblems zu berücksichtigen und die Grenzen optimaler Tragwerke zu erfassen.

Die Erweiterung des Problems auf poröse Werkstoffe führt auf eine kontinuierliche Formulierung in der Dichte $\rho(\mathbf{x})$.

$$\min_{\rho} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s \quad ; \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho) \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho(\mathbf{x}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \rho = \{ \rho \in L_{\infty}(\Omega_s) \mid 0 \leq \rho \leq \rho_0 \}$$

$$\int_{\Omega_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_s = \int_{\Gamma_{ps}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma_{ps} \quad ; \quad \delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0(\Omega_s) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_s)$$

Der Funktionenraum der Verschiebungen \mathbf{u} wird durch den makroskopischen Materialtensor \mathbf{C} des porösen Werkstoffs relaxiert. Die Funktion $\mathbf{C}(\rho)$ ist so zu wählen, daß die Relaxation folgende Bedingungen erfüllt (Kohn, Strang [144]):

- Das relaxierte Problem ist in $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ schwach unterhalb stetig. Es besitzt folglich zumindest eine Lösung in $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$.
- Die Infima der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (3.1) und des relaxierten Problems (3.21) stimmen überein.
- Die Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ des relaxierten Variationsproblems (3.21) konvergiert schwach gegen die Lösung des Ausgangsproblems (3.1).

Das kontinuierliche Optimierungsproblem hat nur dann eine Lösung in $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$, wenn der poröse Werkstoff lokal so strukturiert ist, daß er für einen gegebenen Verschiebungszustand die maximal mögliche Steifigkeit besitzt. Die Dehnungsenergien der optimalen Mikrostrukturen bilden eine quasi-konvexe Hülle im Raum der Verschiebungen für den Integranden des ursprünglichen Problems. In diesem Fall sind die Infima der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (3.1) und des relaxierten Problems (3.21) gleich. Das Optimierungsproblem tendiert bei

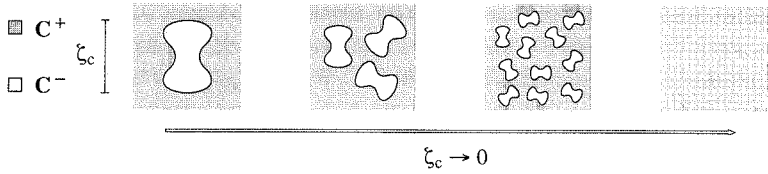


Bild 3.6: G-Konvergenz heterogener Werkstoffe

Verwendung nichtoptimaler Werkstoffe dazu, mit dem vorhandenen Material optimale Mikrostrukturen zu formen. In diesem Fall treten abermals hochfrequente Oszillationen auf und die Optimierungsergebnisse sind wiederum von der Diskretisierung abhängig.

Das Kompaktheitstheorem der G-Konvergenz für heterogene Werkstoffe sichert, daß die Lösung des durch die Einführung von porösen Werkstoffen relaxierten Problems (3.21) gegen die Lösung des Ausgangsproblems (3.1) konvergiert (Dal Maso [70]). Das Theorem gilt für elastische Werkstoffe, die aus zwei oder mehreren nichtdegenerierten Materialien mit verschiedenen Materialeigenschaften $\mathbf{C}^+, \mathbf{C}^- \neq \mathbf{0}$ aufgebaut sind (Bild 3.6). Die charakteristische Länge der Einschlüsse, die aus dem weicheren \mathbf{C}^- bestehen, wird mit ζ_c bezeichnet. Die mikroskopischen Zustandsgrößen $\mathbf{u}^\zeta, \boldsymbol{\varepsilon}^\zeta, \boldsymbol{\sigma}^\zeta$ in einem heterogenen Werkstoff ergeben sich aus der Lösung des Variationsproblems (2.45) bzw. des zugehörigen elliptischen Randwertproblems. Aufgrund der räumlich oszillierenden Materialtensoren $\mathbf{C}^+, \mathbf{C}^-$ schwingt die Lösung des Randwertproblems \mathbf{u}^ζ hochfrequent. Die Oszillationen sind um so heftiger, je heterogener der Werkstoff, je kleiner die Mikrozele ist. Für $\zeta_c \rightarrow 0$ besitzt das Variations- bzw. Randwertproblem keine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$. Das Kompaktheitstheorem der G-Konvergenz besagt, daß für jede äußere, makroskopische Kraft $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{L}_2(\Omega_S)$ die mikroskopischen Zustandsgrößen $\mathbf{u}^\zeta, \boldsymbol{\varepsilon}^\zeta, \boldsymbol{\sigma}^\zeta$ schwach in $\mathbf{L}_2(\Omega_S)$ gegen die makroskopischen Zustandsgrößen $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ konvergieren, wenn die charakteristische Länge der Mischung ζ_c gegen Null strebt.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\zeta_c \rightarrow 0} \mathbf{u}^\zeta(\mathbf{x}) \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \lim_{\zeta_c \rightarrow 0} \boldsymbol{\varepsilon}^\zeta(\mathbf{x}) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \lim_{\zeta_c \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}^\zeta(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

Die makroskopischen Größen werden durch makroskopische kinematische Beziehungen und das Hookesche Gesetz verknüpft, wobei \mathbf{C} den homogenisierten Materialtensor bezeichnet.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

Die mikroskopischen Zustandsgleichungen werden durch die Homogenisierung des Materialtensors regularisiert. Der heterogene, mikrostrukturierte Werkstoff, der aus den Materialien \mathbf{C}^+ und \mathbf{C}^- aufgebaut ist, wird durch ein homogenes Material mit gemittelten, makroskopischen Eigenschaften \mathbf{C} ersetzt. Das effektive Strukturverhalten wird durch die makroskopischen Zustandsgrößen $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ beschrieben, welche die hochfrequente Strukturantwort $\mathbf{u}^\zeta, \boldsymbol{\varepsilon}^\zeta, \boldsymbol{\sigma}^\zeta$ im lokalen Mittel beschreiben.

Wie in Abschnitt 3.2 ausgeführt wurde, treten bei der Minimierung der inneren Energie in der Topologieoptimierung ebenfalls hochfrequente Oszillationen in den Verschiebungen auf. Durch die Einführung von mikrostrukturierten Materialien werden beliebig hochfrequente Oszillationen a priori zugelassen und durch die Homogenisierung des Materialtensors im Mittel beschrieben. Diese Form der Homogenisierung erfüllt die an die Relaxation des Optimierungsproblems gestellten Bedingungen, da die mikroskopischen Verschiebungen \mathbf{u}^{δ} schwach gegen die makroskopischen Verschiebungen \mathbf{u} konvergieren. Dies trifft auf alle Entwurfskriterien zu, die in den Verschiebungen schwach stetig sind. Hierzu zählen die innere Energie bzw. die Dehnungsenergie, die Eigenfrequenzen, die Grenzlast und das Spannungsvolumen einer Struktur. Im Vergleich zu der abstrakten Konvexifizierung des Lösungsraums, die in Abschnitt 3.2 skizziert wurde, ist die Homogenisierung insbesondere für mehrdimensionale Probleme weitaus anschaulicher und einfacher zu realisieren.

Das zuvor erläuterte Kompaktheitstheorem verliert seine Gültigkeit, wenn zur Beschreibung poröser Werkstoffe anstatt eines weichen Materials direkt Löcher eingefügt werden: $\mathbf{C}^- = \mathbf{0}$ (Allaire, Kohn [2]). Der physikalische Effekt eines Risses unterscheidet sich grundlegend von dem eines beliebig kleinen Einschlusses aus beliebig weichem Material $\mathbf{C}^- \rightarrow \mathbf{0}$. Der Einfluß einer Pore $\mathbf{C}^- \neq \mathbf{0}$ auf das lokale Verschiebungsfeld verschwindet, wenn die Porengröße gegen Null geht. Im Gegensatz dazu können die Verschiebungen über einen noch so feinen Riß diskontinuierlich sein. Daher werden poröse Werkstoffe in der Topologieoptimierung in beliebig guter Näherung durch heterogene Materialien mit $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^0$ und $\mathbf{C}^- \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^- \rightarrow \mathbf{0}$ beschrieben.

Das relaxierte Problem setzt sich aus einem globalen Optimierungsproblem in der Dichteverteilung $\rho(\mathbf{x})$ und einem lokalen Problem im Materialtensor \mathbf{C} zusammen (Jog et al. [130]).

$$\min_{\rho} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \min_{\mathbf{C}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \right) d\Omega_s \quad ; \quad \mathbf{C}(\rho, \mathbf{x}) \in \mathbf{G}_{\rho}(\Omega_s) \quad (3.24)$$

Weiterhin sind die globalen Nebenbedingungen gemäß der Aufgabenstellung (3.1) bzw. (3.21) zu erfüllen. In jedem Punkt des Entwurfsraums ist der poröse Werkstoff auf mikroskopischer Ebene so zu strukturieren, daß er die größte Steifigkeit für eine bestimmte Dichte besitzt. Die Dichteverteilung wird in einem übergeordneten Optimierungsproblem auf makroskopischer Ebene bestimmt. Die Menge \mathbf{G}_{ρ} enthält alle effektiven Materialtensoren der Werkstoffe, die durch Perforation des Ausgangsmaterials für eine bestimmte Dichte ρ gebildet werden können. Die Menge \mathbf{G}_{ρ} muß dabei nicht vollständig bekannt sein, um das Optimierungsproblem (3.24) im Materialtensor \mathbf{C} zu lösen. Es ist ausreichend, die extremalen Materialeigenschaften in Abhängigkeit der Dichte beschreiben zu können.

Das übergeordnete Optimierungsproblem entspricht in diskretisierter Form einem gewöhnlichen Bemessungsproblem, die Dichteverteilung im Entwurfsraum zu optimieren. Der Zusammenhang zwischen dem mikroskopischen Aufbau des porösen Werkstoffs und seinen makro-

skopischen Eigenschaften ist zu berücksichtigen, um das Optimierungsproblem in \mathbf{C} zu lösen. Die effektiven Materialeigenschaften in Abhängigkeit des Aufbaus der Mikrostruktur werden durch Homogenisierungsverfahren beschrieben.

3.4 Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen

Die Einführung von porösen Materialien und die Beschreibung von deren effektiven Materialeigenschaften mit Hilfe von Homogenisierungsverfahren stellen ein anschauliches Verfahren zur Regularisierung des Topologieoptimierungsproblems (3.1) dar. Die Bedeutung der Homogenisierung für die materielle Topologieoptimierung kann daran gemessen werden, daß der Begriff "Homogenisierungsmethode" oftmals fälschlicherweise als Synonym für die materielle Topologieoptimierung verwendet wird (Rozvany et al. [221]). In der Topologieoptimierung werden vorwiegend poröse, periodisch aufgebaute Werkstoffe betrachtet (Bild 3.7). Dies stellt keine Einschränkung des Optimierungsproblems dar, da sämtliche Materialtensoren $\mathbf{C} \in \mathbf{G}_p(\Omega_s)$ aus periodischen Mikrostrukturen gebildet werden können. Das makroskopische Materialverhalten von periodischen Mikrostrukturen kann explizit in Abhängigkeit von mikroskopischen Parameter hergeleitet werden. In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Aspekte von Homogenisierungsverfahren am Beispiel von linear elastischen Probleme zusammengefaßt.

In der Kontinuumsmechanik wird im allgemeinen der mikroskopische Aufbau des Tragwerks nicht explizit berücksichtigt. Statt dessen wird das mechanische Verhalten von statistisch homogenen Werkstoffen mittels effektiver Materialeigenschaften auf makroskopischer Ebene beschrieben. Die effektiven Eigenschaften der eigentlich heterogenen Werkstoffe können anhand deren mikroskopischen Aufbau mittels Homogenisierungsverfahren bestimmt werden. Für ein linear elastisches Materialverhalten stehen zahlreiche, klassische Verfahren zur Verfügung. Hierzu zählen die "self-consistent"-Methode (Hill [122]), Halpin-Tsai-Gleichungen (Halpin, Kardos [112]), Eshelby-Methode (Eshelby [89]), Mori-Tanaka-Methode (Mori, Tanaka [180]). Eine allgemeine Übersicht über die Verfahren zur Beschreibung der effektiven Eigen-

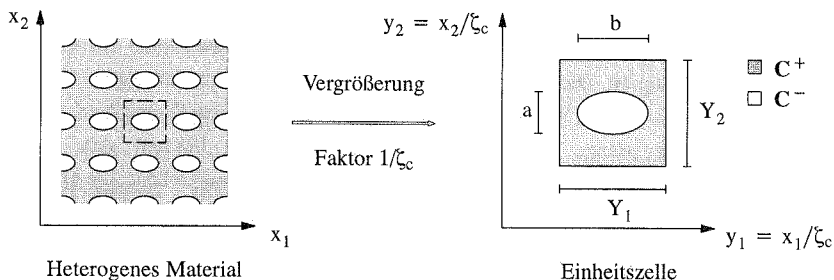


Bild 3.7: Periodischer Aufbau mikrostrukturierter Werkstoffe

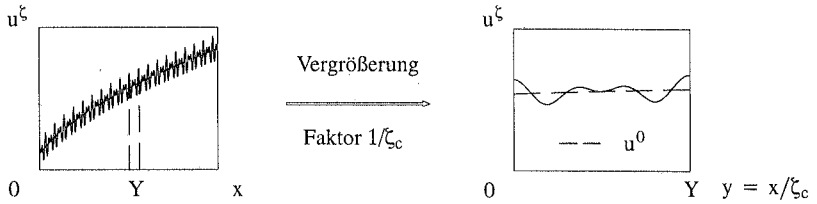


Bild 3.8: Multiskalen-Beschreibung einer hochfrequenten Schwingung

schaften von heterogenen Werkstoffen findet sich bei Christensen [61], Hashin [115] und Rammerstorfer, Böhm [208]. Die effektiven Werkstoffeigenschaften werden im wesentlichen aus den Volumenanteilen der Matrix und der Einschlüsse bzw. Fasern bestimmt, wobei vereinfachende Annahmen über den mikroskopischen Aufbau des Werkstoffs getroffen werden.

In der Topologieoptimierung werden poröse, periodisch aufgebaute Werkstoffe mit extremalen Eigenschaften betrachtet. Diese Eigenschaften hängen von der geometrischen Struktur des Werkstoffs ab. Es werden daher in der Topologieoptimierung Homogenisierungsverfahren eingesetzt, welche die Geometrie der Mikrozele explizit berücksichtigen. Die Theorie dieser Verfahren sind in Bensoussan [37] und Sanchez-Palencia [224] ausführlich beschrieben. Im folgenden sind die wichtigsten, für das weitere Verständnis der Arbeit erforderlichen Aspekte der Homogenisierung von periodischen Materialien zusammengestellt. In Kapitel A4 des Anhangs wird das in der vorliegenden Arbeit eingesetzte Homogenisierungsverfahren hergeleitet und anhand eines numerischen Beispiels erläutert.

Im folgenden werden 2-dimensionale Werkstoffe betrachtet, die aus gleichen Zellen Ω_y der Größe $Y_1 \times Y_2$ periodisch aufgebaut sind (Bild 3.7). Der Werkstoff ist durch eine Zelle, die oftmals auch als repräsentatives Volumenelement (RVE) bezeichnet wird, vollständig charakterisiert. Die Zelle besteht aus zwei Materialien, einem steifen Material C^+ und einem weichen Material C^- . Der Aufbau der Mikrozele wird durch geometrische Parameter beschrieben, wie beispielsweise die Halbachsen a, b einer elliptischen Pore. Der Skalierungsfaktor $\zeta_c \ll 1$ spiegelt das Größenverhältnis zwischen dem Tragwerk und der Mikrozele wider. Aus der Periodizität der Mikrostruktur folgt für den Materialtensor $C^\zeta(\mathbf{x})$:

$$C^\zeta(\mathbf{x}) = C^\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{I}_y \mathbf{Y}) \quad , \quad \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} \quad , \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Die Schwingungen der Zustandsgrößen in mikrostrukturierten Werkstoffen sind auf Makroebene durch sich in \mathbf{x} langsam verändernde und auf Mikroebene durch in $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\zeta_c$ periodisch oszillierende Anteile gekennzeichnet (Bild 3.8). Diese Charakteristik legt eine Beschreibung der Zustandsgrößen in mehreren Skalen nahe. Die Verschiebungen \mathbf{u}^ζ werden in Potenzen von ζ_c entwickelt.

$$\mathbf{u}^\zeta = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \zeta_c \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.26)$$

Der makroskopische Anteil $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}$ ist nur von \mathbf{x} abhängig. Die mikroskopischen Anteile $\mathbf{u}^{n\zeta}$, $n_\zeta > 0$ sind in Y periodische Funktionen. Das Ziel des Homogenisierungsprozesses ist, das Strukturverhalten durch rein makroskopische Zustandsgleichungen im lokalen Mittel zu beschreiben. Hierfür wird der Homogenisierungsoperator $(\cdot)^\sim$ eingeführt.

$$(\cdot)^\sim = \frac{1}{|\Omega_Y|} \int_{\Omega_Y} \cdot \, d\Omega_Y \quad (3.27)$$

Wendet man diesen Homogenisierungsoperator auf die in ζ_c entwickelten statischen Gleichgewichtsbedingungen und Spannungs–Dehnungsbeziehungen an, so erhält man rein makroskopische Zustandsgleichungen. Der homogenisierte Materialtensor berechnet sich aus:

$$C_{ijkl} = \left(C_{ijkl}^\zeta (\delta_{km} \delta_{ln} + \psi_{klmn}) \right)^\sim \quad (3.28)$$

wobei ψ_{klmn} die Dehnungen infolge der charakteristischen Verformungen v_{ikl} der Mikrozele sind. Die charakteristischen Verformungen v_{ikl} sind die periodischen Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen auf Mikroebene.

$$\int_{\Omega_Y} \delta\psi_{ijmn} C_{ijkl}^\zeta \psi_{klmn} \, d\Omega_Y = - \int_{\Omega_Y} \delta\psi_{ijmn} C_{ijmn}^\zeta \, d\Omega_Y \quad (3.29)$$

Die charakteristischen Verformungen können für bestimmte Mikrozele analytisch, müssen im allgemeinen jedoch numerisch, beispielsweise mit der Methode der Finiten Elemente, berechnet werden. Die Koeffizienten des homogenisierten Materialensors werden in einer Nachlaufrechnung ermittelt. Die lokalen, inneren Energien der Mikrostruktur und des homogenisierten Werkstoffs sind gleich groß (\rightarrow Anhang A4).

Mlejnek und Schirrmacher [178] schlagen ein etwas anschaulicheres Näherungsverfahren vor, das direkt auf dem Postulat der gleichen Energien auf Mikro- und Makroebene aufbaut. Die Mikrostruktur wird mit Einheitsdehnungszuständen $\epsilon_{ij}^\zeta, \epsilon_{kl}^\zeta$ belastet und die zugehörige Dehnungsenergie Π_{ijkl}^ζ numerisch berechnet. Die Komponenten des homogenisierten Materialensors ergeben sich aus der Bedingung, daß die inneren Energien der heterogenen Mikrozele mit der einer Zelle aus dem homogenen Werkstoff bei gleicher Belastung übereinstimmen.

$$\Pi_{ijkl}^\zeta = \frac{1}{2} C_{ijkl} |\Omega_Y| \quad (3.30)$$

Im Gegensatz zu den klassischen Homogenisierungsverfahren wird bei dieser Vorgehensweise der Aufbau der Mikrozele explizit berücksichtigt. Die korrekte Lagerung der Mikrozele kann aus dieser vereinfachten Energiebetrachtung (3.30) jedoch nicht abgeleitet werden.

Anmerkung:

Das vorgestellte Homogenisierungsverfahren ist über das Gebiet der Elastizität von periodisch mikrostrukturierten Werkstoffen hinaus für zahlreiche Probleme von großer Bedeutung, die durch ein System partieller Differentialgleichungen mit schnell oszillierenden Koeffizienten beschrieben werden. Hierzu zählen die elektrische Leitfähigkeit in heterogenen Stoffen oder das Verhalten von Flüssigkeiten in porösen Medien (Sanchez-Palencia [224]).

3.5 Werkstoffmodelle

Die Regularisierung bzw. die Relaxation der Topologieoptimierungsaufgabe (3.1) führt auf das lokale Problem, den makroskopischen Materialtensor $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho)$ für eine vorgegebene Dichte ρ so zu wählen, daß die Dehnungsenergiedichte im Punkt \mathbf{x} für einen anisotropen Dehnungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ minimal wird.

$$\min_{\mathbf{C}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}(\rho) \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad ; \quad \mathbf{C}(\rho) \in \mathbf{G}_\rho(\mathbf{x}) \quad (3.31)$$

Dabei sind sämtliche Werkstoffe $\mathbf{C}(\rho) \in \mathbf{G}_\rho(\mathbf{x})$ zu berücksichtigen, die aus der Mischung zweier Materialien \mathbf{C}^+ und $\mathbf{C}^- \rightarrow \mathbf{0}$ gebildet werden können. Aus mathematischer Sicht genügt es, das Minimum des lokalen Optimierungsproblems zu kennen, um die konvexe Hülle zu berechnen und somit das ursprüngliche Topologieoptimierungsproblem zu lösen. Es ist nicht notwendig, die Mikrostruktur des optimalen porösen Materials explizit zu bestimmen. Eine makroskopische Betrachtungsweise ist prinzipiell ausreichend.

Die extremalen Eigenschaften eines beliebigen Werkstoffs, der aus mehreren Materialien \mathbf{C}_i^ξ mit den Volumenanteilen θ_i aufgebaut ist, werden durch die Grenzen nach Voigt und Reuss eingeschränkt. Voigt legt einen konstanten Dehnungszustand zugrunde, um die makroskopische Dehnungsenergiedichte nach oben abzuschätzen.

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\sum \theta_i \mathbf{C}_i^\xi \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{C} \leq \sum \theta_i \mathbf{C}_i^\xi \quad (3.32)$$

Die Annahme entspricht dem Modell von parallel geschalteten Federn. Die untere Grenze der Materialsteifigkeit wird nach Reuss mit Hilfe der Komplementärenergie bei konstantem Spannungszustand abgeschätzt.

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \left(\sum \theta_i \mathbf{C}_i^{\xi^{-1}} \right) \boldsymbol{\sigma} \quad ; \quad \mathbf{C} \geq \left(\sum \theta_i \mathbf{C}_i^{\xi^{-1}} \right)^{-1} \quad (3.33)$$

Dies entspricht dem Modell von in Reihe geschalteten Federn. Die Grenzen nach Voigt und Reuss stellen lediglich eine grobe Näherung dar. Hashin und Shtrikman [114] verbessern diese Abschätzung auf der Basis des Hashin-Shtrikman-Variationsprinzips. Hiermit können die oberen Grenzwerte des Kompressionsmoduls K_U und des Schubmoduls G_U für einen Werk-

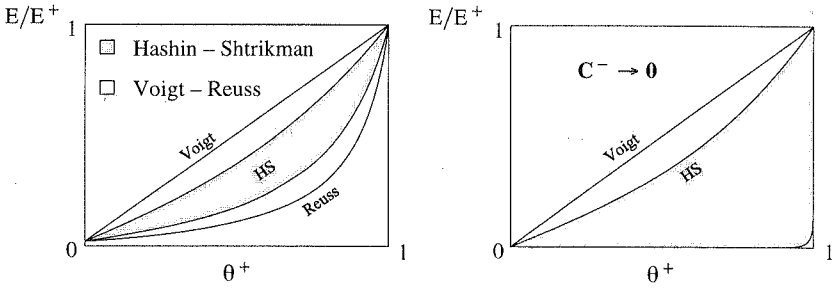


Bild 3.9: Obere und untere Grenzen des Elastizitätsmoduls

stoff, der aus einem steifen Material $(\cdot)^+$ und einem weichen Material $(\cdot)^-$ zusammengesetzt ist, in guter Näherung bestimmt werden (Hashin [115]).

$$K_U = K^+ + \frac{\theta^-}{1/(K^- - K^+) + 3 \theta^+ / (3 K^+ - 4G^+)} \quad (3.34)$$

$$G_U = G^+ + \frac{\theta^-}{1/(G^- - G^+) + 6 \theta^+ (K^+ + 2 G^+) / (5 G^+ (3 K^+ - 4G^+))} \quad (3.35)$$

Der obere Grenzwert des Elastizitätsmoduls berechnet sich aus:

$$E_U = \frac{9 K_U G_U}{3 K_U + G_U} \quad (3.36)$$

Die unteren Grenzen berechnen sich aus (3.34),(3.35), indem die Materialkennwerte K , G , θ für das steife und das weiche Material ausgetauscht werden. In Bild 3.9 sind die oberen und die unteren Grenzwerte des Elastizitätsmoduls nach Voigt, Reuss und Hashin, Shtrikman für den Fall $C^- \gg 0$ über dem Volumenanteil des steiferen Materials θ^+ aufgetragen. Die unteren Grenzen nach Reuss und Hashin, Shtrikman streben für $C^- \rightarrow 0$ gegen die Achsen $E/E^+ = 0$ und $\theta^+ = 1$. Die nichtlineare Abhängigkeit der Materialsteifigkeit von der Dichte ist für poröse Materialien kennzeichnend und wird beispielsweise durch Messungen an Metallschäumen oder Knochenspongiosa bestätigt. Isotrope Werkstoffe mit maximaler Steifigkeit lösen das Optimierungsproblem (3.31) jedoch nur für den Spezialfall $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$. Für beliebige Dehnungszustände werden anisotrope Werkstoffe benötigt. Die Grenzen für anisotrope Werkstoffe werden unter anderem mit selbstkonsistenten Homogenisierungsmodellen (Willis [276]), auf der Basis eines verallgemeinerten Hashin-Shtrikman-Variationsprinzips (Avellaneda [6], Milton, Kohn [176]) sowie mittels der "translation"-Methode (Grabovsky [102]) bestimmt, ohne daß die Mikrostruktur des Materials dabei explizit ermittelt wird.

Es ist jedoch anschaulicher, konkrete Werkstoffmodelle einzuführen. Der Relaxationsprozeß erhält hierdurch eine konkrete mechanische Bedeutung. Der makroskopische Materialtensor hängt von der Geometrie des porösen Materials auf Mikroebene ab. Die geometrischen Parameter auf Mikroebene stellen die Optimierungsvariablen des Optimierungsproblems dar. Der

Zusammenhang zwischen mikroskopischen Geometrieparametern und makroskopischen Werkstoffeigenschaften wird durch die Homogenisierungsgleichungen beschrieben (\rightarrow Abschnitt 3.4). Das Werkstoffmodell muß so beschaffen sein, daß es das Optimierungsproblem (3.31) für alle auftretenden Dehnungszustände lösen kann. Es ist zu beachten, daß zwar einer Mikrostruktur ein makroskopischer Materialtensor eindeutig zugeordnet ist, verschiedene Mikrostrukturen können jedoch dieselben makroskopischen Werkstoffeigenschaften besitzen.

In der Topologieoptimierung werden sowohl makroskopische Formulierungen wie auch Mikro-Werkstoffmodelle eingesetzt. Nur wenige Ansätze auf der Basis von Mikro-Werkstoffmodellen lösen das lokale Optimierungsproblem (3.31) exakt. Die meisten Makro- und Mikro-Werkstoffmodelle approximieren die Lösung in einem Unterraum von $G_p^{\text{sup}}(\mathbf{x}) \subset G_p(\mathbf{x})$. Diese im weiteren als suboptimal bezeichneten Werkstoffmodelle relaxieren somit das Topologieoptimierungsproblem nicht exakt. In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten Ansätze vorgestellt und die charakteristischen Werkstoffeigenschaften für den ebenen Spannungszustand diskutiert. Ein universelles makroskopisches Modell wird auf Platten- und Schalenprobleme erweitert.

3.5.1 Optimale Mikrostrukturen

Die makroskopischen Eigenschaften von optimalen Mikrostrukturen stimmen mit den Grenzwerten für statistisch isotrope oder anisotrope Werkstoffe überein. Bereits 1962 stellte Hashin [113] fest, daß ein aus konzentrischen Kugeln aufgebauter Werkstoff einen maximalen Kompressions- und Schubmodul besitzt. Die Kugel aus weichem Material $C^- \rightarrow \mathbf{0}$ ist von einem Mantel aus steifem Material C^+ umgeben (Bild 3.10a). Die Dicke des Mantels ist vom Volumenanteil des steifen Materials abhängig. Für diese Konstruktion sind konzentrische Kugeln mit beliebig kleinen Durchmessern notwendig, wobei das Verhältnis der Radien konstant bleibt. Dieses Modell ist auf statistisch isotrope Werkstoffe beschränkt. Grabovsky und Kohn [101] erweitern das Kugel-Modell auf eine Konstruktion aus ummantelten Ellipsoiden (Bild 3.10b). Mit diesem Modell kann das lokale Optimierungsproblem (3.31) für einen bestimmten Bereich von anisotropen Dehnungszuständen gelöst werden, in dem die Exzentrizität und Ausrichtung

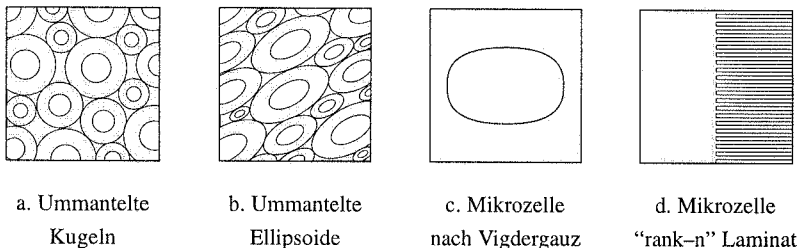


Bild 3.10: Optimale Mikrostrukturen

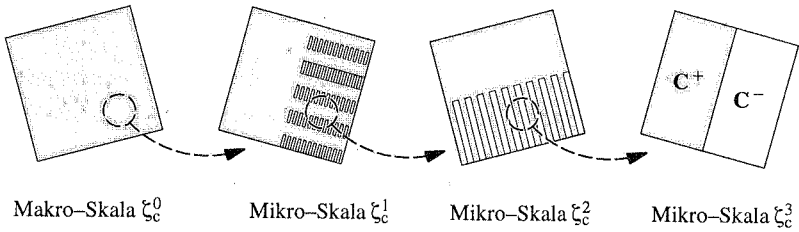


Bild 3.11: Mehrfach geschichtete Laminare

der Ellipsoiden dem Dehnungszustand angepaßt wird. Sowohl die Kugel- wie auch die Ellipsoiden-Konstruktion gehen von einem vollkommen ungeordneten Aufbau der Mikrostruktur aus, der nur im statistischen Mittel beschrieben werden kann.

In der Topologieoptimierung werden überwiegend periodische Mikrostrukturen betrachtet, da sich deren makroskopische Eigenschaften über das in Abschnitt 3.4 vorgestellte Homogenisierungsverfahren systematisch berechnen lassen. Bislang sind nur zwei Modelle für periodisch aufgebaute Werkstoffe bekannt, die das lokale Optimierungsproblem in $G_p(\mathbf{x})$ lösen. Die Mikrozelle nach Vigdergauz [268] besitzt einen glatten Einschluss $C^- \rightarrow \mathbf{0}$ (Bild 3.10c). Die Form und Orientierung des Einschlusses wird durch ein System von Differentialgleichungen bestimmt, das für beliebige Dehnungs- bzw. Spannungszustände nur numerisch gelöst werden kann (Grabovsky, Kohn [101]). Mehrfach geschichtete Laminare stellen ein hierarchisches Modell von optimalen, periodischen Mikrostrukturen dar, deren makroskopischen Eigenschaften analytisch berechnet werden können (Bild 3.10d).

Mehrfach geschichtete Laminare

Je nach Komplexität des Modells werden n_ζ Skalen benötigt, um diese Mikrostrukturen zu beschreiben. In Bild 3.11 ist ein Laminat 3. Ordnung ("rank-3") dargestellt. In jeder Skala wird die Mikrostruktur als kontinuierliche Struktur betrachtet, die aus einem homogenen Material C^+ und einem heterogenen Werkstoff aufgebaut ist. Der heterogene Werkstoff wird in einer weiteren Skala genauer beschrieben. In der feinsten Skala besteht die Mikrostruktur aus zwei homogenen, isotropen Materialien C^+ und $C^- \rightarrow \mathbf{0}$. Die "makroskopischen" Eigenschaften der Mikrostruktur ζ_c^{n+1} in der Skala ζ_c^n werden mittels Homogenisierung berechnet. Jede Mikrostruktur ist durch die Volumenanteile der Werkstoffe und der Orientierung der Mikrozeile im Tragwerk eindeutig definiert, wenn nur zwei Ausgangsmaterialien verwendet werden. In diesem Fall besitzt der makroskopische Werkstoff $2n_\zeta$ Variablen.

Francfort, Murat [95], Milton [175] und Avellaneda [6] weisen nach, daß mehrfach geschichtete Laminare Werkstoffe mit maximaler Steifigkeit für beliebige anisotrope Belastungszustände darstellen. Rank-2 Laminare mit einer orthogonalen Anordnung der Fasern lösen das lokale Optimierungsproblem (3.31) für einen Lastfall im 2-dimensionalen Fall vollständig. Sie besitzen dieselben makroskopischen Eigenschaften wie die Mikrozeile nach Vigdergauz.

Orthogonale rank-2 Laminare werden u.a. von Kohn, Strang [144] Bendsøe [27] und Allaire, Kohn [3] in der Topologieoptimierung eingesetzt. Bei 2-dimensionalen Problemen mit mehreren Lastfällen sind rank-3 Laminare mit einer entsprechenden Faserorientierung optimal. Für 3-dimensionale Probleme mit einem Lastfall sind räumlich angeordnete rank-3 Laminare, mit mehreren Lastfällen sind räumlich angeordnete rank-6 Laminare notwendig. Der künstliche Aufbau der Laminare unterstreicht einerseits, daß diese Laminare mehr ein mathematisches Werkzeug denn ein realer Werkstoff sind. Andererseits finden sich auch in der Natur und der Technik zahlreiche "Werkstoffe", die nach einem hierarchischen Prinzip aufgebaut sind, wie polykristalline Materialien, Polymere, Knochen und zelluläre Stoffe (Lakes [147]). In der vorliegenden Arbeit werden orthogonale rank-2 Laminare für Optimierungsprobleme von Scheibentragwerken mit einem Lastfall eingesetzt. Die makroskopischen Werkstoffeigenschaften können analytisch mit dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Homogenisierungsverfahren berechnet werden. Der Werkstofftensor C^{\square} eines rank-1 Laminats wird in einem werkstoffeigenen Bezugssystem aufgestellt (Bild 3.12a).

$$C_{1111}^{\square} = \left[\left[\frac{1}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right]^{-1} ; \quad C_{1122}^{\square} = \left[\left[\frac{C_{1122}^{\zeta}}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right] \left[\left[\frac{1}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right]^{-1} \quad (3.37)$$

$$C_{2222}^{\square} = \left[(C_{2222}^{\zeta}) \right] - \left[\left[\frac{C_{2211}^{\zeta 2}}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right] + \left[\left[\frac{C_{2211}^{\zeta 2}}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right]^2 \left[\left[\frac{1}{C_{1111}^{\zeta}} \right] \right]^{-1} ; \quad C_{1212}^{\square} = \left[\left[\frac{1}{C_{1212}^{\zeta}} \right] \right]^{-1}$$

Die übrigen Koeffizienten des Materialtensors sind Null. Die Gleichungen (3.37) werden u.a. von Hassani [116] ausführlich aus den Homogenisierungsgleichungen (\rightarrow Anhang A4) hergeleitet. Die Komponenten des Materialtensors können für den Fall, daß das rank-1 Laminat aus zwei isotropen Materialien C^+ , C^- mit gleicher Querdehnzahl ν besteht, wie folgt vereinfacht werden. Der Volumenanteil des steifen Materials ist mit $\theta = \theta^+$ gekennzeichnet.

$$C_{1111}^{\square} = \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{E^+ E^-}{\theta E^- + (1 - \theta) E^+} ; \quad C_{1122}^{\square} = \nu C_{1111}^{\square} \quad (3.38)$$

$$C_{2222}^{\square} = \theta E^+ + (1 - \theta) E^- ; \quad C_{1122}^{\square} = \frac{1 - \nu}{2} C_{1111}^{\square}$$

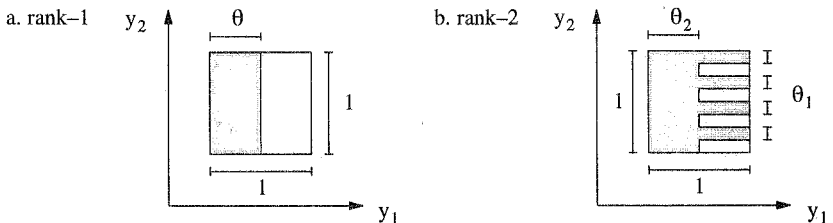


Bild 3.12: Rank-1 und rank-2 Laminare

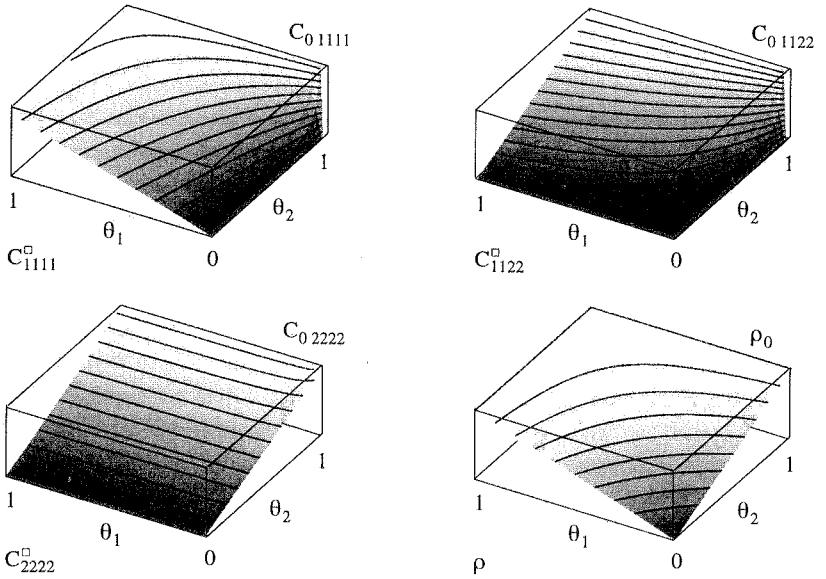


Bild 3.13: Homogenisierter Materialtensor und Dichte des rank-2 Werkstoffmodells

Das rank-2 Laminat ist aus einer Lage des steifen, isotropen Materials \mathbf{C}^+ mit einem Volumenanteil θ_2 und einer Lage des heterogenen rank-1 Laminats aufgebaut (Bild 3.12b). Der Volumenanteil des steifen Materials im rank-1 Laminat beträgt θ_1 . Die makroskopischen Werkstoffeigenschaften können durch rekursive Anwendung von (3.37) bzw. (3.38) ermittelt werden. Für $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}_0$ und $\mathbf{C}^- \rightarrow \mathbf{0}$ lautet der Werkstofftensor des rank-2 Laminats:

$$\mathbf{C}_{1111}^{\square} = \frac{\theta_1 E_0}{\theta_1 \theta_2 (1 - \nu^2) + (1 - \theta_2)} \quad ; \quad \mathbf{C}_{1122}^{\square} = \theta_2 \nu \mathbf{C}_{1111} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{C}_{2222}^{\square} = \theta_2 E_0 + \theta_2^2 \nu^2 \mathbf{C}_{1111} \quad ; \quad \mathbf{C}_{1212}^{\square} = 0$$

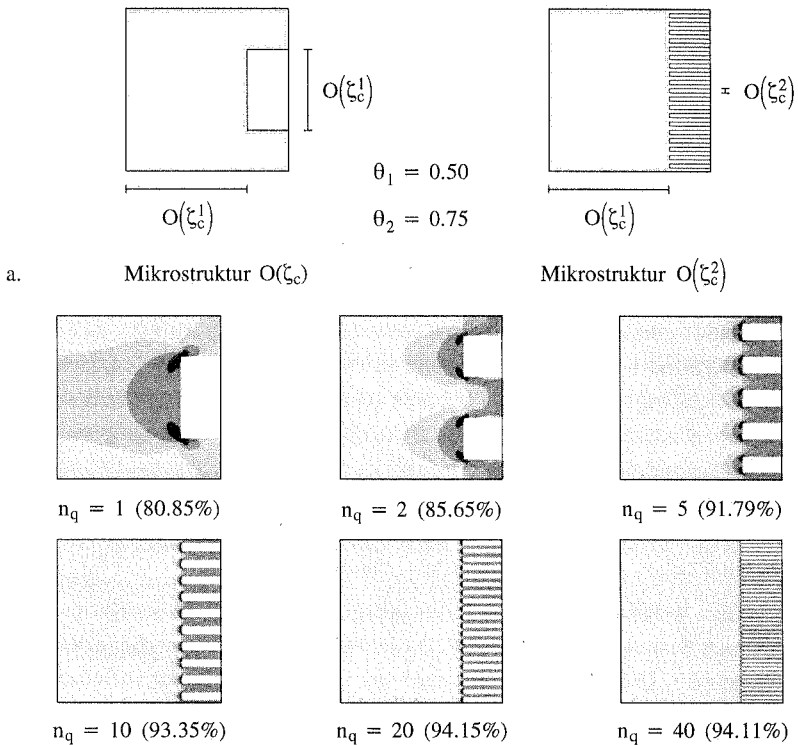
Die makroskopische Dichte des porösen rank-2 Laminats beträgt:

$$\rho = (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1 \theta_2) \rho_0 \quad (3.40)$$

Das rank-2 Laminat besitzt keine Schubsteifigkeit. Sämtliche Kräfte werden über Normalspannungen abgetragen, wobei die Fasern gleichmäßig belastet werden. Die Funktionen der Komponenten des Materialtensors sind in Bild 3.13 für $\nu = 0.3$ dargestellt. Das optimierte Tragwerk ist nur für einen Lastfall stabil. Diese Eigenschaft ist ebenfalls für Michell-Strukturen kennzeichnend. Das kontinuierliche, durch rank-2 Laminat relaxierte Topologieoptimierungsproblem entspricht für $\rho \rightarrow 0$ der Michellschen Formulierung der Topologieoptimierungsaufgabe (Allaire, Kohn [2], Bendsøe, Haber [32]). Die Materialverteilung $\theta_1(\mathbf{x})$, $\theta_2(\mathbf{x})$ und die

Orientierung des Laminats $\Theta(\mathbf{x})$ werden iterativ im Optimierungsprozeß bestimmt, wobei die Fasern in Richtung der Hauptspannungen angeordnet werden. Um numerische Probleme zu vermeiden, wird mit einer kleinen, "künstlichen" Schubsteifigkeit $0 < C_{1212} \ll 1$ gerechnet.

Rank-2 Laminats besitzen eine höhere Steifigkeit als einfacher aufgebaute Werkstoffe 1. Ordnung. Der Grund hierfür wird an einer Mikrozele 1. Ordnung $O(\xi_c^1)$ nach Bild 3.14a veranschaulicht (Rozvany et al. [217]). Die Mikrozele ist aus einer homogenen Faser mit einem Volumenanteil θ_2 und hierzu orthogonalen Querrippen mit einem Volumenanteil $\theta_1(1 - \theta_2)$ aufgebaut. Die Komponente C_{1111} des makroskopischen Werkstoffensors wird für eine zunehmende Anzahl von Querrippen n_q numerisch ermittelt (\rightarrow Anhang A4). Das rank-2 Laminat $O(\xi_c^2)$ erhält man für $n_q \rightarrow \infty$. Der Materialtensor des rank-2 Laminats kann nach (3.39) analytisch berechnet werden. In Bild 3.14b sind die von Mises Spannungen für die charakteristischen Verschiebungen \mathbf{v}_{11} dargestellt (\rightarrow Anhang A4). Die relative Differenz der Kompo-



b. Von Mises Spannungen für die charakteristischen Verschiebungen \mathbf{v}_{11}

Bild 3.14: Approximation eines rank-2 Laminats

nenen C_{1111} des Werkstoffensors zwischen dem approximierten und dem exakten rank-2 Laminat ist jeweils angegeben. An den Anschlußstellen der Querrippen treten inhomogene Spannungszustände infolge von Schubspannungen auf. Die Bereiche mit Schubspannungen sind um so kleiner, je größer die Anzahl der Querrippen ist. In der Mikrozeile 1. Ordnung $O(\xi_c^1)$ klingen diese Störungen nach dem Saint-Venant-Prinzip in einer Umgebung $O(\xi_c^1)$ ab, so daß große Bereiche der Querrippen inhomogene Spannungen aufweisen. Die Querrippen der Mikrozeile 2. Ordnung $O(\xi_c^2)$ dagegen besitzen bis auf eine Länge $O(\xi_c^2)$ einen homogenen Spannungszustand. Die Steifigkeit des Werkstoffs nimmt mit der Anzahl der Querrippen zu. Die Eigenschaften des rank-2 Laminats können jedoch nur für $n_q \rightarrow \infty$ erreicht werden. Eine vollständige Relaxation des Topologieoptimierungsproblems erfordert daher die Einführung einer zusätzlichen Skala.

Optimale Mikrostrukturen relaxieren das Topologieoptimierungsproblem mathematisch exakt. Sie führen allerdings zu Optimierungsergebnissen mit einem sehr hohen Anteil an porösem Werkstoff (\rightarrow Abschnitt 4.1). Da diese Werkstoffe nicht oder nur sehr schwer herstellbar sind, werden weniger komplexe, jedoch suboptimale Mikrostrukturen verwendet, um anwendungsorientierte Topologieoptimierungsprobleme zu lösen.

3.5.2 Suboptimale Mikrostrukturen

Die optimierte Materialverteilung weist einen geringeren Anteil an porösen Werkstoffen auf, wenn suboptimale Werkstoffmodelle verwendet werden (\rightarrow Abschnitt 4.1). Dies erleichtert die Umsetzung des Optimierungsergebnisses in ein Tragwerk, das aus einem homogenen, isotropen Werkstoff besteht. Das parametrisierte Optimierungsproblem besitzt jedoch lokale Minima und die Optimierungsergebnisse sind von der Diskretisierung abhängig, da das Optimierungsproblem durch suboptimale Werkstoffmodelle nicht exakt relaxiert wird. Je mehr die Materialeigenschaften der suboptimalen Mikrostrukturen von denen optimaler Werkstoffe abweichen, desto deutlicher machen sich diese Defekte bemerkbar. In den vergangenen Jahren wurden verschiedene suboptimale Mikrostrukturen in der Topologieoptimierung untersucht. Ein isotropes Mikromodell, das dem Kugel-Modell nach Hashin [113] entspricht, wird beispielsweise von Gea [98] eingesetzt. Die makroskopischen Werkstoffeigenschaften werden nach der Mori-Tanaka-Methode ermittelt (Mori, Tanaka [180]).

Das bekannteste Werkstoffmodell in der Topologieoptimierung ist die Einheitszelle mit Rechteck-Loch nach Bendsoe und Kikuchi [26]. Dieses Werkstoffmodell beschreibt einen orthotropen Werkstoff 1. Ordnung. Die Abmessungen des Loches $a \times b$ und die Orientierung der Mikrozeile Θ sind die variablen Werkstoffparameter (Bild 3.15). Im Gegensatz zu den mehrfach geschichteten Laminaten kann in diesem Fall der makroskopische Werkstofftensor nicht analytisch berechnet werden. Die Komponenten des homogenisierten Werkstoffensors werden für bestimmte Lochgrößen $a \times b$ nach dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Verfahren ermittelt. Die Homogenisierungsergebnisse werden durch Bézier- oder Lagrange-Flächen interpoliert

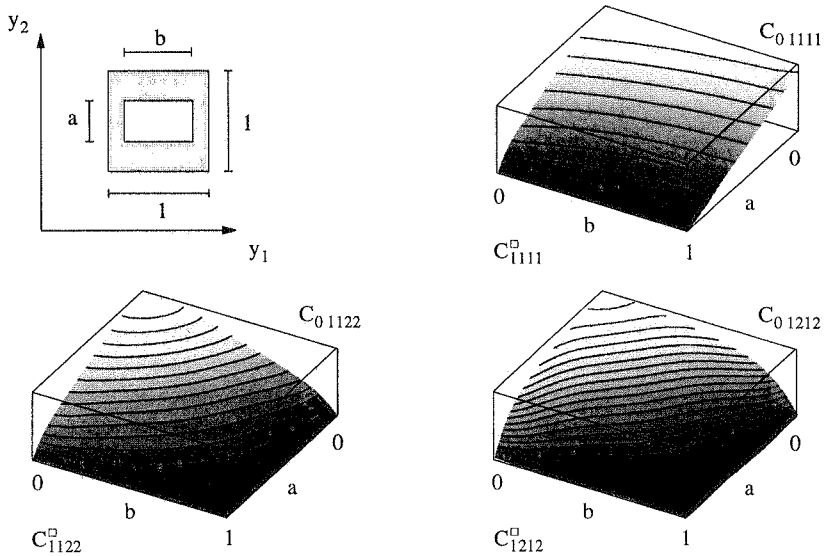


Bild 3.15: Homogenisierter Materialtensor für die Einheitszelle mit Rechteck-Loch

bzw. approximiert. Auf diese Weise liegen die Komponenten des Werkstoffensors $C_{ijkl}^{\square}(a, b)$ als explizite Funktionen in Abhängigkeit der Parameter a und b in einem werkstoffeigenen Bezugssystem vor. Die Approximationen werden für die jeweilige Querdehnzahl vor dem eigentlichen Optimierungsprozeß durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wurden die Komponenten C_{1111}^{\square} , C_{1122}^{\square} , C_{1212}^{\square} des homogenisierten Werkstoffensors für den ebenen Spannungszustand in 121 Stützstellen berechnet und durch Polynome 6. Grades approximiert (\rightarrow Anhang A8). Die Approximationen sind in Bild 3.15 dargestellt. Die Komponente C_{2222}^{\square} kann aufgrund der Symmetrie der Mikrozele aus $C_{2222}^{\square}(a, b) = C_{1111}^{\square}(b, a)$ berechnet werden.

Der homogenisierte Werkstoff ist für $a > 0$, $b > 0$ schubsteif. Die optimierte Materialverteilung ist daher hinsichtlich der Orientierung des Werkstoffs weniger sensitiv, als dies bei rank-2 Werkstoffen der Fall ist. Es sind keine komplexen Modelle für mehrere Lastfälle notwendig.

3.5.3 Makroskopische Ansätze

Das Topologieoptimierungsproblem wird physikalisch anschaulich relaxiert, indem poröse Werkstoffe eingeführt werden, deren makroskopische Eigenschaften mit Homogenisierungsverfahren ermittelt werden. Die Einbindung von Homogenisierungsverfahren in die Lösungsprozedur des Optimierungsproblems erhöht allerdings die Komplexität des Verfahrens, wobei dies mehr den theoretischen Hintergrund als den Optimierungsalgorithmus betrifft. Daher

wurden zum einen Ansätze entwickelt, die das lokale Optimierungsproblem (3.31) auf einer rein makroskopischen Ebene exakt lösen. Zum anderen haben sich approximative Ingenieurverfahren bewährt, in denen die Funktion $C(\rho)$ so gewählt wird, daß der optimierte Entwurfsraum möglichst eindeutig in leere und mit Material belegte Bereiche unterteilt ist.

Ringertz [213] und Bendsøe et al. [33] führen direkt die Komponenten des makroskopischen Werkstoffensors als Optimierungsvariablen ein. Die lokale Energiedichte wird durch eine freie Wahl der Komponenten des Werkstoffensors unter der Nebenbedingung minimiert, daß der Werkstofftensor positiv definit ist. Die Menge des benötigten Materials wird in Form von Invarianten des Werkstoffensors, wie dessen Spur oder dessen Frobenius Norm, gemessen. Die optimierten Werkstoffensoren besitzen dieselben Eigenschaften wie die homogenisierten, optimalen Mikrostrukturen. Dieser Ansatz kann einfach auf mehrere Lastfälle oder andere Topologieoptimierungsaufgaben angewandt werden. Die Abhängigkeiten des makroskopischen Werkstoffverhaltens von der zugrunde liegenden Mikrostruktur müssen nicht berücksichtigt werden. Die Ergebnisse dieser Vorgehensweise können jedoch nur als Referenzlösungen für minimale Dehnungsenergien dienen. Wie die numerischen Resultate der mit diesem Ansatz untersuchten Optimierungsprobleme zeigen, ist es nur schwer möglich, aus der Verteilung der Komponenten des Materialensors oder der Verteilung der Invarianten auf die optimale Topologie des Tragwerks zu schließen.

Einen vergleichsweise einfachen und leicht verständlichen Zugang zur Topologieoptimierung stellen die rein makroskopischen Werkstoffmodelle der Ingenieurverfahren dar. Das Dichte–Steifigkeitsverhältnis wird bei diesen Modellen so gewählt, daß relative Dichten ρ/ρ_0 zwischen 0 und 1 in der optimierten Materialverteilung nicht auftreten. Es werden hauptsächlich isotrope Werkstoffmodelle eingesetzt. Das bekannteste isotrope Werkstoffmodell geht auf Bendsøe [27] zurück und wird in zahlreichen Arbeiten aufgegriffen (u.a. Mlejnek [179], Kumar, Gossard [146]). Bei diesem Ansatz wird eine nichtlineare Beziehung zwischen der variablen Dichte und dem Elastizitätsmodul des Materials definiert⁶.

$$E = E_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta ; \quad \rho = \{ \rho \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \rho \leq \rho_0 \} ; \quad \beta = \{ \beta \in \mathbb{R} \mid \beta \geq 1 \} \quad (3.41)$$

Der Exponent β bestimmt die Nichtlinearität der Beziehung. Je größer der Exponent gewählt wird, desto geringer ist der Elastizitätsmodul bei gleicher relativer Dichte (Bild 3.16). Zhou, Rozvany [287] und Rozvany et al. [219] interpretieren diesen Ansatz als Penalty–Verfahren, bei dem Dichten $0 < \rho/\rho_0 < 1$ bestraft werden. Derartige Penalty–Verfahren werden zur

6. Metallschäume weisen einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Materialdichte und der Steifigkeit auf, der ebenfalls über eine exponentielle Beziehung beschrieben werden kann (Baumeister et al. [20], Weber [270]). Dasselbe trifft auf bestimmte Arten von menschlichen und tierischen Knochen zu. Verschiedene makroskopische Modelle für Knochenmaterial sind bei Reiter [211] zusammengestellt (→ Anhang A3).

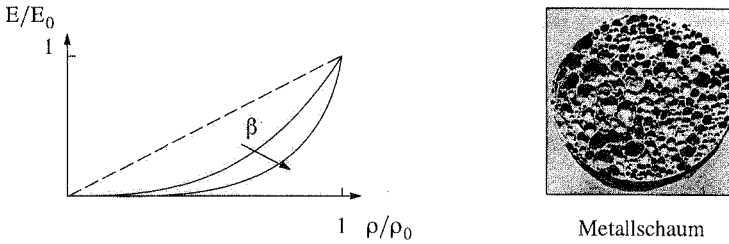


Bild 3.16: Makroskopisches, isotropes Werkstoffmodell

Lösung von ganzzahligen Optimierungsproblemen eingesetzt. Der Wertebereich der ganzzahligen Optimierungsvariablen wird kontinuierlich ergänzt und die unzulässigen Werte im Optimierungsprozeß bestraft. Dies kann entweder explizit über einen additiven Strafterm oder, wie im vorliegenden Fall, implizit durch eine alternative Formulierung des Optimierungsproblems erfolgen. Sigmund [233] und Swan et al. [245] modifizieren diesen Ansatz im Sinne einer Fortsetzungsmethode, in dem sie den Exponenten im Verlauf des Optimierungsprozesses sukzessive erhöhen. Auf diese Weise wird die Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der Diskretisierung des Entwurfsraums etwas reduziert. Weitere, rein makroskopische, isotrope Ansätze mit grundsätzlich vergleichbaren Dichte–Steifigkeitsbeziehungen werden von Kawabe [132], Swan et al. [244], [245] sowie Youn [283] unter Berücksichtigung der Grenzen nach Reuss und Voigt vorgestellt.

Das makroskopische, isotrope Werkstoffmodell (3.41) kann direkt auf unterschiedliche mechanische Modelle angewandt werden. In der vorliegenden Arbeit werden mit diesem Ansatz Scheiben–, Platten– und Schalentragwerke untersucht (→ Kapitel 4). Dieser Ansatz enthält nur eine Optimierungsvariable und läßt sich leicht in bestehende Finite Elemente Programme implementieren. Das lokale Optimierungsproblem (3.31) wird mit diesem Ansatz jedoch nur näherungsweise gelöst und folglich ist das Topologieoptimierungsproblem (3.1) nicht vollständig relaxiert. Dies folgt zum einen direkt aus den vorherigen Betrachtungen zu den Mikrostrukturen. Zum anderen können die mathematischen Eigenschaften des Ansatzes (3.41) aus dem äquivalenten Steifigkeitsproblem von Scheiben mit variabler Dicke abgeleitet werden.

$$\min_h \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} h^\beta(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s \quad ; \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}_u(\Omega_s) \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_s) \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_0 h(\mathbf{x}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad h = \{ h \in L_\infty(\Omega_s) \mid 0 < h_L \leq h \leq h_U < \infty \}$$

Diese Optimierungsaufgabe stellt für $\beta = 1$ eine Dickenoptimierung von Scheibentragwerken dar. Die Existenz einer Lösung für dieses Problem wird von Cea, Malanowski [52] bewiesen. Im Sinne eines Topologieoptimierungsproblems wird der Exponent $\beta > 1$ gewählt, um Dicken

zwischen h_L und h_U implizit zu bestrafen und somit im Optimum zu vermeiden. Die Penalty-Formulierung mit $\beta > 1$ führt jedoch auf ein nichtkonvexes Funktional, für das die Existenz einer Lösung nicht garantiert werden kann (\rightarrow Abschnitt 3.2). Die Ergebnisse der Penalty-Formulierung sind numerisch instabil und hängen in einem erheblichen Maße von der Diskretisierung der Dickenverteilung ab. Olhoff et al. [187] sowie Armand, Lodier [8] stellen diese Effekte ebenfalls bei der Maximierung der Eigenfrequenzen von Kirchhoff-Platten mit variabler Dicke bei vorgegebener Masse fest. Die Analogie zum Scheibenproblem (3.42) mit $\beta > 1$ besteht im Einfluß der Dicke auf die Steifigkeit \mathbf{K} der Struktur.

Scheibe (Penalty-Formulierung): $\mathbf{K} \sim h^\beta \triangleq$ Kirchhoff-Platte: $\mathbf{K} \sim h^3$

Cheng und Olhoff [56] regularisieren das nichtkonvexe Variationsproblem durch die Einführung einer variablen Rippendichte. Die Verallgemeinerung dieses Ansatzes führt direkt auf die zuvor beschriebenen Mikro-Werkstoffmodelle und die Homogenisierungsmethode. Alternativ hierzu regularisiert Niordson [184] das Plattenproblem, indem er den Funktionenraum der Optimierungsvariablen auf einen Unterraum $h \in V_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ reduziert.

$$\int_{\Omega_s} \nabla_{\mathbf{x}} h^2 \, d\Omega_s - \bar{R} \leq 0 \quad ; \quad \bar{R} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.43)$$

Es muß lediglich die Seminorm der Dickenverteilung zusätzlich auf einen Grenzwert \bar{R} beschränkt werden, da die Quadratintegrierbarkeit der Dicke über die Gleichheitsnebenbedingung gewährleistet wird. Bendsøe [34] beweist die Existenz einer Lösung des entsprechend regularisierten, modifizierten Scheibenproblems für Steifigkeits-, Spannungsausgleichs-, Eigenfrequenz- und ebene Grenzlastprobleme. Es ist zwar im allgemeinen nicht möglich, das Optimum der ursprünglichen Topologieoptimierungsaufgabe (3.1) zu bestimmen, wenn der Raum der Optimierungsvariablen durch die zusätzliche Nebenbedingung (3.43) beschränkt wird, dennoch haben sich in den letzten Jahren – aus Sicht des Ingenieurs – einfache Regularisierungsverfahren bewährt, denen eine Beschränkung des Raums der Optimierungsvariablen nach (3.43) zugrunde liegen. Hierzu zählen die Umfangsmethode nach Haber et al. [106], [107] sowie die Filtermethode nach Sigmund [233], auf die in Abschnitt 4.1.2 näher eingegangen wird.

Eine erhebliche Verbesserung des numerischen Verhaltens des makroskopischen, isotropen Ansatzes stellt das makroskopische, orthotrope Modell dar, das im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde (Maute, Ramm [165]). Für den ebenen Spannungszustand lautet der Zusammenhang zwischen der Dichte ρ und dem Werkstofftensor \mathbf{C}^\square in einem werkstoffeigenen Bezugssystem:

$$\mathbf{C}^\square = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu \sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$E_i = E_0 \chi_i^\beta \quad ; \quad \rho = (\chi_1 + \chi_2 - \chi_1 \chi_2) \rho_0$$

$$G^{(1)} = \frac{(1 - \nu)}{2} \sqrt{E_1 E_2} \quad \text{oder} \quad G^{(2)} = \frac{1}{4} (E_1 + E_2 - 2\nu \sqrt{E_1 E_2})$$

Die Entwurfsgrößen des Modells sind die richtungsbezogenen Indikatorfunktionen χ_1 , χ_2 sowie die Orientierung des Werkstoffs Θ im globalen Bezugssystem. Die Indikatorfunktionen χ_1 , χ_2 können als Faserdichten eines orthogonalen, schubsteifen Gewebes interpretiert werden. Die Materialsteifigkeiten in Richtung der Koordinatenachsen im werkstoffeigenen Bezugssystem berechnen sich analog zur isotropen Beziehung (3.41). Die Gesamtdichte ρ des Gewebes wird als Funktion der Faserdichten analog zum orthotropen Werkstoffmodell (3.40) definiert. Die Funktionen der Komponenten C_{1111}^{\square} , C_{1122}^{\square} und C_{1212}^{\square} sind in Bild 3.17 dargestellt. Der Schubmodul kann auf unterschiedliche Weise definiert werden. $G^{(2)}$ ist gegen Drehung des Bezugssystems invariant. Der poröse Werkstoff besitzt in diesem Fall eine etwas höhere Schubsteifigkeit. Dies führt im allgemeinen zu größeren Anteilen von porösem Material im optimierten Entwurfsraum. Daher wird in den weiteren Ausführungen nur die Variante $G^{(1)}$ verwendet.

Das makroskopische, orthotrope Werkstoffmodell kann, wie der isotrope Ansatz, direkt auf verschiedene mechanische Modelle angewandt werden. In dieser Arbeit wurde das Verhalten dieses Modells beispielhaft an Scheibenproblemen für den ebenen Spannungszustand untersucht (\rightarrow Kapitel 4). Es stellt sich heraus, daß dieser Ansatz eine einfache Alternative zum

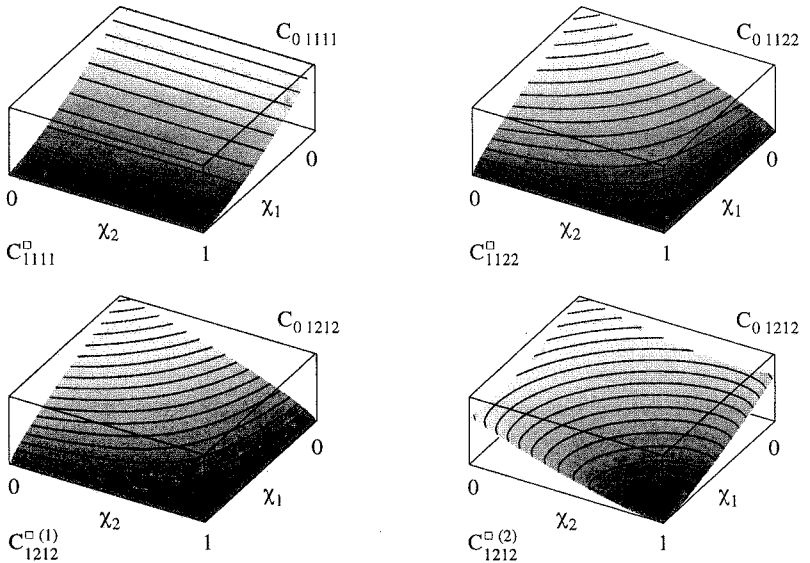


Bild 3.17: Komponenten des makroskopischen, orthotropen Werkstoffmodells

	Relaxation	Anisotrop	Variablen
Mikro-Werkstoffmodelle			
Laminate rank- n_c	vollständig	anisotrop	$2n_c$
Laminate rank- $2^{1)}$	vollständig ³⁾	orthotrop	3
Einheitszelle mit Rechteck-Loch ¹⁾	unvollständig	orthotrop	3
Makro-Werkstoffmodelle			
Freie Wahl von C_{ijkl}	vollständig	anisotrop	6
Ansatz nach Bendsøe ^{1,2)}	unvollständig	isotrop	1
Ansatz nach Maute/Ramm ¹⁾	unvollständig	orthotrop	3

1,2) Diese Ansätze werden in der vorliegenden Arbeit auf Scheiben¹⁾-, Platten²⁾- und Schalentragwerke²⁾ angewandt.

3) Vollständige Relaxation nur für einen Lastfall.

Tabelle 3.1: Ebene Werkstoffmodelle in der Topologieoptimierung

Mikromodell der Einheitszelle mit Rechteck-Loch bei vergleichbaren numerischen Eigenschaften ist. Dies wird durch einen Vergleich der funktionalen Zusammenhänge der Komponenten des Werkstoffensors in Bild 3.15 und Bild 3.17 deutlich.

In Tabelle 3.1 sind die für die materielle Topologieoptimierung bedeutendsten Werkstoffmodelle zusammengestellt. Im wesentlichen sind die mathematisch exakten Ansätze, wie die mehrfach geschichteten Laminate, von den approximativen Ansätzen, wie dem makroskopischen, orthotropen Modell, zu unterscheiden. Die theoretischen Grundlagen der materiellen Topologieoptimierung wurden in diesem Kapitel erläutert. Im folgenden Kapitel wird das numerische Verhalten der Werkstoffmodelle an konkreten Optimierungsproblemen für maximale Steifigkeit aufgezeigt und die Methode der materiellen Topologieoptimierung auf andere Aufgabenstellungen ausgeweitet.

Anmerkung:

Die Vielfalt der in der Topologieoptimierung eingesetzten Werkstoffmodelle läßt den Eindruck aufkommen, daß das Werkstoffmodell frei gewählt werden kann. Dieser Eindruck wird durch zahlreiche Veröffentlichungen unterstützt, die sich lediglich hinsichtlich des Werkstoffmodells unterscheiden. Sämtliche Werkstoffmodelle, die dort vorgestellt werden, sind jedoch suboptimal. Folglich sind die Topologieoptimierungsergebnisse auf der Basis dieser Werkstoffmodelle in einem erheblichen Maße von der Diskretisierung des Entwurfsraums abhängig. Die theoretisch komplexe Rolle, die das Werkstoffmodell bei der Lösung der Topologieoptimierungsaufgabe einnimmt, bleibt unerwähnt. Teilweise werden die Werkstoffmodelle mit großem theoretischen Aufwand sogar aus den unteren Grenzen für die Materialsteifigkeit nach Reuss oder Hashin, Shtrikman hergeleitet (u.a. Youn, Park [283]). Dies ist jedoch hinsichtlich der Lösung der lokalen Optimierungsaufgabe (3.31) vollkommen unsinnig.

4 Ausgewählte Probleme der materiellen Topologieoptimierung

Die Grundlagen der materiellen Topologieoptimierung wurden am Beispiel der Minimierung der Dehnungsenergie bzw. der Maximierung der Steifigkeit bei konstanter Masse im vorherigen Kapitel erläutert. In diesem Kapitel wird die Methode der materiellen Topologieoptimierung auf verschiedene Entwurfskriterien, wie Gewicht, Steifigkeit, Spannungen und Frequenzen, angewandt. Die Maximierung der Grenzlast wird bei stabilitätsgefährdeten Tragwerken erörtert. Die Maximierung der Duktilität wird bei elastoplastischem Materialverhalten untersucht. Zusätzlich werden einige Anwendungsmöglichkeiten der materiellen Topologieoptimierung im Stahlbetonbau vorgestellt. Die Sensitivitätsanalyse sowie die Optimierungsprozedur werden aufbauend auf Kapitel 2 für die verschiedenen Optimierungsprobleme jeweils kurz hergeleitet. Charakteristische Effekte, die bei der Lösung der Optimierungsprobleme auftreten, werden aufgezeigt und deren Ursachen diskutiert.

Die in diesem Kapitel an Scheiben-, Platten- und Schalentragsystemen untersuchten Aufgabenstellungen erfassen nahezu sämtliche, in der Literatur behandelten Topologieoptimierungsprobleme. Rodrigues und Fernandes [214] berücksichtigen darüber hinaus thermische Lasten bei der Optimierung von Scheibentragwerken. Ou und Kikuchi [194] optimieren das Verhalten von aktiv kontrollierten Strukturen bei dynamischer Belastung. Die Einwirkung des Reglers und der Stellkräfte auf die Struktur werden dabei durch direkte Zeitintegrationsverfahren erfaßt. Sigmund [233], [234] bestimmt den Aufbau von Mikrozellen, um bestimmte makroskopische Werkstoffeigenschaften zu erzielen. Der Zusammenhang zwischen Mikrostruktur und makroskopischen Werkstoffverhalten wird durch die in Abschnitt 3.4 vorgestellte Homogenisierungsmethode ermittelt und bei der Optimierung berücksichtigt. Die Methode der materiellen Topologieoptimierung kann direkt auf 3-dimensionale Kontinua übertragen werden. Daher wird dieses Thema in Veröffentlichungen zumeist nicht gesondert behandelt. Beispiele zur materiellen Topologieoptimierung von 3-dimensionalen Strukturen finden sich unter anderem bei Kikuchi [134] und Yang, Chahande [280].

4.1 Strukturen maximaler Steifigkeit

Die Dehnungsenergie bzw. die Steifigkeit eines Tragwerks charakterisiert sowohl den inneren Spannungs- und Dehnungszustand wie auch die äußeren Verformungen. Sie ist für zahlreiche technische Probleme von zentraler Bedeutung. Im Leichtbau bestimmen die Steifigkeit und das Gewicht die Geometrie des Tragwerks. Eine minimale Dehnungsenergie bei möglichst geringem Materialeinsatz scheint auch in der Natur ein grundlegendes Konstruktionsprinzip für den Aufbau und die Form von Tragwerken zu sein (Teichmann, Wilke [251]). In diesem

Abschnitt werden Tragwerke mit maximaler Steifigkeit auf der Grundlage des folgenden Optimierungsproblems untersucht:

$$\min_{\hat{\mathbf{s}}} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s \quad (4.1)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{s}}_L \leq \hat{\mathbf{s}} \leq \hat{\mathbf{s}}_U$$

Die Menge des im Entwurfsraum verfügbaren Materials \bar{m} ist konstant. Die Materialverteilung wird durch elementweise konstante Ansätze diskretisiert. Die Werkstoffparameter $\hat{\mathbf{s}}$ der Finiten Elemente stellen die Optimierungsvariablen dar. Sie beschreiben den Werkstofftensor \mathbf{C} sowie die Dichte ρ in Abhängigkeit des gewählten Werkstoffmodells (\rightarrow Abschnitt 3.5). Die obere Schranke der Werkstoffparameter $\hat{\mathbf{s}}_U$ folgt aus der Bedingung $\rho \leq \rho_0$. Die untere Schranke wird mit $\hat{\mathbf{s}}_U \gg \hat{\mathbf{s}}_L > \mathbf{0}$ so gewählt, daß keine numerischen Probleme beim Lösen des Optimierungsproblems infolge singularer Steifigkeitsmatrizen auftreten. Es hat sich ein minimales Dichteverhältnis ρ_L/ρ_0 zwischen 10^{-3} und 10^{-6} bewährt.

Die Maximierung der Steifigkeit bei gegebener Masse nach der Aufgabenstellung (4.1) ist der Minimierung des Gewichts bei vorgegebener Steifigkeit äquivalent. Dies kann anhand der Kuhn–Tucker–Bedingungen der beiden Optimierungsprobleme einfach nachgewiesen werden (u. a. Ramm et al. [206]). Durch die Vorgabe der Steifigkeit, d.h. der maximalen Dehnungsenergie, kann beispielsweise die maximale Verschiebung unter einer einzigen, am Tragwerk angreifenden Einzellast oder näherungsweise die maximalen Vergleichsspannungen im Tragwerk beschränkt werden (\rightarrow Abschnitt 4.1.5). Im Sinne eines konzeptionellen Entwurfs ist es für den Anwender jedoch oftmals anschaulicher, das Ergebnis des Optimierungsprozesses über die Vorgabe der Masse im Entwurfsraum zu kontrollieren. In diesem Abschnitt werden nur Optimierungsprobleme für einen Lastfall betrachtet. Ein Beispiel zur Steifigkeitsoptimierung bei mehreren Lastfällen wird in Abschnitt 6.2.3 vorgestellt.

Die Sensitivitäten der Dehnungsenergie werden nach der adjungierten, variationellen Methode bestimmt. Die Dehnungsenergie wird hierzu in den Spannungen ausgedrückt.

$$f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (4.2)$$

In dieser Formulierung kann der Gradient der Dehnungsenergie bezüglich der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}_i$ nach den in Abschnitt 2.3.3 hergeleiteten Gleichungen (2.135)–(2.139) berechnet werden. Die Ableitungen der Dehnungsenergie nach den Materialparametern sind selbstadjungiert. Die adjungierten Dehnungen können mit $\boldsymbol{\varepsilon}_a = 2\boldsymbol{\varepsilon}$ direkt aus der Strukturantwort berechnet werden. Die Ableitung der Zielfunktion vereinfacht sich unter Berücksichtigung der Symmetrie von \mathbf{C} bzw. \mathbf{C}^{-1} für das vorliegende Problem.

$$\nabla_s f = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}^T \nabla_s (\mathbf{C}^{-1}) \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_s = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_s \quad (4.3)$$

Die Ableitungen des Werkstoffensors in (4.3) und der Dichte in (4.1) werden anhand der explizit vorliegenden Beziehungen für das jeweilige Werkstoffmodell analytisch ermittelt (→ Abschnitt 3.5, Anhang A6).

Der Entwurfsraum wird mit einem gleichmäßigen Finite Elemente Netz fein diskretisiert, um möglichst eindeutig und detailliert die Geometrie des Tragwerks aus der optimierten Materialverteilung ablesen zu können. Die Anzahl der Elemente liegt in der Topologieoptimierung üblicherweise zwischen 500 – 10000 Elementen. Dies wiederum bedeutet für die in Abschnitt 3.5 vorgestellten, isotropen Materialien ebenso viele, für die orthotropen Materialien dreimal so viele Optimierungsvariablen wie Elemente. Derart große Optimierungsprobleme können nur mit OC-Verfahren effizient gelöst werden, die dem jeweiligen Optimierungsproblem speziell angepaßt sind. Der in Abschnitt 2.1 beschriebene Algorithmus hat sich zur Lösung von Steifigkeitsproblemen nach (4.1) bewährt. Die Werkstoffparameter \hat{s} werden mit der Rekursionsformel (2.14) mit $q = \{0.5, \dots, 0.8\}$ berechnet, wobei der Lagrange-Multiplikator der Gleichgewichtsbedingung nach (2.22) bestimmt wird. Die Orientierung bei orthotropen Werkstoffen ist von der Dichte unabhängig. Die optimale Ausrichtung wird daher mit einem gesonderten Algorithmus bestimmt, der im Anhang A6 beschrieben ist. Die Änderung der Zielfunktion im Optimierungsprozeß (2.11) dient als Konvergenzkriterium mit $\bar{\varepsilon} = \{10^{-6}, \dots, 10^{-4}\}$.

Dieses Verfahren entspricht im wesentlichen dem von Bendsoe, Kikuchi [27] vorgestellten Algorithmus, der von zahlreichen Autoren zur Lösung von Steifigkeitsproblemen in der Topologieoptimierung eingesetzt wird. Zusätzlich wird ein Shift-Faktor in die Rekursionsformel (2.14) eingeführt. Dieser modifizierte Algorithmus läßt sich auf eine duale Methode mit konvexer, reziproker Approximation von Zielfunktion und Nebenbedingung zurückführen (→ Abschnitt 2.1). In diesem Sinne entwickeln Duysinx et al. [81] ein speziell auf Optimierungsprobleme mit vielen Optimierungsvariablen zugeschnittenes MMA-Verfahren. Die zweiten Ableitungen werden mit einem BFGS-Update approximiert, wobei nur die Hauptdiagonalkomponenten der Hesse-Matrix berücksichtigt werden. Die veröffentlichten numerischen Ergebnisse für die Steifigkeitsmaximierung von Scheibentragwerken zeigen jedoch im Vergleich zum einfachen OC-Algorithmus kein merklich verbessertes Konvergenzverhalten. Weiterhin schlagen Tenek, Hagiwara [252], Yang, Chuang [279] sowie Swan, Arora [245] SLP-Verfahren in Verbindung mit einem "Line-Search" vor. Eigene Untersuchungen können die guten Ergebnisse des SLP-Verfahrens in der Literatur nicht bestätigen. Die Parameter des SLP-Algorithmus müssen für jedes Optimierungsproblem erneut justiert werden, um ein zufriedenstellendes Konvergenzverhalten zu erzielen.

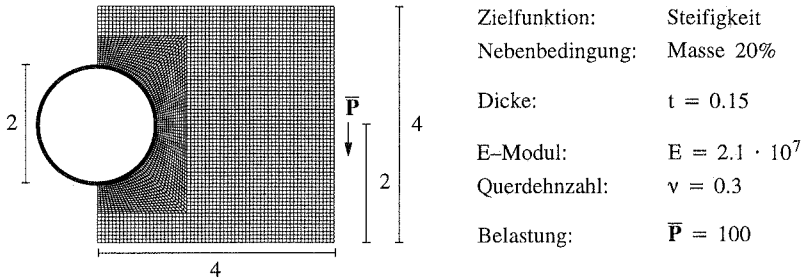


Bild 4.1: Topologieoptimierungsproblem nach Michell [174]

Anhand der folgenden Beispiele zur Steifigkeitsoptimierung von Scheibenträgwerken werden einige grundlegende Eigenschaften der materiellen Topologieoptimierung aufgezeigt. Die Wahl des Werkstoffmodells nimmt hierbei eine zentrale Rolle ein. Je besser ein poröser Werkstoff das diskontinuierliche Optimierungsproblem relaxiert, desto eindeutiger und stabiler ist die numerische Lösung. Gleichzeitig nimmt jedoch der Anteil des porösen Werkstoffs im Optimum zu und erschwert die Umsetzung der optimierten Materialverteilung in ein Tragwerk, das aus einem homogenen, isotropen Material besteht. Daher werden suboptimale Werkstoffmodelle für die Lösung von anwendungsbezogenen Optimierungsproblemen bevorzugt, die zu einer eindeutigen Aufteilung des Entwurfsraums in leere und mit homogenem Material der Dichte ρ_0 belegte Bereiche führen. Die Ergebnisse dieser Werkstoffmodelle sind jedoch von der Diskretisierung des Entwurfsraums abhängig. Daher werden zusätzliche Stabilisierungsverfahren benötigt, um Resultate zu erhalten, die nicht oder nur geringfügig von der Diskretisierung abhängen. Neben diesen numerischen Effekten, die sich auf eine unvollständige Relaxation des Optimierungsproblems zurückführen lassen, können weitere Instabilitäten bei der Lösung des relaxierten Problems auftreten. Diese sogenannten "Checkerboard"-Moden stammen aus einer unausgewogenen Wahl der Ansatzfunktionen für die Dichteverteilung und für die Verschiebungen. Die Möglichkeiten der Topologieoptimierung werden am Beispiel der Steifigkeitsmaximierung von Platten- und Schalenträgwerken veranschaulicht.

4.1.1 Einfluß des Werkstoffmodells

Die zentrale Bedeutung der Werkstoffmodelle in der materiellen Topologieoptimierung geht aus den theoretischen Betrachtungen in Kapitel 3.1 hervor. Der Einfluß des Werkstoffmodells auf das Optimierungsergebnis wird an einem klassischen Problem der Topologieoptimierung nach Michell [174] veranschaulicht (Bild 4.1). Das Optimierungsproblem wird durch die Aufgabenstellung (4.1) beschrieben. Die verfügbare Masse \bar{m} ist auf 20% des im Entwurfsraum maximal möglichen Materials beschränkt. Der Entwurfsraum bildet ein Quadrat, das von einer kreisförmigen, festen Einspannung durchbrochen wird. Die Einzellast \bar{P} greift auf halber Höhe der rechten Kante des Entwurfsraums an. Der Entwurfsraum wird mit 4480, 8-knotigen, isopa-

parametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen für den ebenen Spannungszustand diskretisiert. Zu Beginn des Optimierungsprozesses ist der Entwurfsraum gleichmäßig mit porösem Material der Dichte $\rho/\rho_0 = 0.2$ gefüllt.

Das Optimierungsproblem wird mit dem zuvor beschriebenen OC-Verfahren für fünf verschiedene Werkstoffmodelle gelöst. Die Werkstoffmodelle unterscheiden sich im wesentlichen durch ihre Materialsteifigkeit in Abhängigkeit von der relativen Dichte ρ/ρ_0 (Bild 4.2). Das optimale rank-2 Laminat W.1 stellt die obere Grenze für einen porösen Werkstoff, der aus einem isotropen Material aufgebaut ist, dar. Im Vergleich hierzu ist der periodisch aus Mikrozellen mit rechteckigen Löchern von variabler Größe aufgebaute Werkstoff W.2/W.4 nach Bendsøe, Kikuchi [26] etwas weicher. In der Literatur werden sehr unterschiedliche Optimierungsergebnisse für dieses Werkstoffmodell veröffentlicht. Diese Unterschiede können auf voneinander abweichende Homogenisierungsergebnisse zurückgeführt werden (\rightarrow Anhang A8). Im vorliegenden Beispiel wird dieses Werkstoffmodell mit den Homogenisierungsdaten nach Suzuki et al. [241] W.4 und den eigenen Homogenisierungsergebnissen W.2 eingesetzt. Den Mikro-Werkstoffmodellen werden die in Abschnitt 3.5 eingeführten isotropen und orthotropen makroskopischen Werkstoffe W.3 und W.5 gegenübergestellt.

In Bild 4.3 sind die analytische Lösung nach Hemp [119] sowie die optimierten Materialverteilungen für die verschiedenen Werkstoffmodelle dargestellt. Dabei ist zu beachten, daß das abgebildete Tragwerk nach Hemp eine Approximation der beliebig feingliedrigen, quasi-kontinuierlichen Michell-Struktur darstellt. Das orthotrope rank-2 Laminat relaxiert das vorliegende Optimierungsproblem vollständig und ergibt daher die Materialverteilung mit der kleinsten Dehnungsenergie. Dieser Wert stimmt bis auf einen kleinen Diskretisierungsfehler aus der Finite Elemente Analyse mit der Michellschen Lösung (Hemp [119]) überein.

$$f_{\text{Michell}} = 2 \frac{P^2 a^2 \rho_0}{E_0 \bar{m}} \ln\left(\frac{2a}{d}\right)^2 \quad (4.4)$$

Es können zwei grundlegende Tendenzen festgestellt werden (Bild 4.4). Je steifer poröses Material im jeweiligen Werkstoffmodell ist, desto größer ist einerseits die Steifigkeit des

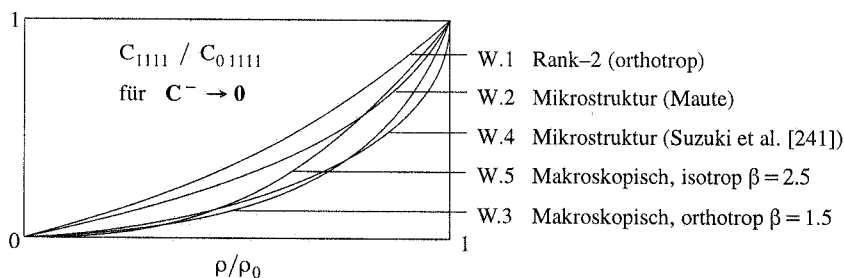


Bild 4.2: Vergleich der Materialsteifigkeiten verschiedener Werkstoffmodelle

optimierten Tragwerks, desto höher ist andererseits der Anteil an porösem Material im Optimum. Von einem theoretischen Standpunkt aus wird das Optimierungsproblem (4.1) durch das rank-2 Laminat zufriedenstellend gelöst. Das Ergebnis ist eindeutig und numerisch stabil. Aus Sicht des Ingenieurs sind die Ergebnisse der suboptimalen Werkstoffmodelle vorzuziehen, da bei diesen der Entwurfsraum im Optimum deutlich in leere und mit homogenem Material belegte Bereiche unterteilt ist. Diese Lösungen geben darüber Aufschluß, wie ein aus einem homogenen Material bestehendes Tragwerk aufgebaut ist.

Die Steifigkeit des porösen Materials kann über den Exponenten β der makroskopischen Werkstoffmodelle (3.41) und (3.44) explizit kontrolliert werden. Dieser Effekt wird anhand des orthotropen, makroskopischen Werkstoffmodells (3.44) in einem weiteren Optimierungsbeispiel zur Aufgabenstellung (4.1) verdeutlicht (Bild 4.5). Der rechteckige Entwurfsraum ist links eingespannt und rechts oben bzw. unten jeweils mit einer Einzellast belastet. Die Material-

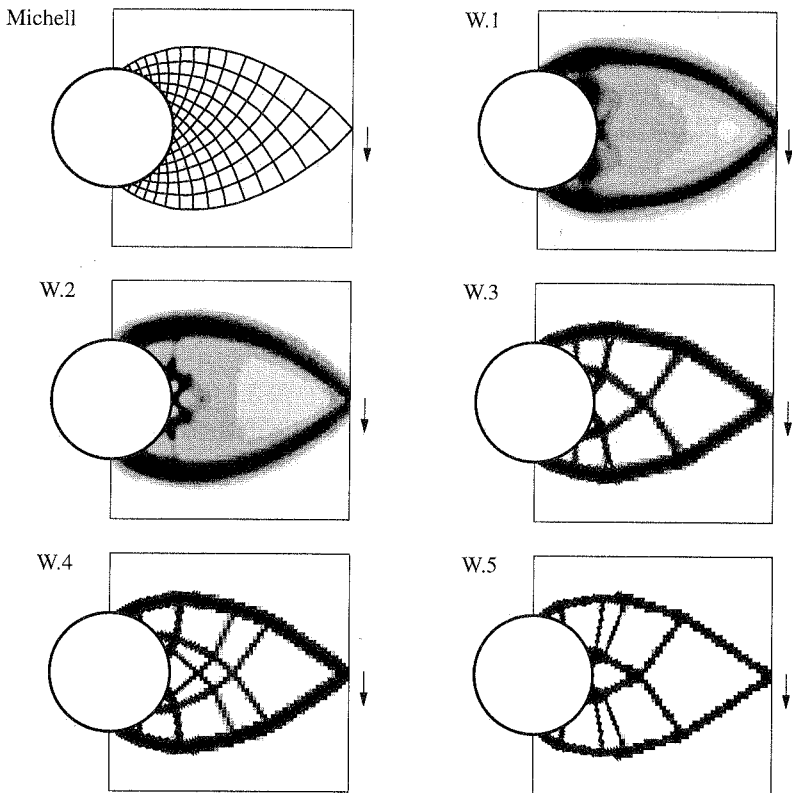


Bild 4.3: Vergleich von Werkstoffmodellen – Optimale Materialverteilung

Werkstoffmodell	Michell	W.1	W.2	W.3	W.4	W.5
Dehnungsenergie	0.067	0.066	0.069	0.080	0.093	0.120
Poröser Anteil [%]	–	79.33	76.70	24.71	15.17	3.31

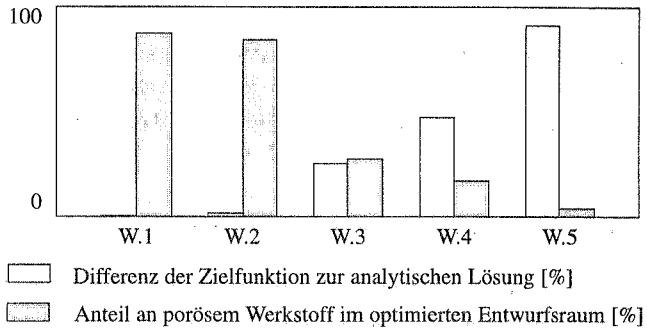


Bild 4.4: Charakteristische Eigenschaften der Werkstoffmodelle

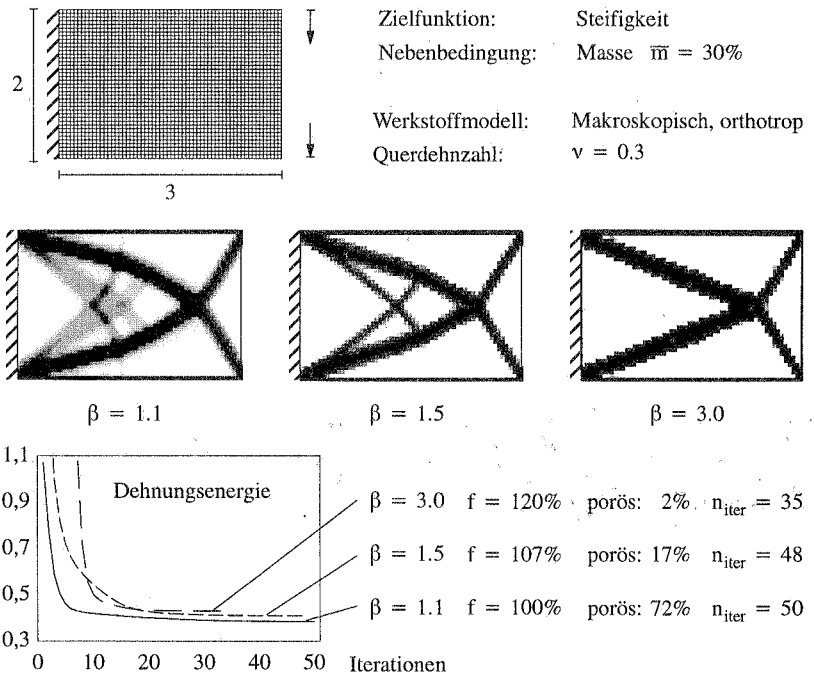


Bild 4.5: Einfluß der Steifigkeit des porösen Materials

verteilung wird mit 2400, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen für den ebenen Spannungszustand diskretisiert. Je nach β -Faktor ergeben sich unterschiedlich strukturierte Materialverteilungen. Mit steigendem β -Faktor gehen die Steifigkeit und der Anteil an porösem Material im Optimum zurück. Die Eindeutigkeit der Ergebnisse nimmt zu. Die Konvergenzrate ist ebenfalls vom β -Faktor abhängig. So konvergiert der Optimierungsprozeß mit steigendem β -Faktor bei größeren Zielfunktionswerten schneller. Durch die geringere Steifigkeit des porösen Werkstoffs ist die Materialverteilung bei größeren β -Werten bestrebt, möglichst schnell relative Dichten von entweder $\rho/\rho_0 \rightarrow 0$ oder $\rho/\rho_0 = 1$ einzunehmen.

4.1.2 Stabilisierungsmethoden bei suboptimalen Werkstoffmodellen

Suboptimale Werkstoffmodelle relaxieren das diskontinuierliche Topologieoptimierungsproblem nicht vollständig. Daher sind die numerischen Lösungen auf der Basis dieser Modelle von der Diskretisierung des Entwurfsraums abhängig. So weisen insbesondere die Ergebnisse von isotropen Modellen eine erhebliche Empfindlichkeit gegenüber der Orientierung des FE-Netzes auf. In Bild 4.6 sind die Ergebnisse des Optimierungsproblems (4.1) für das makroskopische, isotrope sowie das makroskopische, orthotrope Werkstoffmodell bei zwei unterschiedlichen Diskretisierungen A und B dargestellt. Die Finiten Elemente sind im Fall B gegenüber Fall A um 45° gedreht. Die vorgeschriebene Materialmenge \bar{m} ist in beiden Entwurfsräumen gleich. Das isotrope Werkstoffmodell führt je nach Orientierung des FE-Netzes zu topologisch unterschiedlichen Ergebnissen. Dagegen sind die Resultate auf der Basis des orthotropen Modells topologisch äquivalent. Dies kann mathematisch damit erklärt werden, daß das orthotrope Modell das lokale Optimierungsproblem (3.31) in einem größeren Unterraum von $\mathbf{G}_\rho(\Omega_s)$ löst als das isotrope Modell und daher weniger diskretisierungsabhängig

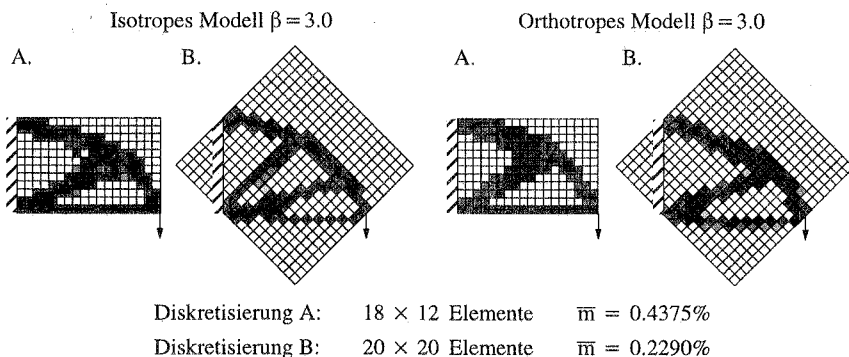


Bild 4.6: Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der Orientierung des FE-Netzes bei suboptimalen Werkstoffmodellen

ist. Anschaulich kann die geringere Empfindlichkeit des orthotropen Modells auf die Möglichkeit zurückgeführt werden, die Drehung des FE-Netztes durch eine entsprechende Orientierung des Materials auszugleichen.

Doch auch die Optimierungsergebnisse von suboptimalen, orthotropen Werkstoffmodellen sind von der Feinheit des FE-Netztes abhängig. Dieser Defekt kann durch zusätzliche Stabilisierungsmaßnahmen behoben werden, indem die Seminorm der Materialverteilung im Sinne der Regularisierung (3.43) beschränkt wird. Die stabilisierte Formulierung des Variationsproblems (3.1) lautet:

$$\min_{\hat{s}} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}, \hat{s}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s \quad ; \quad \hat{s}_L \leq \hat{s} \leq \hat{s}_U \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho(\mathbf{x}, \hat{s}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega_s} (\nabla_x \rho(\mathbf{x}, \hat{s}))^2 \, d\Omega_s - \bar{R} \leq 0 \quad ; \quad \bar{R} \in \mathbb{R}^+$$

Der Lösungsraum von $\chi \in V_\chi(\Omega_s) \subseteq L_\infty(\Omega_s)$ des ursprünglichen Optimierungsproblems (3.1) wird auf den Sobolev-Raum $\tilde{\chi} \in \tilde{V}_\chi(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s)$ beschränkt. Durch eine entsprechende Wahl des Grenzwerts \bar{R} werden mögliche Oszillationen der optimalen Materialverteilung auf ein gewünschtes Maß reduziert. Suboptimale Werkstoffmodelle relaxieren das stabilisierte Variationsproblem in $H^1(\Omega)$ vollständig. Dies sichert die Existenz einer Lösung, jedoch nicht deren Eindeutigkeit.

Auf diesem Ansatz beruhen die Umfangsmethode nach Haber et al. [106], [107] sowie die Filtermethode nach Sigmund [233]. Die Umfangsmethode erhält ihren Namen dadurch, daß die Beschränkung der Seminorm von ρ für eine nahezu reine "0-1" Dichteverteilung ρ/ρ_0 der Länge der Konturen des Tragwerks entspricht (\rightarrow Abschnitt 3.3). Die Beschränkung der Seminorm wird dabei explizit in Form einer Nebenbedingung (4.5) berücksichtigt. Dies führt jedoch, wie numerische Untersuchungen zeigen, zu starken, lokalen Extrema (Haber et al. [107]). Daher wird zur Stabilisierung eine im Vergleich zu Sigmund [233] leicht modifizierte Filtermethode bevorzugt, die sich auf verschiedene Aufgabenstellungen einfach und robust anwenden läßt. Die Stabilisierung erfolgt am diskretisierten Problem. Um die Netzabhängigkeit der Ergebnisse zu beheben, wird ein von der Diskretisierung unabhängiger Glättungsoperator $H_i(\cdot_j)$ eingeführt. Die diskretisierte, stabilisierte Formulierung des Steifigkeitsproblems lautet:

$$\min \sum_{\text{Elemente}} H_i(\Pi_{e_j}^i) \quad ; \quad \Pi_{e_j}^i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{e_j}} \boldsymbol{\varepsilon}_{e_j}^T \mathbf{C}_{e_j}(\hat{s}_{e_j}) \boldsymbol{\varepsilon}_{e_j} \, d\Omega_{e_j} \quad (4.6)$$

$$\sum_{\text{Elemente}} \int_{\Omega_e} \rho_e(\hat{s}_e) \, d\Omega_e - \bar{m} = 0$$

Der Glättungsoperator $H_i(\cdot; j)$ ist wie folgt definiert.

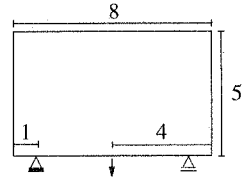
$$H_i = \sum_j \tilde{H}_i(\cdot; j) / \sum_j \tilde{\tilde{H}}_i(\cdot; j) \quad (4.7)$$

$$\tilde{H}_i(\cdot; j) = \begin{cases} (2 - r_{ij} / \bar{r})^{\bar{\kappa}} (\cdot; j) & \forall r_{ij} \leq \bar{r} \\ 0 & \forall r_{ij} > \bar{r} \end{cases}$$

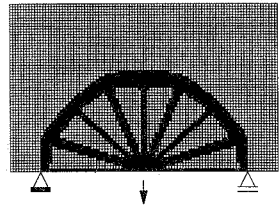
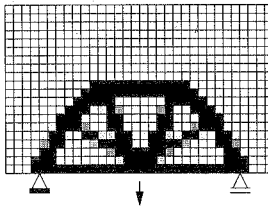
$$\tilde{\tilde{H}}_i(\cdot; j) = \begin{cases} (2 - r_{ij} / \bar{r})^{\bar{\kappa}} |\Omega_j| & \forall r_{ij} \leq \bar{r} \\ 0 & \forall r_{ij} > \bar{r} \end{cases}$$

Die Glättung erfaßt alle Elemente j in einem Radius \bar{r} um das Element i . Der Radius r_{ij} bezeichnet den Abstand der Mittelpunkte der Elemente. Der Exponent $\bar{\kappa}$ wichtet den Einfluß der Elementenergie Π_e^i in Abhängigkeit vom Abstand der Elemente. Dieses Glättungsverfahren ist der Umfangsmethode äquivalent. Je stärker die Glättung ist, desto kleiner ist die Seminorm der Materialverteilung. Die Größe der Schranke \bar{R} für die Seminorm (4.5) wird implizit durch den Glättungsradius \bar{r} und den Exponenten $\bar{\kappa}$ festgelegt. Für $\bar{r} \rightarrow 0$ oder $\bar{\kappa} \rightarrow \infty$ nimmt die Wirkung des Glättungsoperators ab.

- Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 20\%$
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, orthotrop $\beta = 2.5$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.3$
 Filtermethode: $\bar{r} = 0.4$, $\bar{\kappa} = 2.0$



Nichtstabilisiert:



Stabilisiert:

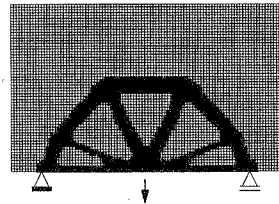
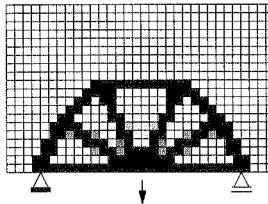


Bild 4.7: Stabilisierung suboptimaler Werkstoffmodelle mit der Filtermethode

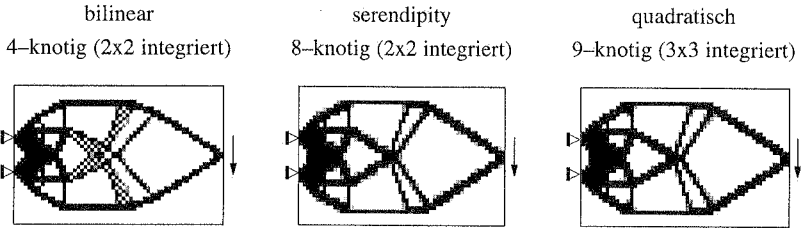
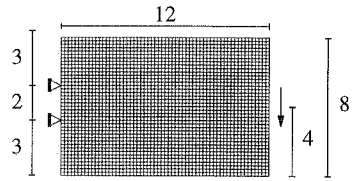
Sigmund [233] zeigt die Vorteile der Filtermethode für das makroskopische, isotrope Werkstoffmodell (3.41) auf. Die Filtermethode eignet sich ebenfalls zur Stabilisierung von orthotropen Werkstoffmodellen. Dies wird anhand des Beispiels in Bild 4.7 verdeutlicht. Die Aufgabenstellung ist Sigmund [233] entnommen. Das nichtstabilisierte und das stabilisierte Optimierungsproblem werden unter Berücksichtigung der Symmetrie für zwei unterschiedlich feine Diskretisierungen mit 2×320 bzw. 2×2880 , 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen gelöst. Je größer die Anzahl der Finiten Elemente im Entwurfsraum ist, desto feingliedriger ist das Optimierungsergebnis der nichtstabilisierten Formulierung. Die optimale Topologie des stabilisierten Problems ist dagegen weitgehend von der Diskretisierung unabhängig. Die Stabilisierung wirkt sich darüber hinaus auf eine verminderte Empfindlichkeit der Optimierungsergebnisse bezüglich anderer Parameter, wie dem β -Faktor bei makroskopischen Werkstoffmodellen oder der Schrittweite im Optimierungsalgorithmus aus.

Die Filtermethode ist über die vorliegende Aufgabenstellung hinaus für die Stabilisierung von unterschiedlichen Topologieoptimierungsproblemen geeignet, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird. Der Verzicht auf die Feinheit der optimierten Tragwerke führt im allgemeinen nur zu einer geringen Erhöhung der Zielfunktion im Optimum. Bei einer schwachen Glättung kann die Zielfunktion im Vergleich zum nichtstabilisierten Ergebnis sogar geringfügig verbessert werden. Die Wahl der Glättungsparameter \bar{r} und $\bar{\kappa}$ ist unproblematisch. Lediglich bei einer zu starken Glättung treten Optimierungsergebnisse mit einem hohen Anteil an porösem Material auf.

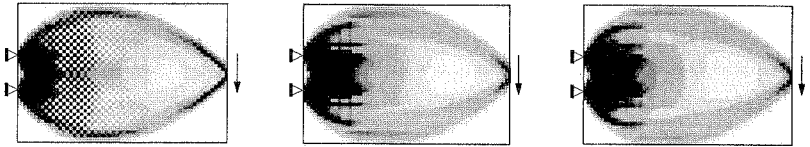
4.1.3 “Checkerboard”-Moden

Die zuvor erläuterten Defekte treten bei suboptimalen Werkstoffmodellen aufgrund einer unvollständigen Relaxation des zugrunde liegenden, diskontinuierlichen Optimierungsproblems auf. Darüber hinaus entstehen sogenannte “Checkerboard”-Moden (Schachbrett-Muster) in der optimierten Materialverteilung, wenn die Ordnungen der Elementansätze für die Verschiebungen \mathbf{u}^h und Dichteverteilung ρ^h nicht zueinander passen. Sowohl optimale wie auch suboptimale Werkstoffmodelle erzeugen “Checkerboard”-Moden. Dies wird durch das Beispiel in Bild 4.8 verdeutlicht. Die optimalen Materialverteilungen werden für den makroskopischen, orthotropen Werkstoff und das rank-2 Laminat bestimmt. Der Entwurfsraum ist mit 2400, isoparametrischen Verschiebungselementen diskretisiert. Die Optimierungsergebnisse für verschiedene Verschiebungsansätze zeigen, daß unabhängig vom Werkstoffmodell für eine bilineare Approximation der Verschiebungen \mathbf{u}^h bei konstanter Dichte ρ^h im Element “Checkerboard”-Moden auftreten. Die Lösungen sind dagegen numerisch stabil, wenn die Verschiebungen \mathbf{u}^h um mindestens zwei Ordnungen höher als die Dichteverteilung ρ^h approximiert werden (Tabelle 4.1).

Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse 25%
 Querdehnzahl: $\nu = 0.3$
 Ansatz für die Dichte: konstant
 Ansatz für die Verschiebungen:



Makroskopisch, orthotropes Werkstoffmodell $\beta = 2.5$



Rank-2 Laminat

Bild 4.8: “Checkerboard”-Moden bei optimalen und suboptimalen Werkstoffmodellen

Bendsøe et al. [30], [34] sowie Sigmund [233] schlagen verschiedene Korrekturverfahren vor, um bei Verwendung von bilinearen Verschiebungselementen mit konstanter Dichte “Checkerboard”-Moden zu vermeiden. Die Korrekturverfahren beruhen im wesentlichen auf einer Glättung der Dichteverteilung, wodurch der Lösungsraum der Dichteverteilung ρ^h reduziert bzw. die “effektive” Ansatzordnung für ρ^h herabgesetzt wird. Das Verfahren nach Bendsøe [34] zeichnet sich gegenüber anderen Algorithmen dadurch aus, daß die Glättung nur dort aktiv wird, wo Schachbrett-Muster entstehen.

Das Auftreten von “Checkerboard”-Moden in der Topologieoptimierung wird von verschiedenen Autoren (Bendsøe [34], Jog, Haber [131]) mit numerischen Instabilitäten bei der Simulation von zähflüssigen, inkompressiblen Stokes-Strömungen in Verbindung gebracht. Die Druckverteilungen in diesen Strömungen bilden ähnliche Schachbrett-Muster aus, wenn die

Verschiebungen	bilinear	serendipity	quadratisch	serendipity	quadratisch
Dichteverteilung	konstant	konstant	konstant	bilinear	bilinear
“Checkerboard”	ja	nein	nein	nein	nein

Tabelle 4.1: Auftreten von “Checkerboard”-Moden in Abhängigkeit der Ansatzordnung [34]

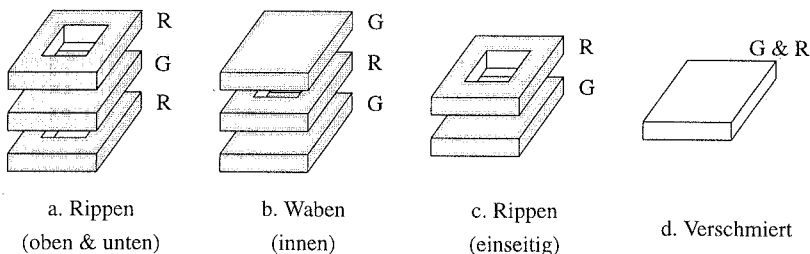
Ansatzordnungen für die Strömungsgeschwindigkeit und für den Druck nicht der Babuska–Brezzi–Bedingung genügen. Die Lösung eines min–max–Variationsproblems, das durch ein gemischtes, konvex–konkaves, quadratisches Funktional beschrieben wird, ist stabil, wenn die Funktionenräume für die Ansatzfunktionen dieser Bedingung genügen (Brezzi, Fortin [47]). Die mit der Dichte $s(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ relaxierte Topologieoptimierungsaufgabe (3.21) bzw. (3.24) kann für elastische Probleme ebenfalls als Sattelpunktproblem formuliert werden, indem das statische Gleichgewicht in schwacher Form durch das Minimum des Gesamtpotentials (2.45) explizit berücksichtigt wird. Wenn zusätzlich die vorgeschriebenen Verschiebungen auf dem Verschiebungsrand gleich Null und die äußeren Kräfte nicht von den Verschiebungen abhängig sind, gilt nach dem Clapeyronschen Satz im Gleichgewicht: $\Pi = -\Pi^{(i)}$. Die Optimierungsaufgabe (4.1) kann folglich als ein min–max–Variationsproblem mit einer Gleichheitsnebenbedingung formuliert werden.

$$\min_{\mathbf{u}} \max_s \Pi(s, \mathbf{u}) \quad ; \quad \int_{\Omega_s} \rho \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad (4.8)$$

Da das Funktional $\Pi(s, \mathbf{u})$ weder konvex–konkav noch quadratisch ist, kann die Babuska–Brezzi–Bedingung nicht unmittelbar auf das Topologieoptimierungsproblem übertragen werden (Bendsøe [34]). Die Möglichkeit, “Checkerboard”–Moden durch eine geeignete Wahl der Ansatzfunktionen zu vermeiden, ist dennoch ein Indiz dafür, daß ein enger Zusammenhang zwischen der numerischen Instabilität in der Topologieoptimierung und einer Verletzung der Babuska–Brezzi–Bedingung besteht. Eine anschaulichere Erklärung für die Entstehung von “Checkerboard”–Moden geben Diaz und Sigmund [77]. Die Autoren zeigen analytisch, daß schachbrettartige “0–1” Materialanordnungen bei bilinearen Verschiebungsansätzen zu einer minimalen Dehnungsenergie führen. Diese künstliche Steifigkeit ist größer als diejenige, die durch optimale Mikrostrukturen erzeugt werden kann. Daher entstehen sowohl bei optimalen wie auch suboptimalen Werkstoffmodellen Schachbrett–Muster.

4.1.4 Erweiterungen auf Platten– und Schalentragwerke

Die Dickenoptimierung von Platten nach der Kirchhoff–Theorie ist eines der klassischen Gebiete der Strukturoptimierung (Haftka, Prasad [108]). Die Arbeiten von Armand, Lodier [8] sowie Cheng, Olhoff [55] zur Optimierung von Kirchhoff–Platten bei einer diskontinuierlichen Dickenverteilung führen direkt auf die vorgestellte Methode der materiellen Topologieoptimierung. Die in Kapitel 3 erläuterte Vorgehensweise der Relaxation anhand von porösen Werkstoffmodellen kann unmittelbar auf die Plattentheorie nach Reissner bzw. Mindlin und auf verschiedene Schalenmodelle übertragen werden. Im Gegensatz zu den 2–dimensionalen Scheibenproblemen ist der Aufbau des Tragwerks in Dickenrichtung bei Platten und Schalen von Bedeutung. Es können vier Modelle unterschieden werden (Bild 4.9). Eine Grundplatte bzw. Schale mit der Dicke $t_G \geq 0$ ist vorgegeben. Die versteifende Rippen– bzw. Waben–



G – Grundplatte / Schale R – Rippen- bzw. Wabenschicht mit variabler Dichte

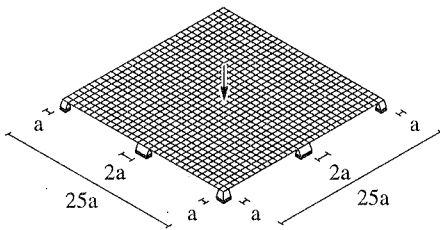
Bild 4.9: Platten- und Schalenmodelle in der Topologieoptimierung


struktur mit der Dicke t_R wird in der materiellen Topologieoptimierung auf der Basis poröser Werkstoffmodelle bestimmt. Die Dicken der Grundstruktur t_G und der Rippen- bzw. Wabenschicht t_R werden nicht variiert. In den ersten drei Modellen wird der Aufbau bei der Homogenisierung der makroskopischen Werkstoffeigenschaften explizit berücksichtigt. Im verschmierten Modell werden die Steifigkeiten der Grundstruktur und der Rippen- bzw. Wabenschicht addiert. Die höhere Biegesteifigkeit infolge von Material, das außerhalb der Mittelfläche angelagert ist, wird vernachlässigt.

Die Homogenisierung von porösen Werkstoffen für Platten nach der Kirchhoff- und der Reissner / Mindlin-Theorie wird bei Soto, Diaz [236] beschrieben. Auf der Basis von homogenisierten, porösen Mikrostrukturen bestimmen Suzuki, Kikuchi [242], Tenek, Hagiwara [254] sowie Diaz et al. [78] die optimale Topologie von Reissner / Mindlin-Platten mit maximaler Steifigkeit. Die Optimierungsergebnisse für verschiedene rippen- bzw. wabenförmige Modelle sind in Soto, Diaz [237] zusammengestellt. Die makroskopischen Werkstoffeigenschaften hängen bei Schalen zusätzlich von der Krümmung des Tragwerks ab. Es ist im allgemeinen nur schwer möglich, den homogenisierten Werkstofftensor als explizite Funktion der Werkstoffparameter und der Krümmung zu bestimmen. Suzuki und Kikuchi [242] entwickeln daher auf der Basis einer symmetrisch, rippenförmig aufgebauten Mikrozinelle mit Rechteckloch (Bild 4.9a) ein vereinfachtes, approximatives Homogenisierungsverfahren für ebene Facetten-Elemente. Die homogenisierten Komponenten des Werkstofftensors für die Reissner / Mindlin-Platte und die Scheibe werden überlagert, um die Biege-, Schub- und Membransteifigkeiten des porösen Werkstoffs zu erfassen. Cherkaev und Palais [58] optimieren die Topologie von rotationssymmetrischen Schalen nach der Membrantheorie auf der Basis eines rank-3 Werkstoffs. In der vorliegenden Arbeit wird das isotrope Werkstoffmodell (3.41) auf Platten- und Schalentragwerke angewandt. Für die Optimierung von Versteifungen wird die Biegesteifigkeit über die Dicke verschmiert (Bild 4.9d). Diese Vorgehensweise wird durch einige Beispiele für Platten- und Schalentragwerke veranschaulicht. Weitere Beispiele finden sich bei Maute, Ramm [163] sowie Yang, Chahande [280]. Alternativ zum isotropen Werkstoff-

modell führen Yang et al. [282] Balkenelemente variabler Dichte ein, um die Rippenstruktur zu beschreiben. Die Balkenelemente bilden zu Beginn des Optimierungsprozesses ein gleichmäßiges Rippengitter, welches die Grundplatte versteift. Die optimale Rippenstruktur wird durch eine Variation der Balkenquerschnitte bestimmt.

Die Äquivalenz von Dickenoptimierung und Topologieoptimierung wurde auf der Basis des isotropen Werkstoffmodells ($\beta = 3.0$) für dünne Platten ($t/l \leq 1/10$), die nach der Kirchhoff-Theorie berechnet werden können, in Abschnitt 3.5 erläutert. In der Kirchhoff-Theorie trägt die Platte äußere Kräfte nur über Biegung ab. Die Biegesteifigkeit nimmt mit der dritten Potenz der Dicke zu. Dicke bis mäßig dünne Platten ($1/5 \geq t/l \geq 1/10$) werden nach der Reissner / Mindlin-Theorie berechnet. Hierbei wird zusätzlich die Schubsteifigkeit der Platte berücksichtigt, die linear von der Dicke abhängt. Der Einfluß der Schubsteifigkeit auf die optimale Topologie des Tragwerks wird anhand der Optimierung einer Platte in Bild 4.10 veranschaulicht. Die quadratische Platte ist in den Eckpunkten sowie den Seitenmitten gelenkig gelagert



Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse 30%
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.3$
 gelenkig,
 vertikal unverschieblich: 

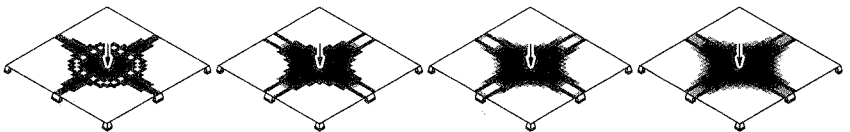
Plattendicke / Länge

$$\bar{t}/l = 1/200$$

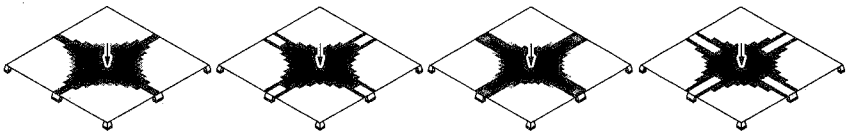
$$\bar{t}/l = 1/20$$

$$\bar{t}/l = 1/10$$

$$\bar{t}/l = 1/5$$



Dickenoptimierung



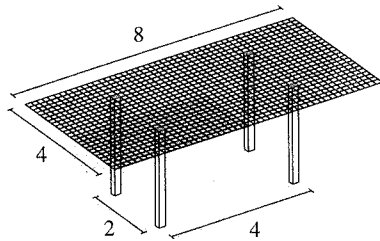
Topologieoptimierung

Bild 4.10: Vergleich von Dicken- und Topologieoptimierung für Platten mit unterschiedlicher Dicke

und durch eine Einzellast in Plattenmitte belastet. Die Geometrie des optimalen Tragwerks wird für verschiedene Plattendicken einerseits durch eine Dickenoptimierung und andererseits mittels der materiellen Topologieoptimierung auf der Basis eines makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells bestimmt. Das verfügbare Material ist jeweils auf 30% der maximal möglichen Masse beschränkt. Im Fall der Dickenoptimierung $t_L \leq t \leq t_U = \bar{t}$ beträgt die Dicke zu Beginn des Optimierungsprozesses $0.3 \bar{t}$, wobei \bar{t} die Dicke des Entwurfsraums bezeichnet. Die Dichte ist im Entwurfsraum mit $\rho = \rho_0$ konstant. Im Fall der Topologieoptimierung $\rho_L \leq \rho \leq \rho_U = \rho_0$ beträgt die relative Dichte im Ausgangsentwurf $\rho/\rho_0 = 0.3$. Der Entwurfsraum ist mit 4×255 , 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Problems wird nur ein Viertel der Platte analysiert. Aufgrund der vergleichsweise kleinen Anzahl von Optimierungsvariablen wird ein SQP-Verfahren zur Lösung der Dicken- und Topologieoptimierungsaufgaben eingesetzt.

Die Optimierungsergebnisse für Dicken- und Topologieoptimierung weisen dieselben Tendenzen auf. In keinem Fall werden die Auflager in den Eckpunkten aktiviert. Bei der dünnen Platte wird möglichst viel Material in Plattenmitte angelagert, um die Biegesteifigkeit im Bereich großer Momente zu erhöhen. Mit zunehmender Plattendicke werden die Lasten verstärkt über Schubverzerrungen zu den Auflagern in den Seitenmitten abgetragen. Hierbei nimmt in der Dickenoptimierung der Anteil an Dicken mit $t_L < t < t_U$ im Optimum zu. Dies kann auf die lineare Abhängigkeit der Schubsteifigkeit von der Plattendicke zurückgeführt werden. Die gute Übereinstimmung von Dickenoptimierung und materieller Topologieoptimierung auf der Basis eines suboptimalen Werkstoffmodells darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß beide Formulierungen zu nichtkonvexen Optimierungsproblemen führen und stark von der Diskretisierung des Entwurfsraums und der Steuerung des Optimierungsalgorithmus abhängen. Ein Indiz hierfür sind die unterschiedlichen Ergebnisse der Dicken- und Topologieoptimierung für $\bar{t}/l = 1/200$.

In einem weiteren Beispiel wird die Topologieoptimierung eingesetzt, um die optimale Anordnungen von Rippen zur Versteifung einer Platte nach der Optimierungsaufgabe (4.1) zu bestimmen (Bild 4.11). Die Rippen sollen so angeordnet werden, daß die Dehnungsenergie des gesamten Tragwerks, d.h. Platte und Rippen, minimal wird. Die Masse, die für die Rippenstruktur zur Verfügung steht, ist auf 30% des maximal möglichen Materials beschränkt. Die Optimierungsvariablen beschreiben im vorliegenden Fall nicht die Struktur selbst, sondern nur die Anordnung der Rippen. Die Platte ist in 4 Punkten vertikal und horizontal gelagert sowie mit einer gleichförmigen, vertikal wirkenden Flächenlast belastet. Der Entwurfsraum für die Rippen entspricht der Grundplatte. Die Grundplatte und die Rippenschicht werden mit jeweils 4×288 , 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert, wobei die Steifigkeiten der entsprechenden Elemente im Sinne eines verschmierten Modells addiert werden. Die Optimierungsaufgabe wird zum Vergleich mit dem



Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse (Rippen) 30%
 E-Modul: $E_G = E_R = 2.1 \cdot 10^7$
 Querdehnzahl: $\nu_G = \nu_R = 0.3$

Platte Dicke: $t_G = 0.01$
 Rippen Dicke: $t_R = 0.05$
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$

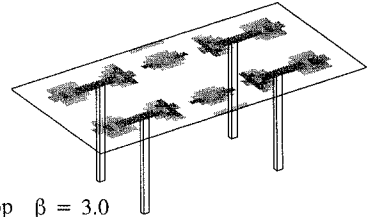


Bild 4.11: Optimierung von Rippen für eine gleichförmig vertikal belastete Platte

zuvor erläuterten OC-Verfahren und dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen SQP-Algorithmus unter Berücksichtigung der Symmetrie des Tragwerks gelöst. Beide Optimierungsverfahren führen zu demselben Ergebnis. Die Dehnungsenergie des optimierten Tragwerks ist im Vergleich zum Ausgangsentwurf mit einer gleichförmig porösen Rippschicht um 84% geringer.

Die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des vorgestellten Verfahrens werden abschließend durch ein Beispiel zur Topologieoptimierung von Schalenträgwerken unterstrichen. In zahlreichen konstruktiven Aufgaben ist die Form von Schalen aufgrund von funktionalen oder gestalterischen Gesichtspunkten vorgegeben. Die Optimierung von Aussteifungen ist daher von großer praktischer Bedeutung. In ersten Studien wird die Topologieoptimierung beispielsweise eingesetzt, um die Aussteifungen von Karosserie-Elementen im Automobilbau zu optimieren (Kikuchi [134], Chiredast et al. [59]). In Bild 4.12 ist eine Motorhaube dargestellt, die an ihrer Hinterkante an zwei Stellen fest eingespannt und durch eine Torsionslast belastet ist. Die Mittelfläche der Schale wird durch Bézier-Elemente beschrieben (\rightarrow Kapitel 5). Der Entwurfsraum für die Aussteifungen ist mit der abgebildeten Schale identisch und zu Beginn des Optimierungsprozesses gleichförmig mit porösem Material $\rho/\rho_0 = 0.4$ gefüllt. Die Tragfähigkeit der Grundstruktur wird in diesem Beispiel vernachlässigt ($t_G = 0$). Das Verhältnis zwischen der Dicke und der charakteristischen Länge der Schale beträgt $t/l = 1/40$. Verschiedene Zwischenzustände und die optimierte Materialverteilung sind in Bild 4.12 dargestellt und im Verlauf der Dehnungsenergie über den Optimierungsprozeß gekennzeichnet. Es fällt dabei auf, daß die Zielfunktion vom 10. zum 20. Iterationsschritt nur geringfügig verbessert wird. Die Klarheit der Materialverteilung hinsichtlich einer "0-1" Aufteilung nimmt dagegen deutlich zu. Dieses Konvergenzverhalten ist für Topologieoptimierungsprobleme (4.1) typisch und weist auf ein flaches Optimum im Raum der Optimierungsvariablen hin.

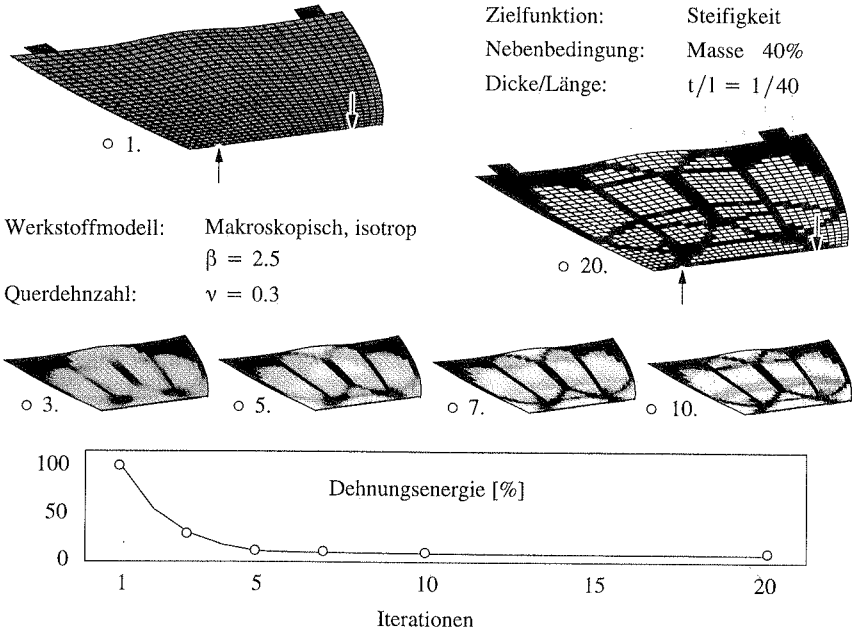


Bild 4.12: Optimierung der Aussteifungen einer Motorhaube

4.1.5 Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen

Die Steifigkeit des Tragwerks ist für zahlreiche Problemstellungen ein wichtiges Entwurfskriterium. Die absolute Größe der äußeren Belastung sowie die Beanspruchung der Bauteile fließen in dieses Kriterium nicht explizit ein. Die maximale Beanspruchbarkeit des Materials ist jedoch in zahlreichen Konstruktionsaufgaben ein wesentliches Kriterium. Daher wird in diesem Abschnitt erläutert, wie Spannungsnebenbedingungen in der materiellen Topologieoptimierung berücksichtigt werden können.

Ebene Tragwerke, die für einen Lastfall hinsichtlich ihrer Steifigkeit nach (4.1) optimiert sind, zeichnen sich durch eine gleichmäßige Beanspruchung nahezu aller Strukturelemente im Sinne eines "Fully Stressed Design" aus. In Übereinstimmung mit der Michellschen Entwurfstheorie sind die optimierten Tragwerke statisch bestimmt, wenn diese als Stabwerke modelliert werden. Für diesen Idealfall kann die maximale von Mises Vergleichsspannung im Tragwerk über die Dehnungsenergie abgeschätzt werden. Die von Mises Spannung wird durch die Projektion \mathbf{P}_σ des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ (2.57) berechnet.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.9)$$

Die von Mises Spannung kann beispielsweise für den ebenen Spannungszustand wie folgt abgeschätzt werden (Bendsøe et al. [30]):

$$\frac{(1 + \nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \frac{3(1 - \nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \quad (4.10)$$

Eine obere Grenze $\bar{\sigma}_v$ für die im gesamten Tragwerk maximale von Mises Spannung ergibt sich aus der Integration der Ungleichung (4.10) über das Gebiet Ω_x .

$$\bar{\sigma}_v \leq \sqrt{\frac{1}{|\Omega_x|} \frac{3 E}{2 (1 + \nu)} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_x} \quad (4.11)$$

Eine entsprechende Spannungsnebenbedingung kann für einen Lastfall unter der Annahme konstanter Spannungen im optimierten Tragwerk implizit berücksichtigt werden, indem bei der Minimierung des Gewichts die maximale Dehnungsenergie bzw. bei der Maximierung der Steifigkeit (4.1) die minimale Masse vorgeschrieben wird. Dies ist bei mehreren Lastfällen im allgemeinen nicht möglich. Infolge der mittelnden Abschätzung (4.11) können auch bei einem Lastfall in Lasteinleitungs- und Auflagerbereichen größere Spannungen auftreten. Es ist zwar in vielen Fällen möglich, lokale Spannungsüberschreitungen in einem anschließenden Formoptimierungsschritt oder durch die Variation der Dicke zu korrigieren, ohne daß sich hierbei die optimale Topologie ändert. Wie die nachfolgenden Untersuchungen jedoch zeigen, bewirken bestimmte Konstellationen von Last- und Auflagerbedingungen eine unterschiedliche optimale Topologie, je nach dem ob Spannungen bereits bei der Steifigkeitsoptimierung berücksichtigt werden oder nicht.

In der Topologieoptimierung ist es nicht sinnvoll, maximal zulässige Spannungen durch lokale Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Die Spannungen sind in sehr vielen Stützpunkten im Entwurfsraum auszuwerten und zu kontrollieren, da die Geometrie des eigentlichen Tragwerks zu Beginn des Optimierungsprozesses nicht feststeht. Dies hat eine großen Anzahl von Nebenbedingungen in Verbindung mit einer aufwendigen Sensitivitätsanalyse zur Folge. Die Vorteile der effizienten Berechnung der Gradienten nach der variationellen, adjungierten Methode gehen bei der Einführung von lokalen Spannungsnebenbedingungen verloren. Die Probleme infolge von lokalen Spannungsnebenbedingungen werden in einer Arbeit von Duysinx, Bendsøe [82] deutlich. Yang und Chen [281] führen daher die Spannungsnebenbedingungen als L_p -Norm (2.33) in einer Penalty-Formulierung ein.

$$f_\sigma = \left\{ \int_{\Omega_s} \left(\frac{\sigma_v}{\bar{\sigma}_v} \right)^p d\Omega_s \right\}^{1/p} ; \quad 1 \leq p < \infty \quad (4.12)$$

Der mit w_σ gewichtete Strafterm f_σ wird zur Dehnungsenergie in der Aufgabenstellung (4.1) addiert und die so modifizierte Zielfunktion im Optimierungsprozess minimiert. Das erweiterte Optimierungsproblem lautet:

$$\min_{\hat{s}} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}, \hat{s}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega_s + w_\sigma \left\{ \int_{\Omega_s} \left(\frac{\sigma_v(\mathbf{x}, \hat{s})}{\bar{\sigma}_v} \right)^p \, d\Omega_s \right\}^{1/p} \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho(\hat{s}, \mathbf{x}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{s}_L \leq \hat{s} \leq \hat{s}_U$$

Eine entsprechende Penalty-Formulierung über die Kreisselmeier–Steinhauser-Funktion (2.34) erwies sich in numerischen Untersuchungen als weniger geeignet. Die Sensitivitäten der Zielfunktion werden auf der Basis einer variationellen, adjungierten Formulierung berechnet. Da die Dehnungsenergie bezüglich der Werkstoffparameter \hat{s} selbstadjungiert ist, können deren Gradienten, wie zuvor erläutert, in einer Nachlaufrechnung ermittelt werden. Die Ableitungen des Strafterms f_σ werden wie folgt berechnet:

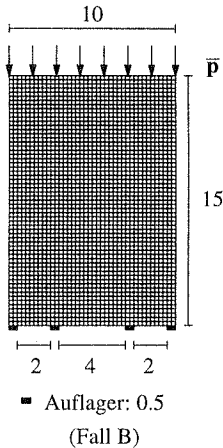
$$\nabla_s f_\sigma = \frac{1}{p} \tilde{f}_\sigma^{(1-p)/p} \nabla_s \tilde{f}_\sigma \quad (4.14)$$

$$\tilde{f}_\sigma = \int_{\Omega_s} \tilde{q}_\sigma(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega_s \quad ; \quad \tilde{q}_\sigma = \left(\frac{\sigma_v(\mathbf{x}, \hat{s})}{\bar{\sigma}_v} \right)^p \quad (4.15)$$

Die Sensitivitäten des Integrals \tilde{f}_σ werden nach der variationellen, adjungierten Methode (2.135)–(2.139) bestimmt. Die Berechnung der Ableitung des Integranden \tilde{q}_σ nach dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ führt auf die Differentiation der von Mises Spannung (4.9), wobei die Symmetrie der Projektionsmatrix \mathbf{P}_σ berücksichtigt wird.

$$\bar{\nabla}_\sigma \tilde{q}_\sigma = \frac{3}{2} \frac{p}{\bar{\sigma}_v^2} \tilde{q}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_\sigma \mathbf{I} \quad (4.16)$$

Der Einfluß von Spannungsnebenbedingungen auf die Topologie von Tragwerken mit maximaler Steifigkeit wird an einem Scheibenproblem veranschaulicht (Bild 4.13). Die optimale Materialverteilung wird auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells ohne und mit Spannungsnebenbedingungen ($w_\sigma = 0$) bzw. ($w_\sigma = 10$) bestimmt. Die Masse \bar{m} im Entwurfsraum ist jeweils auf 25% der maximal möglichen Materialmenge beschränkt. Die Optimierungsprobleme werden mit der zuvor erläuterten Filtermethode stabilisiert, wobei die Dehnungsenergie und der Spannungsterm \tilde{f}_σ mit dem Operator \mathbf{H} (4.7) geglättet werden. Der rechteckige Entwurfsraum ist durch eine vertikale Gleichstreckenlast entlang der oberen Kante belastet. Es werden zwei Auflagerbedingungen untersucht. Im Fall A ist die gesamte untere Kante eingespannt. Im Fall B dagegen sind nur die gekennzeichneten Stellen gelagert. Der



Zielfunktion:	Maximale Steifigkeit
Nebenbedingungen:	Spannungen (Penalty-Formulierung) $\bar{\sigma}_v = 100$, $p = 4.0$ Masse $\bar{m} = 25\%$
Dicke:	$t = 2.4$
Last:	$\bar{p} = 2.4$
Materialmodell:	Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$
E-Modul:	$E = 1.8 \cdot 10^5$
Querdehnzahl:	$\nu = 0.3$
Filtermethode:	$\bar{r} = 0.25$, $\bar{\kappa} = 2.0$
Auflager:	A: Gesamte untere Kante eingespannt B: Untere Kante partiell eingespannt (siehe Abbildung links)

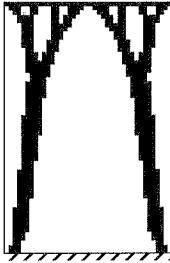
Bild 4.13: Beispiel zur Steifigkeitsoptimierung mit Spannungsnebenbedingungen

Entwurfsraum ist mit 2×1200 , 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Problems wird nur eine Hälfte des Entwurfsraums analysiert. Die Optimierungsprobleme werden mit dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten und zu Beginn des Kapitels erläuterten OC-Verfahren gelöst.

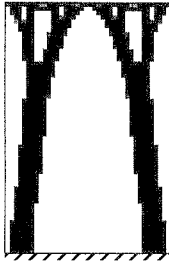
Die Optimierungsergebnisse ohne und mit Spannungsnebenbedingungen sind für die Auflagerbedingungen A und B in Bild 4.14 dargestellt. Die optimalen Tragwerke, die ohne und mit Berücksichtigung der zulässigen Spannungen entstehen, sind topologisch äquivalent, wenn der zur Verfügung stehende Auflagerbereich wie im Fall A genügend breit ist. Die zu hohen Spannungen im Bereich der Auflager des rein auf Steifigkeit optimierten Tragwerks werden durch eine Verbreiterung der Stützen bei der Optimierung mit Spannungsnebenbedingungen vermieden. Im Fall B jedoch sind die äußeren Auflager zu schmal, so daß die inneren Auflager aktiviert werden, um die Spannungsnebenbedingungen zu erfüllen. Die Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen bewirkt eine Änderung der Topologie des Tragwerks mit maximaler Steifigkeit. Der Vergleich der Dehnungsenergien in Tabelle 4.2 zeigt, daß die unter Berücksichtigung der maximal zulässigen Vergleichsspannung erzielten Ergebnisse im Vergleich zu den rein auf Steifigkeit optimierten Tragwerken deutlich weicher sind. Dies liegt jedoch primär nicht an der unterschiedlichen Topologie und Form der optimierten Tragwerke, sondern an einem vergleichsweise hohen Anteil von porösem und damit weichem Werkstoff in der optimierten Materialverteilung, wenn die maximal zulässige Vergleichsspannung berücksichtigt wird. Dieser Effekt konnte über das vorliegende Beispiel hinaus bei weiteren Optimierungsproblemen (4.13) festgestellt werden und stimmt mit den Ergebnissen von Yang und Chen [281] überein.

Auflager – Fall A:

$$w_{\sigma} = 0.0$$

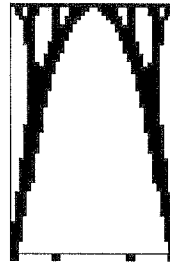


$$w_{\sigma} = 10.0$$



Auflager – Fall B:

$$w_{\sigma} = 0.0$$



$$w_{\sigma} = 10.0$$



Bild 4.14: Einfluß der Spannungsnebenbedingungen auf die optimale Topologie bei verschiedenen Auflagerbedingungen

Das Auftreten von porösem Werkstoff in der optimierten Materialverteilung erschwert die Umsetzung des Optimierungsergebnisses in ein Tragwerk, das aus einem homogenen Material besteht. Es stellt sich daher die Frage, ob poröses Material bei einer Beschränkung von maximal zulässigen Spannungen tatsächlich optimal ist oder ob der Optimierungsprozeß aus numerischen Gründen vorzeitig stagniert. Da Vergleichsrechnungen mit verschiedenen Wichtungsfaktoren $w_{\sigma} > 0$ und anderen Optimierungsalgorithmen, wie SQP- und SLP-Verfahren, zu denselben Ergebnissen führen, kann ausgeschlossen werden, daß der Optimierungsprozeß in einem lokalen Optimum vorzeitig konvergiert. Es wird ebenfalls untersucht, ob die Spannungsspitzen, die entlang der gezackten Ränder zwischen Bereichen mit hoher und niedriger Dichte auftreten, einen Grund für eine vorzeitige Stagnation des Optimierungsprozesses sind. Wie in Abschnitt 6.2.3 gezeigt wird, können die künstlichen Spannungsspitzen durch eine adaptive Diskretisierung des Entwurfsraums während des Optimierungsprozesses vermieden werden. Der Anteil an porösem Werkstoff im Optimum wird hierdurch zwar geringfügig, jedoch nicht im gewünschten Umfang reduziert.

Diese Untersuchungen legen den Schluß nahe, daß poröse Werkstoffe in bestimmten Bereichen des Tragwerks optimal sind, wenn Spannungsnebenbedingungen berücksichtigt werden. Die hier eingesetzten, makroskopischen Werkstoffmodelle beschreiben das Materialverhalten von Knochensubstanz oder Metallschäumen in Abhängigkeit der Dichte in guter Näherung. Es

	Auflager A:		Auflager B:	
	$w_{\sigma} = 0.0$	$w_{\sigma} = 10.0$	$w_{\sigma} = 0.0$	$w_{\sigma} = 10.0$
Dehnungsenergie	4.4077	6.6032	4.7232	7.3282
Porosität [%]	4.50	33.58	4.50	35.83

Tabelle 4.2: Ergebnisse für die Optimierung mit und ohne Spannungsnebenbedingungen

ist daher im Gegensatz zur reinen Steifigkeitsoptimierung durchaus sinnvoll, beispielsweise poröse Metallschäume einzusetzen, wenn die Belastbarkeit des Werkstoffs berücksichtigt wird. Wird dennoch eine näherungsweise "0-1" Materialverteilung angestrebt, sind alternative Formulierungen des Optimierungsproblems oder neue regularisierende Werkstoffmodelle zu entwickeln.

Anmerkung:

Kirsch [138] weist im Rahmen der diskreten, materiellen Topologieoptimierung von statisch unbestimmten Fachwerken mit variablen Stabquerschnitten A darauf hin, daß Spannungsnebenbedingungen zu singulären Optima⁷ führen. Es treten in Stäben mit $A \rightarrow 0$ große Spannungen auf. Dieses Problem existiert jedoch in der materiellen Topologieoptimierung von kontinuierlichen Tragwerken nicht: $\sigma = C(\hat{s}) \epsilon$. Bei einer Abnahme der Steifigkeit des Materials $C \rightarrow 0$ gehen auch die Spannung gegen Null. Wie die Optimierungsergebnisse in Bild 4.14 zeigen, können daher große Bereiche mit einer Dichte $\rho = \rho(\hat{s}_L)$ erzeugt werden.

4.2 Optimierung von Eigenfrequenzen

Das dynamische Verhalten einer Struktur kann anhand der Eigenfrequenzen bei stoßartiger Belastung sowie anhand des Frequenzantwortspektrums bei periodischer Anregung beurteilt werden. Die Methode der materiellen Topologieoptimierung wurde erstmals von Diaz und Kikuchi [75] auf Schwingungsprobleme angewandt, um die niedrigste Eigenfrequenz von Scheibentragwerken zu maximieren. Das Optimierungsproblem wird auf der Basis von porösen Werkstoffen, wie der periodischen Mikrozeile mit Rechteck-Loch und dem orthogonalen rank-2 Laminat, mit dem von Bendsøe, Kikuchi [26] für Steifigkeitsprobleme eingeführten OC-Verfahren gelöst. Alternativ hierzu schlagen Tenek und Hagiwara [253] ein SLP-Verfahren vor, um die niedrigste Eigenfrequenz zu maximieren. Ma et al. [153] erweitern die Optimierungsmethode auf die Maximierung der dynamischen Steifigkeit bei periodisch erregten Tragwerken. Kawabe und Yoshida [132] setzen ein makroskopisches, isotropes Werkstoffmodell ein, wobei sie nur die Eigenfrequenz einer bestimmten Eigenform maximieren.

In diesem Abschnitt werden die bestehenden Arbeiten zur materiellen Topologieoptimierung mit Eigenfrequenzen inhaltlich zusammengefaßt und spezifische Probleme, die bei der Topologieoptimierung mit Eigenfrequenzen auftreten, erläutert. Ein abschließendes Beispiel zur Frequenzoptimierung von Schalentragwerken unterstreicht die Vielseitigkeit der materiellen Topologieoptimierung. In der Frequenzoptimierung können im wesentlichen zwei Aufgabentypen unterschieden werden:

7. Ein singuläres Optimum ist dadurch gekennzeichnet, daß der zulässige, n -dimensionale Lösungsraum in der Umgebung der Lösung auf einen k -dimensionalen Unterraum mit $k < n$ beschränkt ist, wobei n die Anzahl der Optimierungsvariablen ist. Ein singuläres Optimum kann folglich mit numerischen Optimierungsprozeduren nicht bestimmt werden.

- Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz:
$$\max_{\hat{s}} \min_{\vartheta} \vartheta_1 \quad (4.17)$$

- Anpassung von Eigenfrequenzen an Sollwerte:
$$\min_{\hat{s}} \sum_k \min_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_k - \vartheta| \quad (4.18)$$

In beiden Problemstellungen sind prinzipiell sämtliche Eigenwerte der Struktur zu berücksichtigen, da sich die Reihenfolge der Eigenwerte während des Optimierungsprozesses beliebig verändern kann. Folglich führen diese Aufgabentypen auf nichtglatte Mehrkriterienoptimierungsprobleme (\rightarrow Abschnitt 2.3). Mehrere Eigenwerte können sich im Optimierungsprozeß kreuzen oder im Lösungspunkt zusammenfallen. Diese Effekte verursachen hinsichtlich der Optimalitätsbedingungen und des numerischen Lösungsverfahrens erhebliche Probleme. Die Fréchet–Ableitungen existieren bei mehrfachen Eigenwerten nicht. Seyranian et al. [231] berechnen in diesem Fall die Richtungsableitungen auf der Basis eines modifizierten Eigenwertproblems.

Oftmals werden nur die Eigenwerte von bestimmten Eigenformen im Optimierungsproblem (4.17) bzw. (4.18) berücksichtigt, um die Probleme infolge des nichtglatten Mehrkriterienoptimierungsproblems zu vermeiden. In der Topologieoptimierung ist es jedoch nur in Ausnahmefällen sinnvoll, ausschließlich Eigenwerte zu betrachten, deren Eigenformen bereits im Startentwurf für das dynamische Verhalten der Struktur dominant sind. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine massive Grundstruktur oder konzentrierte Massen vorgegeben sind und nur Verstrebungen und Aussteifungen mit einer deutlich geringeren Masse mittels Topologieoptimierung erzeugt werden sollen. Im allgemeinen ändert sich jedoch die Materialverteilung im Entwurfsraum während des Optimierungsprozesses derart, daß im Vergleich zum Startentwurf andere Eigenformen für das Schwingungsverhalten relevant werden. Daher wird das nichtglatte Mehrkriterienoptimierungsproblem durch glatte Einhüllenden–Funktionen, wie beispielsweise die Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion (2.34), approximiert und die Lösung näherungsweise bestimmt. In diesem Sinn formulieren Ma et al. [153] die Frequenzoptimierungsaufgabe als allgemeines Mehrkriterienoptimierungsproblem, das mit Hilfe von Einhüllenden–Funktionen (2.33) und (2.34) gelöst wird.

Die weiteren Betrachtungen folgen diesem Ansatz, beschränken sich jedoch auf die Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz (4.17). An dieser Aufgabenstellung lassen sich die wichtigsten Effekte bei der Lösung von Schwingungsproblemen in der Topologieoptimierung aufzeigen. Das Optimierungsproblem (4.17) wird als min–max–Problem mittels der Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion (2.34) formuliert.

$$\min_{\hat{s}} \frac{1}{p} \ln \left[\sum_{i=1}^{n_{\vartheta}} e^{-p\vartheta_i(\hat{s})} \right] \quad (4.19)$$

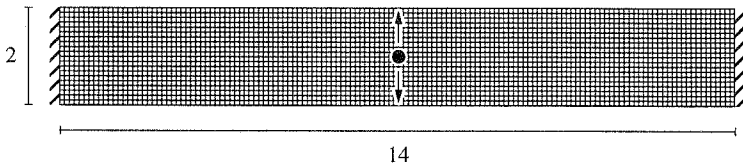
$$\int_{\Omega} \rho(\hat{s}) \, d\Omega - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{s}_L \leq \hat{s} \leq s_U$$

Die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte wird mit n_θ bezeichnet. Die Masse im Entwurfsraum ist mit \bar{m} vorgegeben. Diese Aufgabenstellung ist dem Optimierungsproblem "Minimale Masse bei Vorgabe der kleinsten Eigenfrequenz" äquivalent. Je größer der Wichtungsfaktor p ist, desto genauer wird das min-max-Problem und damit die Lösung selbst approximiert (\rightarrow Abschnitt 2.3). Allerdings können bei hohen p -Faktoren Oszillationen und numerische Schwierigkeiten im Optimierungsprozeß auftreten. Die Ableitung der Zielfunktion nach der Optimierungsvariablen \hat{s}_i berechnet sich aus:

$$\nabla_s f = \left[\sum_{j=1}^{n_\theta} - (e^{-p\theta_j}) \nabla_s \theta_j \right] / \left[\sum_{j=1}^{n_\theta} (e^{-p\theta_j}) \right] \quad (4.20)$$

Die Ableitungen der Eigenfrequenzen nach Werkstoffparametern $\nabla_s \theta_j$ sind selbstadjungiert und können nach der diskretisierten, direkten Methode (2.118)–(2.120) in einer Nachlaufrechnung aus den Eigenformen berechnet werden. Die Ableitungen der Nebenbedingung liegen für das jeweilige Werkstoffmodell explizit vor.

Das Verhalten von isotropen und orthotropen Werkstoffmodellen wird für Schwingungsprobleme (4.19) anhand des folgenden Beispiels untersucht (Bild 4.15). Die Aufgabenstellung ist der Arbeit von Ma et al. [153] entnommen. Es ist das Tragwerk mit maximaler kleinster Eigenfrequenz zu bestimmen. Die Masse im Entwurfsraum ist auf 32.76 % der maximal möglichen Materialmenge beschränkt. Der Entwurfsraum ist mit 2800, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen für den ebenen Spannungszustand diskretisiert. In der Mitte des Entwurfsraums ist eine Punktmasse mit 5/14 der Gesamtmasse angebracht, die nur in vertikaler Richtung schwingt. Es werden die ersten beiden Eigenfrequenzen in der Zielfunktion (4.19) mit $p = 10$ berücksichtigt. Die Eigenfrequenzen



Zielfunktion:	Maximale 1. Eigenfrequenz	Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 32.76\%$
Punktmasse:	$m_p = 5 \cdot 10^{-3}$	Dicke: $t = 1.0$
Werkstoffmodell:	Makroskopisch, isotrop / orthotrop $\beta = 2.0$	
E-Modul:	$E = 10^5$	
Dichte (homogen):	$\rho_0 = 10^{-3}$	Querdehnzahl: $\nu = 0.3$
Filtermethode:	$\bar{r} = 0.15$, $\bar{\kappa} = 2.0$	

Bild 4.15: Beispiel zur Optimierung von Eigenfrequenzen



a. Isotrop (nichtstabilisiert) $\vartheta_1^* = 61.258$



b. Isotrop (stabilisiert) $\vartheta_1^* = 62.245$



c. Orthotrop (nichtstabilisiert) $\vartheta_1^* = 61.511$

Bild 4.16: Vergleich der Optimierungsergebnisse für verschiedene Werkstoffmodelle

werden mit Hilfe eines Subspace-Verfahrens in Verbindung mit einem QZ-Algorithmus zur Lösung der reduzierten Unterprobleme berechnet (u.a. Bathe [19]). Die optimale Materialverteilung wird mit dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen OC-Verfahren ermittelt. Die Orientierung des orthotropen Materials wird mit dem im Anhang A6 aufgeführten Algorithmus bestimmt.

Zu Beginn des Optimierungsprozesses ist der Entwurfsraum gleichförmig mit porösem Material gefüllt. Die niedrigste Eigenfrequenz beträgt $\vartheta_1 = 34.444$ Hz für das makroskopische, isotrope Werkstoffmodell (3.41) und $\vartheta_1 = 18.925$ Hz für das makroskopische, orthotrope Werkstoffmodell (3.44). Die Optimierungsergebnisse auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells (3.41) sind jeweils für eine nichtstabilisierte und eine nach der Filter-Methode stabilisierte Formulierung in Bild 4.16 dargestellt. Die stabilisierte Formulierung kann analog zur Steifigkeitsoptimierung (4.6) aufgestellt werden. Aus algorithmischer Sicht ist es ausreichend, den Glättungsoperator (4.7) auf die Ableitungen des Steifigkeits- und des Massenterms anzuwenden. Der Vergleich mit dem Optimierungsergebnis auf der Basis des orthotropen Werkstoffmodells (3.44) verdeutlicht die optische und qualitative Übereinstimmung der isotropen, stabilisierten und orthotropen Formulierungen für Schwingungsprobleme.

Orthotrope Werkstoffmodelle führen jedoch bei Schwingungsproblemen zu erheblichen Schwierigkeiten. Zum einen konvergieren die Optimierungsergebnisse nur sehr langsam. Zum anderen treten zahlreiche, niederfrequente Eigenformen im Optimierungsprozeß auf, die für das optimierte Tragwerk nicht relevant sind. Beide Nachteile von orthotropen Werkstoffmodellen bleiben erstaunlicherweise in der Literatur unerwähnt. Das erste Problem kann darauf zurückgeführt werden, daß die Ableitungen der Nebenbedingung nach den richtungsbezogenen Indikatoren $\hat{\chi}_1$, $\hat{\chi}_2$ zu Null werden können. Für das makroskopische, orthotrope Werkstoffmodell (3.44) lauten die entsprechenden Ableitungen:

$$\nabla_{\chi_i} h = \int_{\Omega_s} \rho_0 (1 - \hat{\chi}_j) d\Omega_s \quad ; \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 1 \quad (4.21)$$

Die Kuhn–Tucker–Bedingungen (2.6) sind jedoch nicht definiert, wenn die Ableitungen im Optimum zu Null werden. Die Auswirkungen dieses Defekts ($\nabla_{\chi} h \rightarrow 0$) auf die Konvergenz des Optimierungsprozesses können anhand des OC–Algorithmus veranschaulicht werden, treffen jedoch generell auf jedes Gradientenverfahren zu. Die Indikatoren $\hat{\chi}_i$ werden im Iterationsschritt k nach der Rekursionsformel (2.14) berechnet.

$$\hat{\chi}_i^{(k+1)} = \hat{\chi}_i^{(k)} \left(\bar{\mu}^{(k)} - \frac{\nabla_{\chi} f^{(k)}}{\eta^{(k)} \nabla_{\chi} h^{(k)}} \right)^p \quad (4.22)$$

Bei der Optimierung der Steifigkeit nach Aufgabenstellung (4.1) auf der Basis von orthotropen Werkstoffmodellen sind die Ableitungen der Zielfunktion $\nabla_{\chi} f$ kleiner Null, wenn der Gradient der Nebenbedingung $\nabla_{\chi} h$ gegen Null strebt. Die lokale Steifigkeit wird für $\hat{\chi}_i \rightarrow 1$ durch eine Zunahme der Dichte generell vergrößert. Der Shift–Faktor $\bar{\mu}^{(k)}$ ist in diesem Fall sehr klein (\rightarrow Anhang A5). Bei Schwingungsproblemen treten sowohl positive wie auch negative Ableitungen der Zielfunktion $\nabla_{\chi} f$ für $\nabla_{\chi} h \rightarrow 0$ auf. In diesem Fall streben der Shift–Faktor $\bar{\mu}^{(k)}$ und der Lagrange–Multiplikator $\eta^{(k)}$ gegen unendlich. Der Optimierungsprozeß stagniert, da für Variablen mit $\nabla_{\chi} h \gg 0$ der Quotient in der Rekursionsformel (4.22) gegen Null geht.

$$\frac{\nabla_{\chi} f^{(k)}}{\eta^{(k)} \nabla_{\chi} h^{(k)}} \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

Für das isotrope Werkstoffmodell tritt dieses Problem nicht auf, da die Ableitung der Nebenbedingung nach der Dichte konstant ist. Durch eine einfache Modifikation des OC–Verfahrens kann eine vorzeitige Stagnation des Optimierungsprozesses bei orthotropen Materialmodellen vermieden werden. Hierzu wird die Ableitung der Nebenbedingung im Nenner der Rekursionsformel (4.22) so modifiziert, daß der Gradient $\nabla_{\chi} h \geq \bar{c}$ ist.

$$\nabla_{\chi_i} \bar{h} = \int_{\Omega_s} \rho_0 \left(1 - (1 - \bar{c}) \hat{\chi}_j \right) d\Omega_s \quad ; \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 1 \quad (4.24)$$

Diese Modifikation verhindert einerseits ein vorzeitiges Stagnieren des Optimierungsprozesses, kann andererseits jedoch zu Oszillationen in der Nähe des Optimums führen. Im vorliegenden Beispiel wurde das Optimierungsergebnis für das orthotrope Werkstoffmodell mit $\bar{c} = 0.5$ berechnet.

Das zweite Problem bei orthotropen Werkstoffmodellen betrifft Eigenformen, die im Optimierungsprozeß entstehen, jedoch hinsichtlich des optimierten Tragwerks keine Bedeutung haben (Bild 4.17). Die Eigenformen treten in Bereichen mit porösem Material entlang des eigentlichen Tragwerks auf. In diesen Bereichen ist die Masse des Werkstoffs im Vergleich

zur Steifigkeit groß. Das weiche Material besitzt eine Eigenfrequenz, die nur wenig über der niedrigsten Eigenfrequenz des eigentlichen Tragwerks liegt. Dieser Effekt tritt vereinzelt bei isotropen Werkstoffmodellen auf, wird jedoch in den untersuchten Beispielen vor allem bei orthotropen Werkstoffen registriert. Bei orthotropen Werkstoffen kann die Steifigkeit in eine Richtung reduziert werden, ohne daß die Massenträgheit in dieser Richtung ebenfalls verkleinert wird. Es werden eine Vielzahl von "künstlichen" Eigenformen im Optimum aktiv. Bei der Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz kann dieser Effekt zu Oszillationen im Optimierungsprozeß führen. Die Anpassung von Eigenfrequenzen an gegebene Sollwerte ist nahezu unmöglich, wenn "künstliche" Eigenformen im Optimierungsprozeß aktiv werden. Generell verlangsamt das Auftreten dieser Eigenformen die Konvergenz von Eigenwertlösern erheblich und erhöht hierdurch den numerischen Aufwand. Es wurde daher untersucht, ob die "künstlichen" Eigenformen durch die Vernachlässigung der Masse in hochporösen Bereichen $\rho < \bar{\rho}_{lim}$ bei der Eigenwertanalyse vermieden werden können. Numerische Untersuchungen zeigen, daß das Auftreten von lokalen Eigenformen in porösen Bereichen mit zunehmendem Schwellenwert $\bar{\rho}_{lim}$ hinausgezögert, aber nicht vermieden werden kann. Daneben können bei größeren Schwellenwerten $\bar{\rho}_{lim} \rightarrow \rho_0$ Oszillationen im Optimierungsprozeß entstehen. Ein Verfahren, das dieses Problem beseitigt, steht noch aus.

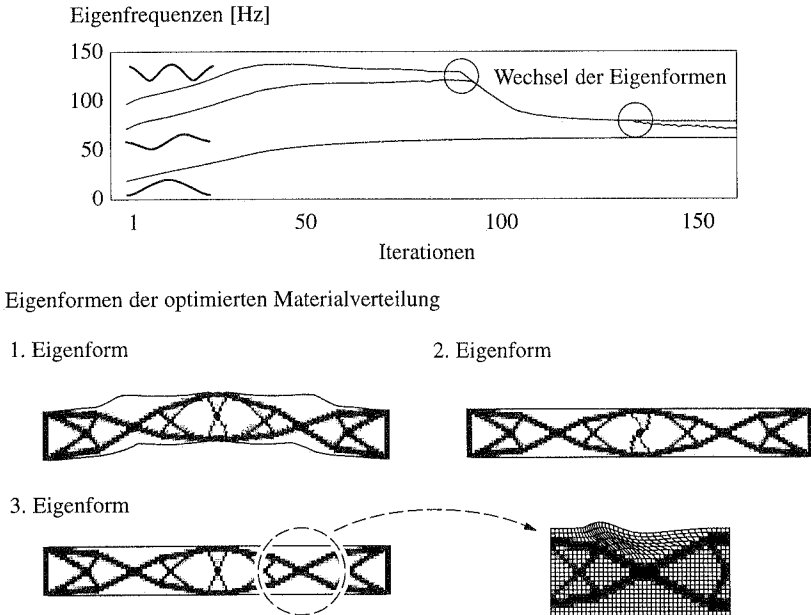


Bild 4.17: Eigenfrequenzen und Eigenformen für das orthotrope Werkstoffmodell

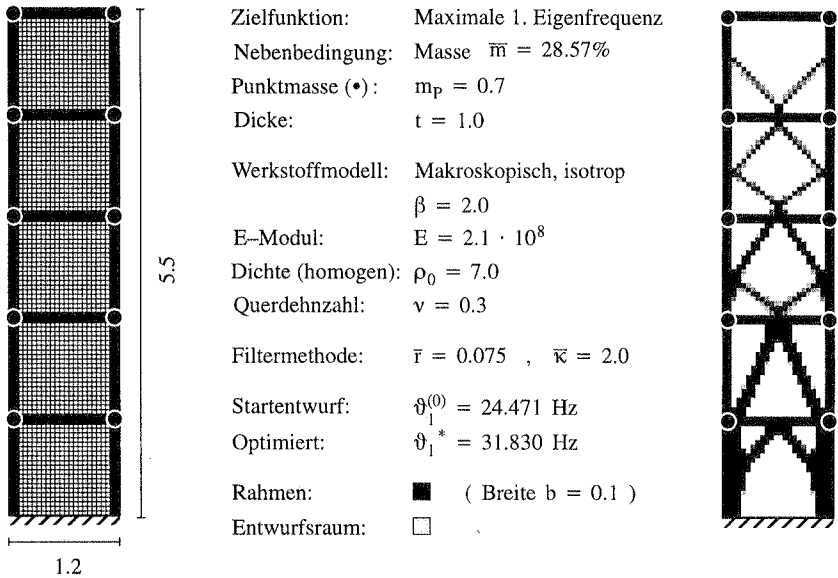
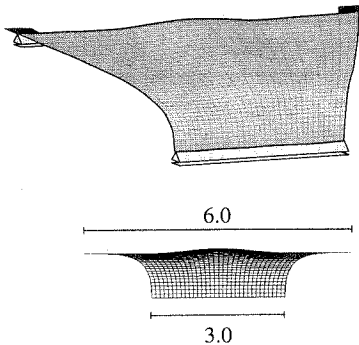


Bild 4.18: Frequenzoptimierung eines Rahmentragwerks

Die Einsatzmöglichkeiten der Topologieoptimierung für Schwingungsprobleme sollen abschließend anhand von zwei anwendungsbezogenen Beispielen demonstriert werden. In Bild 4.18 ist ein fünfstöckiges, ebenes Rahmentragwerk dargestellt (Diaz, Kikuchi [75]). Die Rahmen werden so ausgesteift, daß die kleinste Eigenfrequenz ϑ_1 des Tragwerks maximal wird. Das Material für die Verstrebenen ist auf 28.57% der im gesamten Entwurfsraum maximal möglichen Masse beschränkt. Beim Aufbau der Einhüllenden-Funktion für das Mehrkriterienoptimierungsproblem (4.19) werden die ersten drei Eigenfrequenzen berücksichtigt. In der Frequenzanalyse werden die Masse des Rahmens, die der Verstrebenen sowie die konzentrierten Punktmassen berücksichtigt. Die Struktur ist unter der Annahme des ebenen Spannungszustandes mit 2000, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert. Die Optimierungsaufgabe wird in einer stabilisierten Formulierung mit dem OC-Verfahren aus Abschnitt 2.1 gelöst. Die niedrigste Eigenfrequenz kann von 24.471 Hz bei einer gleichförmigen Verteilung des porösen Materials im Entwurfsraum auf 31.830 Hz erhöht werden.

In Bild 4.19 ist eine Motorhaube gezeigt, die eine starke Krümmung im vorderen Bereich aufweist. Die vordere und hintere Kante sind gelenkig, vertikal gelagert. Zusätzlich ist die Schale hinten links und rechts fest eingespannt. Mit Hilfe der Topologieoptimierung sollen Rippen erzeugt werden, so daß die niedrigste Eigenfrequenz der Schale maximal wird. Das Material für die Versteifungen ist auf 25% der maximal möglichen Masse in der Rippenschicht



Zielfunktion: Max. 1. Eigenfrequenz
 Nebenbedingung: Masse (Rippen) 25%

Motorhaube

E-Modul: $E_G = 2.1 \cdot 10^7$
 Querdehnzahl: $\nu_G = 0.3$
 Dichte: $\rho_G = 0.78$
 Dicke: $t_G = 0.05$

Rippen

Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$
 E-Modul: $E_R = 2.1 \cdot 10^7$
 Querdehnzahl: $\nu_R = 0.3$
 Dichte: $\rho_R = 0.78$
 Dicke: $t_R = 0.1$

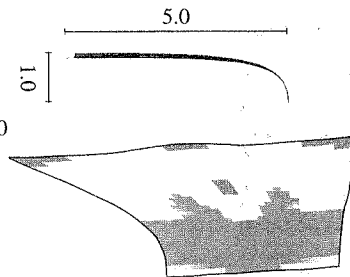


Bild 4.19: Frequenzoptimierung einer Motorhaube

beschränkt. Der Entwurfsraum für die Rippenstruktur bildet eine zweite Schalenschicht, deren Steifigkeit und Masse im Sinne eines verschmierten Modells zur Steifigkeit bzw. Masse des vorgegebenen Tragwerks addiert wird (\rightarrow Abschnitt 4.1.4). Die Motorhaube und die Rippen-schicht sind jeweils mit 480, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert. Die Rippenstruktur wird auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells (3.41) mit einem SQP-Algorithmus bestimmt. Die niedrigste Eigenfrequenz des Tragwerks kann von 0.64 Hz bei einer gleichförmig verteilten Masse in der Rippen-schicht auf 1.32 Hz gesteigert werden.

4.3 Maximierung der Grenzlast bei geometrisch nichtlinearem Tragverhalten

In der materiellen Topologieoptimierung entstehen oftmals fachwerkartige Strukturen mit dünnen Streben. Diese Tragwerke sind erheblich stabilitätsgefährdet, wenn die Streben auf Druck belastet werden. Daher ist das lokale und globale Beulversagen im Optimierungsprozess zu berücksichtigen, um die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse zu steigern. Geometrisch nichtlineare Effekte werden nur selten in die Formulierung der Optimierungsaufgabe einbezogen. Eine allgemeine Übersicht zu diesem Thema findet sich in der Dissertation von Reitinger [212]. Bei der Topologieoptimierung von Fachwerken wird zumeist nur das lokale Versagen der einzelnen Stäbe betrachtet (Rozvany et al. [221]). In der materiellen Topologie-

optimierung wird das geometrisch nichtlineare Strukturverhalten bislang nur in einer Arbeit von Neves et al. [183] näherungsweise erfaßt. Die kritische Grenzlast wird hierbei mit einer klassischen Stabilitätsanalyse abgeschätzt und der niedrigste Eigenwert $\lambda_{\text{krit}} > 0$ maximiert. Diese Approximation ist jedoch nur dann zulässig, wenn das Tragwerk sehr geringe Verformungen im Vorbeulbereich aufweist. Ebenso wie bei der Optimierung mit Eigenfrequenzen ist das Optimierungsproblem nicht glatt, da sich die Eigenwerte im Optimierungsprozeß kreuzen oder zusammenfallen können. Auch in diesem Fall ist die Optimierungsaufgabe als min–max–Problem zu formulieren. Neves et al. setzen eine modifizierte Wichtungsmethode (2.31) ein, wobei sich die Werte der Wichtungsfaktoren w_j aus der Lösung eines inneren Optimierungsproblems bestimmen. Die optimale Materialverteilung wird auf der Basis eines orthotropen, mikrostrukturierten Werkstoffmodells bestimmt. Der Werkstoff ist periodisch aus Mikrozellen mit einem quadratischen Loch aufgebaut. Die Kantenlänge des Lochs bzw. die Dichte des Werkstoffs werden im Optimierungsprozeß variiert. Die Orientierung des Werkstoffs ist fest.

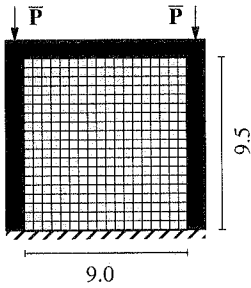
In diesem Abschnitt wird eine modifizierte Vorgehensweise untersucht und deren Ergebnisse mit den Resultaten von Neves et al. [183] verglichen. Die kritische Grenzlast wird ebenfalls auf der Basis einer klassischen Stabilitätsanalyse maximiert, wobei die Masse im Entwurfsraum vorgegeben ist. Das min–max–Problem wird im Unterschied zu Neves et al. [183] mit der Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion approximiert.

$$\min_{\hat{s}} \frac{1}{\bar{p}} \ln \left[\sum_{i=1}^{n_\lambda} e^{-p\lambda_i(\hat{s})} \right] \quad ; \quad \lambda_i(\hat{s}) > 0 \quad (4.25)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho(\hat{s}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{s}_L \leq \hat{s} \leq \hat{s}_U$$

Die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte ist mit n_λ bezeichnet. Das Optimierungsproblem ist der Minimierung der Masse des Tragwerks bei Vorgabe der kritischen Grenzlast äquivalent. Der Gradient der Zielfunktion wird analog zur Ableitung (4.20) berechnet. Die Sensitivitäten der Eigenwerte werden nach dem diskreten, adjungierten Verfahren (2.116) ermittelt.

Die wesentlichen Effekte, die bei der Maximierung der Traglast in der materiellen Topologieoptimierung auftreten, werden anhand des Beispiels in Bild 4.20 veranschaulicht, das ebenfalls von Neves et al. [183] untersucht wird. Der ebene Rahmen ist vorgegeben. Die Verstrebungen sind so anzuordnen, daß die Grenzlast des gesamten Tragwerks maximal ist. Die Masse ist auf 15.2% des maximal im Entwurfsraum möglichen Materials beschränkt. Die Grenzlast des Rahmens ohne Verstrebungen beträgt $\lambda_1 = 0.131$. Das Topologieoptimierungsproblem wird zunächst auf der Basis des orthotropen, mikrostrukturierten Werkstoffmodells (Mikrozelle mit Rechteck–Loch) mit den Homogenisierungsergebnissen nach Suzuki, Kikuchi [241] durch das in Abschnitt 2.1 erläuterte SQP–Verfahren gelöst. Um die Untersuchungen



Zielfunktion:	Maximale Grenzlast
Nebenbedingung:	Masse $\bar{m} = 15.2\%$
Last:	$\bar{P} = 10^9$
Dicke:	$t = 0.1$
Werkstoffmodell:	Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$
E-Modul:	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$
Querdehnzahl:	$\nu = 0.3$

□ Entwurfsraum ■ Rahmen (Breite $b_R = 1.0$)

Bild 4.20: Rahmen unter Druckbelastung

von Neves et al. [183] möglichst genau nachzubilden, werden nur die Abmessungen des Rechteck-Lochs variiert. Die Orientierung des Werkstoffs ist festgehalten. Zu Beginn des Optimierungsprozesses ist der Entwurfsraum gleichförmig mit porösem Material gefüllt. Im Optimierungsprozeß treten, wie bei der Optimierung von Eigenfrequenzen, "künstliche" Eigenformen bei niedrigen Lastfaktoren in quasi-leeren Bereichen mit hochporösem Werkstoff auf. Diese "künstlichen" Eigenformen können als Instabilitäten auf Materialebene gedeutet werden (Bendsøe, Triantafyllidis [28]). Die "optimierte" Materialverteilung, die zugehörigen Beulformen (33. Iterationsschritt) und der Verlauf der kritischen Lastfaktoren im Optimierungsprozeß sind in Bild 4.21 dargestellt, wobei die Iterationen im "Line-Search" mit aufgeführt werden. Die "künstlichen" Instabilitäten führen zu erheblichen Oszillationen sowie zu unsymmetrischen Ergebnissen und verhindern, daß das Material in den entsprechenden Bereichen entfernt wird. Dieser Effekt ist aus der Topologieoptimierung von Fachwerken mit variablen Querschnitten bekannt, wenn das lokale Beulen der Stäbe im Optimierungsprozeß berücksichtigt wird (Rozvany, Zhou [222]). Wie die Beschränkung der maximal zulässigen Stabspannungen in einer Kraftgrößen-Formulierung führt auch die Berücksichtigung von lokalem Beulen zu singulären Optima (\rightarrow Abschnitt 4.1.5). Die elastische Steifigkeit des Stabes wird durch eine Reduktion des Querschnittes verringert, ohne daß sich die geometrische Steifigkeit dabei im gleichen Maße verändert. Dies ist im wesentlichen der Grund, weshalb "künstliche" Instabilitäten auch in der materiellen Topologieoptimierung von kontinuierlichen Tragwerken auftreten. Die geometrische Steifigkeit von Bereichen mit hochporösem Werkstoff ist im Vergleich zu deren elastischer Steifigkeit so groß, daß diese Bereiche bei niedrigen Lastfaktoren instabil werden. In Rozvany et al. [221] und Rozvany, Zhou [222] sind verschiedene Strategien zusammengestellt, um dieses Problem bei Fachwerken zu vermeiden. Eine Grundidee beruht darauf, die Spannungen und damit die geometrische Steifigkeit für kleine Querschnitte künstlich zu reduzieren. Neves et al. [183] vereinfachen diese Vorgehensweise für die materielle Topologieoptimierung, indem die geometrische Steifigkeit von Finiten Elementen aus hochporösem Material $\rho < \bar{\rho}_{lim}$ vernachlässigt wird.

In Bild 4.22 sind die Optimierungsergebnisse für verschiedene Werkstoffmodelle und Schwellenwerte $\bar{\rho}_{lim}$ dargestellt. Die optimierte Materialverteilung und vor allem die erzielten Grenzlaster sind erheblich von dem zugrunde liegenden Werkstoffmodell abhängig. Das mikrostrukturierte, orthotrope Werkstoffmodell ist für "künstliche" Eigenformen sehr anfällig. Die Optimierungsergebnisse sind nur dann aussagekräftig, wenn die geometrische Steifigkeit in hochporösen Bereichen vernachlässigt wird. Im vorliegenden Beispiel treten für das makroskopische, orthotrope und isotrope Werkstoffmodell (3.44), (3.41) keine "künstlichen" Eigenformen auf, wobei abermals die Orientierung des orthotropen Materials festgehalten wird. Bei diesen Modellen führt die Vernachlässigung der geometrischen Steifigkeit für $\rho < \bar{\rho}_{lim}$ zu einer Reduktion des Anteils an porösem Material im Optimum. Bei $\bar{\rho}_{lim} = \rho_0$ wird das Versagen der erzeugten Streben erst dann berücksichtigt, wenn die Dichte in den entsprechenden Bereichen der Dichte des homogenen Werkstoffs entspricht. Da die Grenzlaster im vorliegenden Beispiel maßgeblich durch das Tragverhalten der vorgegebenen Rahmenstruktur bestimmt wird, entstehen hieraus keine Probleme. Die Vernachlässigung des Versagens der erzeugten Streben kann, wie das nachfolgende Beispiel jedoch zeigt, zu unzulässigen Lösungen führen. Die Verstreungen des aus Bild 4.18 bekannten Beispiels werden auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells auf maximale Grenzlaster optimiert. Anstelle der konzentrierten Massen belasten vertikale Einzelkräfte gleicher Größe das Tragwerk. Das Optimierungsproblem wird zusätzlich durch die Filtermethode stabilisiert, um die Abhängigkeit

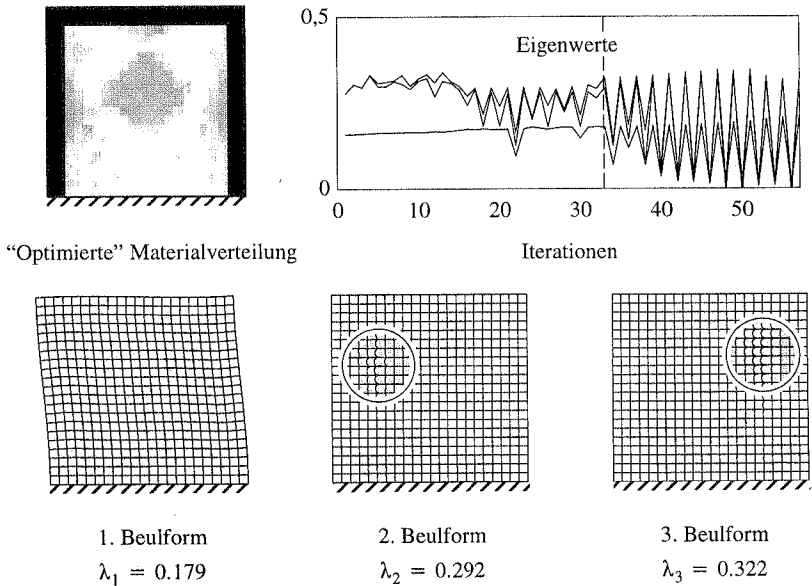


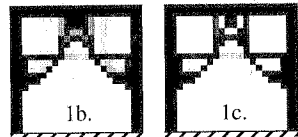
Bild 4.21: "Künstliche" Instabilitäten in Bereichen mit hochporösem Werkstoff

der Optimierungsergebnisse von der Diskretisierung zu vermindern. Die Glättung wird analog zu der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehensweise lediglich auf die Ableitungen angewandt. Die Grenzlast für die Rahmenstruktur ohne Verstrebungen beträgt $\lambda_1^{(0)} = 0.018$, die für den Startentwurf mit gleichförmig im Entwurfsraum verteilter Masse beträgt $\lambda_1^{(0)} = 1.970$. In Bild 4.23 sind die Ergebnisse für die Fälle, daß das Versagen der erzeugten Streben berücksichtigt bzw. nicht berücksichtigt wird, dargestellt. Die Anordnung der Streben ist in beiden Fällen ähnlich, unterscheidet sich jedoch insbesondere im unteren Teil des Tragwerks. Zudem werden die Streben unterschiedlich stark ausgeführt. Dies hat zur Folge, daß die mit (A) gekennzeichneten Streben in dem mit $\rho_{lim} > \rho_0$ optimierten Tragwerk bei einem sehr kleinen Lastfaktor $\lambda_1^{**} \rightarrow 0$ versagen, wenn nachträglich die geometrische Steifigkeit der erzeugten Verstrebungen mit berücksichtigt wird. Der entsprechende kritische Lastfaktor ist mit λ^{**} bezeichnet. Zum Vergleich wird die Anordnung der Streben hinsichtlich maximaler Steifigkeit bei vorgegebener Masse im Entwurfsraum nach der Aufgabenstellung (4.1) ermittelt. Eine anschließende Eigenwertanalyse zeigt, daß das Tragwerk maximaler Steifigkeit eine geringere Grenzlast besitzt als der Startentwurf.

Die aufgeführten Beispiele zeigen die Notwendigkeit, das geometrisch nichtlineare Strukturverhalten im Optimierungsprozeß zu berücksichtigen. Die numerischen Untersuchungen ergaben über die hier gezeigten Beispiele hinaus, daß die Topologieoptimierungsergebnisse erheblich vom regularisierenden Werkstoffmodell abhängen. Die Empfindlichkeit der Werkstoffmodelle gegenüber "künstlichen" Instabilitäten ist von Beispiel zu Beispiel sehr unterschiedlich. Die Methode, die geometrische Steifigkeit in Bereichen mit hochporösem Material zu vernachlässigen, führt nur dann zu befriedigenden Resultaten, wenn vorgegebene Trag-

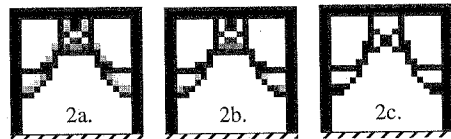
1. Mikrozelle mit Rechteck-Loch

- 1b. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.3$ $\lambda_1^* = 0.739$
 1c. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 1.0$ $\lambda_1^* = 0.766$



2. Makroskopisch, orthotrop

- 2a. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.0$ $\lambda_1^* = 0.783$
 2b. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.3$ $\lambda_1^* = 0.815$
 2c. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 1.0$ $\lambda_1^* = 0.842$



3. Makroskopisch, isotrop

- 3a. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.0$ $\lambda_1^* = 0.964$
 3b. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.3$ $\lambda_1^* = 1.015$
 3c. $\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 1.0$ $\lambda_1^* = 1.004$

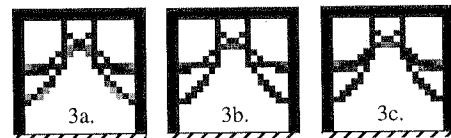
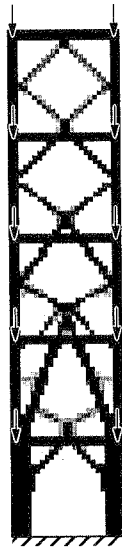


Bild 4.22: Maximierung der Grenzlast für verschiedene Werkstoffmodelle

Zielfunktion: Maximale Grenzlast
 Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 28.57\%$

Geometrie- und Materialdaten: Bild 4.18
 Einzellast: $\bar{P} = 10^5$



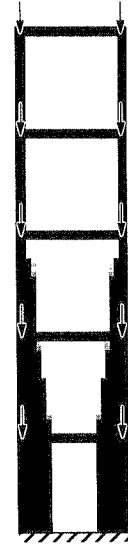
$$\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 = 0.3$$

$$\lambda_1^* = \lambda_1^{**} = 2.756$$



$$\bar{\rho}_{lim}/\rho_0 > 1.0$$

$$\lambda_1^* = 3.262, \lambda_1^{**} \rightarrow 0$$



Maximale Steifigkeit

$$\lambda_1^{**} = 0.381$$

Bild 4.23: Maximierung der Grenzlast eines Rahmentragwerks

werkselemente für das Tragverhalten dominant sind. Die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse wird weiterhin dadurch erheblich eingeschränkt, daß die Grenzlast durch eine lineare Eigenwertanalyse abgeschätzt wird. Diese Approximation und die darauf basierenden Optimierungsergebnisse sind jedoch nicht zulässig, wenn größere Deformationen im Vorbeulbereich auftreten. Für diesen Fall ist eine Erweiterung der materiellen Topologieoptimierung auf nichtlineare Analyseverfahren mit einer begleitenden Eigenwertanalyse notwendig. Die Berücksichtigung des Nachbeulverhaltens ist ebenfalls von großer Bedeutung, um zwischen einem lokalen Beulen und einem globalem Strukturversagen unterscheiden zu können.

4.4 Topologieoptimierung bei nichtlinearem Materialverhalten

Die Sicherheit eines Tragwerks ist durch das kritische und überkritische Verhalten, beispielsweise wenn die Belastbarkeit des Materials überschritten wird, gekennzeichnet. In den bislang untersuchten Optimierungsproblemen wird die Topologie von Tragwerken auf der Basis von porösen Werkstoffmodellen mit einem linear elastischen Materialverhalten erzeugt. Tatsächlich

sind jedoch die Eigenschaften eines Werkstoffs vom Belastungszustand abhängig. Duktile Materialien, wie Metalle, beginnen oberhalb einer gewissen Spannung zu fließen. Spröde Materialien, wie Keramiken, versagen beim Erreichen ihrer Belastungsgrenze schlagartig. Um die Eigenschaften des optimierten Tragwerks möglichst genau zu erfassen, ist es daher notwendig, das tatsächliche Verhalten des Materials zu berücksichtigen.

Die optimale Topologie von Fachwerken bei nichtlinearem Materialverhalten wird in mehreren Arbeiten untersucht. Eine Zusammenstellung zu diesem Thema findet sich bei Bendsøe [34]. Elastoplastisches Materialverhalten mit Ver- bzw. Entfestigung wird u.a. von Taylor, Washbaugh [250] und Taylor [249] berücksichtigt. Der Aufbau von Fachwerken aus Werkstoffen mit unterschiedlichen Steifigkeiten im Zug- und Druckbereich werden u.a. von Kirsch [136] und Achtziger [1] optimiert. Das nichtlineare Materialverhalten wird bei der Topologieoptimierung von Fachwerken explizit in der Formulierung des Optimierungsproblems als Nebenbedingungen berücksichtigt. Die Arbeiten in der materiellen Topologieoptimierung von kontinuierlichen Tragwerken beschränken sich im wesentlichen auf elastoplastisches Materialverhalten (Yuge, Kikuchi [284], Mayer et al. [172], Maute et al. [170]). In ersten Studien wird untersucht, wie quasi-sprödes Materialverhalten am Beispiel von Stahlbeton in der materiellen Topologieoptimierung berücksichtigt werden kann (Ramm et al. [206], Maute, Ramm [164]). In diesen Arbeiten wird die Lage der Stahlbewehrung mit Hilfe der Topologieoptimierung bestimmt und das quasi-spröde Materialverhalten des Betons entweder indirekt über die Zielfunktion oder direkt über ein einfaches Beton-Werkstoffmodell berücksichtigt. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der eigenen Untersuchungen zu elastoplastischem und quasi-sprödem Materialverhalten in der Topologieoptimierung dargestellt und diskutiert.

4.4.1 Elastoplastisches Materialverhalten

In der materiellen Topologieoptimierung werden poröse Werkstoffmodelle eingesetzt, in denen die Materialeigenschaften sowohl von der Dichte wie auch dem Spannungszustand abhängen. Der elastoplastische Werkstofftensor \mathbf{C}^{ep} ist eine Funktion der variablen Werkstoffparameter \hat{s} und der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$.

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C}^{\text{ep}}(\hat{s}, \boldsymbol{\sigma}(\hat{s})) \quad (4.26)$$

Dabei ist zu beachten, daß ein elastoplastisches Materialverhalten zu pfadabhängigen Problemen führt (\rightarrow Abschnitt 2.3.2). Der elastoplastische Werkstofftensor ist keine eindeutige Funktion der Spannungen und kann nur während des Belastungsprozesses ermittelt werden. Daher ist es nicht mehr, wie im elastischen Fall, möglich, die Werkstoffeigenschaften a-priori mittels Homogenisierungsverfahren als Funktion der Werkstoffparameter \hat{s} zu ermitteln. Es ist zwar möglich, die makroskopischen Werkstoffeigenschaften innerhalb der Pfadverfolgung über erweiterte Homogenisierungsmethoden aus dem Aufbau der Mikrostruktur zu berechnen (u.a. Suquet [240], Schröder [228]). Diese Vorgehensweise führt jedoch in der Topolo-

gieoptimierung zu einem extrem hohen numerischen Aufwand, da die Sensitivitäten der makroskopischen Werkstoffeigenschaften durch eine Differentiation der Homogenisierungsmethode für jeden Werkstoffparameter in jedem Gleichgewichtspunkt während der Pfadverfolgung bestimmt werden müssen. Daher werden die elastoplastischen Eigenschaften poröser Werkstoffe, wie Elastizitäts- und Verfestigungsmodul oder Fließspannung, auf makroskopischer Ebene durch explizite Funktionen angenähert. Bislang werden in der Topologieoptimierung nur isotrope, elastoplastische, poröse Werkstoffmodelle eingesetzt, um das Optimierungsproblem zu regularisieren.

Yuge und Kikuchi [284] verwenden ein makroskopisches, isotropes, elastoplastisches Werkstoffmodell mit linearer Verfestigung, um die Steifigkeit von Rahmentragwerken nach der Timoshenko-Balkentheorie zu optimieren. Mayer et al. [172] bestimmen die Topologie von Schalentragwerken auf der Basis eines ähnlichen Werkstoffmodells, um die Energieabsorption bei dynamischer Belastung zu maximieren. Die Strukturantwort wird mit einem direkten Zeitintegrationsverfahren bestimmt. Die Sensitivitäten werden für ein quasi-statisches Tragverhalten berechnet, wobei die Gradienten des elastoplastischen Werkstoffverhaltens nur grob abgeschätzt werden. In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur Optimierung der Duktilität für statisch beanspruchte Scheibentragwerke bei elastoplastischem Materialverhalten vorgestellt (Maute et al. [170]). Die Masse im Entwurfsraum ist vorgegeben. Es wird ein makroskopisches, isotropes, poröses Werkstoffmodell eingesetzt, das ein nichtlineares Materialverhalten im Rahmen einer J_2 -von Mises Plastizität mit linearer Ver- und Entfestigung für kleine Verzerungen beschreibt (\rightarrow Abschnitt 2.3.2). Die Strukturantwort wird mit einem Newton-Raphson-Verfahren iterativ bestimmt. Die Sensitivitäten der Duktilität werden unter Berücksichtigung der algorithmisch konsistenten Materialtangente berechnet. Die Materialverteilung wird mit dem in Abschnitt 2.1 erläuterten OC-Verfahren ermittelt.

Die Duktilität ist ein Maß für das Verformungsvermögen eines Tragwerks im elastischen und plastischen Bereich. Durch die Steigerung der Duktilität kann ein plötzliches Versagen vermieden und die Energieabsorption erhöht werden. Dies ist beispielsweise bei Erdbebenbeanspruchung von Bauwerken oder im Automobilbau von großer Bedeutung, um die Eigenschaften einer Karosserie bei einem Crash zu verbessern. Die Duktilität ist durch das Integral der inneren Energie für eine vorgegebene Verschiebung $\bar{\mathbf{u}}$ definiert.

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{s}}} \quad & - \int_{\Omega_s} \int_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \boldsymbol{\sigma}^T \, d\boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega_s & (4.27) \\ & \int_{\Omega_s} \rho(\hat{\mathbf{s}}) \, d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{s}_i : 0 \leq \hat{\rho}_i \leq \rho_0 \end{aligned}$$

Der Tensor $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ bezeichnet die Gesamtdehnungen entsprechend der vorgegebenen Verschiebung $\bar{\mathbf{u}}$. Die Optimierungsvariablen sind die Dichten $\hat{s}_i = \hat{\rho}_i$ der Finiten Elemente im Entwurfsraum.

Die elastoplastischen Werkstoffkenngrößen, d.h. der Elastizitätsmodul E , die Steifigkeit im plastischen Bereich E_t und die Fließspannung $\bar{\sigma}_y$, werden explizit als Funktionen b_j der Dichte $\hat{\rho}_1$ formuliert.

$$E = b_1(\hat{\rho}_1) E_0 \quad ; \quad E_t = b_2(\hat{\rho}_1) E_{t_0} \quad ; \quad \bar{\sigma}_y = b_3(\hat{\rho}_1) \bar{\sigma}_{y_0} \quad (4.28)$$

Die Funktionen b_j werden so gewählt, daß der optimierte Entwurfsraum möglichst eindeutig in leere und mit homogenem Material belegte Bereiche unterteilt ist. Da das $(\rho/\rho_0)^\beta$ -Gesetz (3.41) für linear elastische Probleme zu eindeutigen Resultaten führt, werden die Funktionen b_j analog zu dieser Beziehung gewählt.

$$b_j = \left(\frac{\hat{\rho}_1}{\rho_0} \right)^{\beta_j} \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \beta_j = \left\{ \beta_j \in \mathbb{R} \mid \beta_j \geq 1 \right\} \quad (4.29)$$

Darüber hinaus stimmt dieser Ansatz näherungsweise mit den experimentellen Untersuchungen von Weber [270] an Metallschäumen mit variabler Dichte sowie den numerischen Ergebnissen von elastoplastischen Homogenisierungsverfahren nach Yuge, Kikuchi [284] überein.

Sensitivitätsanalyse

Die pfadabhängige Strukturantwort wird mit einem verschiebungskontrollierten Newton-Raphson-Verfahren berechnet (\rightarrow Abschnitt 2.3.2). Parallel hierzu werden die ebenfalls pfadabhängigen Sensitivitäten ermittelt. Auf der Basis einer variationellen Formulierung läßt sich der Gradient der Duktilität bezüglich der Optimierungsvariablen $\hat{s}_i = \hat{\rho}_1$ effizient berechnen.

$$\nabla_s f = - \nabla_s \iint_{\Omega_s} \int_{\bar{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\epsilon} d\Omega_s = - \nabla_s \iint_{\Omega_s} \int_{\bar{\epsilon}} \int_{\boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\epsilon} d\Omega_s \quad (4.30)$$

Wenn sich die Form des Entwurfsraums im Optimierungsprozeß nicht ändert, folgt aus der Variation des Prinzips der virtuellen Arbeit in inkrementeller Form (2.71) bezüglich der Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

$$\int_{\Omega_s} \nabla_s d\boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\epsilon} d\Omega_s - \int_{\Gamma_{ps}} \nabla_s (d\lambda \bar{\mathbf{p}}^T) \delta\mathbf{u} d\Gamma_{ps} = 0 \quad (4.31)$$

In der weiteren Herleitung werden die Volumenkräfte $\bar{\mathbf{b}}$ aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Die Anteile aus den Volumenkräften $\bar{\mathbf{b}}$ können analog zu denen aus den Flächenlasten $\bar{\mathbf{p}}$ behandelt werden. Die Ableitung der inkrementellen Spannungs-Dehnungsbeziehung (2.68)

$$\nabla_s d\boldsymbol{\sigma} = \nabla_s (\mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon}) = \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{C}^{ep} \nabla_s d\boldsymbol{\epsilon} \quad (4.32)$$

und die Variation des Prinzips der virtuellen Arbeit (4.31) führen auf:

$$\int_{\Omega_s} \int_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} (d\boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C}^{ep} + \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^{ep}) d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s = \int_{\Gamma_{ps}} \int_{\bar{\mathbf{u}}} \int_{\lambda} \nabla_s (d\lambda \bar{\mathbf{p}}^T) d\mathbf{u} d\Gamma_{ps} \quad (4.33)$$

Im Gleichgewicht können die Variation der Dehnungen mit $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}$ und die Variation der Verschiebungen mit $\delta\mathbf{u} = d\mathbf{u}$ gleichgesetzt werden. Wenn die Last $\bar{\mathbf{p}}$ nicht von der Optimierungsvariablen $\hat{s}_i = \hat{\rho}_i$ abhängt, folgt aus den Beziehungen (4.31)–(4.33):

$$\begin{aligned} \nabla_s f &= - \int_{\Omega_s} \int_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} (\nabla_s d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\sigma}^T \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega_s \\ &= \int_{\Omega_s} \int_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s - 2 \int_{\Gamma_{ps}} \int_{\bar{\mathbf{u}}} \int_{\lambda} \nabla_s d\lambda \bar{\mathbf{p}}^T d\mathbf{u} d\Gamma_{ps} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Duktilität wie auch deren Sensitivität sind von der Belastungsgeschichte abhängig. In der variationellen Formulierung (4.34) ist darauf zu achten, ob ein last- oder verschiebungsgesteuerter Pfadverfolgungsalgorithmus eingesetzt wird, um die diskretisierten, nichtlinearen Gleichungen (2.72),(2.73) zu lösen. In einem lastgesteuerten Verfahren wird der inkrementelle Zuwachs $d\lambda$ vorgegeben und folglich ist dessen Ableitung $\nabla_s d\lambda$ gleich Null. Verschiebungsgesteuerte Verfahren sind für elastoplastische Probleme besser geeignet. In diesem Fall ergibt sich der Gradient $\nabla_s d\lambda$ aus der Bedingung, daß die Ableitung der Verschiebungskomponente $\nabla_s d\hat{u}_j$, mit welcher der Pfadverfolgungsalgorithmus kontrolliert wird, gleich Null ist. Aufgrund der großen Anzahl von Optimierungsvariablen in der Topologieoptimierung kann die Berechnung von $\nabla_s d\hat{u}_j$ sehr aufwendig werden. Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf den Spezialfall, daß die äußeren Kräfte nur auf den kontrollierten Freiheitsgrad wirken. In diesem Fall ist das Skalarprodukt $\hat{\mathbf{P}}^T d\mathbf{u} = \hat{P}_j d\hat{u}_j$ konstant und die Ableitung des Inkrements des Lastfaktors $\nabla_s d\lambda$ kann aus den diskretisierten, inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen (2.72), (2.73) direkt berechnet werden.

$$\nabla_s d\lambda = d\mathbf{u}^T \nabla_s \mathbf{K}_T d\mathbf{u} / \left(\hat{\mathbf{P}}^T d\mathbf{u} \right) \quad (4.35)$$

Die entsprechende kontinuierliche Formulierung lautet:

$$\nabla_s d\lambda = \int_{\Omega_s} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s / \int_{\Gamma_{ps}} \bar{\mathbf{p}}^T d\mathbf{u} d\Gamma_{ps} \quad (4.36)$$

Für diesen Fall folgt der Gradient der Duktilität aus (4.36) eingesetzt in (4.34):

$$\nabla_s f = - \int_{\Omega_s} \int_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s \quad (4.37)$$

Die Ableitung der algorithmisch konsistenten Materialtangente $\nabla_s \mathbf{C}^{\text{ep}}$ wird hinsichtlich der Werkstoffkenngrößen E , E_t , $\bar{\sigma}_y$ in drei Anteile aufgespalten.

$$\nabla_s \mathbf{C}^{\text{ep}} = (\nabla_E \mathbf{C}^{\text{ep}} \nabla_s E)_I + (\nabla_{E_t} \mathbf{C}^{\text{ep}} \nabla_s E_t)_{II} + (\nabla_{\bar{\sigma}_y} \mathbf{C}^{\text{ep}} \nabla_s \bar{\sigma}_y)_{III} \quad (4.38)$$

Die Ableitungen der Werkstoffkenngrößen nach der Optimierungsvariablen $\hat{s}_i = \hat{\rho}_i$ berechnen sich aus den Ansätzen (4.28), (4.29).

$$\nabla_s E = \beta_1 E / \hat{\rho}_i \quad ; \quad \nabla_s E_t = \beta_2 E_t / \hat{\rho}_i \quad ; \quad \nabla_s \bar{\sigma}_y = \beta_3 \bar{\sigma}_y / \hat{\rho}_i \quad (4.39)$$

Die weiteren Betrachtungen beruhen auf der Annahme, daß die Ableitung der algorithmisch konsistenten Tangente aufgrund einer Änderung des Spannungszustandes infolge einer Variation der Optimierungsvariablen $\hat{s}_i = \hat{\rho}_i$ im aktuellen Inkrement vernachlässigt werden kann.

$$\bar{\nabla}_\sigma \mathbf{C}^{\text{ep}} \nabla_s d\sigma = 0 \quad (4.40)$$

In diesem Fall sind die Ableitung der Normalen auf die Fließfläche und die Ableitung des endlichen Inkrements des plastischen Multiplikators Null.

$$\nabla_s \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad ; \quad \nabla_s dy = 0 \quad (4.41)$$

Die Annahmen (4.40) bzw. (4.41) sind für das vorliegende Materialmodell mit linearer Ver- und Entfestigung zulässig und werden durch numerische Untersuchungen bestätigt (Maute et al. [170]). Im allgemeinen können die Ableitungen (4.40) und (4.41) jedoch nicht vernachlässigt werden (u.a. Tsay, Arora [260], Vidal, Haber [267]).

Der erste Anteil des Gradienten der elastoplastischen Materialtangente ergibt sich für ein 3–dimensionales Werkstoffgesetz aus der Ableitung der inkrementellen Spannungs–Dehnungsbeziehung (2.68), (2.69) nach dem Elastizitätsmodul.

$$\begin{aligned} (\nabla_E \mathbf{C}^{\text{ep}} \nabla_s E)_I &= \nabla_s (\mathbf{H}^{-1}) - \tilde{\omega} \left[\nabla_s (\mathbf{H}^{-1}) \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \right] - \tilde{\omega} \left[\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \nabla_s (\mathbf{H}^{-1}) \right] \\ &\quad - \nabla_s \tilde{\omega}_I \left[\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\tilde{\omega} = \left(\frac{2}{3} E_h + \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \right)^{-1} \quad ; \quad \nabla_s \tilde{\omega}_I = -\tilde{\omega}^2 \left[\frac{2}{3} \nabla_s (E_h)_I + \mathbf{n}^T \nabla_s (\mathbf{H}^{-1}) \mathbf{n} \right] \quad (4.43)$$

Der Gradient für den 2–dimensionalen Fall wird analog hierzu mit dem entsprechend modifizierten Verfestigungsmodul E_h^{2d} ermittelt. Die Ableitung der modifizierten elastischen Tangente (2.69) folgt unter Berücksichtigung des isotropen Werkstoffmodells (3.41) aus:

$$\nabla_s (\mathbf{H}^{-1}) = \beta_1 \tilde{\mathbf{H}}^{-1} / \hat{\rho}_i \quad ; \quad \tilde{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}^{-1} \quad (4.44)$$

Die Ableitung des Verfestigungsmoduls E_h berechnet sich für ein 3–dimensionales Werkstoffgesetz aus den elastischen und plastischen Werkstoffkenngrößen (2.66) und für den 2–dimensionalen Fall aus der modifizierten Beziehung (2.70).

$$\nabla_s(\mathbf{E}_h)_I = \beta_1 (\tilde{\mathbf{E}}_h)_I / \hat{\rho}_i \quad ; \quad (\tilde{\mathbf{E}}_h)_I = - \frac{E E_t^2}{(E - E_t)^2} \quad (4.45)$$

$$\nabla_s(\mathbf{E}_h^{2d})_I = \beta_1 (\tilde{\mathbf{E}}_h^{2d})_I / \hat{\rho}_i \quad ; \quad (\tilde{\mathbf{E}}_h^{2d})_I = \frac{1}{(1 - 2/3 E_h d\gamma)^2} (\tilde{\mathbf{E}}_h)_I \quad (4.46)$$

Der erste Anteil der partiellen Ableitung der algorithmisch konsistenten Tangente wird für ein 3-dimensionales Werkstoffgesetz wie folgt zusammengefaßt:

$$(\nabla_E \mathbf{C}^{ep} \nabla_s \mathbf{E})_I = \beta_1 (\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_I / \hat{\rho}_i \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_I &= \tilde{\mathbf{H}}^{-1} - \tilde{\omega} \left(\tilde{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \right) - \tilde{\omega} \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \right) \\ &\quad + \tilde{\omega}^2 \left[\frac{2}{3} (\tilde{\mathbf{E}}_h)_I + \mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{n} \right] \left[\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für den 2-dimensionalen Fall. In gleicher Weise kann der zweite Anteil des Gradienten von $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$ in (4.38) hergeleitet werden.

$$\left(\nabla_{E_t} \mathbf{C}^{ep} \nabla_s E_t \right)_{II} = \beta_2 (\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_{II} / \hat{\rho}_i \quad (4.49)$$

$$(\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_{II} = \frac{2}{3} \tilde{\omega}^2 \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{H}^{-1} \right) (\tilde{\mathbf{E}}_h)_{II} \quad (4.50)$$

Die entsprechenden Ableitungen des Verfestigungsmoduls E_h lauten:

$$(\tilde{\mathbf{E}}_h)_{II} = \frac{E^2 E_t}{(E - E_t)^2} \quad ; \quad (\tilde{\mathbf{E}}_h^{2d})_{II} = \frac{1}{(1 - 2/3 E_h d\gamma)^2} (\tilde{\mathbf{E}}_h)_{II} \quad (4.51)$$

Formal ist die Ableitung der elastoplastischen Materialtangente nach der Fließspannung Null. Es ist jedoch leicht nachzuempfinden, daß die Duktilität von der Größe der Fließspannung abhängt. Der entsprechende Anteil der Sensitivität resultiert aus dem nichtglatten Materialverhalten, wenn der Werkstoff bei Belastung zu fließen beginnt und sich bei Entlastung elastisch entspannt (Bild 4.24a). Das Integral über die vorgeschriebenen Verschiebungen bzw. Dehnungen ist in Integrale über die elastischen und über die plastischen Verformungen aufzuspalten. Die Variation der Integrationsgrenzen führt auf die Sensitivität der Duktilität nach der Fließspannung. Dieser Ansatz wird in Maute et al. [170] an einem eindimensionalen Modell veranschaulicht und kann direkt auf multilineare Werkstoffmodelle erweitert werden. Die Ableitungen, die aus jedem Knick in der Spannungs–Dehnungsbeziehung resultieren, sind über den nachfolgenden Verformungsprozeß zu integrieren. Für einen Lastzyklus mit Be- und Entlastung berechnet sich der entsprechende Anteil der Sensitivitäten der Duktilität aus:

$$\left(\nabla_{\bar{\alpha}_y} f \nabla_s \bar{\alpha}_y \right)_{III} = - \int_{\Omega_s} \int_{\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} \nabla_s \bar{\sigma}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{ep} \right) d\boldsymbol{\epsilon} d\Omega_s \quad (4.52)$$

$$- \int_{\Omega_s} \int_{\tilde{\mathbf{e}}} \nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{\text{ep}^{-1}} \mathbf{C} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s$$

Der Spannungstensor zum Zeitpunkt des Fließens ist mit $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ und zum Zeitpunkt der Entlastung mit $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ bezeichnet. Der Bereich der plastischen Deformation ist durch $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ gekennzeichnet, der Bereich der Entlastung mit $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Die Ableitung $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ kann explizit aus der Abhängigkeit der Fließspannung $\bar{\sigma}_y(\hat{\rho}_i)$ berechnet werden, wogegen die Ermittlung von $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ eine vollständige Sensitivitätsanalyse der Spannungen und inneren Variablen benötigt. In den weiteren Betrachtungen wird von einer reinen Belastung ohne lokale Entlastung ausgegangen. Der Gradient $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ ergibt sich aus der Ableitung der Norm des Spannungsdeviators (2.57).

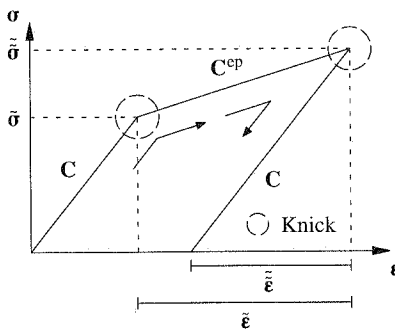
$$\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\sigma}_y^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \nabla_s \bar{\sigma}_y = \beta_3 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} / \hat{\rho}_i \quad (4.53)$$

Die Ableitung der Duktilität (4.52) wird unter Berücksichtigung des Ansatzes für die Fließfunktion (4.29) berechnet.

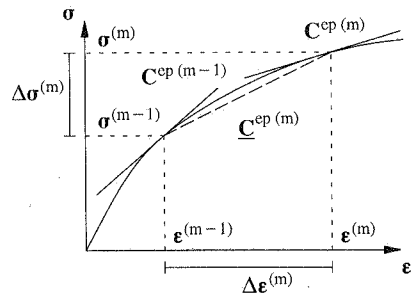
$$\left(\nabla_{\bar{\sigma}_y} f \quad \nabla_s \bar{\sigma}_y \right)_{\text{III}} = - \int_{\Omega_s} \int_{\tilde{\mathbf{e}}} \frac{\beta_3}{\hat{\rho}_i} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{\text{ep}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_s \quad (4.54)$$

Die Anteile der Sensitivität der Duktilität (4.47), (4.49), (4.54) können für eine im Element Ω_i konstante Dichte wie folgt zusammengefaßt werden.

$$\nabla_s f = - \nabla_s \bar{f} / \hat{\rho}_i \quad (4.55)$$



a. Nichtglattes Materialverhalten bei Be- und Entlastung



b. Numerische Berechnung der Duktilität

Bild 4.24: Einfluß des nichtlinearen Materialverhaltens auf die Berechnung der Duktilität

$$\begin{aligned} \nabla_s \tilde{f} = & \int_{\Omega_i} \int_{\tilde{\epsilon}} \int_{\epsilon} d\epsilon^T (\beta_1 (\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_I + \beta_2 (\nabla_s \mathbf{C}^{ep})_{II}) d\epsilon d\Omega_i \\ & + \int_{\Omega_i} \int_{\tilde{\epsilon}} \beta_3 \tilde{\sigma}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{ep}) d\epsilon d\Omega_i \end{aligned} \quad (4.56)$$

Mayer et al. [172] verwenden im Gegensatz hierzu eine weitaus gröbere Approximation zur Berechnung der Sensitivitäten der Duktilität. Anstatt des Gradienten des algorithmisch konsistenten Materialtensors werden die Ableitungen der elastischen Tangente im elastischen Bereich und die der elastoplastischen Tangente im plastischen Bereich bestimmt. Die Abhängigkeit der Fließspannung von der Dichte wird in der Sensitivität der Duktilität vernachlässigt.

Numerische Implementierung von Struktur- und Sensitivitätsanalyse

Die inkrementelle Vorgehensweise beruht auf einem iterativen, verschiebungskontrollierten Newton-Raphson-Verfahren. Die Spannungs- und Dehnungsinkremente $\Delta\sigma^{(m)}$, $\Delta\epsilon^{(m)}$ werden mit einem impliziten Euler-Rückwärts-Algorithmus in den Gauß-Punkten der Finiten Elemente bestimmt. Der Index (m) kennzeichnet das aktuelle Verschiebungsinkrement, n_{ep} die Anzahl aller Inkremente. Der Zuwachs der Duktilität $\Delta f^{(m)}$ wird in jedem Inkrement durch numerische Integration über alle n_G Gauß-Punkte berechnet.

$$f = - \sum_{m=1}^{n_{ep}} \Delta f^{(m)} \quad ; \quad \Delta f^{(m)} = \sum_{j=1}^{n_G} w_j \left(\frac{1}{2} \Delta \epsilon_j^{(m)T} \Delta \sigma_j^{(m)} + \Delta \epsilon_j^{(m)T} \sigma_j^{(m-1)} \right) \quad (4.57)$$

Der Wichtungsfaktor w_j ergibt sich aus der Integrationsvorschrift und der Größe der Finiten Elemente. Die Duktilität wird nach (4.57) auf der Basis einer gemittelten Materialtangente $\underline{\mathbf{C}}^{ep}$ berechnet (Bild 4.24b). Die Materialtangente werden jedoch nur zu Beginn und am Ende des Inkrements ermittelt. Der Zuwachs der Duktilität $\Delta f^{(m)}$ kann daher nur indirekt über die mittlere Materialtangente formuliert werden.

$$\Delta f^{(m)} = \sum_j^{n_G} w_j \left(\frac{1}{2} \Delta \epsilon_j^{(m)T} \mathbf{C}_j^{ep(m)} \Delta \epsilon_j^{(m)} + \Delta \epsilon_j^{(m)T} \sigma_j^{(m-1)} \right) \quad (4.58)$$

Der Tensor $\Delta \epsilon_j^{(m)}$ ist wie folgt definiert:

$$\Delta \epsilon_j^{(m)} = \left(\mathbf{C}_j^{ep} - 1 \right)^{(m)} \Delta \sigma_j^{(m)} \quad (4.59)$$

Die Gleichungen (4.57) und (4.58) sind hinsichtlich der numerischen Berechnung der Duktilität äquivalent, jedoch nicht hinsichtlich der Ermittlung deren Sensitivitäten. Da sich die Sensitivität der Duktilität (4.55), (4.56) aus den Ableitungen des elastoplastischen Materialtensors ergibt, wird diese analog zur Formulierung (4.58) berechnet.

$$\nabla_s f = - \left[(\nabla_s f)_A + (\nabla_s f)_B \right] \quad (4.60)$$

Der erste Summand entspricht dem ersten Integral in (4.56).

$$(\nabla_s f)_A = \sum_{m=1}^{n_{ep}} (\nabla_s f)_A^{(m)} \quad (4.61)$$

$$(\nabla_s f)_A^{(m)} = \sum_{j=1}^{n_G} w_j \left(\frac{1}{2} \Delta \sigma_j^{(m)T} \underline{\underline{C}}_j^{(m)} \Delta \epsilon_j^{(m)} + \Delta \sigma_j^{(m)T} \underline{\underline{e}}_j^{(m-1)} \right) \quad (4.62)$$

$$\underline{\underline{e}}_j^{(m-1)} = \sum_{p=1}^{m-1} \underline{\underline{C}}_j^{(p)} \Delta \epsilon_j^{(p)} \quad (4.63)$$

$$\underline{\underline{C}}_j^{(m)} = \left(C^{ep-1} (\beta_1 (\nabla_s C^{ep})_I + \beta_2 (\nabla_s C^{ep})_{II}) / \hat{\rho}_i \right)_j^{(m)} \quad (4.64)$$

Mit dem zweiten Summanden wird der Einfluß der Abhängigkeit der Fließspannung von der Dichte berücksichtigt, wobei sich wiederum die Betrachtungen auf einen reinen Belastungsvorgang ohne lokale Entlastung beschränken. Der Algorithmus kann jedoch problemlos auf Entlastung erweitert werden.

$$(\nabla_s f)_B = \sum_{m=1}^{n_{ep}} \sum_{j=1}^{n_G} \underline{\underline{\sigma}}_j^T \Delta \epsilon_j^{(m)} \quad (4.65)$$

Zu Beginn des Verfahrens ist der Tensor $\underline{\underline{\sigma}}_j$ Null. Wenn im Lastinkrement (m_y) in einem Gauß-Punkt Fließen einsetzt, wird der Tensor $\underline{\underline{\sigma}}_j$ des entsprechenden Gauß-Punkts zu:

$$\underline{\underline{\sigma}}_j = \frac{\beta_3}{\hat{\rho}_i} (\mathbf{I} - \underline{\underline{C}}_j^{-1} \underline{\underline{C}}_j^{ep}) \sigma^{(m_y)} \quad (4.66)$$

Die Fließspannung $\underline{\underline{\sigma}}_j$ sowie der Bereich der plastischen Deformationen $\bar{\epsilon}$ werden im Pfadverfolgungsalgorithmus nicht exakt bestimmt. Der daraus resultierende Fehler kann jedoch im allgemeinen vernachlässigt werden. Um die Sensitivitäten der Duktilität mit diesem Verfahren zu berechnen, werden die Spannungen $\sigma_j^{(m-1)}$, $\sigma_j^{(m)}$, die Dehnungen $\epsilon_j^{(m-1)}$, $\epsilon_j^{(m)}$, die Normalen auf die Fließfläche $\mathbf{n}_j^{(m-1)}$, $\mathbf{n}_j^{(m)}$, die plastischen Multiplikatoren $\gamma_j^{(m-1)}$, $\gamma_j^{(m)}$ sowie die berechnete Fließspannung $\underline{\underline{\sigma}}_j$ zu Beginn und am Ende des Lastinkrements für jeden Gauß-Punkt abgespeichert.

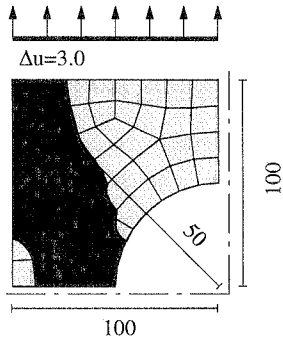
Beispiel zur Sensitivitätsanalyse

Der Einfluß der Abhängigkeiten der verschiedenen Werkstoffkenngrößen von der Dichte auf die Sensitivität der Duktilität wird anhand des Beispiels in Bild 4.25 veranschaulicht. Die obere und untere Kante einer quadratischen Scheibe mit einem kreisförmigen Loch sind fest eingespannt und werden verschiebungskontrolliert um $\Delta u = 2 \times 3.0$ auseinander gezogen. Im

Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop, elastoplastisch

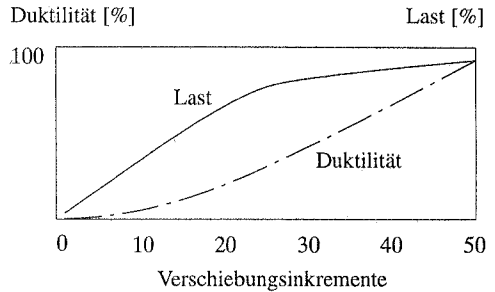
Dichte	$\rho = 0.5$	Elastizitätsmodul	$E_0 = 30000.0$ ($\beta_1 = 3.0$)
Querdehnzahl	$\nu = 0.0$	Verfestigungsmodul	$E_{t_0} = 3000.0$ ($\beta_2 = 3.0$)
Dicke	$t = 1.0$	Fließspannung	$\bar{\sigma}_{y_0} = 240.0$ ($\beta_3 = 2.0$)

Plastische Deformationen ■



Symmetrieachse —

- 1 Ableitung (Finite Differenzen)
- 2 Ableitung (analytisch)
- 3 Ableitung bzgl. dE (analytisch)
- 4 Ableitung bzgl. dE_t (analytisch)
- 5 Ableitung bzgl. $d\bar{\sigma}_y$ (analytisch)



Ableitung der Duktilität nach der Dichte [%]

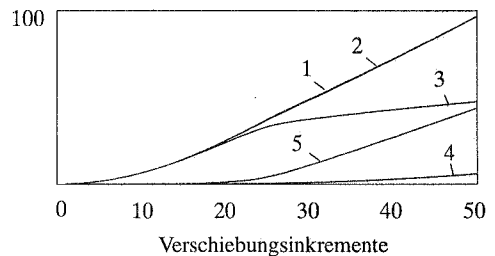


Bild 4.25: Numerische und analytische Berechnung der Sensitivität der Duktilität

Finite Elemente Modell sind die Freiheitsgrade auf den Kanten in Richtung der Last miteinander gekoppelt. Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen wird ein Viertel der Scheibe analysiert. Die Optimierungsvariable ist die Dichte aller Finiten Elemente. Im oberen Diagramm sind die Last und die Duktilität über die vertikale Verschiebung der oberen Kante aufgetragen. Die Sensitivität der Duktilität nach der Dichte wird zum einen mit dem zuvor erläuterten Algorithmus, zum anderen mit einem Finiten Differenzen Verfahren ermittelt. Die Verläufe der jeweils berechneten Sensitivitäten über die Verschiebungsinkremente sind im unteren Diagramm dargestellt und verdeutlichen die Güte der Approximationen innerhalb des analytischen Verfahrens. Die analytisch ermittelte Sensitivität kann hinsichtlich der Werkstoffkenngrößen in drei Anteile aufgespalten werden. Es wird deutlich, daß der Anteil aus der Variation der Fließspannung mit zunehmender Belastung größer wird und daher nicht vernachlässigt werden darf.

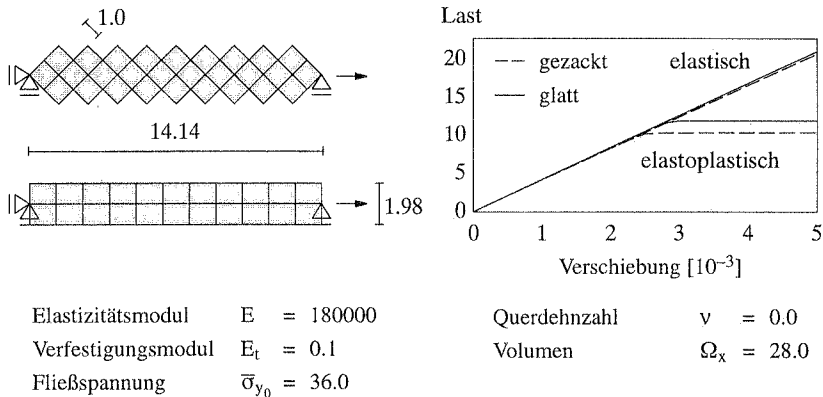


Bild 4.26: Einfluß gezackter Ränder auf das elastische und elastoplastische Tragverhalten

Die vorgestellten Algorithmen zur Struktur- und Sensitivitätsanalyse werden in Menrath et al. [173] angewandt, um die Duktilität von Scheibentragwerken nach Aufgabenstellung (4.27) für verschiedene Verfestigungsmodule $E_t > 0$, $E_t = 0$ und $E_t < 0$ zu maximieren. In diesen Untersuchungen wird festgestellt, daß die im Optimierungsprozeß entstehende, diskontinuierliche Materialverteilung zu Spannungsspitzen und damit zu einem vorzeitigen Fließen des Materials führt. Dies verursacht einerseits, daß das Tragverhalten der Struktur nur unzureichend erfaßt wird, andererseits erhebliche Konvergenzprobleme bei der Bestimmung des Gleichgewichts in den Lastinkrementen. Das Resultat eines Topologieoptimierungsprozesses sind oftmals stabförmige Tragwerkselemente. In Bild 4.26 ist die diskontinuierliche Materialverteilung direkt in einen Stab mit gezackten Rändern umgesetzt worden. Diesem wird ein glatter Stab mit gleicher Länge und gleichem Volumen in einem numerischen Zugversuch gegenübergestellt. Der Unterschied der Kräfte beträgt für die dargestellten Diskretisierungen für gleiche, vorgegebene Verschiebungen am Ende der Stäbe bei elastischem Materialverhalten nur 1.7%. Bei einem elastoplastischen Materialverhalten dagegen ist die Kraft in dem Stab mit gezackten Rändern um 15% geringer als die im glatten Stab. Dieser Defekt kann durch eine Anpassung der Diskretisierung des Entwurfsraums während des Optimierungsprozesses vermieden werden. Ein entsprechendes, adaptives Verfahren wird in Abschnitt 6.2.2 vorgestellt und an einem Beispiel zur adaptiven Topologieoptimierung bei elastoplastischem Materialverhalten veranschaulicht.

4.4.2 Quasi-sprödes Materialverhalten am Beispiel Stahlbeton

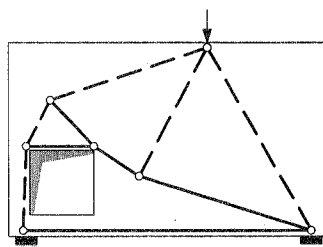
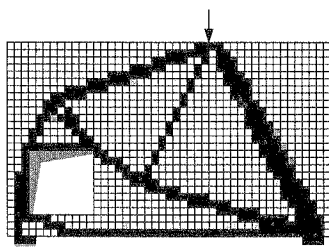
Stahlbeton ist einer der bedeutendsten Werkstoffe im Bauwesen und erfordert aufgrund seiner stark unterschiedlichen Festigkeiten bei Zug- und Druckbelastung besondere Konstruktionsverfahren, wie beispielsweise die Bemessung mit Fachwerkmodellen (Schlaich, Schäfer [225]).

Die materielle Topologieoptimierung stellt ein potentielles Werkzeug dar, um auch den Konstruktionsprozeß von Tragwerken aus Stahlbeton zu unterstützen. Diesbezüglich werden nachfolgend verschiedene Ansätze vorgestellt. Diese sollen lediglich die grundsätzlichen Möglichkeiten aufzeigen, ohne daß dabei der Anspruch erhoben wird, mit den bislang entwickelten Verfahren anwendungsorientierte Konstruktionsaufgaben lösen zu können.

Wie die bisherigen Beispiele zeigen, führt die Topologieoptimierung auf der Basis suboptimaler (linear elastischer) Werkstoffmodelle zu Tragwerken, die im wesentlichen aus Stäben aufgebaut sind. Daher liegt es nahe, die Topologieoptimierung einzusetzen, um Fachwerkmodelle zu erzeugen. Dies wird mit dem Beispiel in Bild 4.27 veranschaulicht. Das gesamte Tragwerk stellt den Entwurfsraum für das Topologieoptimierungsproblem dar. Die optimale Materialverteilung wird hinsichtlich minimaler Dehnungsenergie bei vorgegebener Masse (4.1) für das makroskopische, orthotrope, linear elastische Werkstoffmodell (3.44) mit dem in Abschnitt 2.1 erläuterten OC-Verfahren bestimmt. Das Optimierungsergebnis kann direkt in ein Fachwerkmodell umgesetzt werden, wobei zwischen auf Zug und Druck belasteten Stäben unterschieden wird. Die Zugstäbe bilden die Bewehrung. Diese Formulierung des Topologieoptimierungsproblems ist jedoch nur bedingt geeignet, Fachwerkmodelle zu erzeugen. Auf der einen Seite stimmt das Tragverhalten des Fachwerkmodells um so besser mit dem der kontinuierlichen Scheibe überein, je steifer das Fachwerk ist. Auf der anderen Seite wird die Lastabtragung in bestimmten Bereichen des kontinuierlichen Tragwerks nur unzureichend durch das mittels Topologieoptimierung erzeugte Fachwerkmodell erfaßt. So bleibt beispielsweise die Auffächerung der Kräfte in der Umgebung der Lasteinleitung und der Auflager unberücksichtigt. Darüber hinaus bleiben konstruktive Aspekte, wie eine randparallele Bewehrungsführung, unbeachtet. Weiterführende Studien zur Topologieoptimierung mit Fachwerken zeigen, daß der zuletzt aufgeführte Defekt durch eine erweiterte Formulierung des Opti-

Zielfunktion: Steifigkeit
Nebenbedingung: Masse 25%

Werkstoffmodell: Makroskop. ortho. $\beta = 2.5$
Querdehnzahl: $\nu = 0.3$



Optimierte Materialverteilung

— Zugstab - - - Druckstab

Bild 4.27: Fachwerkmodelle durch Topologieoptimierung

mierungsproblems vermieden werden kann, indem Zugstäbe, die nicht zum Rand des Tragwerks parallel sind, bestraft werden (Ulrich [261]).

Es ist notwendig, die unterschiedlichen Festigkeiten des Betons im Zug- und Druckbereich zu berücksichtigen, um zuverlässigere Optimierungsergebnisse zu erhalten. Dies kann zum einen indirekt durch Entwurfskriterien, zum anderen direkt durch die Simulation des nicht-linearen Materialverhaltens des Betons geschehen. Beide Varianten werden untersucht, wobei der Verbundwerkstoff "Stahlbeton" in einem 2-Schichten Modell nachgebildet wird. Eine Schicht Ω_b bildet den Beton und bleibt während der Optimierung unverändert. Die andere Schicht Ω_s stellt den Entwurfsraum für den Stahl dar. Die Materialverteilung des Stahls wird auf der Basis des makroskopischen, isotropen, linear elastischen Werkstoffmodells (3.41) bestimmt. Die lokale Bewehrungsrichtung wird mit diesem Modell nicht explizit berücksichtigt. Die Optimierungsvariablen sind die Dichten $\hat{\rho}_i$ der Finiten Elemente. Die Steifigkeiten der beiden Schichten werden im FE-Modell addiert. Zunächst wird die geringe Zugfestigkeit des Betons im Zugbereich lediglich durch eine spezielle Zielfunktion berücksichtigt, wobei dem Beton und dem Stahl ein linear elastisches Materialverhalten zugewiesen wird. Der Stahl wird so angeordnet, daß das Volumen der positiven Hauptspannungen in der Betonschicht minimal wird. Die Masse des verfügbaren Stahls ist im Entwurfsraum Ω_s konstant.

$$\min_{\hat{s}} \int_{\Omega_b} \begin{cases} (\sigma_1)^n d\Omega_b & \forall \sigma_1 > 0 \\ 0 d\Omega_b & \forall \sigma_1 \leq 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\int_{\Omega_s} \rho d\Omega_s - \bar{m} = 0 \quad ; \quad \hat{s}_j : 0 \leq \hat{\rho}_i \leq \rho_0$$

Diese Problemstellung wird für das Beispiel in Bild 4.28 gelöst. Die Masse des Stahls in der Bewehrungsschicht beträgt 20% der maximal möglichen Materialmenge im Entwurfsraum. Der Gradient des Spannungstensors wird in einer diskreten, direkten Sensitivitätsanalyse (2.99)–(2.103) bestimmt. Die Ableitung der Hauptspannung σ_1 erfolgt für den ebenen Spannungszustand aus:

$$\nabla_s \sigma_1 = \frac{1}{2} (\nabla_s \sigma_{11} + \nabla_s \sigma_{22}) + \frac{1}{\sigma_q} \left(\frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) (\nabla_s \sigma_{11} - \nabla_s \sigma_{22}) + \sigma_{12} \nabla_s \sigma_{12} \right) \quad (4.68)$$

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}$$

Die Materialverteilung wird mit dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen SQP-Verfahren optimiert. Das Zugspannungsvolumen im Beton kann bei der optimierten Materialverteilung um 80% gegenüber einer gleichförmig mit porösem Material belegten Bewehrungsschicht reduziert werden. Der Stahl lagert sich überall dort an, wo Zugspannungen in der Betonschicht auftreten, und bildet in diesen Bereichen eine Art "Heftpflaster" für den Beton.

Zielfunktion: Zugspannungsvolumen (Beton)
 Nebenbedingung: Masse 20% (Bewehrung)
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$ (Bewehrung)

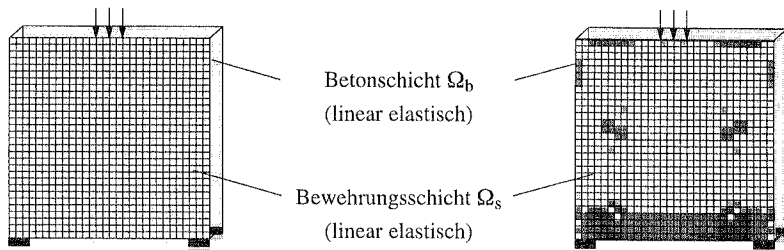


Bild 4.28: Reduktion des Zugspannungsvolumens in der Betonschicht

Mögliche Lastumlagerungen infolge von Rissen im Beton werden in der zuvor beschriebenen Vorgehensweise nicht berücksichtigt. Um diesen Effekt zu erfassen, wird das nichtlineare Materialverhalten des Betons durch ein einfaches orthotropes Beton-Werkstoffmodell simuliert (Kompfner [145]). Die Spannungs-Dehnungsbeziehung für den ebenen Spannungszustand lautet:

$$\sigma = C_b \varepsilon \quad ; \quad C_b = T^T C_b^{\square} T \quad (4.69)$$

$$C_b^{\square} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu \sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2) G \end{bmatrix}$$

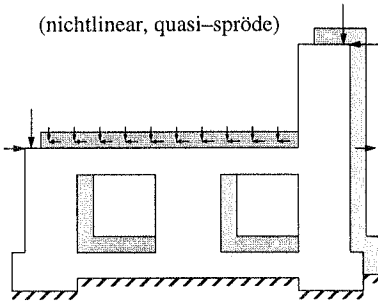
$$G = \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{1}{4} (E_1 + E_2 - 2\nu \sqrt{E_1 E_2})$$

Der Werkstofftensor C_b^{\square} ist in einem an den Richtungen der Hauptspannungen orientierten Koordinatensystem definiert. Die Transformationsmatrix T in das globale Koordinatensystem ist in Anhang A6 gegeben. Die Elastizitätsmoduli E_1, E_2 werden als Funktionen der Hauptspannungen σ_1, σ_2 angesetzt, um die charakteristischen Festigkeitseigenschaften des Betons zu beschreiben.

$$E_i = \begin{cases} E_i = 0 & \forall \sigma_i > \sigma_d \\ E_i = E_b & \forall \sigma_z \geq \sigma_i \geq -\sigma_d \\ E_i = 0 & \forall \sigma_i < -\sigma_d \end{cases} \quad (4.70)$$

Die Zugfestigkeit des Betons ist mit σ_z , dessen Druckfestigkeit mit $\sigma_d > 0$ und dessen Elastizitätsmodul mit E_b bezeichnet. Ist der richtungsbezogene Elastizitätsmodul E_i Null, so bedeutet dies, daß ein Riß quer ab zu dieser Richtung verläuft. Die Risse können im Belastungsprozeß

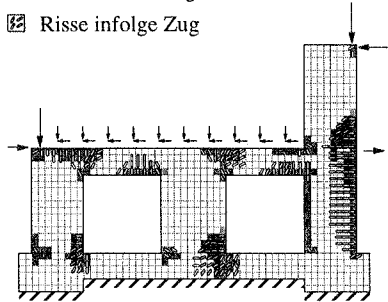
- Bewehrungsschicht
(linear elastisch)
- Betonschicht
(nichtlinear, quasi-spröde)



Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse 15%
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 3.0$

Optimierte Materialverteilung

- Bewehrung
- keine Bewehrung
- Risse infolge Zug



(Beton & Bewehrung)
 (Bewehrung)
 (Bewehrung)

Bild 4.29: Optimierung der Bewehrung auf der Basis eines nichtlinearen Betonmodells

rotieren. Der Stahl wird wiederum als makroskopischer, isotroper, linear elastischer, poröser Werkstoff modelliert.

Die Steifigkeit des gesamten Tragwerks, d.h. Beton- und Bewehrungsschicht, wird auf der Basis dieser Werkstoffmodelle für ein vorgegebenes Lastniveau $\bar{\lambda}$ maximiert. Die Masse an Stahl ist vorgegeben. Die Optimierungsvariablen sind die Dichten $\hat{\rho}_i$ der Finiten Elemente in der Bewehrungsschicht. Das statische Gleichgewicht (2.72), (2.73) wird für das vorgeschriebene Lastniveau $\bar{\lambda}$ mit einem lastgesteuerten Newton-Raphson-Verfahren iterativ bestimmt. Die Anzahl der Iterationen innerhalb der Lastinkremente ist in diesem Fall deutlich größer als für das elastoplastische Problem, da der Werkstofftensor C_b nicht algorithmisch konsistent ist. Die Ableitungen der Dehnungsenergie können analog zum elastischen Problem (4.3) näherungsweise berechnet werden, da die Optimierungsvariablen $\hat{\rho}_i$ nur direkt auf die elastische Steifigkeit der Bewehrungsschicht wirken und die inkrementellen Lastfaktoren vorgegeben sind.

Dieses Verfahren wird angewandt, um den Aufbau der Bewehrung des Tragwerks in Bild 4.29 zu bestimmen. Die Scheibe ist durch mehrere Einzel- und Streckenlasten sowie dem Eigengewicht belastet. Die Masse in der Bewehrungsschicht beträgt 15%. Die optimale Materialverteilung wird mit dem OC-Verfahren aus Abschnitt 2.1 ermittelt. Die Steifigkeit des Tragwerks kann um einen Faktor 145 (!) erhöht werden. Im Ausgangsentwurf mit einer homogenen Verteilung des Stahls in der Bewehrungsschicht treten große Risse auf, die das Tragwerk erheblich schädigen. Die Bewehrung, die der optimierten Materialverteilung entspricht, kontrolliert die Ausbreitung der Risse. Aufgrund der zahlreichen Approximationen und Vereinfachungen, auf

denen die vorgestellten Verfahren beruhen, sind die erzielten Resultate nur unter Vorbehalten zu bewerten. Die Untersuchungen sind in weiteren Studien erheblich zu verfeinern, damit die Topologieoptimierung den Konstruktionsprozeß von Tragwerken aus Stahlbeton zuverlässig unterstützen kann.

4.5 Beurteilung der Verfahren der materiellen Topologieoptimierung

Die unterschiedlichen Aufgabenstellungen, die im in diesem Kapitel untersucht wurden, zeigen die Breite der Anwendungsmöglichkeit der materiellen Topologieoptimierung auf. Die dabei eingesetzten Topologieoptimierungsverfahren zeichnen sich durch folgende Merkmale aus:

- ⊕ “Einfache” Modellierung der Optimierungsaufgabe: Das Topologieoptimierungsproblem wird durch die Einführung von porösen Werkstoffen in ein Materialverteilungsproblem überführt. Läßt man den hierfür notwendigen theoretischen Hintergrund außer Acht, so muß lediglich der Entwurfsraum mit einem FE-Netz diskretisiert und die Materialverteilung optimiert werden, wobei die Werkstoffparameter der Finiten Elemente die Optimierungsvariablen darstellen.
- ⊕ Robuste Optimierungsprozedur: Die einfache Modellierung der Optimierungsaufgabe in Verbindung mit stabilen OC-Verfahren führt für die untersuchten Problemstellungen zu überwiegend robusten Optimierungsprozeduren. Die entsprechenden Programme können ohne größeres Hintergrundwissen von Seiten des Benutzers angewandt werden.

Die Topologieoptimierungsergebnisse können in ein CAD-orientiertes Entwurfsmodell übertragen und mit Verfahren der Formoptimierung verfeinert werden (→ Kapitel 5,6). Den Stärken der Topologieoptimierungsverfahren stehen jedoch einige Schwachpunkte gegenüber. Diese lassen sich zum einen auf den theoretischen Hintergrund zurückführen.

- ⊖ Dilemma des “0–1” Problems: Die ursprüngliche Fragestellung nach einer optimalen, beliebig diskontinuierlichen Materialverteilung im Entwurfsraum führt auf eine nichtkonvexe Optimierungsaufgabe. Optimale Werkstoffmodelle regularisieren dieses Problem zwar vollständig, ergeben jedoch optimale Materialverteilungen mit einem hohen Anteil an porösem Material. Diese Ergebnisse erlauben nur bedingt eine Aussage über den optimalen Aufbau eines Tragwerks, das aus einem isotropen, homogenen Material konstanter Dichte aufgebaut ist. Suboptimale Werkstoffmodelle führen näherungsweise auf “0–1” Materialverteilungen, die jedoch von der Diskretisierung des Entwurfsraums und der Steuerung des Optimierungsprozesses abhängen. Die in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Stabilisierungsverfahren reduzieren lediglich diese Defekte, ohne dabei das grundsätzliche Dilemma der Topologieoptimierung beheben zu können.
- ⊖ Orthotropes – isotropes Materialverhalten: Selbst wenn auf der Basis eines suboptimalen, orthotropen Werkstoffmodells eine annähernd “0–1” Materialverteilung bestimmt werden kann, ist die Umsetzung dieses Ergebnisses in ein Tragwerk, das aus einem isotropen Material

besteht, hinsichtlich einer Änderung des Tragverhaltens problematisch. Eine relative Dichte von "1" bedeutet bei den in der Topologieoptimierung eingesetzten, regularisierenden, orthotropen Werkstoffen nicht unmittelbar, daß die Werkstoffeigenschaften mit denen des isotropen Grundwerkstoffs übereinstimmen. So können beispielsweise die relativen Faserdichten des makroskopischen, orthotropen Werkstoffs (3.44) zu $\chi_1 = 1$ und $\chi_2 = 0$ gesetzt werden, um Querdehneffekte zu vermeiden. Die relative Gesamtdichte beträgt in diesem Fall $\rho/\rho_0 = 1$, die Werkstoffeigenschaften sind jedoch extrem von der Orientierung abhängig: $C_{1111} = C_{01111}, C_{2222} = 0$.

Zum anderen weisen die bislang vorgestellten Topologieoptimierungsverfahren hinsichtlich der numerischen Modellierung und Lösung des Materialverteilungsproblems folgende methodische Schwachstellen auf.

- ⊖ Anzahl der Optimierungsvariablen: Der Entwurfsraum ist mit einem feinen FE-Netz zu diskretisieren, damit die Geometrie des Tragwerks aus der optimierten Materialverteilung zumindest näherungsweise bestimmt werden kann. Dies führt einerseits zu einem hohen numerischen Aufwand für die Strukturanalyse, andererseits zu einer großen Anzahl von Optimierungsvariablen. Insbesondere bei orthotropen Werkstoffmodellen mit drei Materialparametern je Element steigt die Anzahl der Optimierungsvariablen stark an. Derart große Optimierungsprobleme können nur mit OC-Verfahren effizient gelöst werden. Dies wiederum schränkt die Komplexität der Aufgabenstellung ein. So werden in der materiellen Topologieoptimierung vorwiegend Probleme mit nur einer Nebenbedingung untersucht, wobei die Entwurfskriterien vorzugsweise selbstadjungiert sind.
- ⊖ Zuverlässigkeit der Strukturanalyse: Die über den Optimierungsprozeß unveränderliche Diskretisierung des Entwurfsraums führt zu diskontinuierlichen, gezackten Übergängen zwischen leeren und mit Material belegten Bereichen. Entlang von diesen Übergängen, welche die Konturen des optimierten Tragwerks darstellen, treten "künstliche" Spannungsspitzen auf. Es ist daher nicht möglich, lokale Spannungskriterien im Optimierungsprozeß zu kontrollieren oder elastoplastisches Materialverhalten zuverlässig zu simulieren.

Die materielle Topologieoptimierung stellt in der Form, wie sie bislang in dieser Arbeit vorgestellt wurde und heute in Forschung und Industrie entwickelt bzw. eingesetzt wird, ein robustes Werkzeug dar, um konzeptionelle Entwurfsvorschläge zu erzeugen. Aufgrund der theoretisch wie auch methodisch bedingten Nachteile geben die Topologieoptimierungsergebnisse jedoch nur einen äußerst groben Anhaltspunkt für den Aufbau, die Form und die Abmessungen des optimalen Tragwerks. Einen Ansatz, insbesondere die methodischen Schwachstellen der Topologieoptimierungsverfahren zu beheben, stellt eine adaptive Diskretisierung des Entwurfsraums und die Integration der Formoptimierung in den Topologieoptimierungsprozeß dar (→ Abschnitt 6.2).

5 Formoptimierung

Der grundlegende Aufbau eines kontinuierlichen Tragwerks kann mit der Methode der materiellen Topologieoptimierung bestimmt werden. Hierbei wird die Veränderung der Geometrie anhand der Materialverteilung in einem raumfesten Bezugssystem beschrieben. Die Methoden der Formoptimierung sind effizienter, um die Form der Kanten und Oberflächen von kontinuierlichen Tragwerken im Detail zu bestimmen. Sie beschreiben die Veränderung der Geometrie anhand der Tragwerkskonturen in einem körperfesten, konvektiven Bezugssystem. Die Topologie des Tragwerks kann dabei jedoch nicht mehr verändert werden.

In der Formoptimierung von kontinuierlichen Tragwerken werden abschnittsweise glatte Funktionen $s(\mathbf{x}) \in V_s(\Omega_x) \subseteq H^1(\Omega_x)$ gesucht, welche die Kanten und Oberflächen des Tragwerks beschreiben. Das zugrunde liegende Variationsproblem kann im allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Daher wird die Geometrie des Tragwerks $s(\mathbf{x})$ durch Näherungsfunktionen $s^h(\mathbf{x}, \hat{s}) \in V_s^h(\Omega_x)$ approximiert und das Variationsproblem in eine Parameteroptimierungsaufgabe mit endlich vielen Optimierungsvariablen \hat{s} überführt. Da in der Formoptimierung bereichsweise glatte Funktionen gesucht werden, können die Funktionenräume so gewählt werden, daß der endlichdimensionale Funktionenraum $V_s^h(\Omega_x)$ einen beschränkten und geschlossenen Unterraum von $V_s(\Omega_x) \subseteq H^1(\Omega_x)$ bildet. Das diskretisierte Problem besitzt eine eindeutige Lösung, die bei einer zunehmenden Feinheit der Approximation gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems strebt. Die Methoden der Formoptimierung unterscheiden sich im wesentlichen durch das Verfahren, wie die Formänderung im Optimierungsprozeß in einer diskretisierten Formulierung beschrieben wird (Bild 5.1).

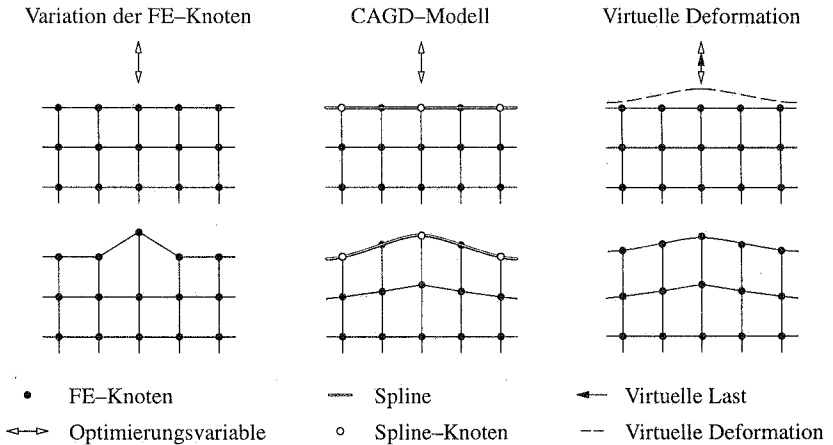


Bild 5.1: Beschreibung der Formänderung im Optimierungsprozeß

In Anlehnung an die Optimierung der Position von Knoten in Fachwerken variierten Zienkiewicz, Campbell [288] zunächst direkt die Position der FE-Knoten im Analysemodell. Dieser Ansatz kann jedoch zu numerischen Instabilitäten führen, die aus der Empfindlichkeit der Finiten Elemente gegenüber einer Verzerrung der Elementgeometrie herrühren (Kikuchi et al. [133]). Es entstehen unregelmäßige, gezackte Ränder. Zudem ist die optimierte Form in ein CAD-Modell zu übertragen, das im weiteren Konstruktionsprozeß verwendet werden kann.

Daher beschreiben u.a. Imam [128], Braibant, Fleury [44] und Bennet, Botkin [35] die Formänderung im Optimierungsprozeß mit den Methoden des "Computer Aided Geometric Design" (CAGD) in einem separaten Entwurfsmodell. Die Geometrie des Tragwerks wird abschnittsweise mit Kurven-, Flächen- oder Volumen-Elementen, auch Design-Elemente genannt, approximiert. Die Positionen der Kontroll-Knoten der Design-Elemente stellen die Optimierungsvariablen im Formoptimierungsprozeß dar. Die Änderung der Koordinaten der FE-Knoten infolge einer Variation der Position der Kontroll-Knoten wird durch das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld beschrieben (→ Abschnitt 2.3.3). Durch die strikte Trennung zwischen Geometrie- und Analysemodell können die zuvor erwähnten numerischen Instabilitäten vermieden werden, wobei die Diskretisierung im FE-Modell im allgemeinen deutlich feiner ist als die Diskretisierung der Geometrie. Die Formfreiheiten können entsprechend den konstruktiven Randbedingungen in der CAGD-Beschreibung kontrolliert und die Optimierungsergebnisse direkt im weiteren Konstruktionsprozeß eingesetzt werden. Die Kopplung des CAGD-orientierten Entwurfsmodells mit dem FE-Modell erfordert jedoch ein entsprechend konzipiertes Programmsystem, in dem Daten vom einen in das andere Modell direkt übertragen werden können. Noch heute verfügen nur wenige Programmsysteme über die entsprechenden Funktionalitäten.

Aus diesem Grund werden alternative Verfahren entwickelt, die ebenfalls zu glatten und numerisch stabilen Optimierungsergebnissen führen, jedoch ausschließlich mit dem FE-Modell arbeiten. Die meisten dieser Verfahren beschreiben die Formänderung im Optimierungsprozeß als mechanische Deformationen infolge von virtuellen Lasten (u.a. Belegundu, Rajan [23], Weck, Büßenschütt [273], Schwarz [230]). Die Belastungen, wie Einzel-, Strecken- und Flächenlasten oder thermische Lasten, werden zu Beginn des Optimierungsprozesses definiert und die Größe dieser gedachten Lasten anschließend variiert. Die geometrischen Eigenschaften des Optimierungsergebnisses, wie die Glattheit der Konturen, können jedoch im Gegensatz zur CAGD-orientierten Beschreibung der Formänderung mit diesem Ansatz nur bedingt kontrolliert werden. Zudem ist das optimierte FE-Modell für den weiteren Konstruktionsprozeß wieder in eine CAD-Beschreibung zurückzuführen.

Die Optimierungsvariablen in der Formoptimierung besitzen zumeist einen globalen Einfluß auf das Tragverhalten. Im Gegensatz zur materiellen Topologieoptimierung, bei der die variablen Materialparameter in erster Linie nur die lokalen mechanischen Eigenschaften bestimmen, bewirkt beispielsweise die Variation der Position eines Kontroll-Knotens eines

Splines eine globale Formänderung und führt damit zu einer Veränderung des gesamten Tragverhaltens. Daher sind die Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse und des Optimierungsverfahren in der Formoptimierung von großer Bedeutung. Es haben sich analytische und verbesserte, semi-numerische Methoden für die Sensitivitätsanalyse in der CAGD-orientierten Formoptimierung bewährt (→ Abschnitt 2.3.3). Da die Anzahl der Optimierungsvariablen in der Formoptimierung verglichen mit der Topologieoptimierung klein ist ($n_s < 200$), werden Verfahren der Mathematischen Programmierung zur Lösung des Optimierungsproblems eingesetzt (→ Abschnitt 2.1).

Neben den mathematisch orientierten Formoptimierungsmethoden existieren verschiedene heuristische Verfahren, die analog zu denen in der materiellen Topologieoptimierung oftmals durch biologische Prozesse motiviert sind (→ Anhang A3). Hierbei werden die Positionen der FE-Knoten aufgrund von Spannungen oder der Dehnungsenergie-dichte entlang der variablen Kante bzw. Oberfläche "optimiert" (u.a. Umetami, Hirai [262], Huiskes et. al. [127], Chen, Tsai [53], Reiter [211]). Mattheck und Burkhardt [158] modifizieren diese Vorgehensweise, um numerische Instabilitäten zu vermeiden und glatte Ränder zu erhalten. In einem iterativen Verfahren wird aus den von Mises Spannungen entlang dem variablen Rand eine Temperaturlast ermittelt und der entsprechend verformte Rand bestimmt. Je nach Größe der Vergleichsspannungen werden die entsprechenden Kanten aufgeheizt oder abgekühlt. Dies führt zu einem lokalen an- oder abschwollen der Kontur. Damit sich infolge der Temperaturlast nicht das gesamte Tragwerk deformiert, besitzen nur die Finiten Elemente entlang der variablen Kanten eine Temperaturdehnzahl ungleich Null. Die elastische Steifigkeit dieser Elemente ist zudem sehr gering. Die heuristischen Verfahren modifizieren die Form des Tragwerks so, daß in erster Linie ein nahezu ausgeglichener Spannungs- bzw. Belastungszustand entlang der variablen Kanten vorliegt. Die Verfahren sind nach eigenen Erfahrungen jedoch nur robust, solange die dabei auftretenden Formänderungen im Vergleich zu den Abmessungen des Tragwerks klein sind. Komplexe Optimierungsprobleme mit mehreren Entwurfskriterien und großen Formänderungen können mit diesen Verfahren jedoch nicht gelöst werden.

Die grundlegenden Entwicklungen in der Formoptimierung sind in Bennet, Botkin [36], Haftka, Grandhi [109] und Ding [79] zusammengestellt. Die Umsetzung der Methoden in entsprechende Algorithmen ist in den Dissertationen von Bletzinger [40], Kimmich [135], Lund [149] und Wieghardt [275] beschrieben. In den letzten fünf Jahren kristallisierten sich folgende Schwerpunkte in der Entwicklung der Formoptimierung heraus:

- Modellierung von dreidimensionalen, geometrisch komplexen Strukturen.
- Berücksichtigung von geometrisch und materiell nichtlinearem Tragverhalten, von Kontaktproblemen und von dynamischen Belastungen.
- Adaptive Diskretisierung von Geometrie- und Analysemodell (→ Kapitel 6).
- Kopplung von physikalischen Modellen: Akustik und Strukturmechanik, Strömungs- und Strukturmechanik.

Die entsprechenden Arbeiten sind in verschiedenen Konferenzbänden veröffentlicht: Hernandez, Brebbia [120], Olhoff, Rozvany [193], Gutkowski, Mroz [104], AIAA [291], [292], Topping [257], [259].

Die nachfolgenden Untersuchungen zur Formoptimierung bauen auf der Dissertation "Formoptimierung von Flächentragwerken" von Bletzinger [40] auf. Diese Arbeit behandelt die Formfindung von Schalentragwerken. Die Schalenoberfläche wird mit CAGD-Methoden beschrieben und mit Verfahren der Mathematischen Programmierung optimiert. In der vorliegenden Arbeit wird diese Vorgehensweise erweitert, um die Form von topologisch komplexen Tragwerken, wie sie bei der Topologieoptimierung entstehen, optimieren zu können. In den folgenden Abschnitten werden das zugrunde liegende Entwurfsmodell vorgestellt und verschiedene Verfahren zur Ermittlung des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes erläutert. Das Vorgehen wird an einem Beispielen zur Formoptimierung von Schalentragwerken veranschaulicht.

5.1 CAGD-orientierte Geometriemodellierung

Die Form des Tragwerks sowie deren Veränderung im Optimierungsprozeß werden durch Design-Elemente abschnittsweise beschrieben. Kanten werden beispielsweise durch Lagrange-, Bézier-Interpolationen oder B-Splines approximiert. Flächen werden u.a. durch Lagrange-, Coons- oder Bézier-Elemente näherungsweise beschrieben (Bild 5.2). Für die Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken werden 3-dimensionale Design-Elemente

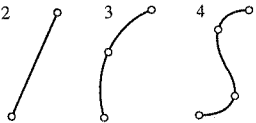
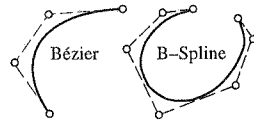
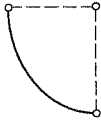
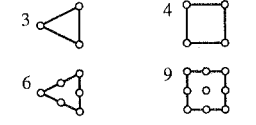
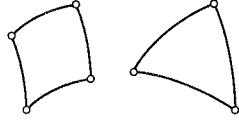
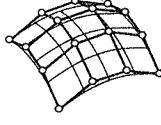
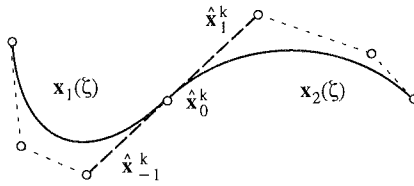
a. Kurven-Elemente $\zeta \in \mathbb{R}^1$		◦ Kontroll-Knoten	
<p>Lagrange</p> 	<p>Splines</p> 	<p>Kreise, Spiralen</p> 	
b. Flächen-Elemente $\zeta \in \mathbb{R}^2$			
<p>Lagrange</p> 	<p>Coons</p> 	<p>Bézier</p> 	

Bild 5.2: Design-Elemente (aus Bletzinger [40])



Charakteristisches Polygon: - - - -

Tangente δ_T : - - - -

Kontinuitätsbedingungen:

$$C_g^0: \hat{\mathbf{x}}_0^k = \mathbf{x}_1(1) = \mathbf{x}_2(0)$$

$$C_g^1: (\hat{\mathbf{x}}_1^k - \hat{\mathbf{x}}_0^k) = \delta_T (\hat{\mathbf{x}}_0^k - \hat{\mathbf{x}}_{-1}^k)$$

Bild 5.3: C_g^1 -Kontinuität bei kubischen Bézier-Splines

$\xi \in \mathbb{R}^3(\Omega_\xi)$ nicht benötigt. Die Geometrie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$ wird abschnittsweise über Formfunktionen N_j im Parameterraum $\xi \in \mathbb{R}^{1,2}(\Omega_\xi)$ der Design-Elemente definiert.

$$\mathbf{x}: \xi \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = \sum_{j=1}^{n_k} N_j(\xi) \hat{\mathbf{x}}_j^k \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}^{1,2}(\Omega_\xi) \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3(\Omega_x) \quad (5.1)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_j^k \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet die Position der n_k Kontroll-Knoten. Die Koordinaten der Kontroll-Knoten sind die Optimierungsvariablen. Gleichung (5.1) stellt eine topologische Abbildung (2.28) in einer Lagrange-Formulierung dar (\rightarrow Abschnitt 2.2). Die im CAGD eingesetzten Interpolationen werden in Böhm et al. [48] sowie Farin [93] detailliert beschrieben. Die in der Formoptimierung üblichen CAGD-Ansätze sind bei Bletzinger [40] und Wieghardt [275] zusammengestellt.

Die Übergänge zwischen den Design-Elementen werden im Optimierungsprozeß kontrolliert, damit keine unerwünschten Knicke in der Form des Tragwerks auftreten. Es ist zwischen der C^n -Kontinuität im Parameterraum $\xi \in \mathbb{R}^{1,2}(\Omega_\xi)$ und der geometrischen C_g^n -Kontinuität im Anschauungsraum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$ zu unterscheiden. Bézier- und B-Splines sind für die Konstruktion von kontinuierlichen Tangenten- und Krümmungsübergängen besonders geeignet, da die C_g^1 - bzw. C_g^2 -Kontinuitätsbedingungen über einfache geometrische Beziehungen für die Lagen der Kontroll-Knoten explizit erfüllt werden können. So ist beispielsweise der Übergang zwischen zwei Bézier-Splines C_g^1 -kontinuierlich, wenn der gemeinsame Kontroll-Knoten und die jeweiligen benachbarten Kontroll-Knoten auf einer Geraden liegen (Bild 5.3). Entsprechende Übergangsbedingungen können für die C_g^2 -Kontinuität und für die Übergänge von Flächen-Elementen hergeleitet werden (Böhm et al. [48], Bletzinger [40]).

Die Formulierung von Kontinuitätsbedingungen über die Lagebeziehungen von Kontroll-Knoten führt zu einer Reduktion der Anzahl von Optimierungsvariablen. So ergibt sich beispielsweise in Bild 5.3 die Position des Kontroll-Knotens $\hat{\mathbf{x}}_1^k$ aus der Lage der Kontroll-Knoten $\hat{\mathbf{x}}_{-1}^k$, $\hat{\mathbf{x}}_0^k$ und dem Tangentenfaktor δ_T . Eine derartige Kopplung von Optimierungsvariablen wird generell als Variablen-Verknüpfung ("variable linking") bezeichnet und ist eine effiziente Methode, um die Formenvielfalt des Entwurfsmodells gezielt zu beschränken⁸.

$$\hat{\mathbf{x}}_j^k = \hat{\mathbf{x}}_j^{k0} + \mathbf{L}_j^k(\hat{s}) \quad (5.2)$$

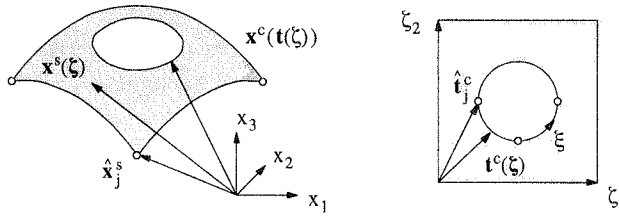


Bild 5.4: Zweistufiges Entwurfsmodell

Der Vektor \hat{x}_j^{k0} stellt den von den Optimierungsvariablen unabhängigen Anteil dar. Die Verknüpfungsmatrix $L_j^{k0}(\hat{s})$ beschreibt den Zusammenhang zwischen den Optimierungsvariablen und den Kontroll-Knoten im Entwurfsmodell. Die Optimierungsvariablen \hat{s} sind zumeist ebenfalls Parameter des Entwurfsmodells, wie die Position von Kontroll-Knoten oder Tangentenfaktoren. Über Verknüpfungsvorschriften werden, wie zuvor erläutert, die Übergangsbedingungen zwischen Design-Elementen explizit erfüllt. Darüber hinaus können beispielsweise die Bewegungsrichtungen von Kontroll-Knoten vorgeschrieben oder die Einhaltung von Symmetrien erzwungen werden. Auf diese Weise werden für die Optimierung bedeutungslose Optimierungsvariablen, wie die Bewegung eines Kontroll-Knotens entlang einer geraden Kante, eliminiert. Das Konzept der Variablen-Verknüpfung wird in Bletzinger [41] sowie Ramm et al. [206] ausführlich beschrieben.

Zweistufiges Entwurfsmodell für topologisch komplexe Schalenträgerwerke

Die Modellierung von Flächenträgerwerken mit 2-dimensionalen Design-Elementen nach Bild 5.2b erfordert ein Design-Elemente-Netz. Bereits für wenig topologisch komplexe Tragwerke führt dies zu einer aufwendigen Diskretisierung der Geometrie mit vielen Design-Elementen und entsprechenden Übergangsbedingungen. Daher wird ein zweistufiges Entwurfsmodell für die Formoptimierung von topologisch komplexen Schalenträgerwerken vorgestellt (Bild 5.4). Die Schalenoberfläche $x^s \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$ wird mit Design-Elementen abschnittsweise als Funktion N_j^s der lokalen Parameter $\xi \in \mathbb{R}^2(\Omega_\xi)$ und der Position der n_s Kontroll-Knoten $\hat{x}_j^s \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$ beschrieben.

$$x^s : \xi \rightarrow x^s(\xi) = \sum_{j=1}^{n_s} N_j^s(\xi) \hat{x}_j^s \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}^2(\Omega_\xi) \rightarrow x^s \in \mathbb{R}^3(\Omega_x) \quad (5.3)$$

8. Im Gegensatz zur Formoptimierung werden in der Topologieoptimierung die Optimierungsvariablen im allgemeinen nicht miteinander verknüpft, da man in diesem Fall eine maximale Entwurfsfreiheit erzielen möchte.

Die Konturen \mathbf{t}^c des Tragwerks auf der Oberfläche werden durch Kurven-Elemente im Parameterraum $\xi \in \mathbb{R}^2(\Omega_c)$ modelliert.

$$\mathbf{t}^c: \xi \rightarrow \mathbf{t}^c(\xi) = \sum_{j=1}^{n_c} N_j^c(\xi) \hat{\mathbf{t}}_j^c \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}(\Omega_c) \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^2(\Omega_c) \quad (5.4)$$

Die Formfunktionen der Kurven-Elemente sind mit $N_j^c(\xi)$, die Positionen der n_c Kontroll-Knoten mit $\hat{\mathbf{t}}_j^c$ und der lokale Kurvenparameter mit ξ bezeichnet. Die Positionen der Kontroll-Knoten $\hat{\mathbf{t}}_j^c$ der Kurven-Elemente werden im Parameterraum variiert, um die Form der Konturen auf der Schalenoberfläche zu optimieren. Mit dieser zweistufigen Vorgehensweise werden einerseits die Vorteile des konventionellen Design-Elemente-Konzepts für die Beschreibung von beliebigen, glatten Freiformflächen genutzt. Andererseits können topologisch komplexe Strukturen auf diesen Oberflächen im Parameterraum alleine über die Tragwerkskonturen modelliert werden, ohne daß ein feines Design-Elemente-Netz notwendig ist. Die weiteren Untersuchungen beschränken sich auf den Fall, daß lediglich die Kontroll-Knoten $\hat{\mathbf{t}}_j^c$ für die Kurven-Elemente im Parameterraum variiert werden, wobei die Form der Oberfläche nicht verändert wird. Die Optimierung der Form der Oberfläche ist über eine Variation der Position der entsprechenden Kontroll-Knoten $\hat{\mathbf{x}}_j^s$ mit dem zweistufigen Entwurfsmodell ebenfalls möglich. Diese Art der Formoptimierung wird u.a. von Bletzinger [40] eingehend untersucht.

Ermittlung des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes

Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld $\bar{\nabla}_s \mathbf{x}$ beschreibt in der Formoptimierung die Änderung der Position eines beliebigen Materialpunktes des Tragwerks infolge einer Variation einer Optimierungsvariablen, wie beispielsweise der Position eines Kontroll-Knotens. Es verknüpft das Analysemodell mit dem Entwurfsmodell und ist für die Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse von zentraler Bedeutung (\rightarrow Abschnitt 2.3.3). Die Bewegung des FE-Netzes im Optimierungsprozeß wird zumeist ebenfalls über die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder gesteuert.

$$\hat{\mathbf{x}}_e^{(k+1)} = \hat{\mathbf{x}}_e^{(k)} + \bar{\nabla}_s \hat{\mathbf{x}}_e^{(k)T} \Delta s^{(k)} \quad (5.5)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_e^{(k)}$ bezeichnet die Position der FE-Knoten im k -ten Iterationsschritt des Optimierungsprozesses. Die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder sind so zu bestimmen, daß große Verzerrungen des FE-Netzes möglichst vermieden werden.

Wenn die Geometrie eines Flächentragwerks ausschließlich durch 2-dimensionale Design-Elemente diskretisiert wird, dann besteht entsprechend der jeweiligen Elementformulierung ein expliziter Zusammenhang zwischen der Variation der Position der Kontroll-Knoten und der von Punkten innerhalb des Design-Elements. Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld $\bar{\nabla}_s \mathbf{x}$ kann anhand der lokalen Variablen ξ eines Punktes direkt berechnet werden.

$$\bar{\nabla}_s \mathbf{x}(\xi) = \sum_{j=1}^{n_k} N_j(\xi) \nabla_s \hat{\mathbf{x}}_j^k \quad (5.6)$$

Wenn beispielsweise die p -te Komponente des Kontroll-Knotens $\hat{\mathbf{x}}_j^k$ in einem kartesischen Koordinatensystem der Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}_i$ entspricht, berechnet sich das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld aus:

$$\nabla_{\mathbf{s}} x_p(\boldsymbol{\zeta}) = N_j(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.7)$$

Die Bewegung des FE-Netzes kann in diesem Fall alternativ zu der linearisierten Beziehung (5.5) explizit über die Elementansätze gesteuert werden. Wenn die Form eines Tragwerks jedoch nur über die begrenzenden Konturen definiert ist, dann besteht kein expliziter Zusammenhang zwischen der Position der entsprechenden Kontroll-Knoten und der Lage von körperfesten Punkten im Inneren des Tragwerks. Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld kann lediglich entlang den Konturen entsprechend der jeweiligen Interpolationsvorschrift analog zu (5.6) ermittelt werden.

In Zhang, Belegundu [285] und Choi, Chang [60] werden für diesen Fall verschiedene Verfahren beschrieben, um das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld im Inneren des Tragwerks zu erzeugen. Choi, Chang [60] empfehlen, das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld in den FE-Knoten über eine elastische Deformation der Struktur infolge eines gedachten Verschiebungslastfalls zu ermitteln. Die vorgeschriebenen Verschiebungen ergeben sich aus einer Störung des variablen Randes um $\Delta \hat{s}_i = 1$. Die Verschiebungen entlang der Konturen, auf die sich die Störung nicht auswirkt, werden zu Null gesetzt. Dieses Verfahren führt zu glatten Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern, die den Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse und der Bewegung des FE-Netzes genügen. Der numerische Aufwand nimmt jedoch mit der Anzahl der Optimierungsvariablen linear zu, da für jede Optimierungsvariable ein eigenes Randwertproblem mit unterschiedlichen Auflager- bzw. Lastbedingungen zu lösen ist. Eine alternative Vorgehensweise besteht darin, die explizit berechneten Ableitungen $\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{x}}_e^c$ in den FE-Knoten auf den Konturen in das Tragwerk hinein zu projizieren. Die Ableitungen in den FE-Knoten innerhalb des Tragwerks werden zu Beginn des Verfahrens zu Null gesetzt und bei festgehaltenen Ableitungen auf den Kanten mit einer modifizierten Laplace-Glättung iterativ bestimmt.

$$(\widetilde{\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{x}}_e}_p)^{(l+1)} = \sum_{j=1}^{n_b} (\widetilde{\nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{x}}_e}_j)^{(l)} |\Omega_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n_b} |\Omega_j| \quad (5.8)$$

Die Entwurfsgeschwindigkeit im FE-Knoten p berechnet sich im $(l + 1)$ -ten Iterationsschritt des Glättungsverfahrens aus den geglätteten Ableitungen $(\widetilde{\cdot})$, die über die n_b angrenzenden Elemente gemittelt und mit den jeweiligen Flächen der Elemente gewichtet werden. Diese Glättungsmethode ist zu dem Verfahren konsistent, mit dem der im Rahmen dieser Arbeit eingesetzte Freivernetzer unstrukturierte FE-Netze ausrichtet (Rehle [209]). Die so generierten Entwurfsgeschwindigkeitsfelder stimmen nahezu mit denen überein, die mit dem von Choi, Chang [60] empfohlenen Verfahren erzeugt werden (Bild 5.5). Der numerische Aufwand ist bei der Glättungsmethode jedoch deutlich geringer.

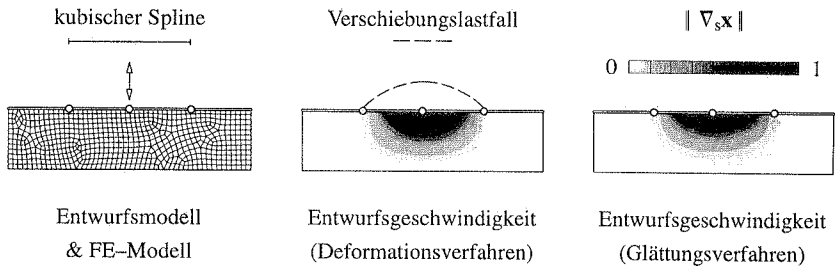
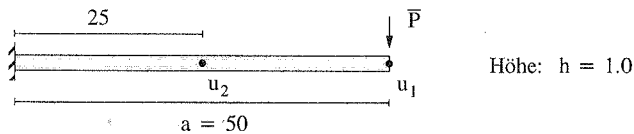


Bild 5.5: Entwurfsgeschwindigkeitsfelder nach dem Deformations- und Glättungsverfahren

Siencz [232] schlägt vor, nur die Entwurfsgeschwindigkeiten in den FE-Knoten entlang der Konturen für die Sensitivitätsanalyse zu berücksichtigen und in jedem Iterationsschritt des Optimierungsprozesses ein neues FE-Netz zu generieren. Die Sensitivitäten von lokalen Zustandsgrößen im Inneren des Tragwerks, wie Spannungen oder Verschiebungen, werden mit dieser Methode jedoch nur unzureichend erfasst. In Bild 5.6 wird der Einfluß des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes auf die Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse an einem ebenen Balken mit variabler Länge veranschaulicht. Die Geometrie des Balkens wird einerseits durch ein bilineares Lagrange-Design-Element, andererseits nur über die begrenzenden, geraden Kanten beschrieben. Für den zweiten Fall werden die Entwurfsgeschwindigkeiten zum einen durch die Glättungsmethode, zum anderen anhand des reduzierten Verfahrens nach Siencz [232] ermittelt. Die Feinheit des FE-Netzes wird so gewählt, daß die Verschiebung im Lastangriffspunkt um weniger als 0.01% von der Lösung nach der Bernoulli-Balkentheorie abweicht. Die Sensitivitäten der Verschiebungen senkrecht zur Balkenachse werden am Ende und in der Mitte des Balkens ermittelt. Die Ergebnisse stimmen für den expliziten Ansatz über das Design-Element und für die Glättungsmethode mit der analytischen Lösung nahezu überein. Die Sensitivität am Ende des Balkens weicht nur geringfügig, in der Balkenmitte jedoch erheblich von dem



Entwurfsgeschwindigkeit	Abweichung von der Bernoulli-Balkentheorie [%]	
	$\nabla_a u_1$	$\nabla_a u_2$
Bilineares Design-Element	0.02	0.02
Glättungsmethode	0.02	0.02
Reduziertes Verfahren [232]	0.02	60.00 (!)

Bild 5.6: Einfluß des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes auf die Sensitivitätsanalyse

Ergebnis nach der Bernoulli–Balkentheorie ab, wenn das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld nach dem reduzierten Verfahren berechnet wird. Aufgrund der fehlerhaften Sensitivitätsanalyse sowie der Notwendigkeit, in jedem Iterationsschritt ein neues FE–Netz zu generieren, ist von dem reduzierten Verfahren nach Sienz [232] abzuraten.

Die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder im zuvor beschriebenen, zweistufigen Entwurfsmodell werden für jede Stufe gesondert berechnet. Die Entwurfsgeschwindigkeiten infolge einer Variation der Kontroll–Knoten $\hat{\mathbf{x}}_j^s$ der Flächen–Elemente ergeben sich direkt aus der Interpolationsvorschrift (5.6) bzw. (5.7). Für das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld infolge einer Variation der Kontroll–Knoten $\hat{\mathbf{t}}_j^c$ der Kurven–Elemente werden zunächst die Ableitungen auf den Konturen im Parameterraum $\zeta \in \mathbb{R}^2(\Omega_c)$ bestimmt.

$$\nabla_s \hat{\mathbf{t}}_j^c(\xi) = \sum_{j=1}^{n_c} N_j^c(\xi) \nabla_s \hat{\mathbf{t}}_j^c \quad (5.9)$$

Die Ableitungen werden im Parameterraum nach der zuvor beschriebenen Glättungsmethode in das Tragwerk hinein projiziert. Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld im globalen Koordinatensystem folgt aus:

$$\nabla_s \mathbf{x} = \mathbf{J}(\zeta) \nabla_s \zeta \quad ; \quad \mathbf{J}(\zeta) = \bar{\nabla}_\zeta \mathbf{x}(\zeta) \quad (5.10)$$

Um die Entwurfsgeschwindigkeit in den FE–Knoten zu ermitteln, müssen die lokalen Koordinaten $\hat{\zeta}_e$ der FE–Knoten im Parameterraum $\zeta \in \mathbb{R}^2(\Omega_c)$ bekannt sein. Wenn dies nicht der Fall ist, sind die lokalen Koordinaten $\hat{\zeta}_e$ vorab zu bestimmen. Der Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}_e^c$ auf der Schalenoberfläche im globalen Koordinatensystem wird durch die Interpolationsvorschrift des Flächen–Elements (5.3) als nichtlineare Funktion $\hat{\mathbf{x}}_e^c(\hat{\zeta}_e)$ beschrieben. Das inverse Problem $\hat{\zeta}_e(\hat{\mathbf{x}}_e^c)$ wird als Minimierungsproblem formuliert.

$$\min_{\hat{\zeta}} \|\hat{\mathbf{x}}_e^c - \mathbf{x}^c(\hat{\zeta})\| \quad (5.11)$$

Das unbeschränkte Optimierungsproblem wird mit einem Newton–Verfahren gelöst, wobei die zweiten Ableitungen $\bar{\nabla}_\zeta^2 \mathbf{x}^c$ anhand der Formulierung des Flächen–Elements explizit berechnet werden können.

5.2 Beispiel zur Formoptimierung auf gekrümmten Oberflächen

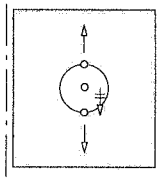
Die Form von Aussparungen auf einer zylindrischen Oberfläche wird auf der Basis des zweistufigen Entwurfsmodells optimiert (Bild 5.7). Der Zylinder ist entlang seiner oberen Kante gleichförmig in axialer Richtung belastet und entlang seiner unteren Kante vertikal, gelenkig gelagert. Es wird die Form der Aussparungen gesucht, die einen möglichst homogenen Spannungszustand mit dem Sollwert $\bar{\sigma}_v$ im Tragwerk erzeugt. Hierfür wird das Spannungsdifferenz–Volumen, d.h. das Integral der Differenz der aktuellen von Mises Spannungen zu einer vorgegebenen Sollspannung $\bar{\sigma}_v$ über das Tragwerk, minimiert.

$$\min_{\hat{s}} \int_{\Omega_x} |\sigma_v - \bar{\sigma}_v| d\Omega_x \quad (5.12)$$

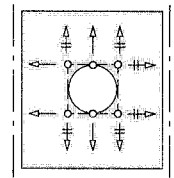
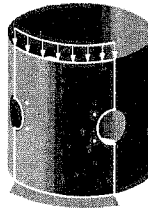
Es werden zwei Diskretisierungen für die Geometrie der Aussparungen untersucht:

- I. Modellierung als Kreis im Parameterraum. (→ 2 Optimierungsvariablen: Lage und Radius).
- II. Modellierung durch zwei kubische Bézier-Splines im Parameterraum (→ 4 Optimierungsvariablen).

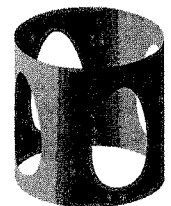
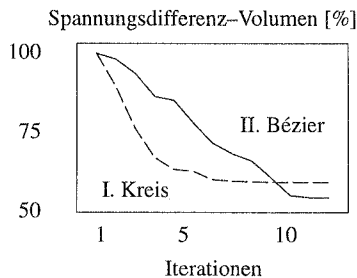
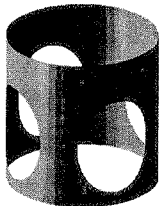
Die Kontroll-Knoten werden in beiden Fällen so gekoppelt, daß alle Aussparungen dieselbe Form besitzen und zur Zylinderachse symmetrisch sind. Der Zylinder wird mit 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen diskretisiert. Um die Zuverlässigkeit der FE-Analyse während des Optimierungsprozesses zu kontrollieren, wird der Diskretisierungsfehler der FE-Analyse mit einem Z^2 -Fehlerindikator überprüft. Wenn der



I. Kreis



II. Bézier-Spline



← Optimierungsvariable ↔ Verknüpfte Bewegungsrichtung ○ Kontroll-Knoten

Zielfunktion: Minimales Spannungsdifferenz-Volumen

Sollspannung $\bar{\sigma}_v = 40.0$

Höhe: $h = 2.0$

Last: $\bar{p} = 1.0$

Durchmesser: $d = 2.0$

E-Modul: $E = 2.1 \cdot 10^7$

Dicke: $t = 0.05$

Querdehnzahl: $\nu = 0.3$

Bild 5.7: Formoptimierung auf einer zylindrischen Oberfläche

geschätzte Fehler 5% übersteigt, wird ein neues, lokal verfeinertes FE-Netz generiert. Auf die Rolle der adaptiven Diskretisierung des FE-Modells in der Strukturoptimierung wird in Abschnitt 6.1 ausführlich eingegangen. Unter Einhaltung der Symmetriebedingungen wird nur ein Viertel des Zylinders im Optimierungsprozeß untersucht. Die Sensitivität der Zielfunktion wird nach der in Abschnitt 2.3.3 erläuterten direkten Methode auf der Basis einer diskretisierten Formulierung bestimmt. Die Optimierungsprobleme werden mit einem SQP-Verfahren gelöst (→ Abschnitt 2.1).

Der Vergleich der Resultate beider Parametrisierungen verdeutlicht den Einfluß der geometrischen Diskretisierung im Entwurfsmodell auf das Optimierungsergebnis. Generell kann die Zielfunktion um so stärker gesenkt werden, je größer die Anzahl der Optimierungsvariablen ist. Die Frage, wie die geometrische Diskretisierung des Tragwerks zu wählen ist, so daß die Qualität des Tragwerks bei möglichst wenigen Optimierungsvariablen gesteigert werden kann, wird in Abschnitt 6.2 untersucht.

6 Adaptive Methoden in der Strukturoptimierung

Die Probleme der Strukturoptimierung können im allgemeinen auf ein kontinuierliches, gemischtes Variationsproblem mit Nebenbedingungen zurückgeführt werden (\rightarrow Kapitel 2). Die Entwurfslfunktion $s(\mathbf{x})$, die beispielsweise in der materiellen Topologieoptimierung die Materialverteilung im Entwurfsraum oder in der Formoptimierung die Form von Kanten und Oberflächen des Tragwerks beschreibt, und die Strukturantwort, die beispielsweise durch die Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ charakterisiert wird, werden diskretisiert, um das Optimierungsproblem numerisch zu lösen. In herkömmlichen Optimierungsverfahren werden die Diskretisierungen der Entwurfslfunktion $s(\mathbf{x})$ und der Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ zu Beginn festgelegt und über den gesamten Optimierungsprozeß hinweg beibehalten. Diese Vorgehensweise führt insbesondere bei großen Veränderungen des Entwurfs im Optimierungsprozeß zu erheblichen Problemen. Das FE-Netz, das für den Ausgangsentwurf noch zuverlässige Ergebnisse liefert, kann in diesem Fall das tatsächliche Strukturverhalten der im Optimierungsprozeß entstehenden Entwürfe nur noch unzureichend erfassen. Folglich ist das FE-Netz der veränderten Geometrie im Optimierungsprozeß anzupassen. Ebenso können bei großen Formänderungen die zu Beginn des Optimierungsprozesses gewählten Optimierungsvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ den im Sinne einer kontinuierlichen Lösung optimalen Entwurf⁹ $s(\mathbf{x})$ oftmals nur in grober Näherung beschreiben (\rightarrow Abschnitte 4.5 und 5.2). Die Diskretisierung im Entwurfsmodell ist den Zwischenergebnissen im Optimierungsprozeß anzupassen. Die Adaptivität in der Strukturoptimierung umfaßt somit zwei Aspekte:

- Adaptive Diskretisierung des mechanischen Modells.
- Adaptive Diskretisierung des Entwurfsmodells.

In den folgenden Abschnitten werden die Adaption des mechanischen Modells während des Optimierungsprozesses am Beispiel der Formoptimierung von topologisch komplexen Tragwerken untersucht und Methoden zur Adaption des Entwurfsmodells in Form- und Topologieoptimierung vorgestellt.

6.1 Adaptive Struktur- und Sensitivitätsanalyse

Die Bedeutung des Analysemodells für die Zuverlässigkeit und Aussagekraft des Optimierungsergebnisses wurde bereits in Abschnitt 2.3 betont. Vereinfachungen im mechanischen Modell sowie Ungenauigkeiten bei der numerischen Berechnung der Strukturantwort wirken

9. Die Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ stellen die Verschiebungen im Gleichgewicht dar. Analog hierzu bezeichnet die Entwurfslfunktion $s(\mathbf{x})$ den Entwurf im Optimum. In diesem Kapitel werden ausschließlich die Optima bei verschiedenen Diskretisierungen untersucht. Das diskretisierte Optimum wird daher im weiteren nicht mehr zusätzlich mit dem Index * gekennzeichnet: $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}^*$.

sich direkt auf das Optimierungsergebnis aus. In diesem Abschnitt werden adaptive FE-Verfahren in den Optimierungsprozeß integriert, um die Zuverlässigkeit der numerischen Strukturanalyse zu gewährleisten.

Die Entwurfskriterien und deren Ableitungen werden im Analysemodell aus der Strukturantwort des aktuellen Entwurfs berechnet. Die Zustandsgrößen, wie beispielsweise die Verschiebungen $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}})$, werden mit der Methode der Finiten Elemente näherungsweise bestimmt. Die numerisch ermittelte Strukturantwort $\mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})$ enthält einen Diskretisierungsfehler e_u . Die aus den approximierten Verschiebungen ermittelten Entwurfskriterien, wie beispielsweise die Zielfunktion $f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}}))$, sind folglich ebenfalls mit einem Fehler e_f behaftet.

$$f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}})) = f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})) + e_f(\mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})) \quad (6.1)$$

Um zuverlässige Optimierungsergebnisse zu erhalten, wird der numerische Fehler der Zielfunktion $e_f(\mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}}))$ kontrolliert. Dies geschieht indirekt, indem die Diskretisierung des mechanischen Modells im Optimierungsprozeß so angepaßt wird, daß der Diskretisierungsfehler der approximierten Strukturantwort $\mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})$ kleiner als ein vorgegebener Sollwert ist. Die Änderung der Zielfunktion im Optimierungsprozeß setzt sich aus einem von den approximierten Verschiebungen abhängigen Anteil und einem aus der Änderung des Fehlers e_f resultierenden Anteil zusammen.

$$df = \left(\bar{\nabla}_s f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})) \right)^T d\hat{\mathbf{s}} + \left(\bar{\nabla}_s e_f(\mathbf{u}^h(\hat{\mathbf{s}})) \right)^T d\hat{\mathbf{s}} \quad (6.2)$$

Der erste Term wird mit den in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Verfahren der diskreten oder variationellen Sensitivitätsanalyse berechnet. Die Ermittlung der Ableitung des Fehlers der Zielfunktion nach den Optimierungsvariablen wird in Abschnitt 6.1.2 erläutert.

In den bestehenden Optimierungsverfahren wird nicht berücksichtigt, daß die Strukturantwort und infolgedessen die berechneten Funktionswerte der Entwurfskriterien mit einem Fehler behaftet sind. Bei Gradientenverfahren wird lediglich der erste Term des totalen Differentials (6.2) bei der Ermittlung des verbesserten Entwurfs ausgewertet. Die Vernachlässigung der Änderung des Fehlers $\bar{\nabla}_s e_f$ hat keine Auswirkung, wenn der Fehler der Entwurfskriterien bzw. der Strukturantwort im Optimierungsprozeß unberücksichtigt bleibt. Wenn das FE-Netz in jedem Iterationsschritt des Optimierungsprozesses so gewählt wird, daß beispielsweise der Fehler der Verschiebungen kleiner als ein vorgegebener Sollwert ist, führt diese Vernachlässigung im allgemeinen jedoch zu einer Inkonsistenz, die sich in einer Verschlechterung der Konvergenz des Optimierungsprozesses äußert. Dies trifft vor allem auf erweiterte Quasi-Newton-Methoden zu, wie beispielsweise den SQP-Verfahren, bei denen die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion aus den ersten Ableitungen aufgebaut wird. Die Sensitivität des Fehlers der Entwurfskriterien ist ebenfalls zu berücksichtigen, wenn der Diskretisierungsfehler der Entwurfskriterien bzw. der Strukturantwort im Optimierungsprozeß kontrolliert wird.

In den folgenden Abschnitten wird die Integration von adaptiven Verfahren in die Struktur- und Sensitivitätsanalyse erläutert. Zuvor wird die Methode der adaptiven FE-Analyse kurz skizziert, um die wichtigsten Begriffe einzuführen. Die Einflüsse der adaptiven Strukturanalyse auf den Optimierungsprozeß werden am Beispiel der Formoptimierung aufgezeigt. Abschließend werden zwei Verfahren vorgestellt, um die Sensitivität des Fehlers der approximierten Strukturantwort bei der Adaption des FE-Netzes zu berücksichtigen und damit das Konvergenzverhalten des Optimierungsprozesses zu verbessern.

Methode der adaptiven Finite Element Analyse

Die Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ werden in der Finiten Elemente Methode durch lokale Ritz-Ansätze $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ abschnittsweise approximiert (\rightarrow Abschnitt 2.3.2). Der Fehler der numerischen Lösung e_u wird in der L_2 -Norm der Differenz der exakten und der approximierten Verschiebungen definiert.

$$e_u = \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x})\|_{L_2} \quad (6.3)$$

Ein äquivalentes Fehlermaß ist die innere Energie (2.43) der Differenzverschiebungen e_Π .

$$e_\Pi = \sqrt{\Pi^i(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)} \quad (6.4)$$

Der Fehler wird auf die innere Energie der exakten Lösung bezogen, um ein von den äußeren Belastungen unabhängiges, relatives Fehlermaß zu erhalten.

$$e_\Pi^{\text{rel}} = \sqrt{\frac{\Pi^i(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)}{\Pi^i(\mathbf{u})}} \quad (6.5)$$

Da die kontinuierliche Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ im allgemeinen nicht bekannt ist, wird der Fehler e_Π mit Fehlerschätzern \tilde{e}_Π näherungsweise bestimmt.

$$C_1 \tilde{e}_\Pi \leq e_\Pi \leq C_2 \tilde{e}_\Pi \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (6.6)$$

Es wird zwischen a-priori und a-posteriori Fehlerschätzern unterschieden. A-priori Verfahren schätzen den Fehler beispielsweise anhand der Verzerrungen der Elementgeometrie ab, bevor eine FE-Analyse durchgeführt wird. Die Zuverlässigkeit von a-priori Fehlerschätzern ist im Vergleich zu a-posteriori Verfahren gering. Bei a-posteriori Verfahren wird der Fehler aus der numerischen Lösung berechnet. Das statische Gleichgewicht wird in der FE-Methode nur schwach erfüllt, wobei Diskontinuitäten in den Spannungen an den Elementrändern bei einer Verschiebungsformulierung auftreten. Residuale Fehlerschätzer bestimmen den Fehler aus den lokalen Ungleichgewichtskräften in der starken Formulierung des statischen Gleichgewichts (u.a. Babuska, Rheinboldt [12]). Bei Ingenieurverfahren, wie dem Z^2 -Fehlerindikator von Zienkiewicz, Zhu [289] wird der absolute bzw. relative Fehler der Energienorm \tilde{e}_Π aus der Differenz zwischen den geglätteten, verbesserten Spannungen $\tilde{\sigma}$ und den berechneten Spannungen σ^h abgeschätzt.

$$\tilde{e}_\Pi = \sqrt{\int_{\Omega_x} [\tilde{\sigma} - \sigma^h]^T \mathbf{C}^{-1} [\tilde{\sigma} - \sigma^h] d\Omega_x} \quad (6.7)$$

$$\tilde{e}_\Pi^{\text{rel}} = \sqrt{\int_{\Omega_x} [\tilde{\sigma} - \sigma^h]^T \mathbf{C}^{-1} [\tilde{\sigma} - \sigma^h] d\Omega_x} / \sqrt{\int_{\Omega_x} \tilde{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\sigma} d\Omega_x} \quad (6.8)$$

Der geschätzte, globale Fehler \tilde{e}_Π wird aus den lokalen Fehlern \tilde{e}_e der einzelnen Elemente berechnet, die als Verfeinerungsindikatoren für die Adaption des FE-Netzes dienen.

$$\tilde{e}_\Pi = \sqrt{\sum_{\text{Elemente}} \tilde{e}_e^2} \quad (6.9)$$

Die Diskretisierung wird in einem iterativen Prozeß so bestimmt, daß der geschätzte, globale, relative Fehler kleiner als ein vorgegebener Sollwert ist.

Es bestehen drei Strategien, um die Feinheit der Diskretisierung entsprechend der Fehlerverteilung anzupassen.

- *r*-Adaption: Die Position der FE-Knoten $\hat{\mathbf{x}}_e$ wird so ausgerichtet, daß der Fehler der numerischen Lösung klein wird. Die Möglichkeiten, den globalen Fehler zu senken, sind gering.
- *p*-Adaption: Die Güte der Approximation der Verschiebungen wird über die Ordnung *p* der Elementansätze gewählt. Der Fehler der numerischen Lösung kann durch eine lokale Erhöhung der Ansatzordnung mit wenigen, zusätzlichen Freiheitsgraden erheblich reduziert werden. Die *p*-Adaption weist für Probleme mit einer glatten Lösung ein gutes Konvergenzverhalten auf.
- *h*-Adaption: Die Fehlerverteilung wird in eine Netzdichtefunktion überführt. Diese steuert die Größe *h* der Elemente im Netz. Bei strukturierten, hierarchisch aufgebauten FE-Netzen werden die Elemente mit einem zu großen, lokalen Fehler sukzessive im iterativen Adaptionsprozeß unterteilt. In den nachfolgenden Untersuchungen werden unstrukturierte Netze eingesetzt, um topologisch komplexe Tragwerke mit einem Freivernetzer zu diskretisieren. In jedem Iterationsschritt der adaptiven Netzanpassung wird unter Berücksichtigung der Netzdichtefunktion das gesamte Tragwerk neu vernetzt.

Darüber hinaus kann das mechanische Modell lokal angepaßt werden.

- *d*-Adaptivität: Die bislang nur in wenigen Arbeiten untersuchte Dimensions- oder Modell-adaptivität berücksichtigt den Fehler durch das mechanische Modell. Es werden beispielsweise lokal 3-dimensionale Volumen-Elemente in einem ansonsten mit Schalenelementen diskretisierten Tragwerk eingeführt, um den tatsächlichen Spannungszustand besser abzubilden (Stein, Ohnimus [239]). Der Fehler infolge der mechanischen Modellbildung wird in den weiteren Betrachtungen dieses Kapitels vernachlässigt.

Für eine Einführung in die adaptiven Verfahren der FE-Methode werden die entsprechenden Kapitel in den Lehrbüchern von Zienkiewicz, Taylor [290] und Hughes [126] empfohlen. Die mathematischen Grundlagen werden von Verfürth [266] aufgearbeitet. In Babuska et al. [13] sind die wesentlichen Entwicklungen auf diesem Gebiet zusammengestellt. Hinsichtlich verbesserter Ansätze und neuerer Ergebnisse wird auf Ramm, Cirak [207] und Cirak [63] verwiesen. Methodische und algorithmische Details der in dieser Arbeit eingesetzten h-Adaption sind bei Rehle [209] beschrieben.

6.1.1 Integration der adaptiven Strukturanalyse in den Optimierungsprozeß

Die Notwendigkeit, die Qualität der Finiten Element Analyse im Optimierungsprozeß zu kontrollieren, wurde zuerst von Bennet und Botkin [35] für die Formoptimierung erkannt. Das FE-Netz wird einem eher heuristischen Ansatz folgend dort verfeinert, wo der räumliche Gradient der Energiedichtevertelung einen vorgegebenen Grenzwert überschreitet. Kikuchi et al. [133] verwenden einen Z^2 -Fehlerindikator für eine h- und r-Adaption des FE-Netzes während des Optimierungsprozesses. Weck und Feldermann [271] verfeinern das FE-Netz auf der Basis eines Z^2 -Fehlerindicators in der Dicken- und Materialoptimierung bei Faserverbundwerkstoffen. Residuale Fehlerschätzer werden u.a. von Hinton et al. [123] und Özakca [185] für h-adaptive Verfahren in der Formoptimierung eingesetzt. In neueren Arbeiten werden rh-Strategien von Kodiyalam, Parthasarathy [141] und p-adaptive Verfahren von Salagame, Belegundu [223] für die Anpassung der Diskretisierung in der Formoptimierung von 3-dimensionalen Volumenmodellen untersucht. In diesem Abschnitt werden einige, wesentliche Aspekte bei der Einbindung eines h-adaptiven Verfahrens in den Formoptimierungsprozeß erläutert. Es sind zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren denkbar, um die adaptive Strukturanalyse in den Optimierungsprozeß zu integrieren (Bild 6.1). Zum einen kann man zunächst das Optimum für ein grobes FE-Netz bestimmen und anschließend das FE-Netz für den optimierten

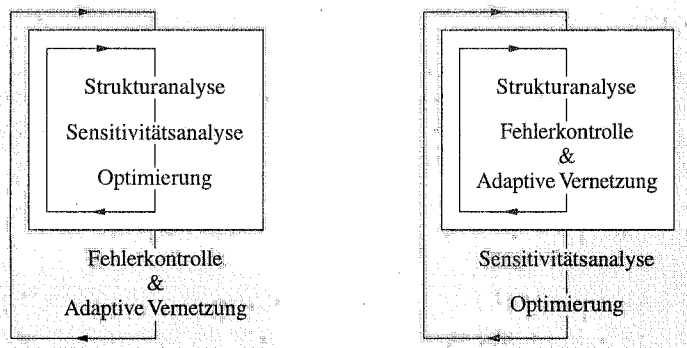


Bild 6.1: Integration der adaptiven Strukturanalyse in den Optimierungsprozeß

Entwurf adaptiv verfeinern. Auf der Basis des verfeinerten FE-Netzes wird erneut optimiert. Diese Vorgehensweise ist numerisch effizient, wenn der mit einem groben FE-Netz ermittelte Entwurf dem tatsächlichen Optimum sehr nahe kommt. Bei großen Formänderungen müssen jedoch allein deswegen neue FE-Netze innerhalb des Optimierungsprozesses generiert werden, weil das FE-Netz des Startentwurfs nicht auf alle Zwischenentwürfe übertragen werden kann. Die Einbindung der adaptiven Strukturanalyse in die Optimierungsschleife erweist sich daher als weitaus stabiler und universeller.

Fehlerschätzer und Verfeinerungsstrategie

Der Diskretisierungsfehler der Entwurfskriterien kann bislang nicht direkt gesteuert werden, da hierfür keine entsprechenden Fehlerschätzer zur Verfügung stehen. Dieser wird daher indirekt über den Fehler der Strukturantwort kontrolliert, der mit den bereits erwähnten Fehlerschätzern näherungsweise bestimmt werden kann. Der Typ des Fehlerschätzers hat dabei nur eine geringe Auswirkung auf die Konvergenz und das Ergebnis des Optimierungsprozesses. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden ein Z^2 -Fehlerindikator sowie ein residualer Fehlerschätzer nach Babuska, Rheinboldt [12] in den Optimierungsprozeß eingebunden und deren Eigenschaften an verschiedenen Formoptimierungsproblemen für Scheiben-, Platten- und Schalenträgerwerke untersucht. Beide Fehlerschätzer bestimmen den Fehler in der Energienorm. Dieses integrale Maß ist jedoch in der Strukturoptimierung nur bedingt geeignet, da oftmals lokale Größen, wie Spannungen oder Verschiebungen, als Entwurfskriterien verwendet werden. Es ist daher notwendig, lokale Fehlerschätzer in den Optimierungsprozeß zu integrieren, um so auf den Fehler von lokalen Entwurfskriterien einzuwirken (Ramm, Cirak [207]).

In der Formoptimierung werden sowohl h - wie auch p -adaptive Verfahren eingesetzt. Letztere zeichnen sich zwar durch eine hohe numerische Effizienz aus. Bei großen Formänderungen im Optimierungsprozeß kann es jedoch für eine feste Netztopologie zu erheblichen Verzerrungen der Elementgeometrien oder unzulässigen FE-Netzen, wie durch Überlappungen der Elemente, kommen (Salagame, Belegundu [223]). Daher ist für derartige Optimierungsprobleme entweder eine reine h -Strategie, die den weiteren Untersuchungen zugrunde liegt, oder ein gemischtes hp -Verfahren vorzuziehen.

Die Größe des zulässigen Fehlers für die Zustandsgrößen richtet sich nach den Genauigkeitsanforderungen der Aufgabenstellung. Es treten jedoch bei hohen Fehlerschranken Konvergenzprobleme durch den Wechsel des FE-Netzes im Optimierungsprozeß auf, da die Änderung des Fehlers $\nabla_s e_f$ bzw. $\nabla_s e_{\Pi}$ von den Optimierungsalgorithmen nicht berücksichtigt wird. Für zahlreiche Entwurfsprobleme führt die Reduktion des Diskretisierungsfehlers e_{Π} zugleich zu einer Abnahme der Sensitivität des Fehlers $\nabla_s e_{\Pi}$. Hinton et al. [123] empfehlen, den relativen Fehler über den gesamten Optimierungsprozeß hinweg unterhalb von 3–8% zu halten. Alternativ hierzu schlagen Barthold et al. [18] vor, zu Beginn des Optimierungsprozesses einen größeren Fehler zuzulassen und erst in der Nähe des Optimums die Fehlerschranke zu senken. Diese Vorgehensweise reduziert zwar den numerischen Aufwand für die Strukturanalyse, führt

jedoch wiederum zu erheblichen Konvergenzproblemen, wobei der Defekt aus der Vernachlässigung der Änderung des Fehlers $\nabla_s e_f$ durch die Absenkung der Fehlerschranke im Optimierungsprozeß verstärkt wird.

Eigene Untersuchungen zur Größe der Fehlerschranke decken sich überwiegend mit der Empfehlung von Hinton et al. [123]. Für bestimmte Formoptimierungsprobleme kann die Sensitivität des Fehlers $\nabla_s e_\Pi$ jedoch nur unzureichend über den Fehler e_Π kontrolliert werden. In diesem Fall ist die Sensitivität des Fehlers direkt durch ein entsprechend verfeinertes FE-Netz zu senken. Die hierfür notwendigen Fehlerschätzer und Verfeinerungsindikatoren werden in Abschnitt 6.1.2 vorgestellt.

Anpassung des FE-Netzes im Optimierungsprozeß

Die Robustheit der Optimierungsprozedur ist für die Anwendbarkeit der Strukturoptimierung ebenso erforderlich wie die Zuverlässigkeit der Optimierungsergebnisse. Dies bedeutet für die adaptive Strukturanalyse, daß verschiedene Maßnahmen bei der Anpassung der FE-Netze vorzusehen sind. Die folgende Prozedur erweist sich für die Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken auf der Basis des in Abschnitt 5.1 vorgestellten, zweistufigen Entwurfsmodells als robust und effizient. Die einzelnen Schritte werden an einem einfachen Beispiel zur Formoptimierung mit einer Optimierungsvariablen \hat{s} in Bild 6.2 veranschaulicht.

1. Ein neuer Entwurf $\hat{s}^{(k+1)}$ wird berechnet. Hinton et al. [123] schlagen vor, jeden Zwischentwurf im Optimierungsprozeß neu zu vernetzen. Dieses Vorgehen beeinträchtigt die Konvergenz des Optimierungsprozesses unnötig. Statt dessen wird zunächst versucht, das FE-Netz des vorherigen Iterationsschrittes auf die neue Geometrie zu übertragen (Fall 1). Die Positionen der FE-Knoten \hat{x}_e entlang der Konturen des Tragwerks bestimmen sich aus den Interpolationsvorschriften der Geometriemodellierung. Die FE-Knoten im Inneren der Struktur können zum einen über eine lineare Extrapolation mittels des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes (5.5) berechnet oder durch eine Lagrange-Glättung analog zu (5.8) ermittelt werden, wobei die Position der Knoten entlang der Kanten nicht verändert wird. Erst wenn bei diesem Vorgang unzulässige Elemente entstehen, wird die gesamte Struktur neu vernetzt.

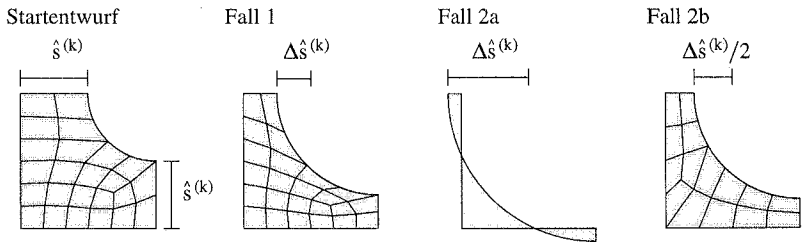


Bild 6.2: Anpassung des FE-Netzes im Optimierungsprozeß

2. In diesem Fall erfolgt die Neuvernetzung mit einer gleichmäßigen Netzdichte, die so gewählt wird, daß die Anzahl der Elemente im Vergleich zum vorherigen Entwurf annähernd konstant bleibt. Bei großen Veränderungen der Geometrie kann es jedoch notwendig werden, ein weitaus feineres Netz zu wählen. In diesem Fall wird die Netzdichte sukzessive erhöht. Übersteigt die Netzdichte einen vorgegebenen Maximalwert, wird der Versuch abgebrochen, den ermittelten Entwurf $\hat{s}^{(k+1)}$ zu vernetzen. Dies kann beispielsweise bei Überlappungen von Tragwerksrändern geschehen (Fall 2a). Durch Verringerung der Schrittweite $\Delta\hat{s}^{(k)}$ wird ein neuer Entwurf mit einer geringeren Veränderung der Geometrie erzeugt (Fall 2b).
3. Auf der Basis des zuvor übertragenen oder mit gleichmäßiger Netzdichte neu generierten FE-Netzes wird der neue Entwurf analysiert und der Fehler geschätzt. Ist dieser größer als der maximal zulässige Fehler, wird ein neues, adaptiv verfeinertes FE-Netz erzeugt. Für die Stabilität der gesamten Optimierungsprozedur ist es notwendig, auftretende Fehler kontrolliert abzufangen. Im Falle eines Fehlers wird – wie in Fall 2a – die Schrittweite $\Delta\hat{s}^{(k)}$ reduziert und der Optimierungsprozeß mit dem entsprechenden Entwurf fortgesetzt.

Definition von lokalen Entwurfskriterien

Der Wechsel des FE-Netzes im Optimierungsprozeß erfordert eine besondere Behandlung von lokalen Entwurfskriterien. Wenn das FE-Netz über den Optimierungsprozeß beibehalten wird, können lokale Entwurfskriterien, wie beispielsweise Verschiebungs- oder Spannungsnebenbedingungen, auf der Basis des FE-Netzes definiert werden. Diese Entwurfskriterien müssen dagegen direkt im Entwurfsmodell definiert und auf das jeweilige FE-Netz übertragen werden, wenn die Entwürfe im Optimierungsprozeß zur Kontrolle des Fehlers der FE-Berechnung mit unstrukturierten Netzen adaptiv diskretisiert werden. Folgende Möglichkeiten eignen sich, um lokale Entwurfskriterien im Entwurfsmodell zu formulieren:

- Kontrolle der Zustandsgrößen in ausgewählten Punkten, wie die Verschiebungen in Lastangriffspunkten. Diese Punkte können im Entwurfsmodell direkt über die Kontroll-Knoten der Kurvensegmente identifiziert werden. Für das jeweilige FE-Netz muß lediglich der korrespondierende FE-Knoten bestimmt werden.
- Kontrolle der Zustandsgrößen entlang von Kanten. Hierzu wird eine vorgegebene Anzahl von äquidistanten Stützstellen entlang der Kanten bestimmt. Im Optimierungsprozeß werden die Zustandsgrößen in den Stützstellen kontrolliert. Im jeweiligen FE-Netz müssen die zugehörigen Elemente und die lokalen Koordinaten der Stützpunkte im Element ermittelt werden. Die Zustandsgrößen in den Punkten können mit der jeweiligen Elementformulierung interpoliert werden.
- Kontrolle von Minimal- bzw. Maximalwerten der Zustandsgrößen im Gebiet und entlang von Kanten. Diese Vorgehensweise ist insbesondere für anwendungsbezogene Aufgabenstellungen von Bedeutung, in denen beispielsweise die maximale Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_v$ im Tragwerk beschränkt ist. Hierfür werden zunächst des Maximalwert σ_{\max} und dessen Ort

\mathbf{x}_{\max} im FE-Netz bestimmt. Ist die betreffende Zustandsgröße im Element konstant, so wird hierfür der Elementmittelpunkt gewählt. Unter der Voraussetzung, daß der Vektor \mathbf{x}_{\max} eine stetig differenzierbare Funktion der Optimierungsvariablen \hat{s} ist, setzt sich die Ableitung des Maximalwerts σ_{\max} aus einem lokalen und einem konvektiven Term zusammen.

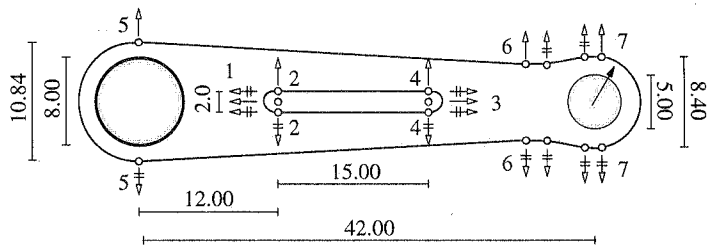
$$\nabla_s \sigma_{\max} = \nabla_s \sigma_v(\mathbf{x}_{\max}) + \bar{\nabla}_x \sigma_v(\mathbf{x}_{\max})^T \nabla_s \mathbf{x}_{\max} \quad (6.10)$$

Die räumliche Verteilung der Spannungskomponenten wird durch lokale, elementübergreifende Ansatzfunktionen approximiert, um Diskontinuitäten an den Elementrändern zu vermeiden. Die Ableitungen der Spannungskomponenten $\nabla_s \sigma$ sowie das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld $\nabla_s \mathbf{x}_{\max}$ werden ebenfalls lokal geglättet.

Numerisches Beispiel

Die Form einer Pleuelstange wird mit dem vorgestellten Verfahren optimiert (Bild 6.3). Dieses Problem wird ebenfalls von Bennet, Botkin [35] und Zhang et al. [286] untersucht. Die Konturen der Pleuelstange werden mit Kreissegmenten, kubischen Bézier-Splines sowie geraden Kanten durch 7 Optimierungsvariablen beschrieben. Die Form der beiden Naben ist vorgegeben. Zwischen den Kreissegmenten und den geraden Kanten wird lediglich ein C_g^0 -kontinuierlicher Übergang gefordert. Die C_g^1 -Kontinuität zwischen den Bézier-Splines und den geraden Kanten wird durch entsprechende Tangentenbeziehungen bzw. Verknüpfungsvorschriften explizit erfüllt. Ebenso wird die Symmetrie des Tragwerks bezüglich seiner Längsachse durch entsprechende Verknüpfungsvorschriften bewahrt. Die Zielfunktion ist minimales Gewicht. Die in insgesamt 95 Stützstellen entlang der Kanten berechneten von Mises Spannungen sind auf eine maximal zulässige Spannung $\bar{\sigma}_v$ beschränkt. Die große Nabe ist

Zielfunktion:	Minimales Gewicht	
Nebenbedingung:	Maximale Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_v = 138.0$	
E-Modul:	$E = 2.074 \cdot 10^7$	Dicke: $t = 3.0$
Querdehnzahl:	$\nu = 0.3$	Last: $\bar{P} = 100.0$



← Optimierungsvariable ↔ Verknüpfte Bewegungsrichtung ○ Kontroll-Knoten

Bild 6.3: Formoptimierung einer Pleuelstange – Entwurfsmodell

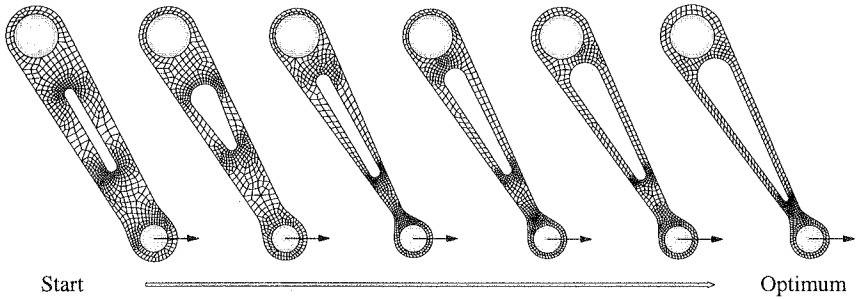


Bild 6.4: Adaptive Anpassung der FE-Netze im Optimierungsprozeß

fest eingespannt. An der kleinen Nabe greift eine über den Umfang verteilte Kraft unter 60° zur Längsachse der Stange an. Das Tragwerk wird mit 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen für den ebenen Spannungszustand adaptiv vernetzt. Der mit einem Z^2 -Fehlerindikator berechnete, relative Diskretisierungsfehler liegt während des gesamten Optimierungsprozesses unter 1%. Die Optimierung wird mit einem SQP-Algorithmus (\rightarrow Abschnitt 2.1) durchgeführt. Die Adaption der FE-Netze im Optimierungsprozeß ist in Bild 6.4 dargestellt. Die Masse der Pleuelstange wird in 30 Iterationen auf 39.47% des Gewichts des Startentwurfs reduziert.

6.1.2 Adaptive Sensitivitätsanalyse

Die Adaption des FE-Netzes unter Berücksichtigung der Formänderung im Optimierungsprozeß umfaßt zwei Aspekte:

- den Diskretisierungsfehler der Sensitivität des Entwurfskriteriums, z.B. $e_{\nabla_s f}$.
- die Sensitivität des Diskretisierungsfehlers des Entwurfskriteriums, z.B. $\nabla_s e_f$.

Der Fehler der Sensitivität eines Entwurfskriteriums ist von eher theoretischem Interesse, da dieser Fehler keinen Einfluß auf die Zuverlässigkeit des Optimierungsergebnisses und die Konvergenz des Optimierungsprozesses hat. Die Sensitivität des Fehlers eines Entwurfskriteriums ist dagegen, wie die Betrachtungen zu Beginn dieses Kapitels zeigen, für das Konvergenzverhalten des Optimierungsprozesses von Bedeutung, wenn der Diskretisierungsfehler der Entwurfskriterien kontrolliert und das FE-Netz entsprechend angepaßt wird. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen wird aus folgender Überlegung deutlich. Der Diskretisierungsfehler eines Entwurfskriteriums, wie beispielsweise der Zielfunktion f , wird als Funktion der Feinheit der Diskretisierung approximiert. Diese wird über eine charakteristische Größe h der Finiten Elemente gekennzeichnet.

$$e_f = \nabla_h f h \tag{6.11}$$

Der Fehler der Sensitivität der Zielfunktion kann analog zu (6.11) ebenfalls als Funktion der mittleren Netzfeinheit h formuliert werden.

$$e_{\nabla_s f} = \nabla_h(\nabla_s f) h \quad (6.12)$$

Die Sensitivität des Fehlers e_f bezüglich der Optimierungsvariablen \hat{s}_i ergibt sich aus dem Ansatz (6.11) zu:

$$\nabla_s e_f = \nabla_s(\nabla_h f) h + \underbrace{\nabla_h f \nabla_s h}_{\approx 0} \quad (6.13)$$

Da die Feinheit der Diskretisierung h nicht direkt von der Optimierungsvariablen \hat{s}_i abhängt, kann der zweite Summand in (6.13) vernachlässigt werden. Aus den Ansätzen (6.12) und (6.13) folgt, daß die Sensitivität des Fehlers eines Entwurfskriteriums über den Fehler der Sensitivität abgeschätzt werden kann.

$$e_{\nabla_s f} = \nabla_h(\nabla_s f) h = \nabla_s(\nabla_h f) h \approx \nabla_s e_f \quad (6.14)$$

Die Sensitivität des Fehlers der Zielfunktion $\nabla_s e_f$ bzw. der Fehler der Sensitivität $e_{\nabla_s f}$ wird, wie zuvor der Fehler der Zielfunktion e_f , indirekt über die Sensitivität des Fehlers der Energienorm $\nabla_s e_{\Pi}$ bzw. den Fehler der Sensitivität der Energienorm $e_{\nabla_s \Pi}$ abgeschätzt.

Die ersten Ansätze, den Einfluß der Diskretisierung auf die Sensitivitäten der Entwurfskriterien bzw. der Strukturantwort bei der Adaption des FE-Netzes zu berücksichtigen, gehen auf Banichuk et al. [15] und Falk [90] zurück. Banichuk et al. verfeinern das FE-Netz entlang von Kanten mit großen Formänderungen, ohne das Maß der Verfeinerung aus einer Fehlerbetrachtung abzuleiten. Die Sensitivität der Spannungen bezüglich einer Bewegung der FE-Knoten senkrecht zur entsprechenden Kante dient als Verfeinerungsindikator. Falk verwendet einen heuristisch erweiterten Z^2 -Fehlerindikator, um den Fehler der Sensitivität der Strukturantwort und die Verteilung des Verfeinerungsindikators zu bestimmen. Die Effizienz dieses Ansatzes wird von Maute und Ramm [168] an verschiedenen Formoptimierungsproblemen aufgezeigt. Buscaglia et al. [50] übertragen die Methode der residualen Fehlerschätzer auf die Sensitivitätsanalyse, ohne jedoch den entwickelten Fehlerschätzer auf konkrete Probleme anzuwenden. Darüber hinaus schlagen Bugada, Oliver [49] und Oñate, Bugada [186] vor, mit der Sensitivität des Fehlers der Energienorm die Fehlerverteilung des verbesserten Entwurfs abzuschätzen. Man erhält hierdurch einen a-priori Fehlerschätzer für die Zwischenentwürfe im Optimierungsprozeß, wodurch der numerische Aufwand für die adaptive Vernetzung reduziert wird.

In diesem Abschnitt wird ein heuristischer Fehlerindikator für die Sensitivität der Energienorm vorgestellt und mit der Sensitivität des Fehlers auf der Basis eines erweiterten Z^2 -Fehlerindikators verglichen. Der Einfluß der Netzadaption ohne und mit Berücksichtigung der Sensitivität des Fehlers der Energienorm auf das Konvergenzverhalten des Optimierungsprozesses wird an einem Beispiel zur Formoptimierung eines linear elastischen Scheibentragwerks veranschaulicht.

Abschätzung des Fehlers der Sensitivität der Energienorm

Die Gradienten der Entwurfskriterien, wie beispielsweise der Zielfunktion $f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u})$, werden aus der verallgemeinerten Materialableitung (2.97) bzw. (2.98) berechnet.

$$\nabla_{\mathbf{s}} f = \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} f + \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} f^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u} \quad ; \quad \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}^h + \mathbf{e}(\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}) \quad ; \quad e_{\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}} = \|\mathbf{e}(\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u})\|_{L_2} \quad (6.15)$$

Der wesentliche Anteil des Diskretisierungsfehlers der Sensitivität der Zielfunktion $e_{\nabla_{\mathbf{s}}}$ resultiert aus dem Fehler der Sensitivität der Verschiebungen $e_{\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}}$. Dieser kann analog zum Fehler der Verschiebungen (6.3) in der L_2 -Norm des Differenzvektors $\mathbf{e}(\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u})$ der exakten und der approximierten Gradienten der Verschiebungen definiert werden. Der Fehler der Sensitivität der Verschiebungen $e_{\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}}$ ist äquivalent zu dem Fehler der Ableitung der Energienorm nach der Optimierungsvariablen $e_{\nabla_{\mathbf{s}} \Pi}$. Dieser besitzt dieselbe Ordnung wie der Fehler der Energie e_{Π} selbst (Guillaum, Masmoudi [100]).

Die Ableitungen der Verschiebungen nach den Optimierungsvariablen werden aus der Variation der statischen Gleichgewichtsbeziehungen berechnet. Für eine kontinuierliche Formulierung der Gleichgewichtsbeziehungen ergeben sich die Ableitungen der Verschiebungen als Verformungen infolge der Anfangsdehnungen (2.125) und Anfangsspannungen (2.126). Die mit einem Fehler behafteten Sensitivitäten der Verschiebungen $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}^h$ werden auf der Basis der diskretisierten Gleichgewichtsbeziehungen als ein Verschiebungsfeld infolge der Pseudo-Last (2.101) ermittelt. Es besteht eine formale Analogie zwischen den diskretisierten Zustandsgleichungen für die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ infolge der äußeren Kräfte (2.55) und für die Sensitivität der Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{pso}} = \nabla_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{u}}$ infolge der Pseudo-Last (2.100). Auf der Basis dieser Analogie kann eine heuristische Abschätzung für den Fehler der Sensitivität der Energienorm $e_{\nabla_{\mathbf{s}} \Pi}$ über den Fehler der Dehnungsenergie infolge der Pseudo-Last $e_{\nabla_{\mathbf{s}} \Pi_{\text{pso}}}$ entwickelt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die Pseudo-Last $\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}$ (2.101) aus den approximierten Verschiebungen \mathbf{u}^h berechnet wird und folglich bereits einen Diskretisierungsfehler enthält. Die Dehnungsenergie Π_{pso} infolge der Pseudo-Lasten berechnet sich nach dem Clapeyronschen Satz aus der äußeren potentiellen Energie.

$$\Pi_{\text{pso}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{pso}} \quad (6.16)$$

Der relative Fehler der Dehnungsenergie infolge der Pseudo-Lasten setzt sich aus dem Fehler der zugehörigen Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{pso}}$ und dem Fehler der Pseudo-Last $\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}$ zusammen, wobei $\hat{\mathbf{e}}(\cdot)$ jeweils den diskretisierten Differenzvektor zwischen exakter und approximierter Größe bezeichnet.

$$\bar{e}^{\text{rel}}(\Pi_{\text{pso}})^2 = \frac{\hat{\mathbf{P}}_{\text{pso}}^T \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}_{\text{pso}})}{2 \Pi_{\text{pso}}} + \frac{\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{P}_{\text{pso}})^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{pso}}}{2 \Pi_{\text{pso}}} \quad (6.17)$$

$$\left(\bar{e}_1^{\text{rel}} \right)^2 \quad \left(\bar{e}_2^{\text{rel}} \right)^2$$

Der erste Summand $(\tilde{\epsilon}_1^{\text{rel}})^2$ berücksichtigt den Fehler der Dehnungsenergie infolge einer quasi-exakten Pseudo-Last und kann mit bekannten Fehlerschätzern ermittelt werden. Der zweite Summand $(\tilde{\epsilon}_2^{\text{rel}})^2$ wird unter Berücksichtigung der diskretisierten Gleichung zur Berechnung des Pseudo-Lastvektors (2.101) mit dem relativen Fehler der Dehnungsenergie $\tilde{\epsilon}_{\Pi}^{\text{rel}}$ infolge der tatsächlichen Belastung abgeschätzt. Dieser kann wiederum mit bekannten Fehlerschätzern bestimmt werden.

$$\frac{\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{P}_{\text{ps0}})^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{ps0}}}{2 \Pi_{\text{ps0}}} \leq C_{\text{ps0}} \frac{\hat{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u})}{2 \Pi} = C_{\text{ps0}} (\tilde{\epsilon}_{\Pi}^{\text{rel}})^2 = (\tilde{\epsilon}_2^{\text{rel}})^2 ; \quad C_{\text{ps0}} = C_{\text{ps0}}(\mathbf{K}, \nabla_s \mathbf{K}) \quad (6.18)$$

Die Konstante C_{ps0} charakterisiert die Abhängigkeit der Gesamtsteifigkeit $\nabla_s \mathbf{K}$ von der Optimierungsvariablen \hat{s}_i im Verhältnis zur Steifigkeit \mathbf{K} des Tragwerks. Der relative Fehler der Dehnungsenergie infolge der Pseudo-Lasten wird durch

$$\tilde{\epsilon}^{\text{rel}}(\Pi_{\text{ps0}}) = \sqrt{(\tilde{\epsilon}_1^{\text{rel}})^2 + (\tilde{\epsilon}_2^{\text{rel}})^2} \approx \tilde{\epsilon}_{\nabla_s \Pi}^{\text{rel}} \quad (6.19)$$

angenähert. Dieser stellt eine heuristische Abschätzung für den Fehler der Sensitivität der Energienorm $e_{\nabla_s \Pi}$ dar. Da der Fehler der Sensitivität in der gleichen Größenordnung wie der Fehler der Energienorm liegt, kann die Konstante C_{ps0} näherungsweise zu Eins angesetzt werden.

AbSchätzung der Sensitivität des Fehlers in der Energienorm

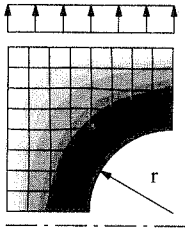
Der Z^2 -Fehlerindikator bestimmt den Fehler der Energienorm aus der Differenzenergie zwischen den berechneten und den geglätteten Spannungen (6.7),(6.8). Aus der Ableitung der Differenzenergie kann die Sensitivität des absoluten Fehlers in der Energie $\tilde{\epsilon}_{\Pi}^2$ berechnet werden (Fuenmayor et al. [96]).


$$\nabla_s \tilde{\epsilon}_{\Pi} = \sqrt{\int_{\Omega_x} [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^h]^T \mathbf{C}^{-1} \left[2 \nabla_s (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^h) + \frac{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^h)}{d\Omega} \nabla_s (d\Omega) \right] d\Omega_x} \quad (6.20)$$

Bugeda, Oliver [49] und Falk [90] vernachlässigen die Variation des Gebietes Ω_x und setzten anstatt der Spannungen direkt deren Ableitungen in den ursprünglichen Z^2 -Fehlerindikator (6.7) ein.

$$\nabla_s \tilde{\tilde{\epsilon}}_{\Pi} = \sqrt{\int_{\Omega_x} (\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla_s \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{C}^{-1} (\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla_s \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega_x} \quad (6.21)$$

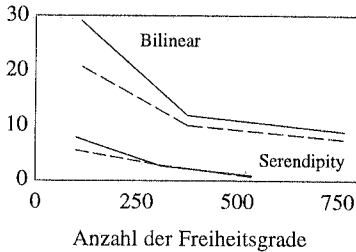
Die verbesserten Ableitungen der Spannungen $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ werden analog zum ursprünglichen Z^2 -Verfahren geglättet. Der modifizierte Ansatz kann als Z^2 -Fehlerindikator für Pseudo-Lasten interpretiert werden, wenn man die Gradienten $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}$ bzw. $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ als Spannungen infolge von Pseudo-Lasten versteht. Dieses Verfahren läßt sich einfach in die vorhandenen Algorithmen für den Z^2 -Fehlerindikator integrieren.



Länge: $a = 100.0$
 Radius: $r = 50.0$
 Dicke: $t = 1.0$
 E-Modul: $E = 10000.0$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.0$
 Entwurfsgeschwindigkeit:
 0  1

Geschätzter Fehler von Π^i
 — Exakter Fehler
 - - - Geschätzter Fehler (Z^2)
 Geschätzter Fehler von $\nabla_r \Pi^i$
 — Exakter Fehler
 — Geschätzter Fehler (Pseudo)
 - - - Geschätzter Fehler (Z^2)

Fehler der Dehnungsenergie Π^i [%]



Fehler der Sensitivität
der Dehnungsenergie $\nabla_r \Pi^i$ [%]

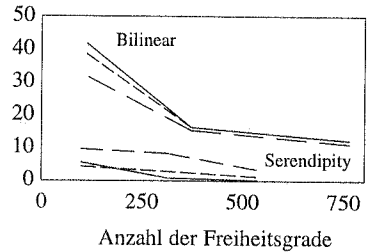


Bild 6.5: Fehlerschätzer für die Sensitivitäten der Energienorm in der Formoptimierung

Vergleich der Verfahren zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers in der Sensitivitätsanalyse

Der Fehler der Sensitivität der Energienorm wird über den Pseudo-Last-Ansatz (6.19) angenähert. Die Sensitivität des Fehlers bezüglich der Optimierungsvariablen wird mit dem modifizierten Z^2 -Verfahren (6.21) approximiert. Die Unterschiede dieser Abschätzungen sowie deren Zuverlässigkeit werden anhand von numerischen Untersuchungen überprüft (Bild 6.5). Eine quadratische Scheibe mit kreisförmigem Loch wird mit 4- bzw. 8- knotigen, isoparametrischen, 2×2 integrierten Scheibenelementen diskretisiert. Der Radius r des Lochs stellt die Optimierungsvariable dar. Für unterschiedlich feine Diskretisierungen werden die "exakten" sowie die geschätzten Fehler der Energienorm und deren Ableitung mit dem Pseudo-Last-Ansatz berechnet. Diesen Resultaten sind die mit dem modifizierten Z^2 -Ansatz berechneten Sensitivitäten des Fehlers der Energienorm gegenübergestellt. Die Referenzlösung wurde auf der Basis einer feinen Diskretisierung mit 20.000 Freiheitsgraden ermittelt. Wie aus dem Diagramm für den Fehler der Sensitivitäten entnommen werden kann, liefern beide Ansätze ähnliche Werte, die den "exakten" Fehler der Ableitungen der Energienorm gut approximieren.

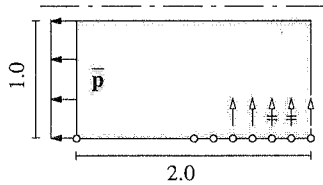
Numerisches Beispiel

Die Berücksichtigung der Sensitivität des Fehlers der Energienorm bei der Adaption des FE-Netztes führt zu einer merklichen Verbesserung der Konvergenz. Dies wird anhand eines Bei-

spiels zur Formoptimierung von Scheibentragwerken gezeigt (Bild 6.6). Das Gewicht einer Zugprobe wird durch eine Optimierung der Form des Mittelstücks unter Berücksichtigung der maximal zulässigen von Mises Spannungen minimiert. Die Vergleichsspannungen werden in 4×40 Stützpunkten entlang der äußeren Kanten kontrolliert. Aufgrund der Symmetrie des Problems wird nur ein Viertel der Struktur modelliert. Das variable Kantensegment ist

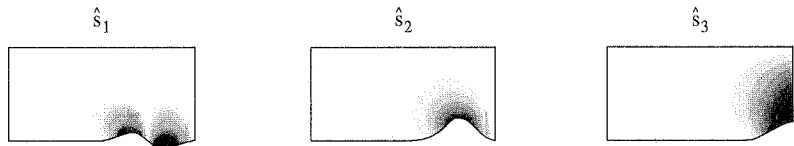
Zielfunktion: Minimales Gewicht

Nebenbedingung: Maximale Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_v = 20.0$

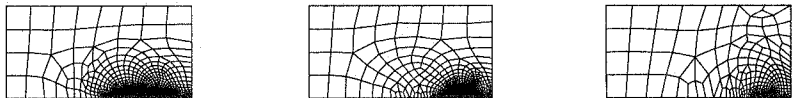


Dicke: $t = 0.1$
 Last: $\bar{p} = 1.0$
 E-Modul: $E = 10^4$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.0$
 Symmetrieachse: — · —

← Optimierungvariable ⇌ Verknüpfte Bewegungsrichtung ○ Kontroll-Knoten



Entwurfsgeschwindigkeiten 0 1



Lokal verfeinerte FE-Netze hinsichtlich $\nabla_s \bar{\sigma}_v$

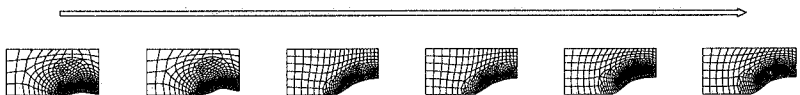
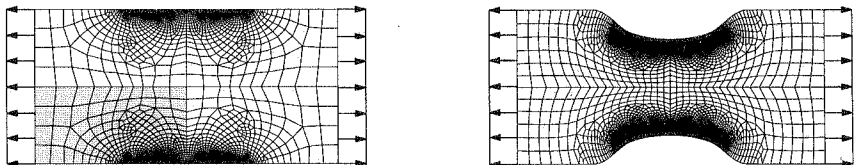


Bild 6.6: Formoptimierung einer Zugprobe – Adaption des FE-Netzes unter Berücksichtigung der Sensitivität des Diskretisierungsfehlers in der Energienorm

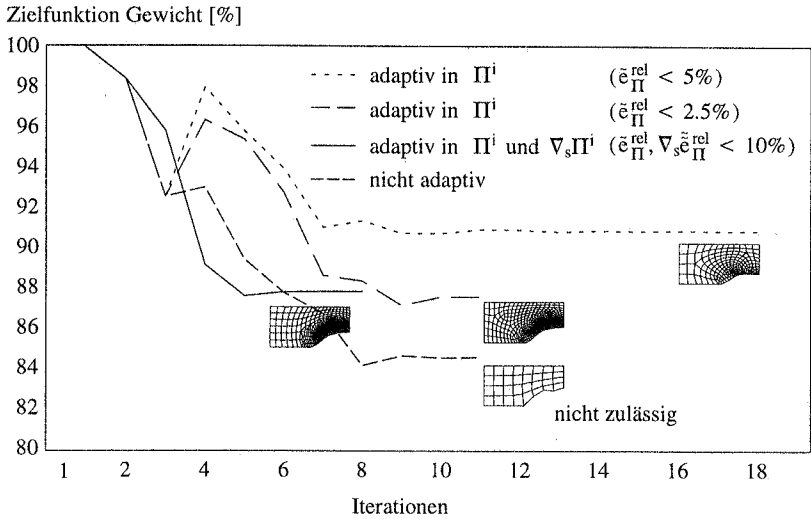


Bild 6.7: Einfluß der Netzadaption unter Berücksichtigung der Sensitivitäten

mit 2 kubischen Bézier-Splines beschrieben, wobei die Kontroll-Knoten sich nur normal zur Kante bewegen können. Durch die Berücksichtigung von C_g^0 - und C_g^1 -Übergangsbedingungen ergeben sich 3 unabhängige Optimierungsvariablen \hat{s} .

Der Fehler der Energienorm wird mit einem Z^2 -Fehlerindikator (6.7) ermittelt. Die Sensitivitäten der Fehler der Energienorm werden mit dem modifizierten Z^2 -Ansatz (6.21) berechnet. Die Schranken für den relativen Fehler und dessen Ableitungen betragen jeweils 10%. Für jede Optimierungsvariable ergibt sich eine spezifische Fehlerverteilung (Bild 6.6). Das FE-Netz wird analog zu der Vorgehensweise bei mehreren Lastfällen (Rehle [209]) durch die Überlagerung des Verfeinerungsindikators aus der Strukturanalyse und der Verfeinerungsindikatoren aus den Sensitivitätsanalysen bestimmt. Der effektive Verfeinerungsindikator kann entweder über eine Mittelung oder die Berücksichtigung des lokalen Maximums berechnet werden. Im vorliegenden Beispiel wird das FE-Netz anhand der maximalen Verfeinerungsindikatoren aus dem Fehler der Energienorm und aus den Ableitungen des Fehlers bestimmt. Betrachtet man den Startentwurf, so zeigt dieses Beispiel deutlich, daß die Berücksichtigung der Fehler der Sensitivitäten zu einem vollkommen anderen Netz führt, als wenn nur der Fehler der Strukturantwort selbst kontrolliert wird. Dieser würde auf ein gleichmäßiges, grobes Netz führen.

Die Effizienz dieser Vorgehensweise wird aus dem Diagramm in Bild 6.7 deutlich. Die Konvergenz und im vorliegenden Beispiel auch das Ergebnis des Optimierungsprozesses können durch die Reduktion der Fehlerschranke verbessert werden, wenn nur der Fehler der Energienorm berücksichtigt wird. Die Konvergenz kann abermals durch Adaption des FE-Netzes hin-

sichtlich der Sensitivität des Fehlers verbessert werden. Da die Ermittlung der Sensitivitäten der Spannungen in einer Nachlaufrechnung erfolgen kann, ist der numerische Aufwand hierfür zu vernachlässigen. Wird der Diskretisierungsfehler nicht berücksichtigt, so führt die Optimierungsprozedur zu einem unzulässigen Tragwerk. Die tatsächlichen Vergleichsspannungen dieses Tragwerks überschreiten den zulässigen Maximalwert, wie eine nachträgliche, genaue FE-Analyse ergibt.

In den bisherigen Untersuchungen wird der Diskretisierungsfehler der Entwurfskriterien über den Fehler der Strukturantwort in der Energiernorm abgeschätzt. Dasselbe gilt für die Sensitivität des Fehlers der Entwurfskriterien. Um die Zuverlässigkeit der Optimierungsergebnisse zu steigern, ist es jedoch notwendig direkt die Genauigkeit der numerisch ermittelten Werte für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen zu kontrollieren. Entsprechende Fehlerschätzer sind in zukünftigen Arbeiten zu entwickeln.

6.2 Adaptive Entwurfsmodellierung

Die Adaption des Entwurfsmodells ermöglicht es, die kontinuierliche Lösung $s(\mathbf{x})$ des zugrunde liegenden Variationsproblems genauer zu approximieren und dabei die numerische Effizienz des Optimierungsprozesses zu erhöhen. Das Entwurfsmodell wird sukzessive den Zwischenergebnissen im Optimierungsprozeß angepaßt (Bild 6.8). Eine adaptive Entwurfsmodellierung ist insbesondere für Optimierungsprobleme von Bedeutung, bei denen sowohl der grundlegende Aufbau eines Tragwerks wie auch dessen Form im Detail zu bestimmen sind. Im Sinne einer übergeordneten Modelladaptivität kann zum einen der Typ des Entwurfsmodells gewählt werden. Je nach Eindeutigkeit des Zwischenergebnisses wird ein Entwurfsmodell entweder für die materielle Topologieoptimierung oder für die Formoptimierung generiert. Zum anderen können die Materialverteilung in der Topologieoptimierung oder die variablen Kanten und Oberflächen in der Formoptimierung adaptiv diskretisiert werden.

Die adaptive Entwurfsmodellierung wird bislang nur in wenigen Arbeiten von Falk [90], Mathiak [157], Kohli, Carey [142] in der Formoptimierung und von Maute, Ramm in der

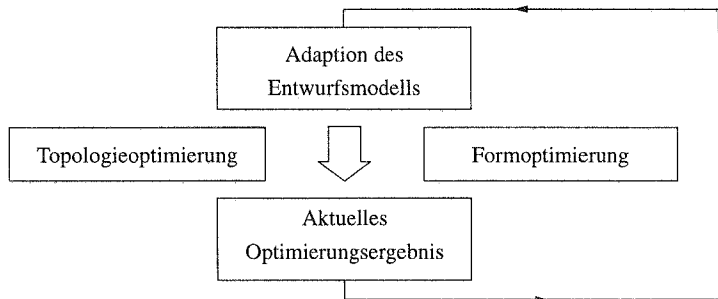


Bild 6.8: Adaptive Entwurfsmodellierung – Optimierungsprozeß

Topologieoptimierung [165] sowie in der integrierten Topologie- und Formoptimierung [166] behandelt. In den folgenden Abschnitten sind die wesentlichen Aspekte dieser Arbeiten zusammengefaßt. Zunächst wird die Methode der adaptiven Entwurfsmodellierung am Beispiel der Formoptimierung dargestellt. Dabei werden die Parallelen und Unterschiede zu den adaptiven FE-Methoden aufgezeigt. Anschließend wird die adaptive Diskretisierung des Entwurfsmodells in der Topologieoptimierung eingesetzt, um die in Abschnitt 4.5 angesprochenen, methodischen Probleme bei einer festen Diskretisierung der Materialverteilung zu beheben. Abschließend werden die materielle Topologie- und Formoptimierung adaptiv kombiniert, um die spezifischen Vorteile beider Ansätze zur Lösung einer verallgemeinerten Formoptimierungsaufgabe zu nutzen. Die Vorgehensweise und die Vorteile der adaptiven Entwurfsmodellierung werden anhand verschiedener Optimierungsprobleme veranschaulicht. Algorithmische Details zur Adaption des Entwurfsmodells befinden sich im Anhang A7.

6.2.1 Adaptive Entwurfsmodellierung in der Formoptimierung

Für die adaptive Entwurfsmodellierung wird ein CAGD-orientierter Ansatz zur Beschreibung der Form und deren Veränderung im Optimierungsprozeß gewählt (\rightarrow Abschnitt 5.1). Die Diskretisierung der Geometrie im Entwurfsmodell und die der Zustandsgrößen im Analysemodell sind bei diesem Ansatz entkoppelt. Die Parallelen und Unterschiede zu den adaptiven FE-Verfahren werden anhand der Begriffe Diskretisierungsfehler, Fehlerschätzer, Verfeinerungsindikatoren und Verfeinerungsstrategien erläutert. Die Effizienz der adaptiven Entwurfsmodellierung wird am Beispiel der Formoptimierung eines Scheibenträgerwerks aufgezeigt.

Die adaptive Diskretisierung der Geometrie kann als übergeordnetes Optimierungsproblem verstanden werden. Die Form des Trägerwerks ist mit möglichst wenigen Optimierungsvariablen so zu diskretisieren, daß die kontinuierliche Lösung $s(\mathbf{x})$ möglichst genau approximiert, d.h. der Diskretisierungsfehler minimal, wird. Der Diskretisierungsfehler kann entweder über die L_p -Norm der Distanz zwischen der kontinuierlichen und der approximierten Lösung

$$e_s = \left[\int_{\Omega_x} |s(\mathbf{x}) - s^h(\mathbf{x})|^p d\Omega_x \right]^{1/p} ; \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (6.22)$$

oder dem Betrag der Differenz zwischen den Ziel- bzw. Lagrange-Funktionen der kontinuierlichen und approximierten Lösung definiert werden.

$$e_f = |f(s) - f(s^h)| ; \quad e_L = |L(s) - L(s^h)| \quad (6.23)$$

Die Fehler in den Differenzen der Zielfunktionen und der Lagrange-Funktionen sind äquivalent, da die Funktionswerte im Optimum der jeweiligen Diskretisierung übereinstimmen. Die kontinuierliche Lösung $s(\mathbf{x})$ ist zumeist nicht bekannt, so daß der Diskretisierungsfehler nur näherungsweise bestimmt werden kann. Im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente ist

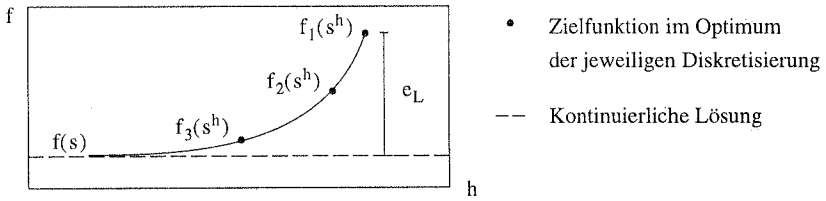


Bild 6.9: Asymptotischer Fehlerschätzer für Probleme der Strukturoptimierung

es im allgemeinen nicht möglich, den geometrischen Diskretisierungsfehler aus lokalen Residuen oder der Glattheit der approximierten Lösung abzuschätzen, da sich Optimierungsprobleme in der Regel nicht auf lokale Gleichgewichts- bzw. Optimalitätsbedingungen zurückführen lassen.

Ein auf beliebige Optimierungsprobleme anwendbarer, jedoch numerisch aufwendiger a-posteriori Fehlerschätzer beruht auf einer asymptotischen Entwicklung der Optimierungsergebnisse in $f(s^h)$ bzw. $L(s^h)$ sowie der Norm von s^h für zunehmend feine Diskretisierungen (Bild 6.9).

$$\tilde{e}_f = |f(s) - f(s^h)| = \tau_1 h^p + \tau_2 h^{2p} + \tau_3 h^{3p} + \dots \quad (6.24)$$

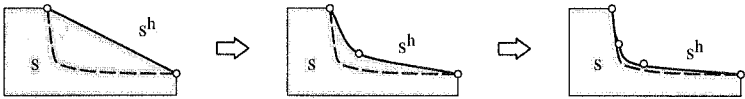
Die charakteristische Größe der Design-Elemente ist mit h gekennzeichnet und nimmt mit zunehmender Anzahl der Optimierungsvariablen n_s ab: $h \sim n_s^{-1}$. Der Diskretisierungsfehler e_f bzw. \tilde{e}_f wird um so kleiner, je feiner die Diskretisierung ist ($h \rightarrow 0$). Die Parameter p und τ_i sind vom jeweiligen Optimierungsproblem abhängig und werden aus den Optimierungsergebnissen s_i^h für verschiedene Diskretisierungen h_i mit (6.24) bestimmt. Dies führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem in f , τ_i und p , das iterativ gelöst wird. Auf diese Weise können die kontinuierliche Lösung f und der Diskretisierungsfehler \tilde{e}_f abgeschätzt werden.

Neben dem Fehlerschätzer ist ein lokaler Verfeinerungsindikator notwendig, um die Diskretisierung anzupassen. Aufgrund des allgemeinen mathematischen Aufbaus von Optimierungsproblemen ist es in der Regel nicht möglich, aus dem asymptotischen Fehlerschätzer (6.24) eine räumliche Fehlerverteilung und damit einen Verfeinerungsindikator abzuleiten. Sämtliche, bislang entwickelten Verfeinerungsindikatoren beruhen auf heuristischen Betrachtungen. Mathiak und Schnack [156] vergleichen die optimierten Formen s^h für zwei Diskretisierungen und verfeinern das Design-Element, in dem die L_p -Norm der Differenz der Näherungslösungen am größten ist. Dieselben Autoren schlagen alternativ hierzu vor, den Grad der Diskretisierung von Kurven- und Flächensegmenten mit großen Krümmungen zu erhöhen. Falk [91] schätzt den Einfluß einer zusätzlichen Optimierungsvariablen \hat{s}_{iz} auf den Diskretisierungsfehler über den Betrag der Ableitung der Lagrange-Funktion nach dieser Variablen \hat{s}_{iz} ab.

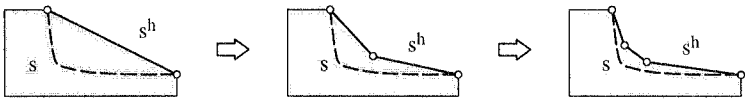
$$r_L = |\nabla_{s_{iz}} L| = |\nabla_{s_{iz}} f + \boldsymbol{\eta}^T \nabla_{s_{iz}} \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_{s_{iz}} \mathbf{g}| \quad (6.25)$$

Die zusätzliche Optimierungsvariable \hat{s}_{iz} wird im nächsten Optimierungsschritt aktiv, wenn der Verfeinerungsindikator r_L einen Schwellenwert übersteigt. Für die kontinuierliche Lösung

p-Adaptivität



h-Adaptivität



○ Kontroll-Knoten --- Kontinuierliche Lösung ——— Näherungslösung

Bild 6.10: Strategien zur adaptiven Entwurfsmodellierung in der Formoptimierung

$s(\mathbf{x})$ ist die Ableitung der Lagrange-Funktion nach zusätzlichen Optimierungsvariablen Null. Das Maß der Verfeinerung wird bei diesen Verfahren nicht an der Fehlerschranke orientiert, sondern nur heuristisch gesteuert.

Es können im wesentlichen zwei Strategien zur Adaption der geometrischen Diskretisierung in der Formoptimierung unterschieden werden (Bild 6.10):

- p-Adaption: Anpassung der Interpolationsordnung der Design-Elemente.
- h-Adaption: Anpassung der Größe der Design-Elemente.

Das Analogon zur r-Adaption, d.h. die Anpassung der Diskretisierung über die Position der Kontroll-Knoten, ist bereits per Definition in der Formoptimierung enthalten. Das Optimierungsproblem wird zunächst für eine grobe Diskretisierung gelöst. In der Folge wird die Diskretisierung sukzessive lokal verfeinert, bis der Diskretisierungsfehler einen vorgegebenen Grenzwert unterschreitet. Alternativ hierzu stellen Falk und Barthold [92] ein hierarchisches Konzept vor. Sämtliche potentiellen Optimierungsvariablen werden zu Beginn des Optimierungsprozesses definiert. Die abhängigen Kontroll-Knoten einer Hierarchiestufe werden zunächst durch Interpolationsvorschriften mit den Master-Knoten der höheren Stufe verknüpft. Im ersten Optimierungsschritt bilden nur die Positionen der Master-Knoten der höchsten Hierarchiestufe die Optimierungsvariablen. Im weiteren werden die Kontroll-Knoten der niedrigeren Hierarchiestufen anhand des Verfeinerungsindikators (6.25) bestimmt, deren Position in den Satz der Optimierungsvariablen aufgenommen wird. Dieses Konzept bietet die Möglichkeit, a-priori den adaptiven Optimierungsprozeß zu steuern und die lokale Feinheit des Optimierungsergebnisses zu beschränken. Für die Adaption des geometrischen Modells in einem verallgemeinerten Formoptimierungsproblem ist diese Vorgehensweise jedoch weniger geeignet, da hierbei große Änderungen der Geometrie im Optimierungsprozeß auftreten und ein hierarchisches Entwurfsmodell a-priori nicht aufgestellt werden kann.

Die zuvor beschriebenen Verfahren zur Fehlerabschätzung und lokalen Verfeinerung werden von Maute und Ramm [168] am Beispiel der adaptiven Approximation von vorgegebenen Kurven für die p- und h-Strategie untersucht. Der asymptotische Fehlerschätzer nähert den Diskretisierungsfehler bei einer genügend feinen Diskretisierung zufriedenstellend an. Die hierfür notwendige Anzahl von Optimierungsvariablen und der damit verbundene, numerische Aufwand sind jedoch für Formoptimierungsprobleme im allgemeinen zu groß. Der an den Krümmungen orientierte Verfeinerungsindikator nach Mathiak, Schnack [156] und der auf den Ableitungen der Lagrange-Funktion beruhende Indikator nach Falk [90] führen zu annähernd denselben Resultaten. Beide Verfahren steigern die Effizienz des adaptiven Optimierungsprozesses im Vergleich zu einer gleichförmigen Verfeinerung erheblich. Für die in der Formoptimierung überwiegend auftretenden glatten Form erweist sich die p-Strategie gegenüber der h-Variante als deutlich effizienter.

Numerisches Beispiel

Die Effizienz der adaptiven Diskretisierung des Entwurfsmodells in der Formoptimierung wird am Beispiel eines Scheibentragwerks veranschaulicht (Bild 6.11). Den Ausgangsentwurf bildet eine rechteckige Scheibe, die links eingespannt und rechts mit einer Gleichstreckenlast belastet ist. Die Resultierende der Last bleibt im Optimierungsprozeß ihrem Betrag nach konstant. Das Gewicht der Struktur wird durch Variation des gekennzeichneten variablen Randes unter Berücksichtigung einer maximal zulässigen von Mises Spannung $\bar{\sigma}_v$ minimiert. Das FE-Netz wird mit 1152, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen so fein gewählt, daß der Diskretisierungsfehler in den Zustandsgrößen über den gesamten Optimierungsprozeß vernachlässigt werden kann und es zu keinen verfälschten Optimierungsergebnissen infolge eines künstlichen Versteifens der Finiten Elemente kommt. Die Vergleichsspannungen werden in den Mittelpunkten aller Elemente kontrolliert.

Zielfunktion: Minimales Gewicht

Nebenbedingung: Maximale Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_v = 20.0$

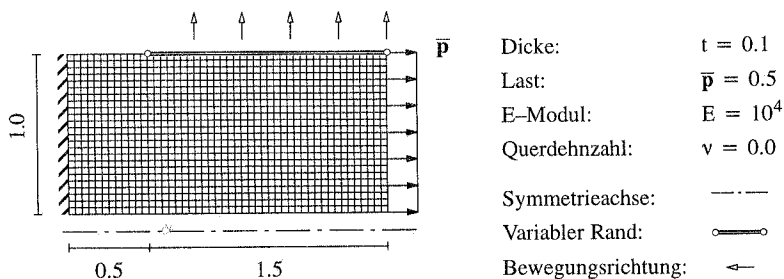


Bild 6.11: Zugprobe – Adaptive Entwurfsmodellierung in der Formoptimierung

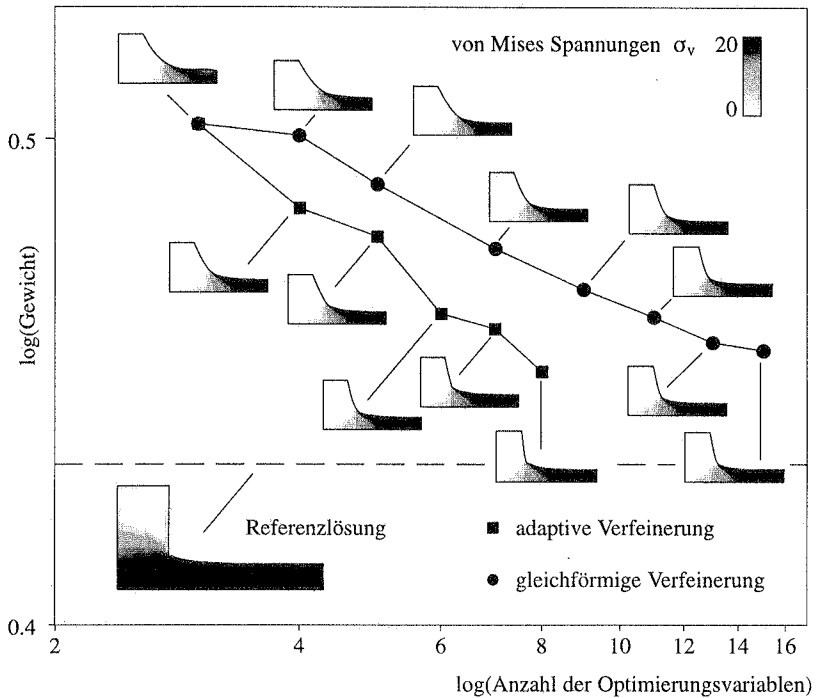


Bild 6.12: Vergleich der Optimierungsergebnisse bei gleichförmiger und adaptiver Diskretisierung des Entwurfsmodells

Der variable Rand wird mit einem kubischen, C_2^2 -kontinuierlichen B-Spline diskretisiert. Die vertikale Positionen der Kontroll-Knoten bilden die Optimierungsvariablen. Die Anzahl der Kontroll-Knoten wird einerseits gleichförmig, andererseits im Sinne der h-Adaptivität lokal im Optimierungsprozeß erhöht. Die Krümmung der Kurve dient als Verfeinerungsindikator des adaptiven Prozesses. In Bild 6.12 sind die optimierten Zielfunktionswerte für eine gleichförmig und eine adaptiv verfeinerte Diskretisierung über der Anzahl der Optimierungsvariablen im doppelt-logarithmischen Maßstab aufgetragen. Das Gewicht der Optimierungsergebnisse ist auf das Gewicht des Startentwurfs bezogen. Die optimierten Strukturen mit den zugehörigen

Anzahl der Optimierungsvariablen	7	9	11	13	15
Fehler $\bar{\epsilon}_f^{rel}$ [%]	25.04	16.78	11.38	0.82	0.36
“exakter” Fehler $\bar{\epsilon}_{ex}^{rel}$ [%]	15.18	12.14	10.16	8.30	7.73

Tabelle 6.1: Abschätzung des Diskretisierungsfehlers $\bar{\epsilon}_f$ bei gleichförmiger Verfeinerung

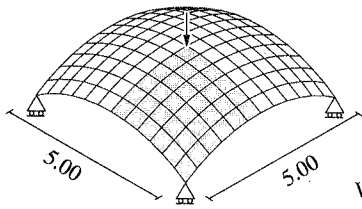
Verteilungen der von Mises Spannungen sind für die einzelnen Diskretisierungen gezeigt. Die höhere Effizienz der adaptiven Vorgehensweise ist deutlich zu erkennen. Die Steuerung der lokalen Verfeinerung über die Krümmung der Kurve erweist sich insbesondere in diesem Beispiel als geeignet, da das kontinuierliche Optimum einen scharfen Übergang vom Lasteinleitungs- zum Auflagerbereich aufweist.

Der Fehler in der Zielfunktion wird aus der Extrapolation der Zielfunktionswerte (6.24) berechnet. Die in Tabelle 6.1 aufgeführten Abschätzungen sind auf der Basis von drei aufeinander folgenden Diskretisierungen für eine gleichförmige Verfeinerung ermittelt. Die Qualität dieser Schätzungen ist jedoch eher gering, wie anhand einer Referenzlösung mit 27 Optimierungsvariablen bei adaptiver Verfeinerung festgestellt werden kann. Der "exakte" Fehler wird aus der Differenz der Lösungen für die jeweilige Diskretisierung zu dem optimalen Gewicht der Referenzlösung gebildet. Aufgrund der wenigen Optimierungsvariablen in der Formoptimierung ist es im allgemeinen nur bedingt möglich, den geometrischen Diskretisierungsfehler zuverlässig abzuschätzen. Für die Anwendung von adaptiven Verfeinerungsstrategien ist dies jedoch kein wesentlicher Defekt. Im Gegensatz zu den adaptiven FE-Verfahren der Strukturanalyse spielt die Abweichung des numerischen Ergebnisses von der kontinuierlichen Lösung in der Strukturoptimierung nur eine untergeordnete Rolle. Eine adaptive, geometrische Diskretisierung ist jedoch im Hinblick auf eine automatisierte und dabei möglichst effiziente Modellbildung von generellem Interesse.

6.2.2 Adaptive Entwurfsmodellierung in der Topologieoptimierung

Die am Beispiel der Formoptimierung vorgestellte Methode der adaptiven Entwurfsmodellierung kann direkt auf die materielle Topologieoptimierung übertragen werden. Die Geometrie des Tragwerks wird anhand der Material- bzw. Dichteverteilung im Entwurfsraum beschrieben (\rightarrow Abschnitt 3.1). Die kontinuierliche Lösung wird mit $\rho(\mathbf{x})$, die approximierte Dichteverteilung mit $\rho^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}})$ bezeichnet. Die Diskretisierung der Materialverteilung wird den Zwischenergebnissen im Optimierungsprozeß angepaßt. Ein entsprechendes Verfahren wird erstmals von Maute und Ramm [165] unter der Bezeichnung ATO ("Adaptive Topology Optimization") für ebene Scheiben- und Plattentragwerke vorgestellt und auf Schalentragwerke erweitert [169]. Ähnliche Ansätze werden ebenfalls von Hinton et al. [124] sowie Swan et al. [246] verfolgt. Die grundsätzliche Vorgehensweise des ATO-Verfahrens wird im folgenden am Beispiel der Topologieoptimierung eines Schalentragwerks beschrieben und dabei auf die Besonderheiten der adaptiven Entwurfsmodellierung in der materiellen Topologieoptimierung eingegangen. Die Methode der adaptiven Topologieoptimierung wird in Abschnitt 6.2.3 auf verschiedene Optimierungsprobleme angewandt. Der Algorithmus ist im Anhang A7 detailliert erläutert.

In Bild 6.13 sind die Aufgabenstellung sowie das Optimierungsergebnis für eine grobe Diskretisierung des Entwurfsraums dargestellt. Der Entwurfsraum wird durch ein Segment einer



Zielfunktion: Maximale Steifigkeit

Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 30\%$

Radius: $r = 20.0$

Dicke: $t = 0.05$

Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop $\beta = 4.0$

Querdehnzahl: $\nu = 0.3$

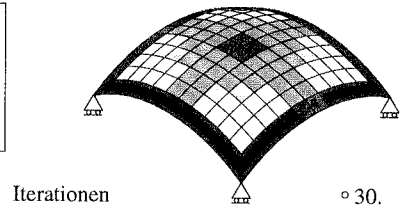
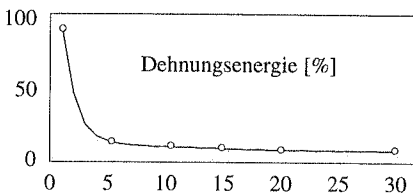
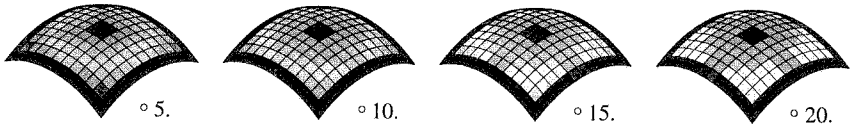


Bild 6.13: Topologieoptimierung eines Schalentragwerks für eine grobe Diskretisierung

kugelförmigen Schale aufgespannt. Das Tragwerk ist mittig belastet und in den vier Eckpunkten vertikal gelagert. Das Optimierungsziel ist es, das Tragwerk maximaler Steifigkeit zu bestimmen. Die Masse \bar{m} ist auf 30% des maximal möglichen Materials im Entwurfsraum beschränkt. Der Entwurfsraum ist mit einem groben Netz von 4×36 , 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduzierten integrierten Schalenelementen diskretisiert. Unter Berücksichtigung der doppelten Symmetrie des Problems wird nur ein Viertel der Schale analysiert. Das Optimierungsproblem wird auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells (3.41) mit dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten OC-Verfahren gelöst. Die Zwischenergebnisse und das Resultat nach 30 Iterationen sind in Bild 6.13 dargestellt. Die optimierte Materialverteilung enthält aufgrund der groben Diskretisierung einen hohen Anteil an porösem Material. So kann im Bereich der Lasteinleitung die Topologie des optimalen Tragwerks nicht ermittelt werden.

Die Grundidee der adaptiven Entwurfsmodellierung in der Topologieoptimierung besteht darin, die Diskretisierung in Bereichen mit porösem Material zu verfeinern. In Bereichen mit gleichförmig niedriger oder hoher Dichte $\rho \rightarrow 0$ bzw. $\rho = \rho_0$ ist eine grobe Diskretisierung ausreichend. Hierbei sind jedoch einige Besonderheiten der materiellen Topologieoptimierung zu beachten.

- Im Unterschied zur CAGD-orientierten Formoptimierung wird in der materiellen Topologieoptimierung nicht explizit zwischen einem Entwurfs- und Analysemodell unterschieden. Auf demselben FE-Netz werden sowohl die Materialverteilung wie auch die Zustandsgrößen beschrieben.
- Die Anpassung des FE-Netzes hinsichtlich der Materialverteilung kann entweder im Sinne eines h-Verfahrens über die Netzdicke oder im Sinne eines p-Verfahrens über die Ansatzordnung der Elemente für die Materialparameter erfolgen. Die p-Strategie ist jedoch in der Topologieoptimierung problematisch, da die Ansatzordnung der Elemente für die Zustandsgrößen so zu erhöhen ist, daß keine numerischen Instabilitäten in Form von "Checkerboard"-Moden auftreten (→ Abschnitt 4.1.3).
- Das Material $\rho(\mathbf{x})$ ist im Optimum diskontinuierlich im Entwurfsraum verteilt (Bild 6.14). Die Grenze zwischen leeren und mit Material belegten Bereichen stellt die Kontur des optimierten Tragwerks dar. Um diesen diskontinuierlichen Übergang genau abzubilden, muß in diesen Bereichen entweder lokal ein sehr feines Netz erzeugt oder die Orientierung der Elemente der Materialverteilung angepaßt werden. Maute und Ramm [167] zeigen, daß die erste Variante zu einer sehr großen Anzahl von Elementen und damit Optimierungsvariablen führt. Die Netzdicke kann nicht sprunghaft variiert werden, da ansonsten stark verzerrte Elemente entstehen. Folglich führen lokale Verfeinerungen zu großen Einzugsbereichen mit kleinen Elementen.
- Betrachtet man die Entwicklung der Materialverteilung im Optimierungsprozeß, so können häufig bereits nach wenigen Iterationen eindeutig leere Bereiche im Entwurfsraum identifiziert werden. Daher kann die numerische Effizienz des gesamten Optimierungsprozesses erheblich verbessert werden, wenn bei der Adaption der Diskretisierung die leeren Bereiche nicht mehr vernetzt werden. Damit diese Vorgehensweise jedoch nicht zu einem irreversiblen Prozeß führt, muß es möglich sein, daß bereits als leer markierte Bereiche wieder neu vernetzt werden können.

Diese besonderen Merkmale der materiellen Topologieoptimierung sind in dem von Maute und Ramm [165] entwickelten Adaptionsverfahren berücksichtigt (Bild 6.15). Die Adaption der Diskretisierung wird im Parameterraum $\zeta \in \mathbb{R}^2(\Omega_c)$ durchgeführt. Zunächst wird die optimierte Materialverteilung auf ein Hintergrundnetz übertragen. Dieses besitzt eine im Vergleich

Exakte Materialverteilung $\rho(\mathbf{x})$



Approximierte Materialverteilung $\rho^h(\mathbf{x})$



Elementgröße



Elementorientierung

Bild 6.14: Approximation der diskontinuierlichen Materialverteilung im Entwurfsraum

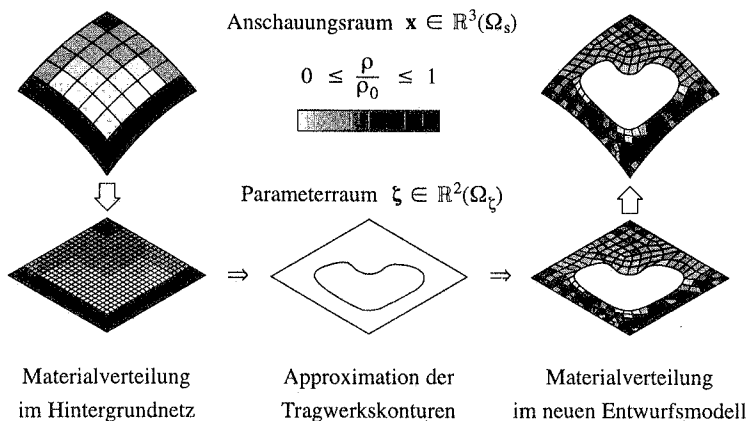


Bild 6.15: ATO – Adaption des Entwurfsmodells für die Topologieoptimierung

zum FE-Netz des Entwurfs- bzw. Analysemodells hohe, gleichmäßige Netzdichte, um die optimierte Materialverteilung nahezu ohne Approximationsfehler abzuspeichern. Das Hintergrundnetz bedeckt den gesamten Entwurfsraum und wird während des adaptiven Optimierungsprozesses nicht verändert. Auf der Basis der Materialverteilung im Hintergrundnetz werden die Tragwerkskonturen bestimmt und die leeren Bereiche identifiziert. Der so angepasste, aktuelle Entwurfsraum wird neu vernetzt, wobei Bereiche mit porösem Werkstoff zusätzlich verfeinert werden können. Die im Hintergrundnetz gespeicherte Materialverteilung wird auf das neue FE-Netz im Anschauungsraum übertragen. Die Optimierungsvariablen im nachfolgenden Optimierungsschritt sind die Materialparameter der Finiten Elemente im aktuellen Entwurfs- bzw. Analysemodell.

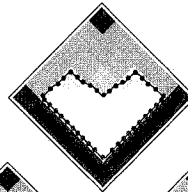
Die Konturen des angepassten Entwurfsraums werden über die Isolinien der Materialverteilung für ein bestimmtes Dichteverhältnis ρ_c/ρ_0 definiert (Papalambros, Chiredast [196]). Nachdem die optimierte Materialverteilung auf das Hintergrundnetz im Parameterraum übertragen ist, kann diese optional geglättet werden. Hierdurch wird der nachfolgend generierte Entwurfsraum vergrößert und die Konturen glatter. Um die Isolinien der Dichte ρ_c zu bestimmen, wird die Dichte in den Knoten des Hintergrundnetzes aus den Materialkennwerten der angrenzenden Elemente gemittelt. Die Stützstellen der Isolinien werden auf den Kanten der Hintergrundelemente durch eine lineare Interpolation der Knotenwerte bestimmt. So erhält man eine erste Approximation der Isolinien als Polygonzüge (Bild 6.16). Die Polygonzüge werden durch kubische Bézier-Splines approximiert, um glatte Konturen zu erhalten. Diese Approximation wird für jeden Polygonzug als adaptives Formoptimierungsproblem formuliert (\rightarrow Abschnitt 6.2.1). Der Approximationsfehler e_{apx} , der über die Fläche zwischen den Splines und dem jeweiligen Polygon definiert ist, wird durch eine entsprechende Positionierung der Kontroll-

Knoten der Splines minimiert. Die Anzahl der Splines pro Polygonzug wird im Sinne einer h-Strategie solange erhöht, bis der minimale Approximationsfehler $\bar{\epsilon}_{\text{apx}}$ einen vorgegebenen Grenzwert unterschreitet. Der Entwurfsraum wird durch die geglätteten Isolinien ρ_c in mehrere Gebiete unterteilt. Gebiete mit einer mittleren Dichte ρ_m unterhalb eines Schwellenwertes $\bar{\rho}_m$ werden als Löcher interpretiert und für den nachfolgenden Optimierungsschritt vernachlässigt. Zusätzlich wird eine Mindestgröße der Löcher $|\Omega|$ festgesetzt, um konstruktive Gesichtspunkte zu berücksichtigen und Probleme bei der Generierung des FE-Netzes zu vermeiden.

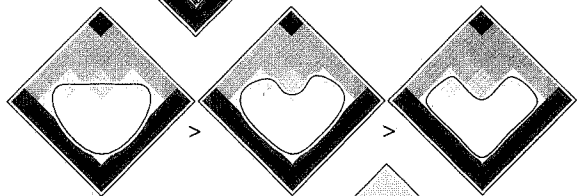
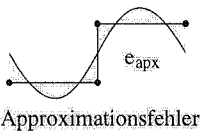
Die Adaption des FE-Netzes für den aktuellen Entwurfsraum kann zum einen über die Netzdichte im Sinne einer h-Strategie erfolgen, wobei die Netzdichte eine Funktion des Dichteverhältnisses ρ/ρ_0 ist (Bild 6.17). In Bereichen mit einem hohen Anteil an porösem Material wird die Netzdichte erhöht, um dort die Materialverteilung detaillierter beschreiben zu können. Zum anderen können die Elemente an den Isolinien für mehrere Dichteverhältnisse $\rho_{\text{iso}}/\rho_0 > \rho_c/\rho_0$ orientiert werden. Das FE-Netz wird auf diese Weise in Schichten aufgebaut, wodurch weniger gezackte Rändern im nachfolgenden Optimierungsschritt entstehen.

Der gesamte Adaptionsprozeß wird durch die Vorgabe einiger weniger Kontrollparameter interaktiv gesteuert. Die Dichte ρ_c der Isolinien, welche die Konturen des aktuellen Entwurfsraums definieren, wird sukzessive im adaptiven Optimierungsprozeß auf $\rho_c \rightarrow \rho_0$ gesteigert, so daß zum Ende des Prozesses der angepaßte Entwurfsraum mit dem optimalen Tragwerk übereinstimmt. Ebenso wird bei der Glättung der Isolinien die zulässige Abweichung $\bar{\epsilon}_{\text{apx}}$ zwischen den Polygonzügen und der Splines im Laufe des Optimierungsprozesses verringert. Der

1. Approximation der Isolinien durch Polygone
 $\rho_c/\rho_0 = 0.1$



2. Adaptive Glättung der Isolinien



3. Identifikation leerer Bereiche
Minimale Lochgröße: $|\Omega|_{\text{leer}} > |\Omega|$
Gemittelte Dichte: ρ_m

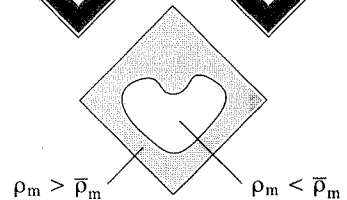


Bild 6.16: Adaption der Konturen des aktuellen Entwurfsraums

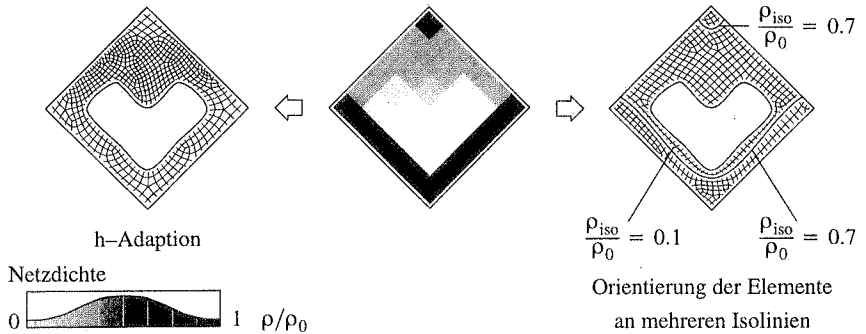


Bild 6.17: Adaption des FE-Netzes für die Topologieoptimierung

Schwellenwert $\bar{\rho}_m$ für die Identifikation von leeren Gebieten orientiert sich an der Dichte ρ_c . Es ist bei der Wahl dieser Kontrollparameter darauf zu achten, daß der neue Entwurfsraum nicht zu stark eingeschränkt wird. Vielmehr sollte dieser Entwurfsraum eine Einhüllende um die aktuelle Materialverteilung bilden. Da das Hintergrundnetz den gesamten ursprünglichen Entwurfsraum bedeckt, ist es auf diese Weise möglich, daß sich Material wieder in Bereichen anlagern kann, die bereits zuvor als leer interpretiert wurden (\rightarrow Beispiel: Bild 6.20). Die Anpassung des FE-Netzes im Entwurfsraum ist in den meisten Fällen nur in den ersten Adaptionsschritten von Bedeutung, da in der Topologieoptimierung typischerweise feingliedrige Strukturen entstehen. Es ist nicht notwendig, die Netzdichte innerhalb dieser schmalen Tragwerkselemente zu variieren. Statt dessen wird ein gleichförmiges FE-Netz generiert, das die Strukturantwort genau beschreibt.

Das Adaptionsverfahren wird eingesetzt, um den Entwurfsraum für das Schalentragwerk nach Bild 6.13 im Optimierungsprozeß anzupassen. In Bild 6.18 sind die adaptierten Entwurfsräume und die optimierten Materialverteilungen im Optimierungsprozeß dargestellt. Es sind drei Adaptions- bzw. Optimierungsschritte notwendig, um die Topologie des optimalen Tragwerks zu ermitteln und dabei dessen Form in guter Näherung zu bestimmen. Der Verlauf der Dehnungsenergie zeigt, daß die Steifigkeit des Tragwerks durch die Verfeinerung des Entwurfsmodells gesteigert werden kann. Die Sprünge im Iterationsverlauf lassen sich auf Ungenauigkeiten bei der Übertragung der Materialverteilung in das jeweils neue Entwurfsmodell zurückführen. Diese Störung klingt im folgenden Optimierungsschritt schnell ab. Nach dem dritten Optimierungsschritt wird das Konvergenzkriterium erfüllt. Die Verbesserung der Zielfunktion vom zweiten zum dritten Optimierungsschritt ist kleiner 1%. Das Adaptionsverfahren wird abschließend mit $\rho_c/\rho_0 = 0.5$ auf die ermittelte Materialverteilung angewandt, um ein durch Splines eindeutig beschriebenes Tragwerk zu erhalten (Bild 6.19a). Das Ergebnis des adaptiven Topologieoptimierungsprozesses kann direkt im Konstruktionsprozeß weiter bearbeitet werden (\rightarrow 6.2.4 Abschnitt).

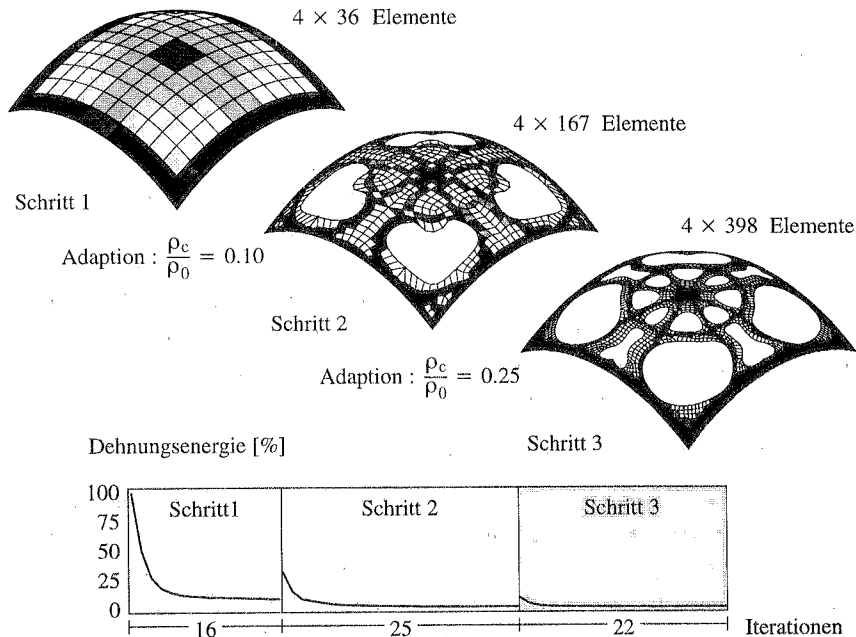


Bild 6.18 Adaptive Topologieoptimierung eines Schalentragswerks

Dasselbe Optimierungsproblem wird zum Vergleich mit dem konventionellen Topologieoptimierungsverfahren bei fester Diskretisierung gelöst. Der Entwurfsraum wird hierfür mit derselben Auflösung diskretisiert wie das Hintergrundnetz im Adaptionverfahren (4×900 Elemente). Die Ergebnisse sind in Bild 6.19 einander gegenübergestellt. Der konventionelle und der adaptive Optimierungsprozeß führen zu topologisch äquivalenten Resultaten. Das adaptive

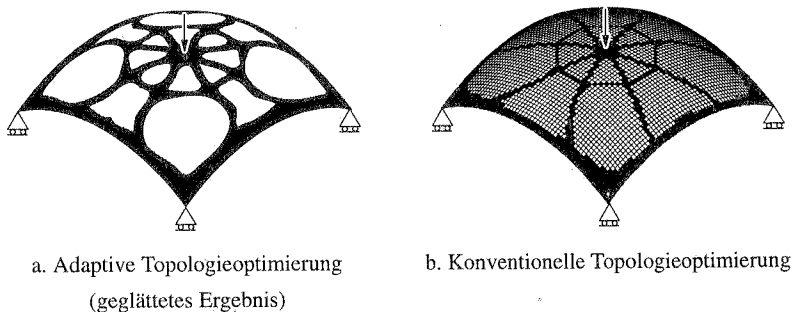


Bild 6.19: Vergleich von adaptiver und konventioneller Topologieoptimierung

Ergebnis besitzt glatte Konturen, die durch Splines abschnittsweise beschrieben werden. Die benötigte Rechenzeit beträgt nur 16% CPU im Vergleich zur konventionellen Vorgehensweise. Die adaptive Topologieoptimierung erweist sich als äußerst robustes Werkzeug, um die Geometrie von Schalentragwerken in guter Näherung effizient zu bestimmen. Darüber hinaus wird die Genauigkeit der FE-Analysen verbessert, da gezackte Ränder sukzessive im Optimierungsprozeß geglättet werden. Diese Vorteile werden anhand weiterer Beispiele in Abschnitt 6.2.3 veranschaulicht. Die adaptive Topologieoptimierung ist jedoch nur bedingt geeignet, die Form der Tragwerkskonturen im Detail zu bestimmen. Hierfür müßten die entsprechenden Bereiche entlang den Rändern des angepaßten Entwurfsraums mit einem sehr feinen FE-Netz diskretisiert werden. Statt dessen wird die genaue Form des Tragwerks effizienter mit CAGD-orientierten Verfahren der Formoptimierung bestimmt, wobei auf die Approximation der Konturen durch Splines zurückgegriffen wird (→ 6.2.4 Abschnitt).

Beispiel zur Materialanlagerung in quasi-leeren Bereichen

Im vorhergehenden Beispiel konvergiert die Materialverteilung während des Optimierungsprozesses monoton gegen das Optimum. Bereiche, die bei der Adaption des Entwurfsraums als leer interpretiert werden, dehnen sich aus, ohne daß sich in diesen wieder Material anlagert. Daher wird am folgenden Beispiel qualitativ aufgezeigt, wie einmal als Löcher interpretierte und somit im folgenden Optimierungsschritt vernachlässigte Bereiche des Entwurfsraums wieder aktiviert werden können.

Der Entwurfsraum sowie die Last- und Auflagerbedingungen sind in Bild 6.20 dargestellt. Das zur Verfügung stehende Material soll so verteilt werden, daß ein Tragwerk mit maximaler Steifigkeit entsteht. Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Beispielen ist hier das Material im Startentwurf nicht homogen im Entwurfsraum verteilt, sondern beschreibt einen schmalen, gelochten Streifen mit maximaler Dichte ρ_0 . Die Bereiche entlang der oberen und unteren Kante des Entwurfsraums sowie das Loch werden zunächst vernachlässigt. Auf der Basis der

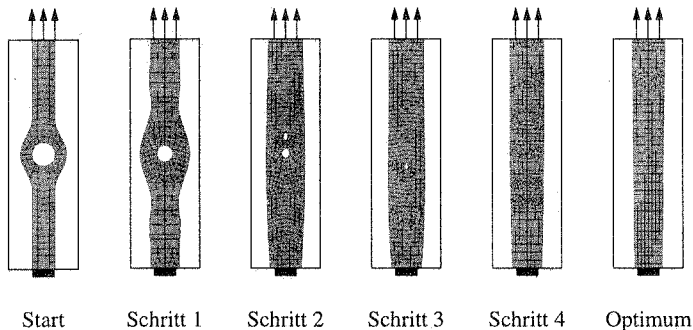


Bild 6.20: Materialanlagerung in quasi-leeren Bereichen

Materialverteilung im Startentwurf wird ein neuer Entwurfsraum erzeugt. Dieser bildet eine Einhüllende um die gegebene Materialverteilung, so daß im folgenden Optimierungsschritt die Möglichkeit einer Materialumlagerung besteht. Hierfür wird ein niedriges Dichteverhältnis ρ_c/ρ_0 für die Isolinien gewählt, welche die Kontur des angepaßten Entwurfsraums definieren. Zusätzlich wird die Materialverteilung im Hintergrundnetz geglättet, um eine künstliche Unschärfe einzuführen und somit den Entwurfsraum auszudehnen. Auf diese Weise können die aktuellen Entwurfsräume der jeweiligen Optimierungsschritte in bereits als leer interpretierte Bereiche hineinwachsen, so daß sich dort Material anlagern kann.

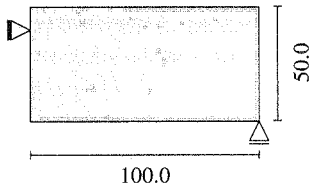
In Bild 6.20 sind die adaptierten Entwurfsräume im Optimierungsprozeß sowie das optimale Tragwerk dargestellt. Die Konvergenz des adaptiven Prozesses wird durch die Aufweitung der aktuellen Entwurfsräume jedoch verlangsamt. Daher ist die künstliche Unschärfe im Lauf des Optimierungsprozesses wieder zu reduzieren, wobei das Dichteverhältnis ρ_c/ρ_0 für die Isolinien, welche die Kontur des angepaßten Entwurfsraums definieren, sowie die Glättung der Materialverteilung im Hintergrundnetz interaktiv vom Anwender gesteuert werden. Eine weitere Möglichkeit, quasi-leere Bereiche wieder zu aktivieren, besteht darin, die Form der aktuellen Entwurfsräume in einem Formoptimierungsschritt zu bestimmen. Die Integration der Formoptimierung in den adaptiven Topologieoptimierungsprozeß ist im nachfolgenden Abschnitt beschrieben.

Anmerkung:

Die grundlegenden Probleme der materiellen Topologieoptimierung sind die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung des diskretisierten Optimierungsproblems. Nur wenn diese Eigenschaften erfüllt sind, ist eine adaptive Diskretisierung aus mathematischer Sicht sinnvoll. Die Existenz einer Lösung kann, wie in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, für optimale sowie suboptimale, stabilisierte Werkstoffmodelle gewährleistet werden. Topologieoptimierungsprobleme sind jedoch nicht eindeutig. Folglich können je nach dem, wie der adaptive Prozeß gesteuert wird, unterschiedliche Optimierungsergebnisse erzielt werden. Die numerischen Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit zeigten jedoch, daß dieser Effekt nur selten auftritt und sich lediglich auf Details der Lösung auswirkt. Es ist jedoch in der adaptiven Topologieoptimierung darauf zu achten, optimale oder suboptimale, stabilisierte Werkstoffmodelle einzusetzen. Andernfalls treten mit zunehmender Verfeinerung immer neue Löcher auf.

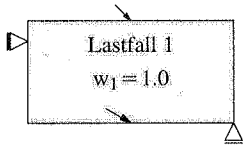
6.2.3 Beispiele zur adaptiven Topologieoptimierung

Das Potential der adaptiven Topologieoptimierung (ATO) wird durch Beispiele zur Steifigkeitsmaximierung von Scheibentragwerken bei mehreren Lastfällen unterstrichen. Die Vorteile der adaptiven Topologieoptimierung werden insbesondere bei Problemen mit Spannungsnebenbedingungen und elastoplastischem Materialverhalten deutlich. Durch die Adaption des Entwurfsraums werden künstliche Spannungsspitzen infolge gezackter Berandungen vermieden.

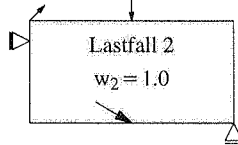


Zielfunktion: Maximale Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 20\%$
 Werkstoffmodell: Makroskopisch, orthotrop $\beta = 2.0$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.3$
 Filtermethode: $\bar{r} = 2.00$, $\bar{\kappa} = 2.0$

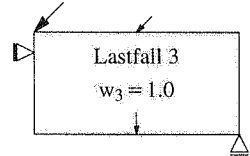
Lastfälle:



“Fahren”



“Beschleunigen”



“Bremsen”



Schritt 1 → 6.78%



Schritt 2 → 3.88%



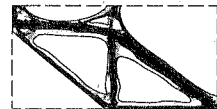
Schritt 3 → 3.63%



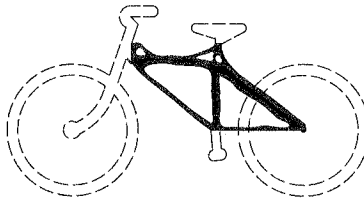
Schritt 4 → 3.36%



Schritt 5 → 3.12%



Schritt 6 → 3.03%



Optimum (geglättet)

Bild 6.21: Adaptive Topologieoptimierung eines Fahrradrahmens

Adaptive Topologieoptimierung bei mehreren Lastfällen

Die Methode der adaptiven Entwurfsmodellierung in der Topologieoptimierung kann auf beliebige Aufgabenstellungen angewandt werden. In Bild 6.21 wird diese Methode beispielsweise eingesetzt, um die Topologie eines Fahrradrahmens zu bestimmen. Der Entwurfsraum wird ohne Berücksichtigung funktionaler Nebenbedingungen, wie einen Freiraum für die Drehung des vorderen Rades um die Lenkerachse, gewählt. Der Lenkerkopf und die Gabel bilden das

vordere, fest eingespannte Auflager. Das hintere, vertikale, horizontal verschiebliche Auflager stellt die Nabe des Hinterrades dar. Der Rahmen wird für drei Lastfälle auf maximale Steifigkeit ausgelegt, wobei die Masse im Entwurfsraum konstant ist. Die Lastfälle geben die Belastungen während der Fahrt, beim Beschleunigen und beim Bremsen näherungsweise wieder.

Die Zielfunktion wird nach der Wichtungsmethode (2.31) aus der gewichteten Summe der Dehnungsenergien mit $w_j = 1.0$ gebildet. Die für die aktuelle Diskretisierung optimale Materialverteilung wird mit dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten OC-Verfahren auf der Basis des stabilisierten, makroskopischen, orthotropen Werkstoffmodells (3.44) bestimmt. Der Entwurfsraum wird zunächst mit einem groben FE-Netz diskretisiert und anschließend mit der in Abschnitt 6.2.2 erläuterten Methode sukzessive verfeinert. Die optimierten Materialverteilungen sind für die 6 Optimierungsschritte in Bild 6.21 dargestellt. Die zugehörigen Dehnungsenergien sind auf die des Startentwurfs, d.h. des Entwurfsraums mit gleichförmig verteiltem Material, bezogen. Der optimierte Rahmen ergibt sich aus einer abschließenden Adaption des Entwurfsraums. Die Abweichungen des optimierten Rahmens von der bekannten Konstruktionsweise kann einerseits auf die 2-dimensionale Modellierung und die vereinfachten Auflager- und Lastbedingungen zurückgeführt werden. Zum anderen erfaßt die Zielfunktion "Maximale Steifigkeit" nur einen Teil des Anforderungsspektrums. Dennoch unterstreicht dieses Beispiel das Potential der adaptiven Topologieoptimierung bei der Lösung von anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen.

Adaptive Topologieoptimierung mit Spannungsnebenbedingungen

Die Optimierungsergebnisse für die Maximierung der Steifigkeit mit Spannungsnebenbedingungen weisen bei einer nichtadaptiven Vorgehensweise einen hohen Anteil an porösem Material auf, so daß der Aufbau des Tragwerks sowie die Proportionen von einzelnen Strukturelementen nur schwer bestimmt werden können (\rightarrow Abschnitt 4.1.5). Es wird daher im folgenden untersucht, inwiefern sich diese Ergebnisse durch eine adaptive Diskretisierung des Entwurfsmodells verbessern lassen. Durch die Adaption des Entwurfsmodells werden die Spannungsspitzen, die infolge der gezackten Ränder bei der konventionellen Vorgehensweise entstehen, sukzessive eliminiert.

Die Ergebnisse des adaptiven Optimierungsprozesses ohne und mit Spannungsnebenbedingungen sind für den Auflager-Fall B (\rightarrow Bild 4.13) in Bild 6.22 einander gegenübergestellt. Die Ergebnisse des adaptiven Prozesses sind zu den Resultaten der konventionellen Vorgehensweise topologisch äquivalent. Die durchschnittliche relative Dichte im abschließend geglätteten Tragwerk beträgt bei der reinen Steifigkeitsoptimierung $\rho_m/\rho_0 = 0.91$, hingegen bei Berücksichtigung der Spannungen $\rho_m/\rho_0 = 0.65$. Der Anteil an porösem Material wird durch die adaptive Vorgehensweise nur geringfügig gesenkt. Folglich sind die Spannungsspitzen entlang der gezackten Ränder, die im konventionellen Optimierungsprozeß auftreten, nicht für den hohen Anteil an porösem Material bei der Steifigkeitsoptimierung mit Spannungsnebenbedingungen verantwortlich. Dennoch führt auch hier die Adaption des Entwurfsmodells zu optisch

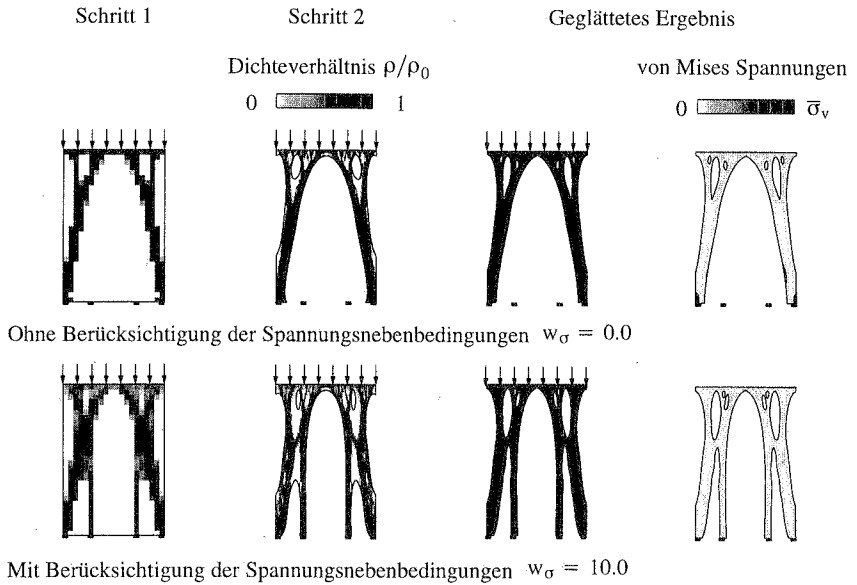
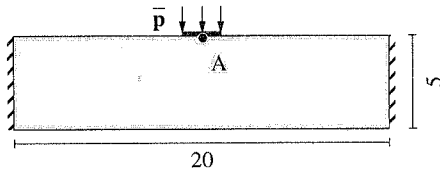


Bild 6.22: Tragwerke maximaler Steifigkeit ohne und mit Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen

eindeutigen Optimierungsergebnissen, die direkt mit Hilfe der Formoptimierung weiter verfeinert werden können.

Adaptive Topologieoptimierung bei elastoplastischem Materialverhalten

Die sukzessive Glättung der Tragwerkskonturen im adaptiven Optimierungsprozeß ist bei elastoplastischem Materialverhalten notwendig, um ein vorzeitiges, künstliches Fließen infolge der gezackten Ränder zu vermeiden, die bei einer nichtadaptiven Vorgehensweise entstehen (\rightarrow Abschnitt 4.4.1). Daher wird die Duktilität eines balkenförmigen Tragwerks in Bild 6.23 mit der Methode der adaptiven Topologieoptimierung maximiert. Die Masse im Entwurfsraum ist gegeben. Der Balken ist beidseitig fest eingespannt und wird durch einen starren Stempel vertikal in Balkenmitte belastet. Die Last wird monoton gesteigert, bis die Verschiebung in der Balkenmitte einen Wert von $\bar{u}_A = 0.25$ einnimmt. Das makroskopisch isotrope Werkstoffmodell beschreibt ein annähernd ideal elastisch–plastisches Materialverhalten. Der Entwurfsraum wird im ersten Schritt mit einem groben FE–Netz diskretisiert und anschließend mit der in Abschnitt 6.2.2 erläuterten Methode sukzessive verfeinert (Bild 6.24). Die Materialverteilung wird mit dem in Abschnitt 2.1 erläuterten OC–Verfahren für die aktuelle Diskretisierung optimiert. Das Endergebnis wird durch eine abschließende Adaption des Entwurfsraums erzeugt (Bild 6.25a).



Zielfunktion: Maximale Duktilität
 Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 25\%$
 Dicke: $t = 0.10$
 Last: $\bar{p} \rightarrow \bar{u}_A = 0.25$

Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop, elastoplastisch
 Elastizitätsmodul: $E_0 = 1.8 \cdot 10^5$ ($\beta_1 = 3.0$)
 Verfestigungsmodul: $E_{t_0} = 0.1$ ($\beta_2 = 3.0$)
 Fließspannung: $\bar{\sigma}_{y_0} = 360.0$ ($\beta_3 = 2.0$)
 Querdehnzahl: $\nu = 0.0$

Bild 6.23: Topologieoptimierung bei elastoplastischem Materialverhalten –
 Beidseitig eingespannter Balken

Dem Optimierungsergebnis bei elastoplastischem Tragverhalten ist das Tragwerk maximaler Steifigkeit für ein rein elastisches Materialverhalten ($E_t = E$, $\bar{\sigma}_y \rightarrow \infty$) gegenübergestellt (Bild 6.25b). Die Unterschiede zwischen den Optimierungsergebnissen werden in diesem Beispiel besonders deutlich. Der Aufbau des Tragwerks ist vom Materialverhalten abhängig. Um das Tragverhalten des für elastisches Materialverhalten optimierten Tragwerks bei einer überkritischen Belastung zu beurteilen, wird das "elastische Optimum" für ein elastoplastisches Material analysiert. Die Spannungsverteilungen und die Last-Verschiebungsdiagramme der Tragwerke sind in Bild 6.25 dargestellt. Das elastische Optimum besitzt im elastischen Bereich eine etwas größere Steifigkeit (\rightarrow Vergrößerung des Last-Verschiebungsdiagramms). Im

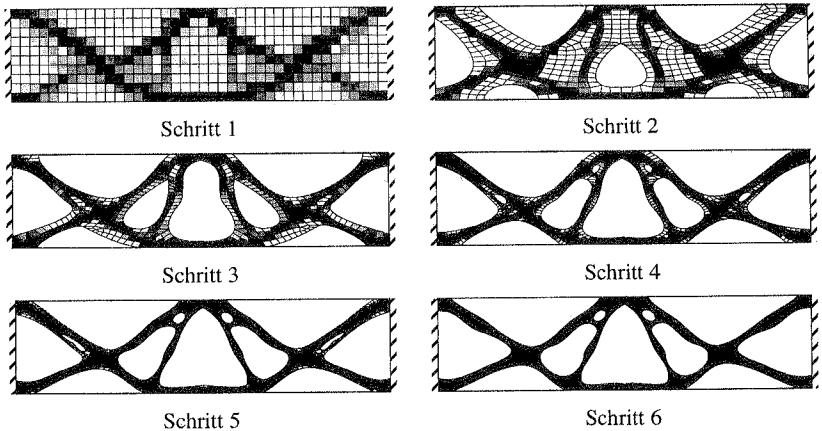


Bild 6.24: Adaptiver Topologieoptimierungsprozeß

Bereich der Auflager beginnt das Material jedoch stark zu fließen. Diesen Defekt gleicht das elastoplastische Optimum durch eine gleichmäßigere Ausnutzung der Auflagerbereiche aus. Dies führt im vorliegenden Beispiel zu einer globalen Umlagerung des Kraftflusses.

Nichtlineares Materialverhalten wird in der Topologieoptimierung von Fachwerken oftmals direkt in der Formulierung des Optimierungsproblems durch Spannungsnebenbedingungen berücksichtigt (u.a. Taylor [249]). Es wird am vorliegenden Beispiel untersucht, ob sich dieser Ansatz ebenfalls für die materielle Topologieoptimierung eignet. Auf diese Weise könnten die numerisch aufwendigen, nichtlinearen Struktur- und Sensitivitätsanalysen im Optimierungsprozeß vermieden werden. Das vorliegende Beispiel wird auf maximale Steifigkeit unter Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen $\bar{\sigma}_v = \bar{\sigma}_{y_0}$ für ein elastisches Materialverhalten nach der in Abschnitt 4.1.5 beschriebenen Formulierung adaptiv optimiert. Das geglättete Ergebnis ist in Bild 6.26 dargestellt.

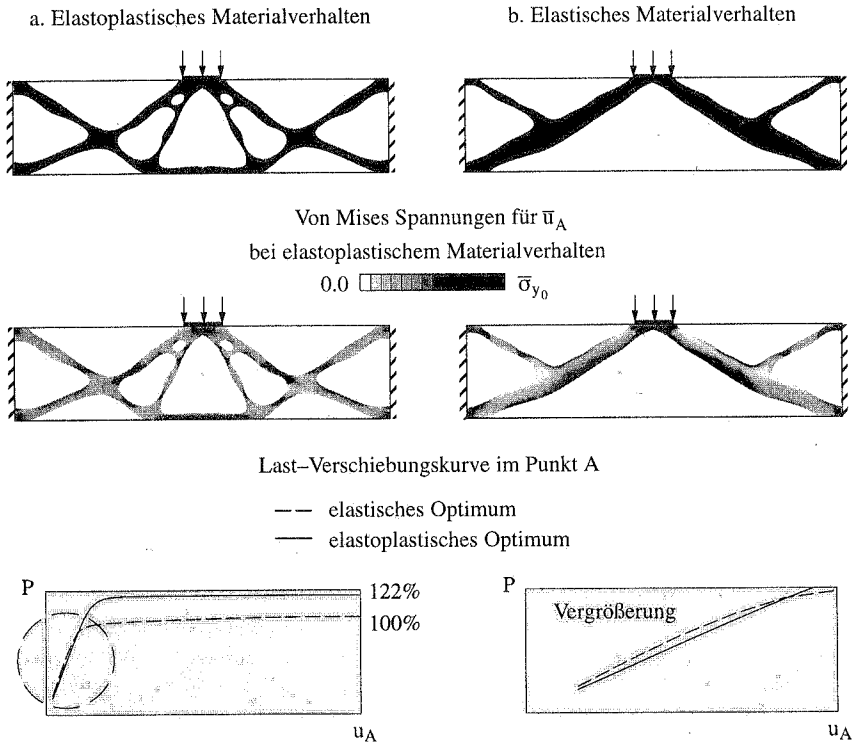
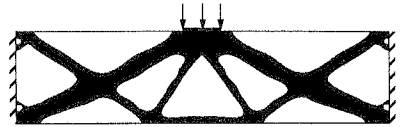


Bild 6.25: Vergleich der Optimierungsergebnisse bei Berücksichtigung von rein elastischem und elastoplastischem Materialverhalten

Zielfunktion: Maximale Steifigkeit
 Nebenbedingungen: Spannungen
 $\bar{\sigma}_v = 360$; $p = 4.0$
 Masse 25%



Werkstoffmodell: Makroskopisch, isotrop, elastisch $\beta = 3.0$
 E-Modul: $E_0 = 1.8 \cdot 10^5$ Querdehnzahl: $\nu = 0.3$

Bild 6.26: Optimierungsergebnis bei Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen

Die Maximierung der Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten mit monoton steigender Belastung und die Maximierung der Steifigkeit mit entsprechend skalierten Spannungsnebenbedingungen führen im untersuchten Beispiel zu ähnlichen, topologisch nahezu äquivalenten Ergebnissen. Der Anteil an porösem Material im Optimum ist bei der Formulierung mit Spannungsnebenbedingungen jedoch abermals sehr hoch. Zudem hat die Wahl des Exponenten p der Penalty-Funktion einen erheblichen Einfluß auf das Optimierungsergebnis. Diese Probleme treten in der elastoplastischen Formulierung nicht auf. Daher ist die explizite Berücksichtigung des elastoplastischen Materialverhaltens sowohl hinsichtlich anwendungsbezogener Fragestellungen wie auch aus methodischer Sicht vielversprechend.

6.2.4 Integration von adaptiver Topologie- und Formoptimierung

Die Ergebnisse der materiellen Topologieoptimierung beschreiben die Geometrie des optimalen Tragwerks oftmals nur unklar. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn die Diskretisierung des Entwurfsraums zu grob ist und nicht adaptiv angepaßt wird. Die Topologieoptimierungsergebnisse können mit Hilfe der Formoptimierung verfeinert werden. Hierfür wird die optimierte Materialverteilung in ein CAGD-orientiertes Entwurfsmodell umgesetzt. Die Approximation der Tragwerkskonturen durch Splines kann entweder interaktiv (Olhoff et al. [190], Sienz [232]) oder automatisch mit Hilfe von Bildverarbeitungsverfahren (Papalambros, Chiredast [196], Maute, Ramm [166]) erfolgen. Olhoff et al. [190], Papalambros, Chiredast [196] und Sienz [232] setzen die Formoptimierung einmalig im Anschluß an ein nichtadaptives Topologieoptimierungsverfahren ein. Maute, Ramm [166] ermöglichen im Sinne einer übergeordneten Modelladaptivität einen mehrmaligen Wechsel zwischen Topologie- und Formoptimierung¹⁰ (Bild 6.27). Diese Vorgehensweise besitzt gegenüber einer Topologieoptimierung mit einem einmaligen, abschließenden Formoptimierungsschritt den Vorteil, daß die Interaktion von Topologie und Form berücksichtigt wird. Die Veränderung der Form kann zu einem Wechsel der optimalen Topologie führen. Es ist jedoch in der Formoptimierung nicht möglich, daß bestehende Löcher verschmelzen oder verschwinden und zusätzliche Löcher entstehen.

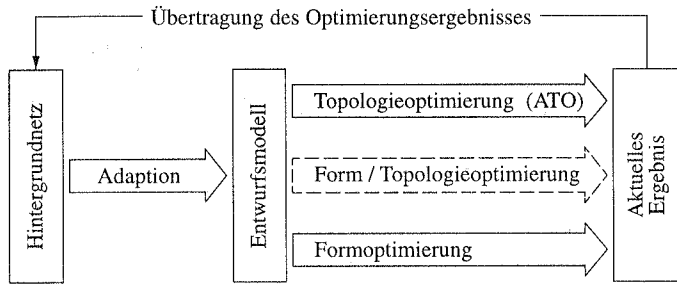


Bild 6.27: Adaptive Topologie- und Formoptimierung

Das integrierte Topologie- und Formoptimierungsverfahren beruht im wesentlichen auf der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Adaption des Entwurfsmodells in der materiellen Topologieoptimierung und gliedert sich in drei Schritte:

1. Das Topologie- bzw. Formoptimierungsproblem wird für die aktuelle Diskretisierung mit den in den Kapiteln 2–5 beschriebenen Methoden gelöst.
2. Das Optimierungsergebnis wird im Hintergrundnetz als Materialverteilung gespeichert. Dies ermöglicht es, große Formänderungen zu beschreiben und einen Wechsel der Topologie durchzuführen. Je nach Art des nachfolgenden Optimierungsschrittes wird ein neues Entwurfsmodell erzeugt (Bild 6.28). Für die Formoptimierung wird dabei direkt auf die Spline-Approximation der Konturen zurückgegriffen. Die Positionen der Kontroll-Knoten bilden in diesem Fall die Optimierungsvariablen. Die Feinheit der geometrischen Diskretisierung kann durch eine Senkung des Approximationsfehlers in Bereichen mit großen Krümmungen erhöht werden. Die Anpassung der Netzdichte hinsichtlich der Materialverteilung für die Topologieoptimierung wurde im vorherigen Abschnitt erläutert.
3. Das neue Entwurfsmodell wird aufgestellt und die aktuellen Optimierungsvariablen definiert. Das Optimierungs- und das Analysemodell werden entsprechend modifiziert.

Der Wechsel zwischen den Optimierungsarten wird interaktiv gesteuert, wobei zwischen vier Konstellationen im Optimierungsprozeß zu unterscheiden ist.

-
10. Darüber hinaus ist es denkbar, die Form und die Materialverteilung des Entwurfsraums gleichzeitig zu variieren. Dies ist jedoch hinsichtlich der numerischen Effizienz der unterschiedlichen Verfahren in der Topologie- und Formoptimierung ungünstig. Zum einen erhöht sich der numerische Aufwand für die Sensitivitätsanalyse bezüglich der Materialparameter deutlich, da in diesem Fall die Variation des Integrationsgebietes zu berücksichtigen ist. Zum anderen sind in der Formoptimierung aufgrund des globalen Einflusses der Optimierungsvariablen, wie die Positionen der Kontroll-Knoten der Splines, Verfahren der Mathematischen Programmierung einzusetzen. Diese sind jedoch bei einer großen Anzahl von Optimierungsvariablen ineffizient.

- a. Topologie → Formoptimierung: Der grundlegende Aufbau des Tragwerks ist in bestimmten Bereichen des Entwurfs bereits klar erkennbar. Die Form der entsprechenden Konturen kann mittels Formoptimierung mit wenigen Optimierungsvariablen im Detail bestimmt werden.
- b. Form → Topologieoptimierung: Im Anschluß an eine Formoptimierung wird mittels eines Topologieoptimierungsschrittes überprüft, ob sich infolge der Formoptimierung der grundlegende Aufbau des optimalen Tragwerks geändert hat.
- c. Topologie → Topologieoptimierung: Bei einer zu groben Diskretisierung des Entwurfsraums ist das Ergebnis des vorausgegangenen Topologieoptimierungsschrittes nicht eindeutig. Mittels eines weiteren Topologieoptimierungsschrittes kann bei lokal verfeinertem Netz und angepaßtem Entwurfsraum der grundlegende Aufbau präziser bestimmt werden.
- d. Form → Formoptimierung: Die optimale Form kann durch eine adaptive Verfeinerung des geometrischen Modells genauer und effizienter ermittelt werden.

Da die optimale Form der Konturen durch die adaptive Topologieoptimierung bereits gut approximiert wird, ist eine adaptive Formoptimierung im Sinne von Punkt d. im allgemeinen nicht notwendig. Die adaptive Kombination von Topologie- und Formoptimierung stellt eine nützliche Ergänzung des ATO-Verfahrens dar, um sowohl den grundlegenden Aufbau wie auch die Form eines Tragwerks im Detail effizient zu optimieren. Die verschiedenen Entwurfsmodelle im Optimierungsprozeß werden weitgehend automatisch generiert, so daß der Anwender anhand weniger Kontrollparameter das Verfahren steuern kann.

Ein über dieses konkrete Verfahren hinaus bestehendes Problem ist jedoch, daß die Entwurfsmodelle für die Formoptimierung, die auf der Grundlage von Topologieoptimierungsergebnissen erzeugt werden, oftmals sehr komplex sind. Zudem enthalten diese Modelle eine Vielzahl von redundanten oder aus Sicht des Optimierungsmodells bedeutungslosen Optimierungsvariablen, wenn sie automatisch generiert werden. Derartige Formoptimierungsprobleme können mit den heute bekannten Methoden nicht gelöst werden. Daher ist zum einen eine

Optimierte Materialverteilung

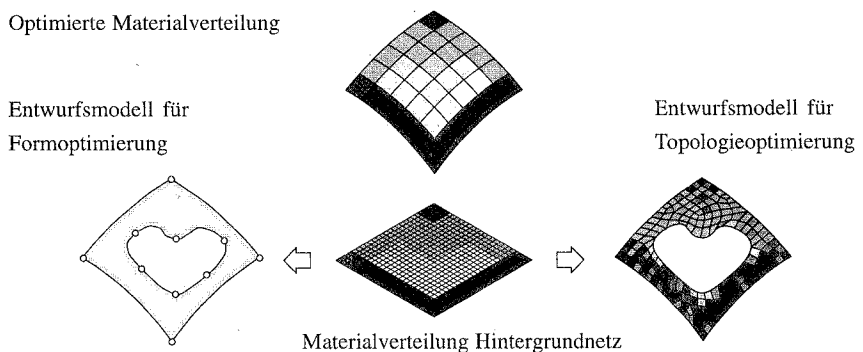


Bild 6.28: Adaption des Entwurfsmodells für Topologie- und Formoptimierung

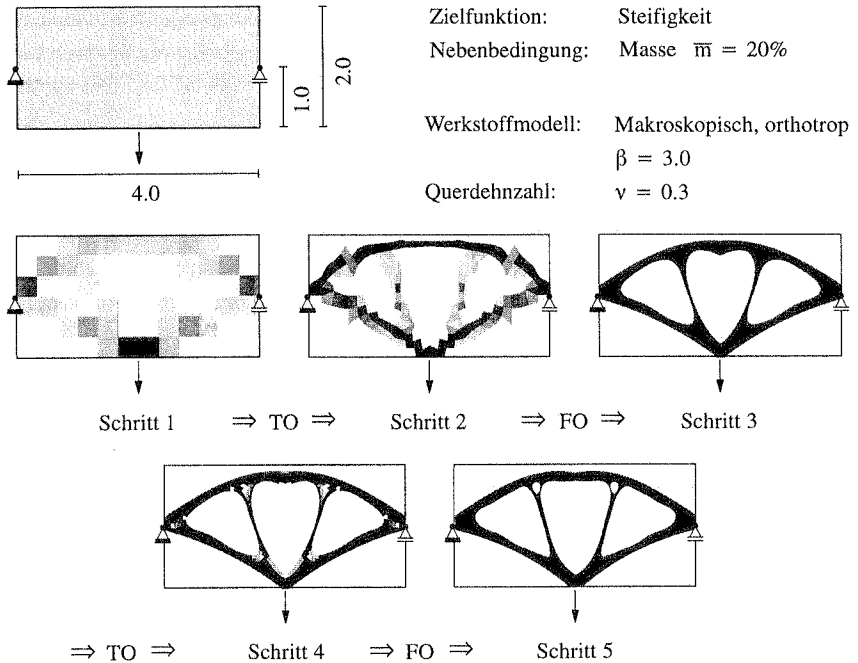


Bild 6.29: Integrierte Topologie- und Formoptimierung eines ebenen Bogens

interaktive Schnittstelle notwendig, um die Entwurfsmodelle für die Formoptimierung zu vereinfachen und über Verknüpfungsvorschriften zu korrigieren. Zum anderen sind stabilisierte Formulierungen und Optimierungsverfahren vielversprechend, wie sie bei der Formfindung von Membranen eingesetzt werden (Bletzinger [43]).

Die grundsätzliche Vorgehensweise der adaptiven Kombination von Topologie- und Formoptimierung gleicht der "bubble"-Methode (\rightarrow Anhang A1), bei der ebenfalls die Form neuer, im Optimierungsprozeß entstehender Löcher mit Verfahren der Formoptimierung bestimmt wird. Bei der "bubble"-Methode werden jedoch sehr kleine Löcher in das Tragwerk eingebracht, so daß die Formänderung im Formoptimierungsprozeß im allgemeinen groß ist. Die Modellierung und Lösung derartiger Formoptimierungsprobleme ist jedoch hinsichtlich der Zuverlässigkeit und Robustheit des Optimierungsalgorithmus problematisch. Bei der zuvor beschriebenen Methode werden nicht nur die Positionen, sondern auch die Form der Löcher durch adaptive Topologieoptimierungsschritte bereits näherungsweise bestimmt. Die Formänderungen im anschließenden Formoptimierungsschritt fallen daher deutlich geringer als bei der "bubble"-Methode aus.

6.2.5 Beispiele zur integrierten Topologie- und Formoptimierung

Das Verfahren der adaptiven Integration von materieller Topologieoptimierung und CAGD-orientierter Formoptimierung wird abschließend an zwei Beispielen zur Maximierung der Steifigkeit von Scheiben- und Schalentragwerken veranschaulicht. Die Aufgabenstellungen sowie die Optimierungsverläufe sind in Bild 6.29 bzw. Bild 6.30 dargestellt. In beiden Beispielen wird zunächst der grundlegende Aufbau des Tragwerks mittels eines Topologieoptimierungsschrittes (TO) für eine grobe Diskretisierung des Entwurfsraums näherungsweise bestimmt. Je nach dem, ob sich hieraus bereits mögliche Aussparungen klar erkennen lassen, wird die Form des Tragwerks durch einen Formoptimierungsschritt (FO) genauer ermittelt oder ein weiterer Topologieoptimierungsschritt im Sinne des ATO-Verfahrens angeschlossen. Bei einem Wechsel von einem Topologie- zu einem Formoptimierungsschritt wird die Masse

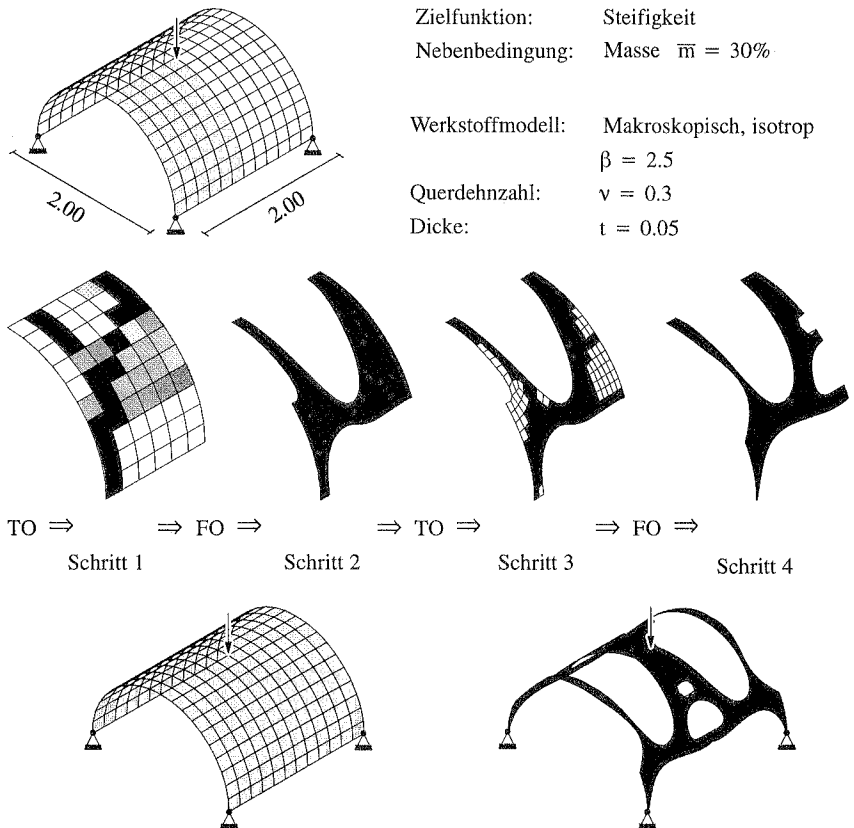


Bild 6.30: Integrierte Topologie- und Formoptimierung einer Zylinderschale

im angepaßten Entwurfsraum gleichförmig verteilt. Die resultierende Dichte $\hat{\rho}_m$ stellt neben den Positionen der Kontroll-Knoten eine weitere Optimierungsvariable im Formoptimierungsschritt dar. Auf diese Weise kann die Porosität des Werkstoffs zumindest global auch im Formoptimierungsschritt reduziert werden.

Die Integration der Formoptimierung in diesem frühen Stadium des Optimierungsprozesses hat den Vorteil, daß die Form der bereits eindeutig ermittelten Konturen mit wenigen Optimierungsvariablen im Detail bestimmt werden kann. Somit ist ein sehr feines FE-Netz für die weiteren Topologieoptimierungsschritte nicht notwendig. Im Anschluß an einen Formoptimierungsschritt wird die Lage von kleineren Aussparungen in einem weiteren Topologieoptimierungsschritt ermittelt. Deren Form wird in einer abschließenden Formoptimierung im Detail bestimmt.

7 Bewertung und Ausblick

Das mechanische Verhalten eines Tragwerks kann durch eine den äußeren Belastungen angepaßte Geometrie, d.h. Topologie und Form, grundlegend verbessert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die Aufgabenstellung untersucht, die hinsichtlich bestimmter, mechanisch orientierter Entwurfskriterien optimale Geometrie eines Tragwerks zu bestimmen, das aus einem homogenen, isotropen Material besteht. Es sind lediglich die angreifenden Lasten, die zur Verfügung stehenden Auflager und der Raum, in dem sich das Tragwerk befinden soll, vorgegeben. Diese Aufgabe wurde mit adaptiven Verfahren der Topologie- und Formoptimierung am Beispiel von dünnwandigen Tragwerken, wie Scheiben, Platten und Schalen, untersucht. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchungen zusammengefaßt und Anregungen für zukünftige Entwicklungen gegeben.

Materielle Topologieoptimierung

Die Optimierungsaufgabe wird als "0-1" Materialverteilungsproblem formuliert, um beliebige Topologie- und Formänderungen im Optimierungsprozeß beschreiben zu können. Diese Formulierung führt im Sinne der eigentlichen Entwurfsaufgabe, ein Tragwerk aus einem homogenen, isotropen Material zu generieren, auf ein nichtkonvexes Optimierungsproblem. Daher werden poröse, anisotrope Werkstoffmodelle eingeführt, um das Optimierungsproblem zu regularisieren. Für Werkstoffmodelle mit extremalen Eigenschaften besitzt das Optimierungsproblem eine numerisch stabile, wenn auch nicht eindeutige Lösung. Die optimale Materialverteilung enthält in diesem Fall jedoch einen hohen Anteil an porösem Material, so daß der Aufbau und die Form des optimalen Tragwerks, das aus einem homogenen, isotropen Material besteht, nicht oder nur bedingt erkennbar sind. Poröse Werkstoffmodelle mit suboptimalen Eigenschaften führen zu eindeutigen "0-1" Ergebnissen, die jedoch in einem erheblichen Maße von der Diskretisierung des Entwurfsraums abhängen. Dieser Defekt kann zwar durch Stabilisierungsverfahren, wie der Filtermethode, reduziert, jedoch nicht vollkommen beseitigt werden.

Die Eigenschaften der materiellen Topologieoptimierung wurden für verschiedene Optimierungsaufgaben untersucht. Eine variationelle, adjungierte Formulierung der Sensitivitäten sowie ein einfacher, robuster OC-Algorithmus haben sich zur Lösung dieser Probleme bewährt, die durch eine hohe Anzahl von Optimierungsvariablen bei nur einer Gleichheitsnebenbedingung gekennzeichnet sind. Die klassische Optimierungsaufgabe, das Tragwerk mit maximaler Steifigkeit bei vorgegebener Masse bzw. mit minimaler Masse bei vorgegebener Steifigkeit zu bestimmen, führt je nach Werkstoffmodell entweder zu Materialverteilungen mit einem hohen Anteil an hochporösem Material oder zu annähernd reinen "0-1" Ergebnissen. Makroskopische, isotrope und orthotrope Werkstoffmodelle können in Verbindung mit Stabilisierungsverfahren für diese Optimierungsaufgabe empfohlen werden, um numerisch stabile "0-1" Ergebnisse zu erhalten.

Die Maximierung der Steifigkeit mit Spannungsnebenbedingungen auf der Basis des makroskopischen, isotropen Werkstoffmodells führt zu Optimierungsergebnissen, die in bestimmten Bereichen poröses Material enthalten. Dies kann auf der einen Seite als Indiz dafür gewertet werden, daß reale poröse Werkstoffe, wie Metallschäume, in Tragwerken mit maximaler Steifigkeit bei maximal zulässigen Spannungen geeignet sind. Auf der anderen Seite sind neue regularisierende Werkstoffmodelle zu entwickeln, um auch für diese Aufgabenstellung reine "0-1" Lösungen zu erhalten. Das dynamische Verhalten eines Tragwerks kann durch die Optimierung von Eigenfrequenzen verbessert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die Aufgabe untersucht, die kleinste Eigenfrequenz zu maximieren. Die suboptimalen Werkstoffmodelle führen auch für dieses Problem zu eindeutigen Lösungen. Es entstehen jedoch vor allem bei den eingesetzten orthotropen Werkstoffmodellen während des Optimierungsprozesses "künstliche" Eigenformen in Bereichen mit hochporösem Material. Der Werkstoff besitzt für kleine Dichten eine im Vergleich zu dessen Steifigkeit große Masse. Eine geeignete Modifikation der Werkstoffmodelle hinsichtlich der Massenträgheitsterme steht noch aus.

Ein Optimierungsergebnis ist nur hinsichtlich der gewählten Optimierungsvariablen und der gestellten Entwurfskriterien, aber auch des zugrunde liegenden mechanischen Modells optimal. Vielmehr sind Tragwerke, die unter der Annahme eines linear elastischen Tragverhaltens optimiert wurden, hinsichtlich geometrisch oder materiell nichtlinearer Versagensarten, wie Beulen oder Fließen, oftmals sehr ungünstig. Daher ist es notwendig, das nichtlineare Tragverhalten im Optimierungsprozeß zu berücksichtigen. In der vorliegenden Arbeit wurden die Grenzlast auf der Basis einer klassischen Stabilitätsanalyse und die Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten maximiert. Die Optimierungsergebnisse unterscheiden sich für beide Aufgabenstellungen teilweise erheblich von denen, die unter der Annahme eines linear elastischen Tragverhaltens berechnet wurden.

Bei der Maximierung der Grenzlast treten lokale, "künstliche" Beulformen in Bereichen mit hochporösem Material auf, da dort die elastische im Vergleich zur geometrischen Steifigkeit gering ist. Dieser Defekt kann als Instabilität auf Materialebene interpretiert werden und tritt vor allem bei mikrostrukturierten Werkstoffen auf. Die Instabilitäten werden reduziert, indem die geometrische Steifigkeit von Bereichen mit einer kleinen Dichte vernachlässigt wird. Diese Vorgehensweise führt jedoch zu Diskontinuitäten und Oszillationen im Optimierungsprozeß. Es sind daher geeignete regularisierende Werkstoffmodelle zu entwickeln, die keine Instabilitäten auf Materialebene besitzen. Die Vereinfachungen, auf denen die klassische Stabilitätsanalyse beruht, sind nur für Tragwerke mit sehr geringen Verformungen im Vorbeulbereich zulässig. Die Zuverlässigkeit der Optimierungsergebnisse kann erheblich gesteigert werden, wenn die Grenzlast im Rahmen einer nichtlinearen Berechnung mit einer begleitenden Eigenwertanalyse optimiert wird. Die Duktilität wurde für eine reine Belastung unter Vernachlässigung von lokalen Entlastungsvorgängen optimiert. Die gesamte Optimierungsprozedur und insbesondere die vereinfachte, variationelle, adjungierte Formulierung der Sensitivitäten

erwiesen sich als zuverlässig und effizient. Um das Optimierungsverfahren für eine zyklische Belastung zu erweitern, ist die Formulierung der Sensitivitäten weiter auszubauen. Darüber hinaus ist die Frage zu klären, wie sensitiv die Optimierungsergebnisse hinsichtlich einer veränderten Belastungsgeschichte sind. Die Untersuchungen zum Einsatz der materiellen Topologieoptimierung im Stahlbetonbau zeigen zwar das Potential der Methode, aber auch die noch bestehenden Unzulänglichkeiten hinsichtlich einer ausreichend genauen Modellierung des Werkstoffverhaltens und der Berücksichtigung von konstruktiven Randbedingungen auf. Die Erweiterung der regularisierenden porösen Werkstoffmodelle auf eine orthotrope Elastoplastizität und auf ein quasi-sprödes Materialverhalten sind daher vielversprechend.

Die Methode der materiellen Topologieoptimierung ist geeignet, um den grundlegenden Aufbau eines Tragwerks zu bestimmen. Die Modellierung der Optimierungsaufgabe als Materialverteilungsproblem ist robust und kann für einfache Aufgabenstellungen mit OC-Verfahren effizient gelöst werden. Für komplexere Entwurfsaufgaben mit mehreren Nebenbedingungen sind jedoch neue Optimierungsalgorithmen zu entwickeln. Zudem sind die Zuverlässigkeit und die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse bei einer gleichmäßig groben Diskretisierung des Entwurfsraums gering. Die Konturen des Tragwerks werden über gezackte Ränder beschrieben, die künstliche Spannungsspitzen hervorrufen. Bei einer gleichförmig feinen Diskretisierung des Entwurfsraums steigt der numerische Aufwand stark an.

Adaptivität in der Strukturoptimierung

Die Entwurfslfunktion, welche die Form des Tragwerks oder die Materialverteilung im Entwurfsraum beschreibt, sowie die Zustandsgrößen, wie beispielsweise die Verschiebungen, werden diskretisiert, um das Optimierungsproblem mit numerischen Methoden zu lösen. Die Adaptivität in der Strukturoptimierung umfaßt zwei Aspekte: die adaptive Modellierung des geometrischen und die des mechanischen Problems.

Adaptive FE-Verfahren ermöglichen eine Kontrolle des Diskretisierungsfehlers in der Strukturanalyse und tragen zu einer aus Sicht des Anwenders dringend erforderlichen Automatisierung des Optimierungsprozesses bei. In der vorliegenden Arbeit wurde die Integration der adaptiven Strukturanalyse in den Optimierungsprozeß am Beispiel der Formoptimierung untersucht. Der Diskretisierungsfehler der Energienorm wird bei jeder Strukturanalyse kontrolliert und das FE-Netz gegebenenfalls h -adaptiv verfeinert. Zusätzlich werden die Sensitivitäten des Diskretisierungsfehlers bzw. die Fehler der Sensitivitäten der Energienorm kontrolliert, um die Konvergenz des Optimierungsprozesses zu verbessern. Hierfür wurden zwei heuristische Fehlerschätzer untersucht, die sich in den vorgestellten Beispielen als zuverlässig erwiesen. Der Diskretisierungsfehler wird bislang in der Energienorm der Strukturantwort gemessen. Im Hinblick auf die Optimierungsaufgabe ist die Kontrolle des Fehlers der Entwurfskriterien selbst jedoch weitaus sinnvoller. Entsprechende Fehlerschätzer stehen derzeit jedoch noch nicht zur Verfügung.

Die Parallelen und Unterschiede zwischen der adaptiven Diskretisierung des mechanischen Modells und der des Entwurfsmodells wurden am Beispiel der Formoptimierung von Scheibenträgwerken dargelegt. Aufgrund der allgemeinen mathematischen Struktur von Optimierungsproblemen ist es nicht möglich, ähnlich effiziente Fehlerschätzer und Verfeinerungsindikatoren für die Entwurfslösung zu entwickeln, wie sie für die mechanischen Zustandsgrößen zur Verfügung stehen. Ein Fehlerschätzer, der auf einer asymptotischen Entwicklung der Zielfunktion in der Feinheit der Diskretisierung der variablen Ränder beruht, erwies sich bei der geringen Anzahl von Optimierungsvariablen, die für die Formoptimierung typisch ist, als nur bedingt zuverlässig. Die untersuchten, heuristischen Verfeinerungsindikatoren sind dagegen geeignet, die Diskretisierung der variablen Kanten lokal so zu steuern, daß das kontinuierliche Optimum mit möglichst wenigen Optimierungsvariablen möglichst genau approximiert wird. Hierdurch wird die numerische Effizienz im Vergleich zu einer gleichförmig feinen Diskretisierung erheblich gesteigert. Eine genaue Abschätzung des Diskretisierungsfehlers im Entwurfsmodell ist weniger bedeutend als in der adaptiven Strukturanalyse. Der Diskretisierungsfehler gibt zwar einen Aufschluß darüber, inwieweit das Tragwerk durch eine entsprechende Formgebung verbessert werden kann. Die Komplexität der Geometrie ist in der Strukturoptimierung jedoch durch fertigungstechnische oder gestalterische Gesichtspunkte eingeschränkt, so daß die Formgebung insbesondere bei anwendungsbezogenen Optimierungsaufgaben nicht alleine an der kontinuierlichen Lösung orientiert werden kann.

Die Methode der adaptiven Entwurfsmodellierung wurde auf die materielle Topologieoptimierung von Scheiben-, Platten- und Schalentragwerken angewandt. Der Entwurfsraum wird der aktuellen Materialverteilung angepaßt, indem in einem Bildverarbeitungsprozeß leere Bereiche ausgeblendet und die Konturen der Zwischenergebnisse durch Splines geglättet werden. Die Diskretisierung im angepaßten Entwurfsraum kann in Bereichen mit einem großen, räumlichen Gradienten der Materialverteilung verfeinert werden. Diese Vorgehensweise führt nicht nur zu einer erheblichen Steigerung der numerischen Effizienz, sondern verbessert auch die Zuverlässigkeit der FE-Analyse, da die gezackten Ränder, die bei einer konstanten Diskretisierung entstehen, sukzessive im adaptiven Optimierungsprozeß geglättet werden. Das Verfahren der adaptiven Topologieoptimierung bewährte sich insbesondere für Optimierungsprobleme mit Spannungsnebenbedingungen und bei elastoplastischem Materialverhalten. Eine Erweiterung des Verfahrens auf 3-dimensionale Kontinua erscheint zur Lösung von anwendungsorientierten Optimierungsproblemen äußerst lohnenswert.

Zusätzlich wurde ein CAGD-orientiertes Formoptimierungsverfahren in die Methode der adaptiven Topologieoptimierung integriert, um die Form des Tragwerks im Detail mit wenigen Optimierungsvariablen effizient bestimmen zu können. Hierfür wurde ein hierarchisches Entwurfsmodell entwickelt, um die Form von topologisch komplexen Tragwerken auf vorgegeben, ebenen und räumlich gekrümmten Oberflächen zu optimieren. Im Optimierungsprozeß wird zwischen Topologieoptimierungs- und Formoptimierungsschritten abgewechselt, um die Inter-

aktion zwischen Topologie und Form zu berücksichtigen. Zumeist kann die optimale Geometrie des Tragwerks in wenigen Topologie- und Formoptimierungsschritten bestimmt werden. Eine Schlüsselstellung nimmt hierbei der automatische Aufbau des Entwurfsmodells für die Formoptimierung ein. Das so erzeugte Entwurfsmodell besitzt häufig viele Optimierungsvariablen, von denen einige zudem redundant oder für die Beschreibung der Formänderung bedeutungslos sind. Die hierdurch mögliche Formenvielfalt kann mit den heute zur Verfügung stehenden Optimierungsmethoden nicht kontrolliert werden. Es ist daher eine interaktive Schnittstelle notwendig, um das CAGD-Modell zu korrigieren und die Formenvielfalt auf ein gewünschtes Maß zu senken. Ebenso ist es denkbar, bereits bei der Aufbereitung der Topologieoptimierungsergebnisse nur Strukturen zu erzeugen, die aus einfachen geometrischen Elementen, wie beispielsweise Kreissegmenten und geraden Linien, aufgebaut sind. Darüber hinaus stellt die Erweiterung der Methoden zur Formfindung von Membrantragwerken auf allgemeine Formoptimierungsprobleme einen vielversprechenden Ansatz dar, um komplexe Formen mit vielen Optimierungsvariablen robust und effizient bestimmen zu können.

Strukturoptimierung im Entwurfs- und Konstruktionsprozeß

Die adaptive Kombination von materieller Topologieoptimierung und CAGD-orientierter Formoptimierung ermöglicht es, den grundlegenden Aufbau wie auch die Form des Tragwerks im Detail zu bestimmen. Die Einbettung der Topologieoptimierung in die modulare Gliederung der Strukturoptimierung in Entwurfs-, Analyse- und Optimierungsmodell hat sich bewährt, um verschiedene Aufgabenstellungen zu lösen und mit Formoptimierungsverfahren zu koppeln. Der theoretische Hintergrund zur materiellen Topologieoptimierung ist jedoch bei der Bewertung und der Umsetzung der Optimierungsergebnisse in ausführbare Konstruktionen zu beachten.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit unterstreichen das Potential der Strukturoptimierung, verschiedene computerorientierte Verfahren, systematisch miteinander zu verknüpfen. Die Strukturoptimierung stellt einen Ansatz dar, die Ergebnisse von aufwendigen numerischen Simulationen in den Konstruktionsprozeß einzubringen. Dieses Potential wird in den letzten Jahren zunehmend in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Automobilbau erkannt. Das Interesse im Bauwesen erwacht dagegen nur langsam. Dennoch zeigen erste Studien, daß die Form- aber auch die Topologieoptimierung ein hilfreiches Werkzeug bei der Konstruktion von Tragwerken im Bauwesen sein können (Ulrich [261], Ploch [200]). Die Strukturoptimierung wird sicherlich auch im konstruktiven Ingenieurbau vermehrt zum Einsatz kommen, wenn die Optimierungsverfahren die für das Bauwesen spezifischen Aspekte, wie beispielsweise das Bauen mit Stahlbeton, besser berücksichtigen. Neben der Bedeutung, welche die Strukturoptimierung für die Lösung von anwendungsbezogenen Entwurfsaufgaben besitzt, stellen die Verfahren der Topologie- und Formoptimierung einen interessanten Ansatz dar, um das Wechselspiel zwischen Kraft und Geometrie zu studieren und dabei grundsätzliche Fragestellungen nach den Konstruktionsprinzipien in Natur und Technik zu beantworten.

Literatur

- [1] Achtziger, W.: Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression. *Struct. Optim.* **12** (1996) 63–74.
- [2] Allaire, G., Kohn, R.V.: Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *Europ. J. of Mechanics* **12** (1993) 839–878.
- [3] Allaire, G., Kohn, R.V.: Explicit optimal bounds on the elastic energy of a two-phase composite in two space dimensions. *Quart. Appl. Math.* **LI** (1993) 675–699.
- [4] Allinger, P., Friedrich, M., Mulfinger, F., Sauter, J.: Shape and topology optimization using CAOSS and MSC/NASTRAN. In: Proceedings of the MSC world users' conference 1995, 8.–12. Mai 1995, Universal City, USA.
- [5] Atrek, E.: SHAPE – A program for shape optimization of continuum structures. In: Brebbia, C.A., Hernandez, S. (Hrsg.) Proceedings of the 1st int. conference OPTI'89, 20.–23. Juni 1989, Southampton, England, 135–144. Berlin: Springer, 1989.
- [6] Avellaneda, M.: Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites. *SIAM J. Appl. Mech.* **47** (1987) 1216–1228.
- [7] Anagnostou, G., Rönquist, E.M., Patera, A.T.: A computational procedure for part design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **97** (1992) 33–48.
- [8] Armand, J.–L., Lodier, B.: Optimal design of bending element. *Int. J. Num. Mech. Eng.* **13** (1978) 373–384.
- [9] Armand, J.–L.: Non homogeneity and anisotropy in structural design. In: [86] 256–263.
- [10] Arora, J.S.: Introduction to optimum design. New York: McGraw–Hill, 1989.
- [11] Arora, J.S., Lee, T.H., Cardoso, J.B.: Structural shape sensitivity analysis: relationship between material derivative and control volume approaches. *AIAA J.* **30** (1992) 1638–1647.
- [12] Babuska, I., Rheinboldt, W.C.: A-posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **12** (1978) 1597–1615.
- [13] Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J., de A. Oliveira, E.R. (Hrsg.): Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations. Chichester: Wiley, 1986.
- [14] Banichuk, N.V.: Introduction to optimization of structures. Berlin: Springer, 1990.
- [15] Banichuk, N.V., Barthold, F.–J., Falk, A., Stein, E.: Mesh refinement for shape optimization. *Struct. Optim.* **9** (1995) 46–51.
- [16] Barthelemy, B., Chon, C.T., Haftka, R.T.: Accuracy problems associated with semi-analytical derivatives of static response. *Finite Elements in Analysis and Design* **4** (1988) 249–265.

- [17] Barthold, F.-J.: Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien. Dissertation, Bericht Nr. F93/2. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Universität Hannover, 1993.
- [18] Barthold, F.-J., Becker, A., Falk, A., Rust, W.: Zum Einfluß der Netzadaptation bei der Formoptimierung. *ZAMM* **73** (1993) 680–684.
- [19] Bathe, K.-J.: Finite element procedures. London: Prentice-Hall, 1996.
- [20] Baumeister, J., Banhart, J., Weber, M.: Effiziente Herstellungsmöglichkeiten für Bauteile aus geschäumten Metallen. In: *VDI Berichte* **1151**, 223–230. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995.
- [21] Becker, E., Bürger, W.: *Kontinuumsmechanik – Eine Einführung in die Grundlagen und einfache Anwendungen*. Stuttgart: Teubner, 1975.
- [22] Beckers, M., Fleury, C. (1994): A primal–dual approach in truss optimization. In [257] 91–101.
- [23] Belegundu, A.D., Rajan, S.D.: A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **66** (1988) 87–106.
- [24] Bendsøe, M.P.: G-closure and homogenization problems arising in plate optimization. In: [86] 270–275.
- [25] Bendsøe, M.P., Sokolowski, J.: Sensitivity analysis and optimization of elastic–plastic structures. *Eng. Opt.* **11** (1987) 31–38.
- [26] Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comp. Meth Appl. Mech. Eng.* **71** (1988) 197–224.
- [27] Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct. Optim.* **1** (1989) 193–202.
- [28] Bendsøe, M.P., Triantafyllidis, N.: Scale effects in the optimal design of a microstructured medium against buckling. *Int. J. Solids Structures* **26** (1990) 725–741.
- [29] Bendsøe, M.P., Mota Soares, C.A. (Hrsg.): *Topology design of structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [30] Bendsøe, M.P., Diaz, A., Kikuchi, N.: Topology and generalized layout optimization of elastic structures. In: [29] 159–205.
- [31] Bendsøe, M.P., Ben-Tal, A.: Truss topology optimization by a displacements based optimality criterion approach. In: [220] 139–155.
- [32] Bendsøe, M.P., Haber, R.B.: The Michell layout problem as a low volume fraction limit of the perforated plate topology optimization problem. *Struct. Optim.* **6** (1993) 263–267.
- [33] Bendsøe, M.P., Guedes, J.M., Haber, R.B., Pedersen, P., Taylor, J.E.: An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design. *J. Appl. Mech.* **61** (1994) 930–937.

- [34] Bendsøe, M.P.: Optimization of structural topology, shape, and material. Berlin: Springer, 1995.
- [35] Bennet, J.A., Botkin, M.E.: Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh refinement. *AIAA J.* **23** (1985) 458–464.
- [36] Bennet, J.A., Botkin, M.E. (Hrsg.): The optimum shape – automated structural design. New York: Plenum Press, 1986.
- [37] Bensoussan, A., Lions, J.–L., Papanicolaou, G.: Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North–Holland, 1978.
- [38] Betten, J.: Kontinuumsmechanik. Berlin: Springer, 1993.
- [39] Bletzinger, K.–U.: Formoptimierung von Stabtragwerken. In: Optimierung natürlicher und technischer Konstruktionen. Konzeptheft Nr. 27 des Sonderforschungsbereiches 230, 24–40. Universität Stuttgart, 1986.
- [40] Bletzinger, K.–U.: Formoptimierung von Flächentragwerken. Dissertation, Bericht Nr. 11 (1990). Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- [41] Bletzinger, K.–U., Kimmich, S., Ramm, E.: Efficient modeling in shape optimal design. *Comp. Sys. Eng.* **2** (1991) 483–495.
- [42] Bletzinger, K.–U., Reitinger, R., Kimmich, S.: Shape optimization with program CARAT. In: Hörnlein, H.R.E.M., Schittkowski, K. (Hrsg.) Software systems for structural optimization, *Int. Series of Numerical Mathematics* **110**, 97–124. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [43] Bletzinger, K.–U.: Shape optimization by homotopy methods with special application to membrane structures. In: [292] 122–129.
- [44] Braibant, V., Fleury, C.: Shape optimal design using B–splines. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **44** (1984) 247–267.
- [45] Breitenberger, E.: Gauß und Listing: Topologie und Freundschaft. *Gauss–Gesellschaft Göttingen, Mitteilungen* **30** (1993) 3–56.
- [46] Brendel, B.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik. Dissertation, Bericht Nr. 79–1. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [47] Brezzi, F., Fortin, M.: Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer, 1991.
- [48] Böhm, W., Farin, G.E., Kahmann, J.: A survey of curve and surface methods in CAGD. *Computer Aided Design* **1** (1984) 1–60.
- [49] Bueda, G., Oliver, J.: A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **36** (1993) 3161–3185.
- [50] Buscaglia, G.C., Feijóo, R.A., Padra, C.: A posteriori error estimation in sensitivity analysis. *Struct. Optim.* **9** (1995) 194–199.

- [51] Carter, D.R., Fyhrie, D.P., Whalen, R.T.: Trabecular bone density and loading history – regulation of connective tissue morphology by mechanical energy. *J. Biomechanics* **20** (1987) 785–794.
- [52] Cea, J., Malanowski, K.: An example of a max–min problem in partial differential equations. *SIAM J. Control* **8** (1970) 305–316.
- [53] Chen, J.L., Tsai, W.C.: Shape optimization by using simulated biological growth approaches. *AIAA J.* **31** (1993) 2143–2147.
- [54] Cheng, H.C., Kikuchi, N., Ma, Z.D.: An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material. *Struct. Optim.* **8** (1994) 101–112.
- [55] Cheng, K.T., Olhoff N.: An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *Int. J. Solids Structures* **17** (1981) 305–323.
- [56] Cheng, K.T., Olhoff N.: Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. *Int. J. Solids Structures* **18** (1982) 153–169.
- [57] Cherkhev, A.V.: Relaxation of problems of optimal structural design. *Int. J. Solids Structures* **31** (1994) 2251–2280.
- [58] Cherkhev, A.V., Palais, R.: Optimal design of three–dimensional axisymmetric elastic structures. *Structural Optimization* **12** (1996) 35–45.
- [59] Chirehdast, M., Sankaranarayanan, S., Ambo, S., Johanson, R.: Validation of topology optimization for component design. In: [291] 132–137.
- [60] Choi, K.K., Chang, K.–H.: A study of design velocity field computation for shape optimal design. *Finite Elements in Analysis and Design* **15** (1994) 317–341.
- [61] Christensen, R.M.: *Mechanics of composite materials*. Amsterdam: Krieger, 1979.
- [62] Ciarlet, P.G.: *Mathematical elasticity. Volume 1: Three dimensional elasticity. Studies in mathematics and its applications, 20*. Amsterdam: North–Holland, 1988.
- [63] Cirak, F.: *Adaptive FE–Analyse bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1998.
- [64] Cowin, S.C., Hegedus, D.H.: Bone remodeling I: theory of adaptive elasticity. *J. Elasticity* **6** (1976) 313–326.
- [65] Cowin, S.C., Sadegh, A.M., Luo, G.M.: An evolutionary Wolff’s law for trabecular architecture. *J. Biomech. Eng.* **114** (1992) 129–136.
- [66] Cox, H.L.: *The design of structures of least weight*. Oxford: Pergamon, 1965.
- [67] Crisfield, M.A.: *Non–linear finite element analysis of solids and structures. Vol. 1: essentials*. Chichester: Wiley, 1991.
- [68] Crisfield, M.A.: *Non–linear finite element analysis of solids and structures. Vol. 2: advanced topics*. Chichester: Wiley, 1997.
- [69] Dacorogna, B.: *Direct methods in the calculus of variations. Applied mathematical science, 78*. Berlin: Springer, 1989.
- [70] Dal Maso, G.: *An introduction to Γ –convergence*. Boston: Birkhäuser, 1993.

- [71] Dems, K., Mroz, Z.: On shape sensitivity approaches in the numerical analysis of structures. *Struct. Optim.* **6** (1993) 86–93.
- [72] Dems, K., Gutowski, W.: Optimal design of a truss configuration under multiloading conditions. *Struct. Optim.* **9** (1995) 262–265.
- [73] Deuffhard, P., Hohmann, A.: *Numerische Mathematik*. Berlin: de Gruyter, 1991.
- [74] Deussen, N: *Biomechanik: Lehrmeister Baum*. *GEO* **4** (1996) 44–71.
- [75] Diaz, A., Kikuchi, N.: Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization methods. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **35** (1992) 1487–1502.
- [76] Diaz, A., Bendsøe, M.P.: Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. *Struct. Optim.* **4** (1992) 17–22.
- [77] Diaz, A., Sigmund, O.: Checkerboard patterns in layout optimization. *Struct. Optim.* **10** (1995) 40–45.
- [78] Diaz, A., Lipton, R., Soto, C.: A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reissner–Mindlin plates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **123** (1995) 121–139.
- [79] Ding, Y.: Shape optimization of structures – a literature survey. *Comp. & Struct.* **24** (1986) 985–1004.
- [80] Dorn, W.S., Gomory, R.E., Greenberg, H.J.: Automatic design of optimal structures. *J. des Mécaniques* **3** (1964) 25–52.
- [81] Duysinx, P., Zhang, W.H., Fleury, C.: A new separable approximation scheme for topological problems and optimization problems characterized by a large number of design variables. In: [193] 1–8.
- [82] Duysinx, P., Bendsøe, M.P.: Topology optimization of continuum structures with stress constraints. In: [104] 527–532.
- [83] Eberhard, P.: *Zur Mehrkriterienoptimierung von Mehrkörpersystemen*. Dissertation. VDI–Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 227. Düsseldorf: VDI–Verlag, 1996.
- [84] Ekeland, I., Temam, R.: *Convex analysis and variational problems*. Studies in mathematics and its applications, 1. Amsterdam: North–Holland, 1976.
- [85] Eriksson, K., Estep, D., Hansbo, P., Johnson, C.: *Computational differential equations*. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1996.
- [86] Eschenauer, H.A., Olhoff, N. (Hrsg.): *Optimization methods in structural design – Proceedings of the Euromech colloquium 164, 12.–14. Oktober 1982, Universität Siegen*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1983.
- [87] Eschenauer, H.A., Koski, J., Osyczka, A.: *Multicriteria design optimization*. Berlin: Springer, 1990.
- [88] Eschenauer, H.A., Kobelev, V.V., Schumacher, A.: Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct. Optim.* **8** (1994) 42–51.
- [89] Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Royal Soc.* **A241** (1957) 376–396.

- [90] Falk, A.: Adaptive Verfahren für die Formoptimierung von Flächentragwerken unter Berücksichtigung der CAD–FEM–Kopplung. Dissertation, Bericht Nr. F 95/1. Forschungs– und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Universität Hannover, 1995.
- [91] Falk, A., Barthold, F.–J., Stein, E.: Hierarchical modelling in shape optimization. In: [193] 371–376.
- [92] Falk, A., Barthold, F.–J.: Ein hierarchisches Verfahren für die Formoptimierung. ZAMM **75** (1995) 589–590.
- [93] Farin, G.E.: Curves and surfaces for computer aided geometric design. London: Academic Press, 1988.
- [94] Foulkes, J.: The minimum–weight design of structural frames. Proc. Royal Soc. **223**, 482–494, 1954.
- [95] Francfort, G.A., Murat, F.: Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. **94** (1986) 307–334.
- [96] Fuenmayor, F.J., Oliver, J.L., Rodenas, J.J.: Extension of the Zienkiewicz–Zhu error estimator to shape sensitivity analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. **40** (1997) 1413–1433.
- [97] Funk, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Berlin: Springer, 1962.
- [98] Gea, H.C.: Topology Optimization: A new microstructure–based design domain method. Comp. Struct. **61** (1996) 781–788.
- [99] Gill, P.E., Murray, W., Wright, M.H.: Practical optimization. London: Academic Press, 1981.
- [100] Guillaum, Ph., Masmoudi, M.: Computation of high order derivatives in optimal shape design. Numerische Mathematik **67** (1994) 231–250.
- [101] Grabovsky, Y., Kohn, R.V.: Microstructures minimizing the energy of a two phase elastic composite in two space dimensions. I: The confocal ellipse construction. II: The vigdergauz microstructure. J. Mech. Phys. Solids **43** (1995) 933–947, 949–972.
- [102] Grabovsky, Y.: Bounds and extremal microstructures for two–component composites: A unified treatment based on the translation method. Vorabdruck.
- [103] Guedes, J.M., Kikuchi, N.: Pre– and post–processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **83** (1990) 143–198.
- [104] Gutkowski, W., Mroz, Z.: Proceedings of the 2nd world congress of structural and multidisciplinary optimization, 26.–30. Mai 1997, Zakopane, Polen. Institute of Fundamental Technological Research, Warschau, 1997.
- [105] Haber, R.B.: A new variational approach to structural shape sensitivity analysis. In: Mota Soares, C.A. (Hrsg.) Computer aided optimal design – Structural and mechanical systems, NATO ASI Series **F27**, 573–587. Berlin: Springer, 1987.

- [106] Haber, R.B., Jog, C.S., Bendsøe, M.P.: The perimeter method – a new approach to variable–topology shape design. In: [193] 153–160.
- [107] Haber, R.B., Jog, C.S., Bendsøe, M.P.: A new approach to variable–topology shape design using a constraint on perimeter. *Struct. Optim.* **11** (1996) 1–12.
- [108] Haftka, R.T., Prasad, B.: Optimum structural design with plate bending elements – a survey. *AIAA J.* **19** (1981) 517–522.
- [109] Haftka, R.T., Grandhi, R.V.: Structural shape optimization – a survey. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **57** (1986) 91–106.
- [110] Haftka, R.T., Gürdal, Z., Kamat, M.P.: *Elements of structural optimization*. Dordrecht: Kluwer, 1990.
- [111] Hajela, P.: Genetic Search – An approach to the nonconvex optimization problem. *AIAA J.* **28** (1990) 1205–1210.
- [112] Halpin, T.C., Kardos, J.L.: The Halpin–Tsai equations: A review. *Polymer Eng. Sci.* **16** (1976) 344–351.
- [113] Hashin, Z.: The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME J. Appl. Mech.* **29** (1962) 143–150.
- [114] Hashin, Z., Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids* **11** (1963) 127–140.
- [115] Hashin, Z.: Analysis of composite materials: A survey. *J. Appl. Mech.* **50** (1983) 481–505.
- [116] Hassani, B.: Homogenization and topological structural optimization. Dissertation, C/Ph/193/96. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, 1996.
- [117] Hassani, B.: A direct method to derive the boundary conditions of the homogenization equation for symmetric cells. *Comm. Num. Meth. Eng.* **12** (1996) 185–196.
- [118] Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V.: *Design sensitivity analysis of structural systems*. Orlando: Academic Press, 1986.
- [119] Hemp, W.S.: *Optimum Structures*. Oxford: Clarendon Press, 1973.
- [120] Hernandez, S., Brebbia, C.A.: *Optimization of structural systems and application*. London: Elsevier, 1993.
- [121] Hill, R.: The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc.* **A65** (1952) 349–354.
- [122] Hill, R.: A self–consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids* **13** (1965) 213–222.
- [123] Hinton, E., Özakca, M., Rao, N.V.R.: An integrated approach to structural shape optimization of linearly elastic structures. Part II: Shape definition and adaptivity. *Computing Systems in Engineering* **2** (1991) 41–56.
- [124] Hinton, E., Sieng, J., Hassani, B.: Fully integrated design optimization for engineering structures. In: [258] 1–21.

- [125] Hörnlein, H.R.E.M.: Optimalitätskriterien in der Strukturoptimierung. In: Computer-unterstützte Strukturoptimierung, COMETT-Seminarunterlagen, Thurnau/Bayreuth, 13.–15. September 1995.
- [126] Hughes, T.J.R.: The finite element method – linear static and dynamic finite element analysis. London: Prentice–Hall, 1987.
- [127] Huiskes, R., Weinans, H. Grootenboer, H.J., Dalstra, M., Fudala, B., Sloof, T.J.: Adaptive bone–remodeling theory applied to prosthetic–design analysis. *J. Biomechanics* **22** (1987) 1135–1150.
- [128] Imam, M.H.: Three–dimensional shape optimization. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **18** (1982) 661–673.
- [129] Jäger, J.: Elementare Topologie. Paderborn: Schöningh, 1980.
- [130] Jog, C.S., Haber, R.B., Bendsøe M.P.: Topology design with optimized, self–adaptive materials. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **37** (1994) 1323–1350.
- [131] Jog, C.S., Haber, R.B.: Stability of finite element models for distributed–parameter optimization and topology design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **130** (1996) 203–226.
- [132] Kawabe, Y., Yoshida, S.: Structural optimization by density distribution for maximization of natural frequency. *ASME J. Mech. Design* **118** (1996) 157–159.
- [133] Kikuchi, N., Chung, K.Y., Torigaki, T., Taylor, J.E.: Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **57** (1986) 67–89.
- [134] Kikuchi, N.: Generalized layout optimization of elastic structures by the homogenization method. Lecture Notes, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Michigan, USA, 1992.
- [135] Kimmich, S.: Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen. Dissertation, Bericht Nr. 12 (1990). Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- [136] Kirsch, U.: Optimal topology of structures. *Appl. Mech. Rev.* **42** (1989) 223–239.
- [137] Kirsch, U.: Structural optimization: fundamentals and applications. Berlin: Springer, 1993.
- [138] Kirsch, U.: Singular and local optima in structural optimization. In: [291] 150–160.
- [139] Klarbring, A., Peterson, J., Rönqvist, M.: Truss topology optimization involving unilateral contact – numerical results. In: [193] 129–134.
- [140] Kleiber, M., Antúnez, H., Hien, T.D., Kowalczyk, P.: Parameter sensitivity in nonlinear mechanics. Chichester: Wiley, 1997.
- [141] Kodiyalam, S., Parthasarathy, V.N.: Optimized/adapted finite elements for structural shape optimization. *Finite Elements in Analysis and Design* **12** (1992) 1–11.
- [142] Kohli, H.S., Carey, G.F.: Shape optimization using adaptive shape refinement. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **36** (1993) 2435–2451.

- [143] Kohn, R.V, Strang, G.: Optimal design for torsional rigidity. In: Atluri, S.N., Gallagher, R.H. Zienkiewicz, O.C. (Hrsg.) Hybrid and mixed finite element methods, 281–288. Chichester: Wiley, 1983.
- [144] Kohn, R.V., Strang, G.: Optimal design and relaxation of variational problems, I–III. *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986) 113–137, 139–182, 353–377.
- [145] Kompfner, T.: Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen. Dissertation, Bericht 2 (1983). Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [146] Kumar, A.V., Gossard, D.C.: Synthesis of optimal shape and topology of structures. *ASME J. Appl. Mech.* **118** (1996) 68–74.
- [147] Lakes, R.S.: Materials with structural hierarchy. *Nature* **361** (1993) 511–515.
- [148] Luenberger, D.G.: Linear and nonlinear programming. Reading, Massachusetts: Addison–Wesley, 1984.
- [149] Lund, E.: Finite element base design sensitivity analysis and optimization. Dissertation, Report No. 23. Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Dänemark, 1994.
- [150] Lurie, K.A.: On the optimal distribution of the resistivity tensor of the working substance in a magnetohydrodynamic channel. *J. Appl. Math. Mech.* **34** (1970) 255–274.
- [151] Lurie, K.A.: Optimal design of elastic bodies and the problem of regularization. *Wissenschaftliche Zeitschrift, Technische Hochschule Leipzig* **4** (1980) 339–347.
- [152] Ma, Z.–D., Kikuchi, N., Cheng, H.–C., Hagiwara, I.: Topological optimization technique for free vibration problems. *ASME J. Appl. Mech.* **62** (1995) 200–207.
- [153] Ma, Z.–D., Kikuchi, N., Cheng, H.–C.: Topological design for vibrating structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **121** (1995) 259–280.
- [154] Malvern, L.E.: Introduction to the mechanics of a continuous medium. London: Prentice–Hall, 1969.
- [155] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R.: Mathematical foundations of elasticity. London: Prentice–Hall, 1983.
- [156] Mathiak, G., Schnack E.: An adaptive composition of unknown boundaries for shape optimization of three–dimensional elastic structures. In: [193] 365–370.
- [157] Mathiak, G.: A composition strategy applied to 3D shape optimization using the boundary element method and nested design models. Dissertation. Aachen: Shaker, 1996.
- [158] Mattheck, C., Burkhardt, S.: A new method of structural optimization based on biological growth. *Int. J. Fatigue* **12** (1990) 185–190.
- [159] Mattheck, C., Baumgartner, A., Walther, F.: Bauteiloptimierung durch Simulation biologischen Wachstums. In: Kull, U., Ramm, E., Reiner, R. (Hrsg.) Evolution und Optimierung – Strategien in Natur und Technik, 107–120. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1995.

- [160] Matzenmiller, A.: Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen. Dissertation, Bericht Nr. 8 (1988). Institut für Bau- statik, Universität Stuttgart, 1988.
- [161] Maute, K.: Heuristische Ingenieurverfahren in der Tragwerksgenese – Ihre Funktion und ihre Grenzen. Studienarbeit. Institut für Computer–Anwendung, Universität Stutt- gart, 1991.
- [162] Maute, K. (Red.): Topologie–Workshop, ein Ansatz zur Entwicklung alternativer Strukturen. Konzeptheft Nr. 44 des Sonderforschungsbereiches 230, Universität Stuttgart, 1994.
- [163] Maute, K., Ramm, E.: Topology optimization of plate and shell structures. In: Abel, J.F., Leonhard, J.W., Penalba, C.U. (Hrsg.) Spatial, lattice and tension structures –Pro- ceedings of the IASS–ASCE international symposium, Atlanta, April 1994, 946–955. New York: American Society of Civil Engineering, 1994.
- [164] Maute, K., Ramm, E.: Topology optimization – a general tool in structural design. In: Mang, H., Bicanic, N., de Borst, R. (Hrsg.) Computational modelling of concrete struc- tures, Proceedings of the Euro–C 1994, 22.–25. März 1994, Innsbruck, Österreich, 805–824. Swansea: Pineridge Press, 1994.
- [165] Maute, K., Ramm, E.: Adaptive techniques in topology optimization. In: [291] 121–131.
- [166] Maute, K.; Ramm, E.: General shape optimization – an integrated model for topology and shape optimization. In: [193] 299–306.
- [167] Maute, K., Ramm, E.: Adaptive topology optimization. *Struct. Optim.* **10** (1995) 100–112.
- [168] Maute, K., Ramm, E.: Adaptivity in structural optimization. In : [259] 227 – 237.
- [169] Maute, K., Ramm, E.: Adaptive topology optimization of shell structures. *AIAA J.* **35** (1997) 1767–1773.
- [170] Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E.: Adaptive topology optimization of elastoplastic structures. *Struct. Optim.* **15** (1998) 81–91.
- [171] Maxwell, C.: *Scientific Papers II*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1869.
- [172] Mayer, R.R., Kikuchi, N., Scott, R.A.: Application of topology optimization tech- niques to structural crashworthiness. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **39** (1996) 1383–1403.
- [173] Menrath, H., Maute, K., Ramm, E.: Topology optimization including elastoplasticity. In: [195] 817–822.
- [174] Michell, A.G.M.: The limits of economy of material in frame structures. *Philosophical Magazine, Series 6*, **8** (1904) 589–597.
- [175] Milton, G.: Modelling the properties of composites by laminates. In: Erickson, J.L., Kinderlehrer, D. Kohn, R.V., Lions, J.L. (Hrsg.) *Homogenization and effective moduli of materials and media*, 150–175. Berlin: Springer, 1986.

- [176] Milton, G., Kohn, R.V.: Variational bound of the effective moduli of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids* **36** (1988) 597–629.
- [177] Mlejnek, H.P.: Accuracy of semi-analytical sensitivities and its improvements by the “natural method”. *Struct. Optim.* **4** (1992) 128–131.
- [178] Mlejnek, H.P., Schirrmacher, R.: An engineer’s approach to optimal distribution and shape finding. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **106** (1993) 1–26.
- [179] Mlejnek, H.P.: Some aspects of the genesis of structures. *Struct. Optim.* **5** (1993) 64–69.
- [180] Mori, T., Tanaka, K.: Average stresses in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* **21** (1973) 571–575.
- [181] Murat, F.: Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients. *Ann. Mat. Pura et Appl.* **112** (1977) 49–68.
- [182] Mußchelischwili, N.I.: *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. München: Carl Hanser Verlag, 1971.
- [183] Neves, M.M., Rodrigues, H., Guedes, J.M.: Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Struct. Optim.* **10** (1995) 71–78.
- [184] Niordson, F.: Some new results regarding optimal design of elastic plates. In: [86] 380–386.
- [185] Özakca, M.: *Analysis and optimal design of structures with adaptivity*. Dissertation C/Ph/168/93. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, 1993.
- [186] Oñate, E., Bugada, G.: A methodology for adaptive mesh refinement in optimum shape design problems. *Computing Systems in Engineering* **5** (1994) 91–102.
- [187] Olhoff, N.: Optimal design of vibrating rectangular plates. *Int. J. Solids Structures* **10** (1974) 93–109.
- [188] Olhoff, N., Lurie, K.A., Cherkaev, A.V., Fedorov, A.V.: Sliding regimes and anisotropy in optimal design of vibrating axisymmetric plates. *Int. J. Solids Structures* **17** (1981) 931–948.
- [189] Olhoff, N., Taylor, J.E.: On structural optimization. *J. Appl. Mech.* **50** (1983) 1139–1151.
- [190] Olhoff, N., Bendsøe, M.P., Rasmussen, J.: On CAD-integrated structural topology and design optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **89** (1991) 259–279.
- [191] Olhoff, N., Rasmussen, J.: Method of error elimination for a class of semi-analytical sensitivity analysis problems. In: [220] 385–396.
- [192] Olhoff, N.: Concurrent engineering tools for dynamic analysis and optimization. Lecture notes, Vol. 2., IUTAM fifth summer school on mechanics, 15.–19. August 1994, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [193] Olhoff, N., Rozvany, G.I.N. (Hrsg.): *Proceedings of the first world congress of structural and multidisciplinary optimization*, 28. Mai– 2. Juni 1995, Goslar, Germany. Oxford: Elsevier, 1995.

- [194] Ou, J.-S., Kikuchi, N.: Integrated optimal structural and vibration control design. *Struct. Optim.* **12** (1996) 209–216.
- [195] Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E. (Hrsg.): Proceedings of the fifth international conference on computational plasticity COMPLAS, 17.–20. März 1997, Barcelona, Spanien. Barcelona: CIMNE, 1997.
- [196] Papalambros, P.Y., Chirehdast, M.: Integrated structural optimization systems. In: [29] 501–514.
- [197] Patnaik, S.N., Guptill, D.J., Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **38** (1995) 3087–3120.
- [198] Pedersen, P.: On optimal orientation of orthotropic materials. *Struct. Optim.* **1** (1989) 101–106.
- [199] Pedersen, P. (Hrsg.): Optimal design with advanced materials. Proceedings of the IUTAM symposium on optimal design with advanced materials, 18–22 August 1992, Lyngby, Dänemark. Amsterdam: Elsevier, 1993.
- [200] Ploch, J.: Entwurf und Konstruktion einer Betonbrücke unter Verwendung von Topologieoptimierungsverfahren. Diplomarbeit. Institut für Konstruktion und Entwurf II, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1997.
- [201] Prager, W., Taylor, J.E.: Problems of optimal structural design. *J. Appl. Mech.* **35** (1968) 102–106.
- [202] Prager, W., Rozvany, G.I.N.: Optimization of structural geometry. In: Bednarek, A.R., Cesari, L. (Hrsg.) *Dynamical systems*, 265–293. New York: Academic Press, 1977.
- [203] Querin, O.M., Steven, G.P., Xie, Y.M.: Topology optimisation of structures with material and geometric non-linearities. In: [292] 1812–1818.
- [204] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Habilitationsschrift, Bericht Nr. 76–2. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [205] Ramm, E., Bletzinger, K.-U., Reitinger, R.: Shape optimization of shell structures. *IASS – Bulletin* **34** (1993) 103–121.
- [206] Ramm, E., Bletzinger, K.-U., Reitinger, R., Maute, K.: The challenge of structural optimization. In: [257] 27–52.
- [207] Ramm, E., Cirak, F.: Adaptivity for nonlinear thin-walled structures. In: [195] 145–163.
- [208] Rammerstorfer, F.G., Böhm, H.J.: Micro-mechanics for the macro-material description. In: Hult J., Rammerstorfer, F.G. (Hrsg.) *Engineering mechanics of fiber reinforced polymers and composite structures. CISM courses and lectures 328*. Wien: Springer, 1994.
- [209] Rehle, N.: Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken. Dissertation, Bericht Nr. 20 (1996). Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1996.

- [210] Reiter, R.T., Rammerstorfer, F.G.: Simulation of natural adaptation of bone material and application in optimum composite design. In: [199] 25–36.
- [211] Reiter, T.J.: Functional Adaptation of Bone and Application in Optimum Structural Design. Dissertation. Fakultät Maschinenbau, Technische Universität Wien, 1995.
- [212] Reitingner, R.: Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke. Dissertation, Bericht Nr. 17 (1994). Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1994.
- [213] Ringertz, U.T.: On finding the optimal distribution of material properties. *Struct. Optim.* **5** (1993) 265–267.
- [214] Rodrigues, H., Fernandes, P.: A material based model for topology optimization of thermoelastic structures. *Num. Meth. Eng.* **38** (1995) 1951–1965.
- [215] Rosen, D.W., Grosse, I.R.: A feature based shape optimization technique for the configuration and parametric design of flat plates. *Eng. with Comp.* **8** (1992) 81–91.
- [216] Rossow, M.P., Taylor, J.E.: A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. *AIAA J.* **11** (1973) 1566–1568.
- [217] Rozvany, G.I.N., Ong, T.G., Szeto, W.T., Sandler, R., Olhoff, N., Bendsøe, M.P.: Least-weight design of perforated elastic plates, I–II. *Int. J. Solids Structures* **23** (1987) 521–536, 537–550.
- [218] Rozvany, G.I.N.: Structural design via optimality criteria. Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [219] Rozvany, G.I.N., Zhou, M., Birker, T.: Generalized shape optimization without homogenization. *Struct. Optim.* **4** (1992) 250–252.
- [220] Rozvany, G.I.N.: Optimization of large structural systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [221] Rozvany, G.I.N., Bendsøe, M.P., Kirsch, U.: Layout optimization of structures. *Appl. Mech. Rev.* **48** (1995) 41–119.
- [222] Rozvany, G.I.N., Zhou, M.: Advances in overcoming computational pitfalls in topology optimization. In: [292] 1122–1132.
- [223] Salagame, R.R., Belegundu, A.D.: A simple p-adaptive refinement procedure for structural shape optimization. *Finite Elements in Analysis and Design* **24** (1997) 133–135.
- [224] Sanchez-Palencia, E.: Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127. Berlin: Springer, 1980.
- [225] Schlaich, J., Schäfer, K.: Konstruieren im Stahlbetonbau. In: *Betonkalender 1984, Teil II*, 787–1005. Berlin: Ernst & Sohn, 1984.
- [226] Schittkowski, K.: NLPQL: A FORTRAN subroutine for solving constrained nonlinear programming problems. *Ana. Oper. Res.* **5** (1985) 485–500.
- [227] Schittkowski, K., Zillober, C., Zotemantel, R.: Numerical comparison on nonlinear programming algorithms for structural optimization. *Struct. Optim.* **7** (1994) 1–28.

- [228] Schröder, J.: Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens. Dissertation, Bericht Nr.: I-1. Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, 1996.
- [229] Schumacher, A.: Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien. Dissertation, Bericht Nr. T09-01.96. FOMAAS, Universität – Gesamthochschule Siegen, 1996.
- [230] Schwarz, S.: Mechanisch orientierte Ansätze zur Beschreibung der Formänderung in der Strukturoptimierung. Diplomarbeit. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1996.
- [231] Seyranian, A.P., Lund, E., Olhoff, N.: Multiple eigenvalues in structural optimization problems. *Struct. Optim.* **8** (1994) 207–227.
- [232] Sienz, J.: Integrated structural modelling, adaptive analysis and shape optimization. Dissertation, C/Ph/181/94. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, 1994.
- [233] Sigmund, O.: Design of material structures using topology optimization. Dissertation, Report S 69. Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [234] Sigmund, O.: Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem. *Int. J. Solids and Structures* **31** (1994) 2313–2329.
- [235] Simo, J.C., Taylor, R.L.: A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **22** (1986) 649–670.
- [236] Soto, C.A., Diaz, A.R.: On the modelling of ribbed plates for shape optimization. *Struct. Optim.* **6** (1993) 175–188.
- [237] Soto, C.A., Diaz, A.R.: Optimum layout and shape optimization of plate structures using homogenization. In: [29] 407–420.
- [238] Stadler, W.: Multicriteria optimization in engineering and in the sciences. London: Plenum Press, 1988.
- [239] Stein, E. Ohnimus, S.: Dimensionsadaptivität bei elastischen Schalen in Störbereichen. *ZAMM* **75** (1995) 33–36.
- [240] Suquet, P.M.: Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia, E.; Zaoui, A. (Hrsg.) *Homogenization techniques for composite media*, 193–278. Berlin: Springer, 1987.
- [241] Suzuki, K., Kikuchi, N., Bendsøe, M.P.: OPTISHAPE 2D – User’s manual. University of Michigan, Ann Arbor, 1988.
- [242] Suzuki, K., Kikuchi, N.: Generalized layout optimization of three-dimensional shell structures. In: Komkov, V. (Hrsg.) *Geometric aspect of industrial design*, 62–88. Philadelphia: SIAM, 1991.

- [243] Suzuki, K., Kikuchi, N.: A homogenization method for shape and topology optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **93** (1991) 291–318.
- [244] Swan, C.C., Kosaka, I.: Topology Optimization for Discrete, Symmetric and Stable Material Layout Designs. In: [259] 167–176.
- [245] Swan, C.C., Arora, J.S.: Topology design of material layout in structured composites of high stiffness and strength. *Struct. Optim.* **13** (1997) 45–59.
- [246] Swan, C.C., Arora, J.S., Koska, I. Huang, M.–W.: Structural topology design of civil structures using SLP and classical mixing rules. Wird veröffentlicht in: *Finite Elements in Analysis and Design* 1997.
- [247] Szabo, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Basel: Birkhäuser, 1979.
- [248] Tartar, L.: Problèmes de contrôle des coefficients dans les equations aux dérivées partielles. In: Bensoussan, A., Lions, J.L. (Hrsg.) *Control theory, numerical methods, and computer system modelling. Lecture notes in economics and mathematical systems* **107**, 420–426. New York: Springer, 1975.
- [249] Taylor, J.E.: Truss topology design for elastic/softening materials. In: [29] 451–467.
- [250] Taylor, J.E., Washabaugh, P.D.: Analysis and design of trussed structures made of elastic/stiffening materials. *Struct. Optim.* **8** (1994) 1–8.
- [251] Teichmann, K., Wilke, J.: *Prozeß und Form "Natürlicher Konstruktionen"* – Der Sonderforschungsbereich 230. Berlin: Ernst & Sohn, 1996.
- [252] Tenek, L.H., Hagiwara, I.: Optimization of material distribution with isotropic and anisotropic plates using homogenization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **103** (1993) 155–167.
- [253] Tenek, L.H., Hagiwara, I.: Static and vibrational shape and topology optimization using homogenization and mathematical programming. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **109** (1993) 143–154.
- [254] Tenek, L.H., Hagiwara, I.: Optimal rectangular plate and shallow shell topologies using thickness distribution or homogenization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **115** (1994) 111–124.
- [255] Thierauf, G., Cai, J.: Parallel evolution strategies for solving structural optimization. *Engineering Structures* **19** (1997) 318–324.
- [256] Thomsen, J.: Topology optimization of structures composed of one or two materials. *Struct. Optim.* **5** (1992) 108–115.
- [257] Topping, B.H.V., Papadrakakis, M. (Hrsg.): *Advances in structural optimization*. Edinburgh: Civil–Comp Press, 1994.
- [258] Topping, B.H.V., Khan, A.I., De Barros Leite, J.P.: Topological design of truss structures using simulated annealing. *Struct. Eng. Rev.* **8** (1996) 301–314.
- [259] Topping, B.H.V. (Hrsg.): *Advances in structural engineering optimization*. Edinburgh: Civil–Comp Press, 1996.

- [260] Tsay, J.J., Arora, J.S.: Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems, part I: general theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **81** (1990) 183–208.
- [261] Ulrich, G.: Topologieoptimierung von Stabwerken mit Evolutionsstrategien. Diplomarbeit. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1997.
- [262] Umetani, Y., Hirai, S.: An adaptive shape optimization method for structural material using the growing–reforming procedure. In: *Proceedings of the JSME–ASME Applied Mechanics Western Conference*, 359–365. 1975.
- [263] Vanderplaats, G.N.: *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*. New York: McGraw–Hill, 1984.
- [264] van Keuveln, F., Hinton, E.: Topology design of plate and shell structures using the hard kill method. In: [259] 177–188.
- [265] Velte, W., Villaggio, P.: Are the optimum problems in structural design well posed? *Arch. Rat. Anal.* **78** (1982) 199–211.
- [266] Verfürth, R.: *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh–refinement techniques*. Chichester: John Wiley, Stuttgart: B.G. Teubner, 1995.
- [267] Vidal, C.A., Haber, R.B.: Design sensitivity analysis for rate–independent elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **107** (1993) 393–431.
- [268] Vigdergauz, S.: Two–dimensional grained composites of extreme rigidity. *ASME J. Appl. Mech.* **61** (1994) 390–394.
- [269] Wagner, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Habilitation, Bericht Nr. F 91/1. Forschungs– und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik, Universität Hannover, 1991.
- [270] Weber, M.: *Herstellung von Metallschäumen und Beschreibung der Werkstoffeigenschaften*. Dissertation. Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Technische Universität Clausthal, 1995.
- [271] Weck, M., Feldermann, J.: Anwendungsmöglichkeiten von adaptiven Finite–Element–Verfahren bei der Strukturoptimierung. *Konstruktion* **41** (1989) 325–331.
- [272] Weck, M., Kölsch, G.: Automatische Auslegung optimaler Bauteilstrukturen. *VDI–Z* **134** (1992) 111–116.
- [273] Weck, M., Büßenschütt, A.: Application of basic shape concept to practical shape optimization problems. In: [193] 315–322.
- [274] Wiedemann, J.: *Leichtbau*. Band 2: Konstruktion. Berlin: Springer, 1989.
- [275] Wieghardt, K.: Ein Konzept zur interaktiven Formoptimierung kontinuierlicher Strukturen. Dissertation, Mitteilungen Nr. 95–3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr–Universität Bochum, 1995.
- [276] Willis, J.R.: Bounds and self–consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids* **25** (1977) 185–202.

- [277] Xie, Y.M., Steven, G.P.: A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comp. & Struct.* **49** (1993) 885–896.
- [278] Xie, Y.M., Steven, G.P.: A simple approach to structural frequency optimization. *Comp. & Struct.* **53** (1994) 1487–1491.
- [279] Yang, R.J., Chuang, C.H.: Optimal topology design using linear programming. *Comp. & Struct.* **52** (1994) 265–275.
- [280] Yang, R.J., Chahande, A.I.: Automotive applications of topology optimization. *Struct. Optim.* **9** (1995) 245–249.
- [281] Yang, R.J., Chen, C.J.: Stress-based topology optimization. *Struct. Optim.* **12** (1996) 98–105.
- [282] Yang, R.J., Chen, C.J., Lee, C.H.: Bead pattern optimization. *Struct. Optim.* **12** (1996) 217–221.
- [283] Youn, S.–K., Park, S.–H.: A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenized material. *Comp. & Struct.* **62** (1997) 527–538.
- [284] Yuge, K.; Kikuchi, N.: Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation. *Struct. Optim.* **10** (1995) 197–208.
- [285] Zhang, S., Belegundu, A.D.: A systematic approach for generating velocity fields in shape optimization. *Struct. Optim.* **5** (1992) 84–94.
- [286] Zhang, W.–H., Beckers, P., Fleury, C.: A unified parametric design approach to structural shape optimization. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **38** (1995) 2283–2292.
- [287] Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC–algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **89** (1991) 309–336.
- [288] Zienkiewicz, O.C., Campbell, J.S.: Shape optimization and sequential linear programming. In: Gallagher, R.H., Zienkiewicz, O.C. (Hrsg.) *Optimum structural design*. 109–126. New York: Wiley, 1973.
- [289] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **24** (1987) 337–357.
- [290] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: *The finite element method I, II*. London: McGraw–Hill, 1989.
- [291] AIAA: Proceedings of the 5th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization, 7.–9. September 1994, Panama City, Florida. AIAA, 1994.
- [292] AIAA: Proceedings of the 6th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 4.–6. September 1996, Bellevue, USA. AIAA, 1996.

Bildnachweis

- Seite 1 Knochen – Femur: Archiv des Instituts für Leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, 1995.
- Seite 1 Kieselalge: Otto, F.: Natürliche Konstruktionen. Stuttgart: DVA, 1982.
- Seite 74 Metallschaum: Informationsheft des Instituts für Angewandte Materialforschung, Fraunhofer-Gesellschaft, Bremen, 1994.

A Anhang

A1 “Bubble”-Methode

In den vergangenen Jahren wurden überwiegend Verfahren der materiellen Topologieoptimierung eingesetzt, um den grundlegenden Aufbau von kontinuierlichen Tragwerken zu bestimmen. Die Approximation der Geometrie des Tragwerks über die Materialverteilung im Entwurfsraum ermöglicht es einerseits, beliebig komplexe Topologien zu erzeugen. Andererseits sind die Ergebnisse dieser Verfahren oftmals nicht eindeutig und müssen, beispielsweise durch einen abschließenden Formoptimierungsschritt, nachbehandelt werden. Bei den geometrischen Verfahren der Topologieoptimierung wird das Tragwerk direkt über die Form der Kanten und Oberflächen beschrieben. Der Aufbau und die Form des Tragwerks können mit wenigen Optimierungsvariablen eindeutig bestimmt werden.

Die Vorgehensweise sowie die Eigenschaften der geometrischen Ansätze in der Topologieoptimierung werden am Beispiel der von Eschenauer et al. [88] und Schumacher [229] entwickelten “bubble”-Methode erläutert. Die Vorgehensweise der “bubble-Methode” gliedert sich im wesentlichen in zwei Schritte:

- Die Form des Tragwerks wird mit einem CAGD-orientierten Ansatz für die aktuelle Topologie optimiert.
- Die Topologie des Tragwerks wird geändert, indem ein oder mehrere kleine Löcher in das Tragwerk eingebracht werden.

Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis die Zielfunktion durch zusätzliche Löcher nicht mehr verbessert werden kann oder eine maximale Anzahl von Löchern erreicht ist. Die Grundidee der “bubble-Methode” beruht auf dem Saint-Venant-Prinzip, wonach der globale Spannungszustand nicht gestört wird, wenn ein genügend kleines Loch, das sogenannte “bubble”, eingebracht wird. Das neue Loch wird dort positioniert, wo der Gradient der Lagrange-Funktion bezüglich der Größe des “bubbles” ein Minimum einnimmt. Die optimale Position des “bubbles” kann für den Fall, daß das Loch gegenüber den Abmessungen des gesamten Tragwerks genügend klein ist, analytisch berechnet werden (Bild A.1). Das Spannungsfeld liegt für eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit kreisförmiger Aussparung analytisch vor (Mußschischwili [182]). Die Spannungen σ_{Θ} in Umfangsrichtung auf dem Kreis sind:

$$\sigma_{\Theta} = (\sigma_1 + \sigma_2) - 2 (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(2\Theta) \quad (\text{A.1})$$

Mit σ_1 , σ_2 sind die Spannungen im Unendlichen in Richtung des globalen, kartesischen Koordinatensystems bezeichnen. Die Spannungen σ_r in radialer Richtung und die Schubspannungen $\sigma_{r\Theta}$ entlang des Lochrandes sind Null. Dieses mechanische Modell beschreibt ebenfalls den Spannungszustand um ein infinitesimal kleines “bubble” in einer Scheibe von endlicher Größe.

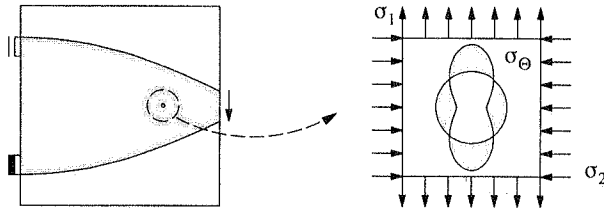


Bild A.1: Spannungverteilung um ein infinitesimal kleines kreisförmiges Loch

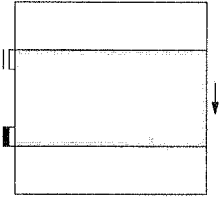
Für die Optimierungsaufgabe “Minimale Dehnungsenergie bei konstanter Masse” kann hieraus der Gradient der Lagrange-Funktion bezüglich dem Radius des Loches in Abhängigkeit von den Randspannungen σ_1 , σ_2 analytisch ermittelt werden (Schumacher [229]). Im Optimum ist der Gradient Null. Daher wird der Betrag des Gradienten als Kriterium Φ_b herangezogen, um die Position \mathbf{x}_b des neuen Loches zu bestimmen. Das “bubble” wird dort eingesetzt, wo die charakteristische Funktion $\Phi_b(\mathbf{x}, \sigma_1, \sigma_2)$ ein Minimum annimmt.

$$\min_{\mathbf{x}_b} \Phi_b = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

In gleicher Weise können charakteristische Funktionen für elliptische oder dreieckige Löcher hergeleitet werden. Für komplexere Optimierungsaufgaben ist es sehr aufwendig oder nicht möglich, ein analytisches Lochpositionierungskriterium herzuleiten. Statt dessen kann die Position des “bubbles” in einem separaten Formoptimierungsschritt ermittelt werden, wobei lediglich die Koordinaten des “bubbles” die Optimierungsvariablen darstellen.

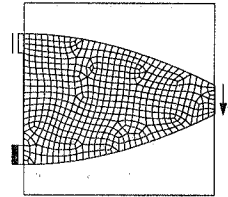
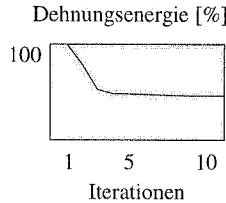
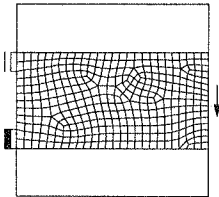
Die Vorgehensweise der “bubble”-Methode wird an einem Beispiel zur Maximierung der Steifigkeit eines Scheibentragwerks veranschaulicht (Bild A.2). Die Masse im Entwurfsraum ist konstant. Eine vertikale Last greift in der Mitte der rechten Kante an. Die untere linke Ecke des Tragwerks ist fest eingespannt, die obere linke Ecke horizontal gelagert. Die Auflager werden im Optimierungsprozeß mit den entsprechenden Eckpunkten bewegt. Das Tragwerk ist zur horizontalen Mittelachse symmetrisch. Für den ersten Formoptimierungsschritt werden die variablen Kanten, d.h. der obere und untere Rand des Startentwurfs, mit jeweils einem kubischen Bézier-Spline diskretisiert. Das Optimierungsproblem wird mit dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen SQP-Verfahren gelöst. Der Diskretisierungsfehler der Energienorm und die Sensitivität des Fehlers werden nach dem in Abschnitt 6.1 erläuterten Verfahren kontrolliert. Der Verlauf der Dehnungsenergie ist bezogen auf die des Startentwurfs dargestellt. Nachdem die optimale Form für die aktuelle Topologie gefunden ist, wird ein “bubble” im Bereich der Lasteinleitung eingebracht. Die Position des “bubbles” nach dem Lochpositionierungskriterium Φ_b entspricht nahezu dem Ort mit der minimalen Energiedichte. Der räumliche Gradient der Energiedichte ist jedoch entlang der horizontalen Symmetrieachse sehr gering, so daß das separate Optimierungsproblem vorzeitig konvergiert, wenn die Position des “bubbles”, wie im

vorliegenden Fall, numerisch ermittelt wird. Ein weiteres Problem der numerischen Lochpositionierung entsteht dadurch, daß die Bewegung des "bubbles" in bezug auf seine Abmessung sehr groß ist. Daher müssen eine Vielzahl von FE-Netzen im Optimierungsprozeß erzeugt werden (→ Abschnitt 6.1). In einem abschließenden Formoptimierungsschritt werden die äußeren Konturen und die Form des "bubbles", das mit zwei kubischen Bézier-Splines diskretisiert ist, optimiert.

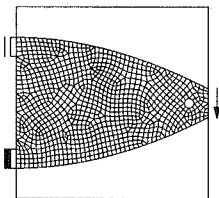


Zielfunktion: Steifigkeit
 Nebenbedingung: Masse $\bar{m} = 50\%$
 Kantenlänge: $a = 10.0$
 Auflager: $b = 1.0$
 Querdehnzahl: $\nu = 0.3$

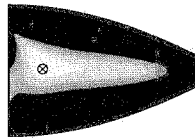
1. Formoptimierung



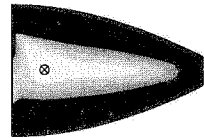
2. Positionierung eines "bubbles"



Positionierungskriterium



Energiedichtevertellung



⊗ Minimum

3. Formoptimierung

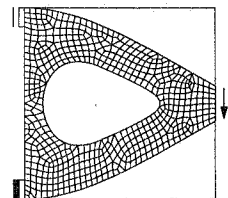
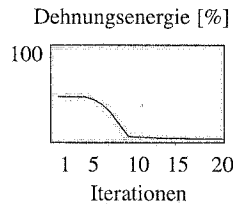
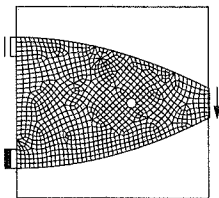


Bild A.2: Beispiel zur "bubble"-Methode

Die “bubble”-Methode stellt einen vor allem für anwendungsorientierte Optimierungsprobleme interessanten Ansatz dar, um mit wenigen Optimierungsvariablen eindeutige und glatte Tragwerke zu generieren. Der Optimierungsprozeß kann interaktiv kontrolliert werden. Zudem können die Position von Auflagern sowie Kanten- und Oberflächenlasten optimiert werden. Dennoch ist die “bubble”-Methode insbesondere von einem theoretischen Standpunkt aus umstritten, da das beliebig diskontinuierliche Topologieoptimierungsproblem keine geometrische Lösung besitzt (\rightarrow Abschnitt 3.3). Darüber hinaus wird ein Loch endlicher Größe in das Tragwerk eingebracht, um dessen Topologie zu verändern. Dies stellt jedoch im Rahmen einer Lagrange-Beschreibung einen diskontinuierlichen, irreversiblen Schritt im Optimierungsprozeß dar (\rightarrow Abschnitt 2.2). Das Saint-Venant-Prinzip wird herangezogen, um die Position eines infinitesimal kleinen “bubbles” aus einer lokalen Betrachtung des Spannungszustandes zu bestimmen. Das “bubble” erhält jedoch im anschließenden Formoptimierungsschritt eine endliche Größe und beeinflusst daher das gesamte Tragverhalten. Neben diesen theoretischen Problemen weist die “bubble”-Methode auch aus algorithmischer Sicht einige Schwachpunkte auf. So ist die numerische Ermittlung der Position eines “bubbles” sehr aufwendig und erfordert ein äußerst robustes Formoptimierungsverfahren. Zudem stagniert die Suche nach der optimalen Position des “bubbles” oftmals vorzeitig, da die Gradienten der Lagrange-Funktion bezüglich der Koordinaten des “bubbles” in großen Bereichen des Tragwerks klein sind. Die Größe des “bubbles” nimmt im anschließenden Formoptimierungsschritt erheblich zu. Derartige Optimierungsprozesse können nur dann kontrolliert werden, wenn die Formenvielfalt und die Anzahl der Löcher im Tragwerk erheblich eingeschränkt werden.

Die Kombination von adaptiver Topologie- und Formoptimierung stellt einen Ansatz dar, um die Vorteile der “bubble”-Methode und der materiellen Topologieoptimierung miteinander zu verbinden (\rightarrow Abschnitt 6.2). Im Gegensatz zur “bubble”-Methode werden Löcher, die bereits eine nahezu optimale Größe und Form besitzen, mit der adaptiven, materiellen Topologieoptimierung in das Tragwerk eingebracht. Die Form des Tragwerks wird im Detail mittels Formoptimierung bestimmt, wobei die Formänderungen im Optimierungsprozeß weitaus geringer sind, als dies bei der “bubble”-Methode der Fall ist.

A2 Michell-Strukturen

Die Arbeiten Michells sind für die Topologieoptimierung in zweierlei Hinsicht von großer Bedeutung. Zum einen wirkten sich die Ergebnisse Michells erheblich auf die Entwicklung der gesamten Strukturoptimierung aus. Zum anderen stellen Michell-Strukturen unter den in der “Layout”-Optimierung getroffenen Annahmen Referenzlösungen für Tragwerke mit minimalem Gewicht und maximaler Steifigkeit bei maximal zulässigen Spannungen für einen Lastfall und linear elastischem Strukturverhalten dar. Im folgenden Abschnitt werden die wesentlichen Eigenschaften von Michell-Strukturen untersucht und dabei die typische Vorgehensweise der “Layout”-Optimierung erläutert. Die Herleitung der von Michell [174]

1904 formulierten Bedingungen für ein Tragwerk mit minimalem Gewicht bei maximal zulässigen Spannungen orientiert sich an den Arbeiten von Cox [66] und Hemp [119].

Die Entwurfstheorie von Michell beruht auf der Vorstellung eines kontinuierlich mit Stäben belegten, zweidimensionalen Entwurfsraums. Im folgenden wird zunächst von einem ebenen Fachwerk mit einer endlichen Anzahl von Stäben n_t und Knoten n_k ausgegangen und anschließend der Grenzfall $n_t, n_k \rightarrow \infty$ betrachtet. Es sind die Stäbe in der Grundstruktur zu bestimmen, die das Tragwerk mit minimalem Gewicht bilden.

$$\min_{A_i} \sum_{i=1}^{n_t} \rho A_i a_i \quad ; \quad A_i \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

Die Querschnittsfläche der Stäbe A_i bilden die Optimierungsvariablen. Die Dichte ρ ist für alle Stäbe gleich. Die Länge der Stäbe wird mit a_i bezeichnet. Die Nebenbedingungen sind

$$\text{Maximale Zugbeanspruchung:} \quad T_i - \sigma_z A_i \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Maximale Druckbeanspruchung:} \quad -T_i - \sigma_d A_i \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Knotengleichgewicht:} \quad P_j - \sum_{i=1}^{n_t} R_{ij} T_i = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 2n_k \quad (\text{A.6})$$

Die Stabkräfte werden mit T_i bezeichnet. Alle Stäbe besitzen dieselben maximal zulässigen Zug- und Druckspannungen $\sigma_z, \sigma_d > 0$. Die äußeren Knotenkräfte in Richtung der Koordinatenachsen sind mit P_j , die Matrix der Richtungskosinus mit R_{ij} bezeichnet. Die Ungleichheitsnebenbedingungen (A.4), (A.5) werden durch die Einführung von Schlupfvariablen T'_i, T''_i eliminiert.

$$T_i + 2T''_i = \sigma_z A_i \quad ; \quad T''_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.7})$$

$$-T_i + 2T'_i = \sigma_d A_i \quad ; \quad T'_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.8})$$

Hieraus kann ein lineares Programm mit $2n_t$ Schlupfvariablen T'_i, T''_i als Optimierungsvariablen und $2n_k$ Gleichheitsnebenbedingungen entwickelt werden. Mit $\sigma = (\sigma_z + \sigma_d)/2$ folgt:

$$\min_{T'_i, T''_i} \sum_{i=1}^{n_t} (T'_i + T''_i) \rho a_i / \sigma \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma P_j - \sum_{i=1}^{n_t} R_{ij} (\sigma_z T'_i - \sigma_d T''_i) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 2n_k \quad (\text{A.10})$$

Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$L(T'_i, T''_i, \eta_j) = \sum_{i=1}^{n_t} (T'_i + T''_i) \rho a_i / \sigma \quad (\text{A.11})$$

$$+ \sum_{j=1}^{2n_k} \eta_j \left[\sigma P_j - \sum_{i=1}^{n_t} R_{ij} (\sigma_z T_i' - \sigma_d T_i'') \right] ; \quad \eta_j \geq 0$$

In diesem Fall werden die Optimalitätskriterien aus dem dualen Problem mit $2n_k$ Optimierungsvariablen u_j und $2n_t$ Ungleichheitsnebenbedingungen hergeleitet.

$$\max_{u_j} \sum_{j=1}^{2n_k} P_j u_j / (\bar{\varepsilon} \sigma) \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{j=1}^{2n_k} R_{ij} u_j - (\rho a_i \bar{\varepsilon} \sigma) / \sigma_z \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.13})$$

$$- \sum_{j=1}^{2n_k} R_{ij} u_j - (\rho a_i \bar{\varepsilon} \sigma) / \sigma_d \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.14})$$

$$\eta_j = u_j / (\bar{\varepsilon} \sigma^2) \quad ; \quad u_j, \bar{\varepsilon} \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 2n_k \quad (\text{A.15})$$

Der Skalierungsfaktor $\bar{\varepsilon}$ ist für alle Knoten und Stäbe gleich. In der Literatur wird u_j häufig als "virtuelle Verschiebung der adjungierten Struktur" bezeichnet. Diese Bezeichnung leitet sich aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Form

$$- \delta W^{(a)} = \sum_{j=1}^{2n} P_j u_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{2n} R_{ij} u_j \quad T_i = \delta W^{(i)} \quad (\text{A.16})$$

ab, wobei die virtuellen Verschiebungen u_j kinematisch zulässig sind (Rozvany et al. [221]). Das duale Problem wird entsprechend dieser Interpretation als Maximierung der virtuellen inneren Arbeit oder Minimierung der virtuellen äußeren Arbeit verstanden. Die zugehörigen virtuellen Dehnungen der Stäbe

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n_k} R_{ij} u_j / a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.17})$$

werden durch die Ungleichheitsnebenbedingungen (A.13), (A.14) begrenzt.

$$\varepsilon_i - (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_z \leq 0 \quad ; \quad - \varepsilon_i - (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_d \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_t \quad (\text{A.18})$$

Es können drei Fälle im Optimum unterschieden werden, die sich aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen des dualen Problems ergeben.

$$1. \quad \varepsilon_i = (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_z \quad ; \quad T_i' > 0 ; T_i'' = 0 \quad ; \quad A_i = T_i / \sigma_z \quad (\text{A.19})$$

$$2. \quad \varepsilon_i = - (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_d \quad ; \quad T_i' = 0 ; T_i'' > 0 \quad ; \quad A_i = - T_i / \sigma_d \quad (\text{A.20})$$

$$3. \quad - (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_d < \varepsilon_i < (\sigma \bar{\varepsilon}) / \sigma_z \quad ; \quad T_i' = 0 ; T_i'' = 0 \quad ; \quad A_i = T_i = 0 \quad (\text{A.21})$$

Der Fall $T_i' > 0$ und $T_i'' > 0$ ist durch die Nebenbedingungen (A.18) ausgeschlossen. Die Kuhn–Tucker–Bedingungen des dualen Problems bestimmen lediglich eine Menge von Stäben mit maximaler virtueller Dehnungen. Anschließend sind diejenigen Stäbe mittels der statischen Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen, die das optimale Tragwerk bilden. Diese Vorgehensweise wird anschaulich bei Wiedemann [274] anhand von zahlreichen Beispielen beschrieben.

Die Fachwerke, die den Bedingungen (A.19)–(A.21) genügen, werden als Michell–Strukturen bezeichnet. Die Stabquerschnitte des optimalen Tragwerks sind hinsichtlich der maximal zulässigen Spannungen ausdimensioniert. Die Forderung nach Druck- und Zugstäben mit konstanten virtuellen Dehnungen führt auf statisch bestimmte oder kinematische Fachwerke. Das minimale Gewicht wird durch die maximale virtuelle innere Arbeit $\delta W^{(i)*}$ bzw. minimale virtuelle äußere Arbeit $\delta W^{(a)*}$ mit (A.18)–(A.20) bestimmt.

$$\delta W^{(i)*} = - \delta W^{(a)*} = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i T_i l_i = \bar{\varepsilon} \sigma \sum_{i=1}^m A_i l_i = \bar{\varepsilon} \sigma V^* \quad (\text{A.22})$$

Die "tatsächliche" innere Energie Π^I ist in einem ausdimensionierten Stabwerk dem Volumen proportional. Daraus folgt, daß bei konstantem Elastizitätsmodul das Fachwerk mit minimalem Gewicht gleichzeitig das Fachwerk maximaler Steifigkeit ist. Diese Betrachtungen schließen den bereits von Maxwell [171] 1869 untersuchten Fall ein, daß jedes statisch bestimmt gelagerte Stabwerk, das die äußeren Kräfte nur unter maximal zulässigen Zug- oder Druckspannungen abträgt, dasselbe (minimale) Gewicht bzw. dieselbe (maximale) Steifigkeit besitzt.

Die duale Formulierung und ihre Verallgemeinerung auf kontinuierliche Tragwerke bilden den Kern der Arbeiten von Michell. Das Michellsche Kontinuum stellt ein beliebig feines Fachwerk im Entwurfsraum Ω_s dar. Jeder Punkt im Raum kann ein Knoten oder der Teil eines Stabsegments sein. Die äußeren Kräfte werden ausschließlich über einaxiale Spannungen in den Stäben abgetragen. Der Einfluß der Knoten wird vernachlässigt. Diese Betrachtungsweise führt auf ein Variationsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingungen.

$$L(\mathbf{u}, \gamma) = \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^T \mathbf{P} \, d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \gamma^T \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\sigma_z} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) d\Omega_s - \int_{\Omega_s} \gamma'^T \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\sigma}{\sigma_d} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) d\Omega_s \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{u} \in V(\Omega_s) \subseteq H^1(\Omega_s) \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \delta_{ij} \bar{\varepsilon}$$

Die Beschränkung des Funktionenraums von \mathbf{u} auf einen Unterraum von H^1 ist für die Definition der Verschiebungs–Dehnungsbeziehung im Kontinuum notwendig. Wie in Abschnitt 3.2 ausgeführt wird, ist jedoch die Existenz einer Lösung für das Variationsproblem (A.23) nicht garantiert. Sind die Kuhn–Tucker–Bedingungen (A.19)–(A.21) für ein Tragwerk mit minimalem Gewicht notwendig und hinreichend, so sind die Euler–Gleichungen von (A.23) hierfür nur hinreichend.

Das optimale Tragwerk wird analog zu der für das Stabwerk beschriebenen Vorgehensweise bestimmt. Im kontinuierlichen Fall können jedoch die Trajektorien mit maximaler virtueller Dehnung in gewissen Bereichen des Entwurfsraums gekrümmt sein. Denkt man sich die Trajektorien im optimalen Stabwerk als Stäbe infinitesimaler Länge materialisiert, so bilden diese Stäbe ein Kontinuum im Michellschen Sinne. Diese Aussage ist jedoch nur korrekt, wenn der Volumenanteil des Materials in den kontinuierlichen Bereichen gegen Null strebt. Folglich erfassen Michell-Strukturen nur den Grenzfall von Tragwerken mit minimalem Gewicht.

Je nach Größe der Hauptdehnungen ϵ_1 , ϵ_2 können drei verschiedene Konstellationen für die Anordnung der Stäbe unterschieden werden.

1. $\epsilon_1 = \bar{\epsilon}\sigma_z$, $-\bar{\epsilon}\sigma_d < \epsilon_2 < \bar{\epsilon}\sigma_z$ bzw. $\epsilon_2 = -\bar{\epsilon}\sigma_d$, $-\bar{\epsilon}\sigma_d < \epsilon_1 < \bar{\epsilon}\sigma_z$;
ein Zug- bzw. Druckstab in Richtung der entsprechenden Hauptdehnung.
2. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}\sigma_z$ bzw. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\bar{\epsilon}\sigma_d$;
zwei Zug- bzw. Druckstäbe. Die Ausrichtung der Stäbe ist beliebig.
3. $\epsilon_1 = \bar{\epsilon}\sigma_z$, $\epsilon_2 = -\bar{\epsilon}\sigma_d$;
Zug- und Druckstab sind zueinander orthogonal.

Die geometrischen Bedingungen für Punkt 3 führen zu sogenannten Hencky-Netzen, die ebenfalls zur Beschreibung von Gleitlinien bei ideal plastischem Fließen eingesetzt werden. Typische Vertreter von Hencky-Netzen sind Rechteck-Netze, gegenläufige, logarithmische Spiralen und Zykloide sowie konzentrische Kreise, die von Geraden durch den Kreismittelpunkt geschnitten werden. In Bild A.3 sind einige mit Hilfe von Hencky-Netzen gewonnene Näherungslösungen für Michell-Strukturen dargestellt. Auf der Basis der in den Punkten 1–3 formulierten geometrischen Bedingungen können exakte oder angenäherte Michell-Strukturen konstruiert werden. Das wesentliche Problem dieser Vorgehensweise besteht jedoch darin, die für die jeweilige Struktur geeigneten Auflager- und Lastbedingungen zu finden. Die kontinuierliche, duale Formulierung der Entwurfsaufgabe liefert zwar hinreichende Bedingungen für das optimale Tragwerk, jedoch keine Verfahren, für vorgegebene Auflager- und Lastbedingungen ein optimales Tragwerk zu generieren.

Die Arbeiten von Michell gerieten zunächst schnell in Vergessenheit und wurden erst Ende der fünfziger Jahre von Foulkes [94], Cox [66] und Hemp [119] wieder aufgegriffen. Zum einen kann aus den Michellschen Optimalitätsbedingungen keine Konstruktionsmethode abge-

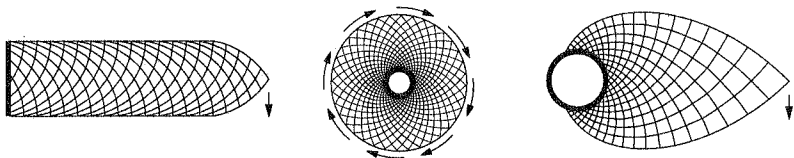


Bild A.3: Michell-Strukturen

Zielfunktion: Gewicht ; Nebenbedingung: Maximale Spannung

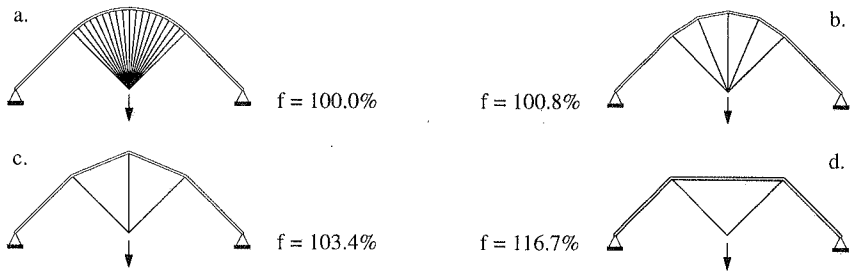


Bild A.4: “Analytisch–exakte” Michell–Struktur – Näherungslösungen

leitet werden. Zum anderen zeigen Michells Überlegungen, daß optimale Tragwerke bereichsweise aus einem unendlich feinen Netz gekrümmter Stäbe bestehen. Selbst auf einem groben Netz basierende Näherungslösungen können nicht oder nur mit einem sehr großen Aufwand hergestellt werden. Daher wird heute die auf der Grundstrukturtechnik aufbauende “approximierte–diskretisierte” Vorgehensweise für die Lösung realer Entwurfsprobleme bevorzugt. Wie das Beispiel in Bild A.4 zeigt, ist das Gewicht der Näherungslösungen (Bild A.4b–d) im Vergleich zur quasi–kontinuierlichen Michell–Struktur nach Hemp [119] (Bild A.4a) zumeist nur geringfügig höher.

Die “approximierten–diskretisierten“ Verfahren basieren entweder auf der primalen Formulierung nach (A.3)–(A.6) bzw. (A.9)–(A.10) (Dorn et al. [80]) oder auf der dualen Formulierung nach (A.12)–(A.14), wobei die statische Kompatibilität direkt berücksichtigt wird (Bendsøe, Ben–Tal [31]). Mit der daraus resultierenden Parameterformulierung können nicht nur die Michellsche Aufgabenstellung näherungsweise gelöst (Hemp [119]), sondern beispielsweise auch optimale Stabtragwerke für mehrere Lastfällen (Dems, Gutowski [72]) oder unter Berücksichtigung von Kontakt (Klarbring et al. [139]), materiell nichtlinearem Verhalten (Bendsøe, Sokolowski [25]) und lokalem Beulversagen (Bletzinger [39]) ermittelt werden. Für die Lösung des Parameteroptimierungsproblems werden zumeist OC–Verfahren (Rozvany [218]) oder lineare Optimierungsalgorithmen (Dorn et al. [80]) eingesetzt. Ebenso haben sich lokale Approximationsmethoden der nichtlinearen Optimierung bewährt (Beckers, Fleury [22]). Da die Durchmesser von Stäben in der Praxis zumeist genormt sind, werden anwendungsorientierte Topologieoptimierungsaufgaben oft als ganzzahlige Parameteroptimierungsprobleme formuliert. Für diese Fälle sind unter anderem Evolutionsstrategien (Thierauf, Cai [255]), genetische Algorithmen (Hajela [111]) oder “simulated annealing” Verfahren (Topping et al. [258]) geeignet.

Die wesentlichen Nachteile der diskretisierten Vorgehensweise sind die starke Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der gewählten Grundstruktur sowie das Auftreten von lokalen

oder singulären Minima (Kirsch [137]). Singuläre Minima kommen insbesondere bei Optimierungsproblemen mit Spannungsnebenbedingungen oder bei Berücksichtigung von lokalem Beulversagen vor. Dies sind typische Defekte, die bei der numerischen Lösung von diskretisierten Topologieoptimierungsproblemen auftreten (→ Kapitel 4).

A3 “Heuristische” Verfahren in der materiellen Topologieoptimierung

Ein wesentlicher Anteil der Aufmerksamkeit, den die materielle Topologieoptimierung in den letzten Jahren bei Anwendern aus der Praxis und in populärwissenschaftlichen Medien (u.a. Deussen [74]) hervorrief, ist Verfahren zuzuschreiben, die ihre Motivation aus biologischen Vorgängen, wie dem Wachstum von Knochen und Pflanzen, beziehen. Diese Verfahren können zwar im Sinn der Strukturoptimierung als heuristisch bezeichnet werden. Dies wird jedoch den zum Teil theoretisch fundierten, biologischen Betrachtungen, auf denen diese Verfahren beruhen, nicht gerecht. Darüber hinaus haben sich einfache Ingenieurverfahren zur Topologieoptimierung bewährt, die sich leicht in kommerzielle Programmsysteme implementieren lassen. In diesem Kapitel werden die bekanntesten “heuristischen” Verfahren kurz vorgestellt und Parallelen zu den mathematisch orientierten Ansätzen aufgezeigt.

Die prinzipielle Vorgehensweise der “heuristischen” Verfahren ähnelt dem bereits vorgestellten Verfahren der mathematisch orientierten Ansätze (→ Kapitel 3). Der Entwurfsraum, die Lasten sowie die verfügbaren Auflager werden vorgegeben. Die “optimale” Materialverteilung, die entweder anhand der Dicke, der Dichte oder des Elastizitätsmoduls der Finiten Elemente beschrieben ist, wird mit zumeist einfachen Rekursionsformeln bestimmt. Es können diskrete und kontinuierliche Verfahren¹¹ unterschieden werden.

Bei der diskreten Vorgehensweise werden Finite Elemente zum Ende oder während des Optimierungsprozesses aus dem FE-Modell entfernt. Rossow und Taylor [216] schlagen vor, die Dickenverteilung von Scheiben für maximale Steifigkeit bei vorgegebenem Volumen zu optimieren und Bereiche mit Dicken unterhalb eines Grenzwertes im Endergebnis zu vernachlässigen. Das abschließende Entfernen von größeren Bereichen führt im allgemeinen zu einem erheblich veränderten Tragverhalten, weshalb sich diese Methode nie durchsetzen konnte. Atrek [5] wählt die Elemente mit geringer Dicke bzw. Volumen bereits während des Optimierungsprozesses sukzessive aus und eliminiert diese aus dem FE Modell, um das Gewicht von 2- und 3-dimensionalen Strukturen mit Verschiebungs- und Spannungsnebenbedingungen zu minimieren. Atrek löst hierzu in jedem Iterationsschritt ein duales, lineares Unterproblem und bestimmt daraus die Elemente mit minimaler Dicke bzw. minimalen Volumen. Weck und Kölsch [272] verfolgen eine ähnliche Strategie. Die Dicken der Finiten Elemente von dünnwandigen Tragwerken werden kontinuierlich variiert und Elemente, deren Dicke einen Grenz-

11. In der Literatur werden die diskreten “heuristischen” Verfahren oftmals als “hard-kill”, die kontinuierlichen als “soft-kill” Methoden bezeichnet (u.a. Sienz [232]).

wert unterschreitet, im weiteren Optimierungsprozeß vernachlässigt. Beide Verfahren führen auf diskontinuierliche Optimierungsprozesse, die maßgeblich von der Auswahl der zu vernachlässigenden Elemente abhängen. Xie und Steven [277] entfernen im "Optimierungsprozeß" Elemente aus dem FE-Modell, deren mittlere von Mises Spannung um einen bestimmten Faktor α_σ kleiner ist als die maximale Vergleichsspannung im Entwurfsraum. Das Verfahren konvergiert im Sinne eines "Fully Stressed Designs", wenn sich die von Mises Spannungen aller verbliebenen Elemente innerhalb eines Intervalls der Breite α_σ befinden. Eine ähnliche Vorgehensweise wird u.a. von Sienz [232] und van Keulen, Hinton [264] angewandt. Xie und Steven [278] erweitern diese Vorgehensweise auf Schwingungsprobleme sowie auf materiell und geometrisch nichtlineares Strukturverhalten (Querin, Steven, Xie [203]). Eigene Untersuchungen an statischen, linear elastischen Problemen ergaben, daß die Ergebnisse und die Konvergenz dieses Verfahrens erheblich von den Parametern des Algorithmus, wie der Breite des Intervalls α_σ oder der maximalen Anzahl der in einem Iterationsschritt zu entfernenden Elemente, abhängt. Dies kann darauf zurückgeführt werden, daß die Elimination von Elementen zu einem diskontinuierlichen, irreversiblen Optimierungsprozeß führt.

Der diskreten "heuristischen" Vorgehensweise stehen kontinuierliche Verfahren gegenüber, die sich zumeist durch eine größere Robustheit und geringere Empfindlichkeit gegenüber internen Parametern auszeichnen. Die Mehrzahl der kontinuierlichen Verfahren wurde zunächst zur Simulation von Knochenwachstum entwickelt und erst später in der Strukturoptimierung eingesetzt. Reiter [211] gibt einen ausführlichen Überblick über die Entwicklung dieser Verfahren. Der Zusammenhang zwischen einer mechanischen Reizung und der Anlagerung von Knochenmaterial wurde bereits von Forst (1964) und Pauwels (1965) mathematisch beschrieben. Hieraus entwickelten Cowin und Hegedus [64] die Theorie der "adaptiven Elastizität", um die Veränderungen des Knochenmaterials infolge wechselnder mechanischer Belastungen zu beschreiben. Die Veränderungen des Knochenmaterials wird direkt über einen anisotropen Werkstofftensor beschrieben und der Gleichgewichtszustand ist über einen "optimalen" Dehnungstensor definiert (Cowin et al. [65]). Die Parallelen zur makroskopischen Formulierung des materiellen Topologieoptimierungsproblems nach Bendsoe [33] sind hierbei bemerkenswert (\rightarrow Abschnitt 3.5.3). Die Idee der Selbstadaption wird u.a. von Carter et al. [51], Huiskes et al. [127] und Reiter [211] aufgegriffen und verfeinert. Reiter [210] bestimmt die Dichte der Finiten Elemente für ein isotropes, poröses Knochenmaterial nach folgender Vorschrift:

$$\hat{\rho}_i^{(k+1)} = \hat{\rho}_i^{(k)} + \Delta \hat{\rho}_i^{(k)} \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta \hat{\rho}_i^{(k)} = \begin{cases} c_1 \left[\tilde{\Pi}_i^{(k)} - \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 - \bar{q}) \right] & \forall \tilde{\Pi}_i^{(k)} < \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 - \bar{q}) \\ 0 & \forall \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 - \bar{q}) \geq \tilde{\Pi}_i^{(k)} \geq \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 + \bar{q}) \\ c_2 \left[\tilde{\Pi}_i^{(k)} - \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 + \bar{q}) \right] & \forall \bar{\Pi}_{\max} > \tilde{\Pi}_i^{(k)} > \bar{\Pi}_i^{(k)} (1 + \bar{q}) \end{cases}$$

Der Index (k) kennzeichnet den aktuellen Iterationsschritt. Die effektive Energie $\tilde{\Pi}_i^{(k)}$ wird aus der Summe aller Lastfälle n_L berechnet und auf die relative Dichte bezogen, um die Beanspruchung im homogenen Material zu berücksichtigen.

$$\tilde{\Pi}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_L} \frac{\rho_0}{\hat{\rho}_i^{(k)}} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_j d\Omega_i \quad (\text{A.25})$$

Die Dichte $\rho_i^{(k)}$ bleibt konstant, wenn die effektive Energie innerhalb eines Intervalls $2\bar{q}$ um die Sollenergie $\bar{\Pi}_i^{(k)}$ liegt. Die Ausweitung der Ruhelage $\bar{q} > 0$ bewirkt eine Dämpfung von möglichen Oszillationen im Optimierungsprozeß. Die Sollenergie kennzeichnet die ertragbare Belastung des Materials und hängt linear von der aktuellen Dichte ab. Der Knochen bildet sich zurück, wenn die Belastbarkeit des Materials nicht ausgenutzt ist. Andernfalls wird Material angelagert und die Dichte des Knochens erhöht. Die Konstanten c_1, c_2 bestimmen das Konvergenzverhalten des Algorithmus. Das Verhältnis zwischen der Dichte und dem Elastizitätsmodul des Knochenmaterials wird in Übereinstimmung mit experimentellen Untersuchungen durch die Exponentialgleichung für das makroskopische, isotrope Werkstoffmodell (3.41) mit $2 \leq \beta \leq 3$ beschrieben.

Die Iterationsvorschrift (A.24) kann für $\bar{q} = 0, c_1 = c_2$ näherungsweise auf ein OC-Verfahren mit linearer Rekursionsformel (2.16) zur Minimierung der Masse bei minimal zulässiger Steifigkeit zurückgeführt werden. Die Ableitung der Masse nach der Dichte ist für das isotrope Werkstoffmodell (3.41) konstant. Der Gradient der Dehnungsenergie (4.3) bezüglich der Dichte ist selbstadjungiert und kann direkt aus der Dehnungsenergie berechnet werden.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i^{(k+1)} &= \hat{\rho}_i^{(k)} \left[1 + q \left[\frac{\rho_0 |\Omega_i|}{\beta \eta^{(k)} \bar{\Pi}_i^{(k)}} - 1 \right] \right] \quad ; \quad q < 0 \quad (\text{A.26}) \\ &= \hat{\rho}_i^{(k)} + \bar{q} \left(\bar{\Pi}_i^{(k)} - \bar{\Pi}_i^{(k)} \right) \quad ; \quad \bar{\Pi}_i^{(k)} = \frac{\rho_0 |\Omega_i|}{\beta \eta^{(k)}} \quad ; \quad \bar{q} = -q \frac{\hat{\rho}_i^{(k)}}{\bar{\Pi}_i^{(k)}} \end{aligned}$$

Der Lagrange-Multiplikator und damit die maximal zulässige Dehnungsenergie werden in der Iterationsvorschrift (A.24) durch die Sollenergie $\bar{\Pi}_i^{(k)}$ implizit vorgeschrieben.

Der Algorithmus von Mattheck [159], der über die Wachstumsprozesse von Bäumen motiviert wird, stellt eine Vereinfachung der Iterationsvorschriften dar, die für die Simulation von Knochenwachstum entwickelt wurden. Mattheck beschreibt das Tragwerk über die Verteilung des Elastizitätsmoduls im Entwurfsraum. Im Sinne eines "Fully Stressed Designs" werden der Elastizitätsmodul \hat{E}_i der Finiten Elemente dort verringert bzw. erhöht, falls die gemittelten von Mises Spannungen kleiner bzw. größer als eine Sollspannung $\bar{\sigma}_v$ sind.

$$\hat{E}_i^{(k+1)} = \hat{E}_i^{(k)} + \bar{q} \left(\sigma_{vi}^{(k)} - \bar{\sigma}_v \right) \quad (\text{A.27})$$

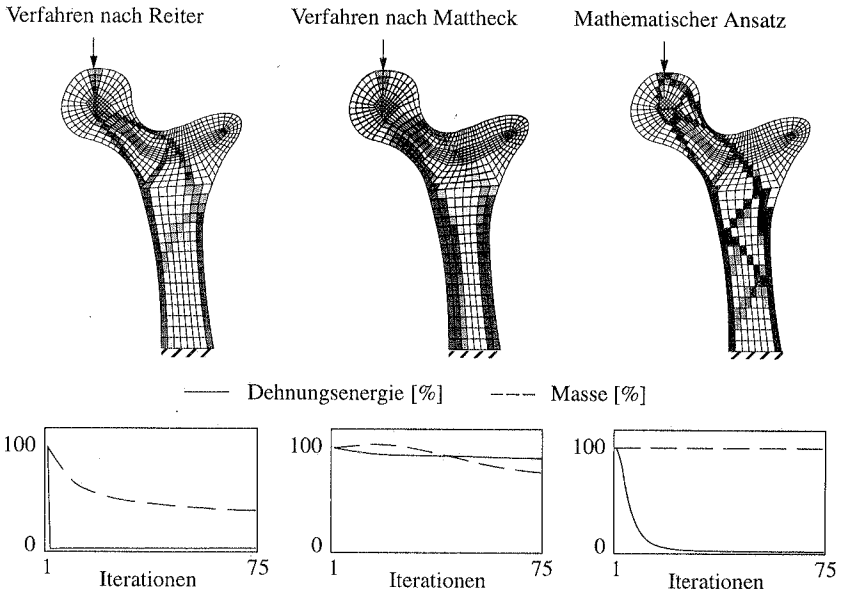


Bild A.5: Vergleich "heuristischer" und mathematischer Verfahren

Diese Vorgehensweise unterscheidet sich nur unerheblich von den Verfahren, bei denen die Materialverteilung anhand der Dehnungsenergiedichte bestimmt wird. Die von Mises Spannung ist ein Maß für die Dehnungsenergiedichte infolge einer Gestaltsänderung. Die Energieanteile aus dem hydrostatischen Spannungszustand, die im allgemeinen klein sind, werden nicht berücksichtigt. Ähnliche Verfahren, bei denen die Materialverteilung über die Elastizitätsmoduli der Finiten Elemente beschrieben und anhand der Dehnungsenergien "optimiert" wird, werden u.a. bei Allinger et al. [4] und Maute [161] vorgestellt.

Die Unterschiede zwischen den Verfahren nach Reiter und Mattheck werden abschließend an dem Beispiel in Bild A.5 veranschaulicht. Die Resultate werden mit dem Ergebnis des mathematisch orientierten Ansatzes für die Maximierung der Steifigkeit bei vorgegebener Masse ($\bar{m} = 20\%$) auf der Basis des makroskopischen, orthotropen Werkstoffmodells verglichen. Die Ergebnisse können dabei aufgrund der unterschiedlichen Parameter der jeweiligen Verfahren nur qualitativ gewertet werden. Aus dem Verlauf der Dehnungsenergie und der Masse über den "Optimierungsprozeß" hinweg wird die Wirkungsweise der Algorithmen deutlich. Die aufgetragenen Werte sind auf die entsprechenden Größen des Startentwurfs bezogen. Die Dehnungsenergie wird im Verfahren nach Reiter im ersten Iterationsschritt auf die maximal zulässige Schranke korrigiert und anschließend die Masse minimiert. Bei dem Verfahren nach Mattheck variieren sowohl die Masse wie auch die Energie. Die Masse im Optimum hängt maßgeblich vom Sollwert für die Vergleichsspannung ab. Die Masse im Entwurfsraum bleibt

entsprechend der Aufgabenstellung beim mathematisch orientierten Verfahren konstant, wobei die Dehnungsenergie abnimmt. Der numerische Aufwand ist bei allen Verfahren annähernd gleich groß. Es ist daher kein Grund ersichtlich, die "heuristischen" Methoden den mathematisch orientierten Ansätzen vorzuziehen, zumal deren Vorgehensweise nicht verallgemeinert und auf andere Aufgabenstellungen angewandt werden kann.

A4 Herleitung und Lösung der Homogenisierungsgleichungen

Die Bedeutung der Homogenisierung von mikrostrukturierten Materialien für die Topologieoptimierung wurde in Abschnitt 3.4 erläutert. In diesem Abschnitt werden die Homogenisierungsgleichungen für linear elastische Werkstoffe im ebenen Spannungszustand in Anlehnung an Sanchez-Palencia [224] hergeleitet. Für eine klare und eindeutige Darstellung werden die Gleichungen in einer Index-Schreibweise angegeben und die Ableitungen ausgeschrieben. Die numerische Berechnung des homogenisierten Materialtensors wird am Beispiel einer wabenförmigen Mikrostruktur erläutert und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen.

Die hochfrequent oszillierenden Zustandsvariablen ergeben sich aus der Lösung des elliptischen Randwertproblems.

$$\frac{d\sigma_{ij}^{\zeta}}{dx_j} + \bar{p}_i = 0 \quad \text{in } \Omega^{\zeta} \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{ij}^{\zeta} n_j + \bar{P}_i = 0 \quad \text{auf } \partial\Gamma_p^{\zeta} \quad (\text{A.29})$$

$$u_i^{\zeta} = \bar{u}_i \quad \text{auf } \partial\Gamma_u^{\zeta} \quad (\text{A.30})$$

$$\varepsilon_{ij}^{\zeta} = \frac{1}{2} \left[\frac{du_j^{\zeta}}{dx_i} + \frac{du_i^{\zeta}}{dx_j} \right] \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_{ij}^{\zeta} = C_{ijkl}^{\zeta} \varepsilon_{kl}^{\zeta} \quad (\text{A.32})$$

Die Lasten \bar{p}_i und \bar{P}_i sind rein makroskopische Größen. Aufgrund der Charakteristik der Strukturantwort ist es von Vorteil, die Verschiebungen als asymptotische Reihe in $\zeta_c \ll 1$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\zeta_c$ zu entwickeln.

$$u_i^{\zeta} = u_i^0(\mathbf{x}) + \zeta_c u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c^2 u_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (\text{A.33})$$

Das erste Reihenglied $u_i^0(\mathbf{x})$ stellt den rein makroskopischen Anteil dar. Die weiteren Reihenglieder sind in \mathbf{Y} periodische Funktionen. Für ein festes \mathbf{x} gilt:

$$u_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{I}_y \mathbf{Y}) \quad (\text{A.34})$$

Analog hierzu können die Dehnungen und Spannungen ebenfalls in ζ_c entwickelt werden.

$$\varepsilon_{ij}^{\zeta} = \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c \varepsilon_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c^2 \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (\text{A.35})$$

$$\sigma_{ij}^{\zeta} = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_c^2 \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (\text{A.36})$$

Die räumlichen Ableitungen der Zustandsgrößen, wie beispielsweise der Gradient der Verschiebungen, setzen sich aus zwei Anteilen zusammen.

$$\frac{d}{dx_j} \left(u_i^{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{x}/\zeta_c) \right) = \frac{\partial u_i^{\zeta}}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta_c} \frac{\partial u_i^{\zeta}}{\partial y_j} \quad (\text{A.37})$$

Die Dehnungen werden mit (A.37) aus den Verschiebungen berechnet. Durch einen Koeffizientenvergleich in ζ_c ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\zeta_c^0: \quad \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{ij,y}(\mathbf{u}^1) \quad (\text{A.38})$$

$$\zeta_c^1: \quad \varepsilon_{ij}^1 = \varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^1) + \varepsilon_{ij,y}(\mathbf{u}^2) \quad (\text{A.39})$$

$$\varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right] \quad (\text{A.40})$$

$$\varepsilon_{ij,y}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j^n}{\partial y_i} + \frac{\partial u_i^n}{\partial y_j} \right] \quad (\text{A.41})$$

Die asymptotisch erweiterten Zustandsgrößen werden in die Gleichgewichtsbedingung (A.28) eingesetzt.

$$\zeta_c^{-1}: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial y_j} = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\zeta_c^0: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_i} + p_i = 0 \quad \text{in } \Omega^{\zeta} \quad (\text{A.43})$$

Die erweiterte Dehnungs–Spannungsbeziehung lautet:

$$\sigma_{ij}^n = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^n \quad (\text{A.44})$$

Das Ziel des Homogenisierungsprozesses ist das Strukturverhalten durch rein makroskopische Zustandsgleichungen im Mittel zu beschreiben. Daher wird der Homogenisierungsoperator $(\cdot)^{\sim}$ eingeführt.

$$(\cdot)^{\sim} = \frac{1}{|\Omega_Y|} \int_{\Omega_Y} \cdot d\Omega_Y \quad (\text{A.45})$$

Der Homogenisierungsoperator wird auf die Gleichgewichtsbedingung (A.43) angewandt.

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} \right)^{\sim} + p_i = 0 \quad (\text{A.46})$$

Hierbei wurde bereits die Periodizität von σ_{ij}^1 berücksichtigt.

$$\left[\frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial y_j} \right]^{\sim} = \frac{1}{|\Omega_Y|} \int_{\Omega_Y} \frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial y_j} d\Omega_Y = \frac{1}{|\Omega_Y|} \int_{\Gamma_Y} \sigma_{ij}^1 n_j d\Gamma_Y = 0 \quad (\text{A.47})$$

Die Anwendung des Homogenisierungsoperators auf die Spannungs–Dehnungsbeziehung für σ_{ij}^0 führt mit den makroskopischen Dehnungen (A.38) auf:

$$\left(\sigma_{ij}^0 \right)^{\sim} = \left(C_{ijkl}^{\xi} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{kl,y}(\mathbf{u}^1) \right) \right)^{\sim} \quad (\text{A.48})$$

Um eine rein makroskopische Spannungs–Dehnungsbeziehung der Form:

$$\left(\sigma_{ij}^0 \right)^{\sim} = \left(C_{ijkl}^{\xi} \right)^{\sim} \left(\varepsilon_{kl}^0 \right)^{\sim} \quad (\text{A.49})$$

oder kurz:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.50})$$

zu erhalten, wird \mathbf{u}_i^1 in einen makroskopischen, in Y konstanten Anteil $\varepsilon_{jk,x}(\mathbf{u}^0)$, einen mikroskopischen, in Y periodisch oszillierenden Anteil $v_{ijk}(\mathbf{y})$ und einen konstanten Anteil c_i aufgespalten.

$$\mathbf{u}_i^1 = \varepsilon_{jk,x}(\mathbf{u}^0) v_{ijk}(\mathbf{y}) + c_i \quad ; \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_Y) \quad (\text{A.51})$$

Der mikroskopische Anteil v_{ijk} ist ein symmetrischer Tensor dritter Stufe und beschreibt die charakteristischen Verformungen der Mikrozele. Die zugehörigen Dehnungen $\psi_{ijkl}(\mathbf{v})$ berechnen sich aus:

$$\psi_{ijkl}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_{ijk}}{\partial y_l} + \frac{\partial v_{ijl}}{\partial y_k} \right] \quad (\text{A.52})$$

Mit diesem Ansatz erhält man aus (A.48) eine Spannungs–Dehnungsbeziehung nach (A.49).

$$\left(\sigma_{ij}^0 \right)^{\sim} = \left(C_{ijkl}^{\xi} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{mn,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{klmn} \right) \right)^{\sim} \quad (\text{A.53})$$

Die makroskopischen Dehnungen $\varepsilon_{mn,x}(\mathbf{u}^0)$ sind von \mathbf{y} unabhängig. Daher kann die rechte Seite in (A.53) durch Einführung von Kronecker–Symbolen δ_{km} , δ_{ln} wie folgt aufgespalten werden:

$$\underbrace{\left(\sigma_{ij}^0 \right)^{\sim}}_{\sigma_{ij}} = \underbrace{\left(C_{ijkl}^{\xi} \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \psi_{klmn} \right) \right)^{\sim}}_{C_{ijkl}} \underbrace{\left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) \right)^{\sim}}_{\varepsilon_{kl}} \quad (\text{A.54})$$

Für die Berechnung des homogenisierten Materialtensors C_{ijkl} müssen die charakteristischen Verformungen der Mikrozelle berechnet werden. Hierfür wird die Gleichgewichtsbedingung (A.42) mit den entsprechenden kinematischen Beziehungen (A.38) und dem Werkstoffgesetz (A.44) zu:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{kl,y}(\mathbf{u}^1) \right) \right] = 0 \quad (\text{A.55})$$

und mit dem Ansatz für die mikroskopischen Verschiebungen (A.51), (A.52) zu:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{mn,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{klmn} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}^{\zeta} \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \psi_{klmn} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.57})$$

umgeformt. Die charakteristischen Verformungen der Mikrozelle werden im allgemeinen numerisch mit einem FE-Ansatz bestimmt. Die schwache Form der Differentialgleichung lautet:

$$\int_{\Omega_Y} \delta v_{imn} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}^{\zeta} \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \psi_{klmn} \right) \right] d\Omega_Y = 0 \quad (\text{A.58})$$

wobei δv_{imn} eine genügend glatte, kinematisch zulässige und somit in Y periodische Testfunktion ist. Die partielle Integration führt unter Berücksichtigung der Periodizität von δv_{imn} auf:

$$\int_{\Omega_Y} \delta \psi_{ijmn} C_{ijkl}^{\zeta} \psi_{klmn} d\Omega_Y = - \int_{\Omega_Y} \delta \psi_{ijmn} C_{ijmn}^{\zeta} d\Omega_Y \quad (\text{A.59})$$

In dieser Form können die charakteristischen Verschiebungen mit lokalen Ansätzen diskretisiert und mit der aus der Finiten Elemente Methode bekannten Vorgehensweise berechnet werden (\rightarrow Abschnitt 2.3.2). Die Diskretisierung der Einheitszelle führt auf ein lineares Gleichungssystem.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_{mn} = \hat{\mathbf{P}}_{mn} \quad (\text{A.60})$$

Die charakteristischen Verschiebungen v_{imn} ergeben sich als Lösung von (A.60) für (mn) Lastfälle. Jeder Lastfall setzt sich aus Elementlasten zusammen, die als Anfangsdehnungen bzw. Vorspannungen interpretiert werden können.

$$\hat{\mathbf{P}}_{mn} = - \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{ij}^T C_{ijmn}^{\zeta} d\Omega_e \quad (\text{A.61})$$

Aufgrund der Symmetrie des Materialtensors in (ij) und (mn) sind im ebenen Spannungszustand maximal 3 unabhängige Lastfälle zu untersuchen:

Lastfall 1: $m = 1, n = 1$ – Normaldehnung in y_1 -Richtung

Lastfall 2: $m = 2, n = 2$ – Normaldehnung in y_2 -Richtung

Lastfall 3: $m = 1, n = 2$ – Querschub

Die Lagerung der Mikrozele ergibt sich aus der Periodizitätsbedingung für die charakteristischen Verschiebungen.

Ein abschließender Vergleich der Dehnungsenergie der Mikrozele und der lokalen Energie auf Makroebene führt auf ein physikalisch anschauliches Modell für das Homogenisierungsverfahren. Die innere Energie der Mikrozele berechnet sich aus (A.35).

$$\Pi_Y^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_Y} \left(\varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{ij,y}(\mathbf{u}^1) \right) \mathbf{C}_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{kl,y}(\mathbf{u}^1) \right) d\Omega_Y \quad (\text{A.62})$$

Für die mikroskopischen Verschiebungen \mathbf{u}^1 wird der Ansatz nach (A.51) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \Pi_Y^{(i)} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_Y} \left(\varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{mn,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{ijmn} \right) \mathbf{C}_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{op,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{klop} \right) d\Omega_Y \quad (\text{A.63}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_Y} \varepsilon_{ij,x}(\mathbf{u}^0) \mathbf{C}_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{op,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{klop} \right) d\Omega_Y \quad \rightarrow \int_{\Omega_Y} \varepsilon_{ij} \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega_Y \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_Y} \varepsilon_{mn,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{ijmn} \mathbf{C}_{ijkl}^{\zeta} \left(\varepsilon_{kl,x}(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{op,x}(\mathbf{u}^0) \psi_{klop} \right) d\Omega_Y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

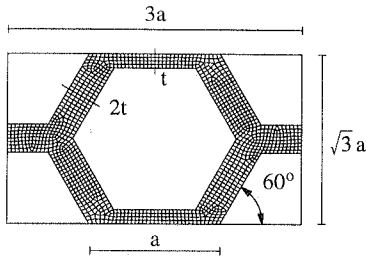
Der erste Anteil in (A.63) entspricht der lokalen, makroskopischen Energie des homogenisierten Materials. Der zweite mikroskopische Anteil ist Null, da die (virtuelle) Arbeit nach (A.59) verschwindet. Die Dehnungsenergien bzw. die virtuellen Arbeiten sind im homogenisierten Werkstoff und in der Mikrostruktur gleich (\rightarrow Hill's Bedingung [121]).

Numerisches Beispiel

Die numerische Berechnung der Komponenten des homogenisierten Materialtensors für beliebige Mikrostrukturen erfolgt in zwei Schritten :

1. Ermittlung der charakteristischen Verschiebungen durch eine FE-Analyse.
2. Berechnung der Komponenten \mathbf{C}_{ijkl} in einer Nachlaufrechnung.

Diese Vorgehensweise wird am Beispiel einer wabenförmigen Mikrostruktur dargestellt. Die Materialanordnung in der Mikrozele ist in Bild A.6 dargestellt. Da in diesem Abschnitt vorrangig der Homogenisierungsprozeß untersucht wird, kann abweichend von Abschnitt 3.4 anstelle des weichen Materials direkt $\mathbf{C}^- = \mathbf{0}$ gesetzt werden. Die Dicke der Mikrozele spielt für die Homogenisierung keine Rolle.



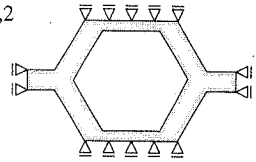
$$a = 1.0$$

$$t/a = \sqrt{3}/12$$

$$E\text{-Modul: } E = 0.91 \quad \text{Querdehnzahl: } \nu = 0.3$$

Lagerbedingungen:

Lastfälle 1,2



Lastfall 3

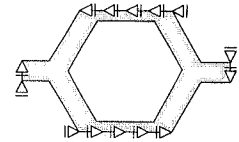


Bild A.6: Wabenförmige Mikrozele (Sigmund [233])

Die Lagerung der Mikrozele folgt aus der Periodizität der charakteristischen Verformungen. Wird die Mikrozele statisch bestimmt gelagert, kann die Periodizitätsbedingung über die Kopplung der Freiheitsgrade von Knoten auf gegenüberliegenden Kanten oder über die Einführung von zusätzlichen Nebenbedingungen erfüllt werden. Das erste Verfahren ist nur für strukturierte Netze möglich, bei denen jedem Knoten auf einer Kante der Mikrozele eindeutig ein Knoten auf der gegenüberliegenden Kante zugeordnet werden kann. Für das zweite Verfahren sind die Zustandsgleichungen über eine Lagrange-Multiplikatoren-Methode oder einen Strafterm-Ansatz zu erweitern. Eine weitaus einfachere Möglichkeit wird von Hassani [116] für symmetrisch aufgebaute Mikrozellen vorgeschlagen. Der symmetrische Aufbau führt für die Lastfälle 1,2 zu einer ebenfalls symmetrischen Belastung und für den Lastfall 3 zu einer antisymmetrischen Belastung. Folglich ist die Mikrozele je nach Lastfall symmetrisch oder antisymmetrisch zu lagern. Die charakteristischen Verformungen werden mit 1092, 8-knotigen, isoparametrischen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselementen berechnet (Bild A.6).

Die charakteristischen Verformungen sind in Bild A.7 dargestellt. Die hieraus ermittelten Koeffizienten des homogenisierten Materialtensors sind in Tabelle A.1 aufgeführt. Zum Vergleich sind den Resultaten, die mit dem in das Programmsystem CARAT implementierten Homogeni-

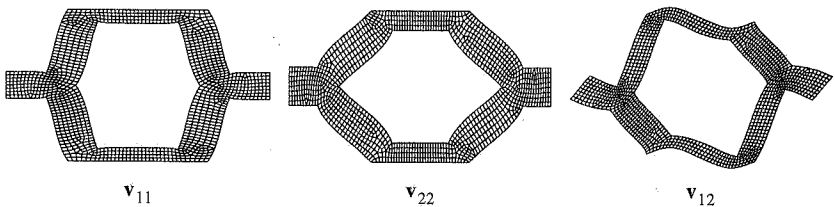


Bild A.7: Charakteristische Verformungen der Mikrozele

	C_{1111}	C_{2222}	C_{1122}	C_{1212}
CARAT	0.0966	0.0966	0.0720	0.0124
HOMOG	0.0966	0.0966	0.0720	0.0123
PREMAT2D	0.0968	0.0968	0.0720	0.0124

Tabelle A.1: Koeffizienten des homogenisierten Materialtensors

sierungsalgorithmus erzielt wurden, Ergebnisse aus der Literatur gegenüber gestellt. In Sigmund [233] wird die vorliegende Mikrozeile mit dem von Guedes, Kikuchi [103] entwickelten Homogenisierungsprogramm PREMAT2D unter Verwendung von 9072 4-knotigen Verschiebungselementen homogenisiert. Hassani [116] verwendet für die Berechnung des homogenisierten Materialtensors mit dem Programm HOMOG nur ein Viertel der Mikrozeile (752, 9-knotigen Verschiebungselemente). Diese reduzierte Analyse ist jedoch nur bedingt zulässig. Es ist zu beachten, daß für die Komponenten C_{1112} , C_{2212} , C_{1211} , C_{1222} in der Nachlaufrechnung falsche Werte ermittelt werden. Wird die gesamte Mikrozeile untersucht, so wird für diese Komponenten in guter Näherung $C_{1112} = C_{2212} = C_{1211} = C_{1222} = 0$ berechnet.

A5 OC-Algorithmus für Topologieoptimierungsprobleme

Nahezu sämtliche Aufgabenstellungen, die bislang in der materiellen Topologieoptimierung behandelt wurden, sind dadurch gekennzeichnet, daß der Lösungsraum nur durch eine einzige Gleichheitsnebenbedingung sowie durch obere und untere Restriktionen beschränkt ist. Für diese Optimierungsprobleme hat sich das in Abschnitt 2.1 erläuterte OC-Verfahren bewährt. In den Tabellen A.2–A.4 ist der entsprechende Algorithmus aufgeführt, der zur Lösung der in den Kapiteln 4 und 6 vorgestellten Beispiele eingesetzt wurde.

Das dem Algorithmus zugrunde liegende OC-Verfahren stimmt im wesentlichen mit dem überein, das erstmals von Bendsoe und Kikuchi [26] sowie in der Folge in zahlreichen weiteren Arbeiten in der materiellen Topologieoptimierung zur Maximierung der Steifigkeit bei konstanter Masse eingesetzt wurde. Die Gradienten der Nebenbedingung sind für alle in Abschnitt 3.5 vorgestellten Werkstoffmodelle stets positiv. Die Gradienten der Zielfunktion sind bei isotropen Werkstoffmodellen für diese Aufgabenstellung stets negativ. Bei orthotropen Werkstoffmodellen sind die Gradienten für eine Dichte $0 \ll \rho \leq \rho_0$ ebenfalls negativ, nur für hochporöses Material können positive Gradienten der Zielfunktion $0 < \nabla_s f \ll 1$ auftreten. Es ist daher nicht notwendig, explizit einen Shift-Faktor in der Rekursionsformel (2.14), (2.23) einzuführen. Die entsprechenden Gradienten $0 < \nabla_s f \ll 1$ können zu Null gesetzt werden, ohne daß durch diese Vereinfachung das Konvergenzverhalten des Algorithmus beeinträchtigt wird. Diese Vereinfachung ist jedoch für andere Aufgabenstellungen, wie der Maximierung der Steifigkeit mit Spannungsnebenbedingungen oder der Optimierung von Eigenfrequenzen, nicht mehr zulässig, da bei diesen Problemen Gradienten der Zielfunktion große positive Werte

annehmen. Das durch den Shift-Faktor erweiterte Verfahren hat sich zur Lösung dieser Aufgabenstellung bewährt.

Bei orthotropen Werkstoffmodellen tritt das Problem auf, daß die Ableitungen der Nebenbedingung zu Null werden können, wenn eine der richtungsbezogenen Dichten, beispielsweise der Indikator $\hat{\chi}_j$, gegen Eins strebt. In diesem Fall sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen nicht definiert. Für das Konvergenzverhalten des Algorithmus hat dies je nach Optimierungsproblem unterschiedliche Auswirkungen. Bei der Maximierung der Steifigkeit ohne Spannungsnebenbedingungen führt dies dazu, daß die konjugierte Dichte $\hat{\chi}_2$ auf den aktuellen oberen Restriktionswert gesetzt wird, da der Gradient der Zielfunktion negativ, der der Nebenbedingung positiv ($0 < \nabla_s h \rightarrow 0$) ist. Die Iteration von anderen Optimierungsvariablen wird hierdurch nicht beeinflußt. Bei Aufgabenstellungen, in denen der Gradient der Zielfunktion auch positiv werden kann und die Rekursionsformel (2.14), (2.23) über den Shift-Faktor modifiziert werden

0. Eingabe :

$\hat{\mathbf{s}}$	Aktuelle Optimierungsvariablen
$\hat{\mathbf{s}}_L, \hat{\mathbf{s}}_U$	Untere und obere Restriktionen
$\bar{\nabla}_s f$	Gradienten der Zielfunktion
$\bar{\nabla}_s h$	Gradienten der Gleichheitsnebenbedingung
q	Exponent in der Rekursionsformel (2.14)
$\bar{\alpha}$	Zulässige Schrittweite
\bar{h}_R	Residuum der Gleichheitsnebenbedingung
\bar{c}, \bar{c}	Korrekturfaktoren für $\bar{\nabla}_s h$ nach (4.24), (A.64)
$\bar{\epsilon}, \bar{n}_k$	Abbruchkriterien $\bar{\epsilon} = 10^{-6}, \bar{n}_k = 20$

1. Aktuelle Restriktionen (Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i):

$$\tilde{s}_L = \max \left(\hat{s}(1 - \bar{\alpha}), \hat{s}_L \right)$$

$$\tilde{s}_U = \min \left(\hat{s}(1 + \bar{\alpha}), \hat{s}_U \right)$$

2. Shift-Faktor für (2.23):

2.1 Setze: $\bar{\mu} = 0$

2.2 Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

2.2.1 Korrektur von $\nabla_s h$: $\nabla_s \bar{h} = \bar{c} \left[\bar{c} + (1 - \bar{c}) \nabla_s h / \bar{c} \right]$

2.2.2 Shift-Faktor: $\bar{\mu} = \max \left(\nabla_s f / \nabla_s \bar{h}, \bar{\mu} \right)$

Ende der Schleife.

Fortsetzung → Tabelle A.3

Tabelle A.2: OC-Algorithmus, Teil 1

3. Multiplikator \tilde{Y} in der Rekursionsvorschrift (2.22):

3.1 Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

3.1.1 Korrektur von $\nabla_s h$: $\nabla_s \tilde{h} = \bar{c} [\bar{c} + (1 - \bar{c}) \nabla_s h / \bar{c}]$

3.1.2 Multiplikator: $\tilde{Y}_i = \hat{s}_i [\tilde{\mu} - \nabla_s f / \nabla_s \tilde{h}]^q$

Ende der Schleife.

4. Intervall für den Lagrange-Multiplikator $\eta = \{ \tilde{\eta}_L \dots \tilde{\eta}_U \}$:

4.1 Setze: $\tilde{\eta}_U = -10^{10}$, $\tilde{\eta}_L = 10^{10}$

4.2 Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

$$\tilde{\eta}_L = \min \left(\tilde{\eta}_L , \tilde{s}_L / \tilde{Y}_i \right) \quad ; \quad \tilde{\eta}_U = \min \left(\tilde{\eta}_U , \tilde{s}_U / \tilde{Y}_i \right)$$

Ende der Schleife.

5. Überprüfen auf inkonsistente Nebenbedingung:

5.1 Setze: $\tilde{h}_U = 0$, $\tilde{h}_L = 0$

5.2 Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

5.2.1 Minimal: $\tilde{s} = \tilde{\eta}_L \tilde{Y}_i$; $\tilde{s} = \min (\tilde{s}_U , \max (\tilde{s}_L , \tilde{s}))$

$$\tilde{h}_L = \tilde{h}_L + \nabla_s h (\tilde{s} - \hat{s}_i)$$

5.2.1 Maximal: $\tilde{s} = \tilde{\eta}_U \tilde{Y}_i$; $\tilde{s} = \min (\tilde{s}_U , \max (\tilde{s}_L , \tilde{s}))$

$$\tilde{h}_U = \tilde{h}_U + \nabla_s h (\tilde{s} - \hat{s}_i)$$

Ende der Schleife.

5.3 Inkonsistenzbedingung:

$$\tilde{h}_L = \tilde{h}_L / \bar{h}_R \quad ; \quad \tilde{h}_U = \tilde{h}_U / \bar{h}_R \quad ; \quad \tilde{h} = \tilde{h}_U / \tilde{h}_L$$

wenn $\tilde{h} > 0$, dann

Schreibe "Inkonsistente Nebenbedingung"

5.3.1 wenn $\tilde{h} < 1$, dann setze $\eta^* = \tilde{\eta}_L$, gehe nach 7.

5.3.2 wenn $\tilde{h} > 1$, dann setze $\eta^* = \tilde{\eta}_U$, gehe nach 7.

6. Bestimme den Lagrange-Multiplikator:

6.1 Setze Iterationszähler: $k = 0$ und $\Delta h = 2\bar{\epsilon}$

6.2 Berechne, solange $\Delta h > \bar{\epsilon}$ und $k < \bar{n}_k$:

6.2.1 Setze: $k = k + 1$; $\tilde{h} = 0$

Fortsetzung → Tabelle A.4

Tabelle A.3: OC-Algorithmus – Teil 2

6.2.2 Aktueller Lagrange-Multiplikator: $\eta^{(k)} = \frac{1}{2}(\tilde{\eta}_L + \tilde{\eta}_U)$

6.2.3 Schleife über alle Optimierungsvariablen \hat{s}_i :
 $\tilde{s} = \eta^{(k)} \tilde{Y}_i$; $\tilde{s} = \min(\tilde{s}_U, \max(\tilde{s}_L, \tilde{s}))$
 $\tilde{h} = \tilde{h} + \nabla_s h(\tilde{s} - \hat{s}_i)$

Ende der Schleife.

6.2.4 Neues Residuum der Gleichheitsnebenbedingung:

$$\Delta \tilde{h} = \tilde{h} + \tilde{h}_R$$

6.2.2 Bisektion:

wenn $(\Delta h \tilde{h}_L) > 0$ und $(\Delta h \tilde{h}_U) < 0$

dann $\tilde{\eta}_L = \eta$; $\tilde{h}_L = \Delta h$

ansonsten $\tilde{\eta}_U = \eta$; $\tilde{h}_U = \Delta h$

6.3 Setze: $\eta^* = \eta^{(k)}$

7. Abschließende Berechnung der Optimierungsvariablen \hat{s}_i :

7.1 Schleife über alle Optimierungsvariablen

$\tilde{s} = \eta^* \tilde{Y}_i$; $\tilde{s} = \min(\tilde{s}_U, \max(\tilde{s}_L, \tilde{s}))$

$\hat{s}_i^* = \min(\tilde{s}_U, \max(\tilde{s}_L, \tilde{s}))$

Ende der Schleife.

8. Ende

Tabelle A.4: OC-Algorithmus, Teil 3

muß, führt dieser Defekt zu einer vorzeitigen Stagnation des Optimierungsprozesses (\rightarrow Abschnitt 4.2). Der Defekt wird durch eine Korrektur des Gradienten der Nebenbedingung (4.24) in der Rekursionsformel (2.14), (2.23) ausgeglichen. Im OC-Algorithmus sind der Minimalwert \bar{c} sowie die maximale Masse des Elements m_e vorzugeben.

$$\nabla_{\chi_i} \tilde{h} = \bar{c} \int_{\Omega_s} \rho_0 \, d\Omega_s + (1 - \bar{c}) \int_{\Omega_s} \rho_0 (1 - \hat{\chi}_j) \, d\Omega_s \quad ; \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 1 \quad (\text{A.64})$$

$$= \bar{c} m_e + (1 - \bar{c}) \nabla_s h \approx \bar{c} \bar{c} + (1 - \bar{c}) \nabla_s h$$

Es ist jedoch ausreichend, die Korrektur mit einer globalen, mittleren Masse \bar{c} durchzuführen. Weiterhin empfiehlt es sich, das Residuum der Gleichheitsnebenbedingung bei der Berechnung des Lagrange-Multiplikators zu berücksichtigen. Auf diese Weise wird vermieden, daß sich die Fehler infolge der Linearisierung der Nebenbedingung im Optimierungsprozeß summieren.

A6 Algorithmen zur optimalen Orientierung von orthotropen Werkstoffen

Eine möglichst genaue und dabei effiziente Ausrichtung von orthotropen Werkstoffen ist in der Topologieoptimierung von großer Bedeutung. Insbesondere Tragwerke aus schubweichen Werkstoffen, wie dem rank-2 Laminat, sind nur bei optimaler Ausrichtung tragfähig. Die Optimierung der Orientierung von orthotropen und anisotropen Werkstoffen ist auch über die Topologieoptimierung hinaus von Interesse, wie beispielsweise bei der Konstruktion von Bauteilen aus faserverstärkten Werkstoffen. In diesem Abschnitt werden Algorithmen vorgestellt, um die Orientierung von orthotropen Werkstoffen (\rightarrow Abschnitt 3.5) für Steifigkeits- und Schwingungsprobleme (4.1) bzw. (4.19) bei Scheibentragwerken unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands zu optimieren.

Im Gegensatz zu den Werkstoffparametern, aus denen die Dichte des porösen Materials bestimmt wird, wird die optimale Orientierung bei diesen Optimierungsaufgaben durch lokale, von den Lagrange-Multiplikatoren unabhängige Optimalitätsbedingungen definiert. Die entsprechenden Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten für die Maximierung der Steifigkeit (4.1) bei n_L Lastfällen:

$$\sum_{j=1}^{n_L} -w_j \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_j^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} \boldsymbol{\varepsilon}_j \, d\Omega = 0 \quad (\text{A.65})$$

und für die Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz (4.19) bei Berücksichtigung von n_θ Eigenformen:

$$\left[\sum_{j=1}^{n_\theta} - \left(e^{-p\theta_j} \right) \frac{\partial \theta_j}{\partial \hat{\Theta}} \right] / \left[\sum_{j=1}^{n_\theta} \left(e^{-p\theta_j} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial \hat{\Theta}} = \frac{1}{8 \pi^2 \theta_j} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_j^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} \boldsymbol{\varepsilon}_j \, d\Omega \quad (\text{A.67})$$

Der Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ bezeichnet die Dehnungen infolge des j -ten Lastfalls bzw. der j -ten Eigenform, wobei die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix normiert sind.

Der Werkstofftensor \mathbf{C} eines orthotropen Werkstoffs, wie beispielsweise das rank-2 Laminat (3.39) oder das makroskopische Werkstoffmodell (3.44), wird zunächst in einem werkstoffeigenen Bezugssystem aufgestellt und anschließend in das globale Koordinatensystem transformiert.

$$\mathbf{C}(\hat{\Theta}) = \mathbf{T}(\hat{\Theta})^T \mathbf{C}^\square \mathbf{T}(\hat{\Theta}) \quad (\text{A.68})$$

Die Matrix \mathbf{C}^\square bezeichnet den Werkstofftensor in einem werkstoffeigenen Bezugssystem. Die Matrix \mathbf{T} beschreibt die Transformation in das globale Koordinatensystem.

$$\mathbf{T}(\hat{\Theta}) = \begin{bmatrix} \cos^2(\hat{\Theta}) & \sin^2(\hat{\Theta}) & \sin(\hat{\Theta}) \cos(\hat{\Theta}) \\ \sin^2(\hat{\Theta}) & \cos^2(\hat{\Theta}) & -\sin(\hat{\Theta}) \cos(\hat{\Theta}) \\ -2 \sin(\hat{\Theta}) \cos(\hat{\Theta}) & 2 \sin(\hat{\Theta}) \cos(\hat{\Theta}) & \cos^2(\hat{\Theta}) - \sin^2(\hat{\Theta}) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Der Gradient des Werkstoffensors bezüglich dem Orientierungswinkel $\hat{\Theta}$ berechnet sich aus der Ableitung der Transformationsmatrix \mathbf{T} :

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}} \right)^T \mathbf{C}^\square \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{C}^\square \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}} \right) \quad (\text{A.69})$$

In den Optimalitätsbedingungen (A.65) bzw. (A.66) ist zu beachten, daß die Dehnungen ϵ_j implizit von der Orientierung des Werkstoffs im Tragwerk abhängen.

Die optimale Orientierung wird parallel zu den übrigen Werkstoffparametern, die mit den in Abschnitt 2.1 vorgestellten Algorithmen ermittelt werden, iterativ im Optimierungsprozeß bestimmt. Die Orientierung wird in jedem Iterationsschritt für jedes Element gesondert berechnet. Bendsøe und Kikuchi [26] bestimmen die optimale Orientierung der Mikrozelle mit Rechteck-Loch (\rightarrow Abschnitt 3.5) für die Zielfunktion "Maximale Steifigkeit", indem die Optimalitätsbedingung (A.65) mit einem Newton-Verfahren bei festgehaltenen Dehnungen ϵ_j numerisch gelöst wird. Um den numerischen Aufwand infolge des Newton-Verfahrens zu vermeiden, entwickelt Pedersen [198] aus einer vereinfachten, punktwisen Betrachtung des Dehnungsfeldes in der Optimalitätsbedingung (A.65) ein analytisches Verfahren zur Orientierung von Scheibentragwerken mit maximaler Steifigkeit für den ebenen Spannungszustand. In beiden Verfahren wird die Orientierung in jedem Iterationsschritt unter der Annahme, daß die Dehnungen nicht von der Orientierung abhängen, bestimmt. Der daraus resultierende Fehler kann jedoch zu erheblichen Oszillationen im Optimierungsprozeß führen. Die Spannungen sind im Vergleich zu den Dehnungen jedoch hinsichtlich einer Variation der Orientierung weniger sensitiv. Die entsprechenden Optimalitätsbedingungen lauten für die Maximierung der Steifigkeit bei mehreren Lastfällen

$$\sum_{j=1}^{n_L} w_j \int_{\Omega} \sigma_j^T \frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}} \sigma_j \, d\Omega = 0 \quad (\text{A.70})$$

und für die Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz (4.19).

$$\left[\sum_{j=1}^{n_0} - \left(e^{-p\vartheta_j} \right) \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \hat{\Theta}} \right] / \left[\sum_{j=1}^{n_0} \left(e^{-p\vartheta_j} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial \vartheta_j}{\partial \hat{\Theta}} = - \frac{1}{8 \pi^2 \vartheta_j} \int_{\Omega} \sigma_j^T \frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}} \sigma_j \, d\Omega \quad (\text{A.72})$$

Der Tensor σ_j bezeichnet die Spannungen infolge des j -ten Lastfalls bzw. der j -ten Eigenform. Die Ableitung der Inversen des Materialtensors berechnet sich aus:

$$\frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.73})$$

Diaz und Bendsøe [76] wandeln in diesem Sinne das Verfahren von Pedersen [198] ab und legen ein im Iterationsschritt konstantes Spannungsfeld zugrunde. Cheng et al. [54] verfeinern und erweiterten diese Vorgehensweise auf Schwingungsprobleme. Im Gegensatz zur punktwisen Betrachtung bei Pedersen [198] und Diaz, Bendsøe [76] bestimmen Cheng et al. [54] die Orientierung anhand der Integrale in den Optimalitätskriterien (A.70) und (A.71), (A.72). Die Integranden werden hierbei für den ebenen Spannungszustand analytisch ausformuliert und die einzelnen Komponenten numerisch integriert. Die optimale Orientierung berechnet sich schließlich aus den Nullstellen eines Polynoms 4. Grades. Alternativ zu diesen Verfahren schlagen Suzuki, Kikuchi [243] vor, orthotrope Werkstoffe entlang den gemittelten Hauptspannungen auszurichten. Dieses vereinfachte Verfahren ist zwar nur für schubweiche Werkstoffe exakt, wird jedoch häufig in der Topologieoptimierung eingesetzt, da es einfach zu implementieren und numerisch robust ist. Im statischen Problem (4.1) werden die Hauptspannungen aus den über die Lastfälle aufsummierten Spannungstensoren berechnet. Im dynamischen Problem (4.19) wird die Hauptspannung infolge der Eigenform mit der kleinsten Eigenfrequenz berücksichtigt. Nach eigenen Erfahrungen sind für statisch belastete Tragwerke mit einem Lastfall oder dynamische Probleme, bei denen eine Eigenform dominant ist, die Ergebnisse des vereinfachten Verfahrens nur geringfügig schlechter als die der aufwendigeren Methoden. Der Unterschied ist um so kleiner, je feiner der Entwurfsraum diskretisiert ist.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Algorithmus entwickelt, der für statische und dynamische Probleme die optimale Orientierung von orthotropen Werkstoffen auf der Basis der in Dehnungen oder in Spannungen formulierten Optimalitätsbedingungen nach (A.65), (A.66), (A.67) oder (A.70), (A.71), (A.72) ermittelt. Der Algorithmus ist in Tabelle A.5 aufgeführt. In Anlehnung an Bendsøe, Kikuchi [26] wird die optimale Orientierung mit einem Newton-Verfahren numerisch bestimmt. Das Verfahren ist auf beliebige mechanische Modelle, wie Scheiben, Platten oder Schalen, anwendbar und kann leicht auf andere Entwurfskriterien erweitert werden. Drei Punkte sind im Algorithmus zu beachten.

1. Da die Gradienten der Lagrange-Funktion bzw. die Residuen der Optimalitätsbedingungen bezüglich der Orientierung sehr klein sein können, sind die Dehnungen bzw. die Spannungen entsprechend zu skalieren, um numerische Probleme zu vermeiden.
2. Die zweite Ableitung des Werkstoffensors berechnet sich aus:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}^2} = \left[\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}^2} \right]^T \mathbf{C}^\square \mathbf{T} + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}} \right)^T \mathbf{C}^\square \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}} \right) + \mathbf{T}^T \mathbf{C}^\square \left[\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \hat{\Theta}^2} \right] \quad (\text{A.74})$$

0. Eingabe :

	Aktuelle Werkstoffparameter: z.B. E , ν , $\hat{\chi}_1$, $\hat{\chi}_2$, β nach (3.44)
$\hat{\Theta}^{(0)}$	Aktuelle Ausrichtung
$\epsilon_{j,g}$ $\sigma_{j,g}$	Dehnungs- bzw. Spannungstensoren in den Gauß-Punkten g für alle Lastfälle j bzw. betrachteten Eigenformen j
w_i , p	Wichtungsfaktoren zur Bestimmung der Zielfunktion
$\bar{\epsilon}$, \bar{n}_k	Abbruchkriterien $\bar{\epsilon} = 10^{-6}$, $\bar{n}_k = 20$

1. Überprüfen auf isotropen bzw. bereits optimalen Zustand :

- 1.1 wenn $\hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_2$, dann Ende
- 1.2 Berechne das Residuum R_0 von (A.65) oder (A.66)
bzw. (A.70) oder (A.71) durch numerische Integration
wenn $|R_0| < \bar{\epsilon}$, dann $\hat{\Theta}^* = \hat{\Theta}^{(0)}$, gehe nach 4.

2. Skalieren der Dehnungen bzw. Spannungen

$$\text{Skalierungsfaktor } \bar{s} = 1/\sqrt{|R_0|}$$

3. Newton-Iteration

- 3.1 Setze Iterationszähler $k = k + 1$
wenn $k > \bar{n}_k$, dann $\hat{\Theta}^* = \hat{\Theta}^{(k)}$ und gehe nach 4.
- 3.2 Berechne die 1. und 2. Ableitungen des Werkstoffensors
bzw. die der Inversen
- 3.3 Berechne das Residuum $R^{(k)}$
- 3.4 Berechne die partielle Ableitung des Residuums $\nabla_{\Theta} R^{(k)}$
bei konstanten Dehnungen bzw. Spannungen
- 3.5 Bestimme neue Orientierung
 $\hat{\Theta}^{(k+1)} = \hat{\Theta}^{(k)} - R^{(k)} / \nabla_{\Theta} R^{(k)}$
- 3.5 Überprüfe Vorzeichen der Ableitungen des Residuums
wenn $\nabla_{\Theta} R^{(k)} < 0$, dann
wenn $R \geq 0$, dann $\hat{\Theta}^{(k+1)} = \hat{\Theta}^{(k+1)} - \pi/4$
wenn $R < 0$, dann $\hat{\Theta}^{(k+1)} = \hat{\Theta}^{(k+1)} + 0.6 \pi/4$
- 3.5 Transformiere auf $-\pi/2 \leq \hat{\Theta}^{(k+1)} \leq \pi/2$
- 3.5 Überprüfe Abbruchkriterium
wenn $|\hat{\Theta}^{(k+1)} - \hat{\Theta}^{(k)}| > \bar{\epsilon}$, dann gehe nach 3.1
- 3.6 setze $\hat{\Theta}^* = \hat{\Theta}^{(k+1)}$

4. Ende

Tabelle A.5: Algorithmus zur Optimierung der Orientierung von orthotropen Werkstoffen

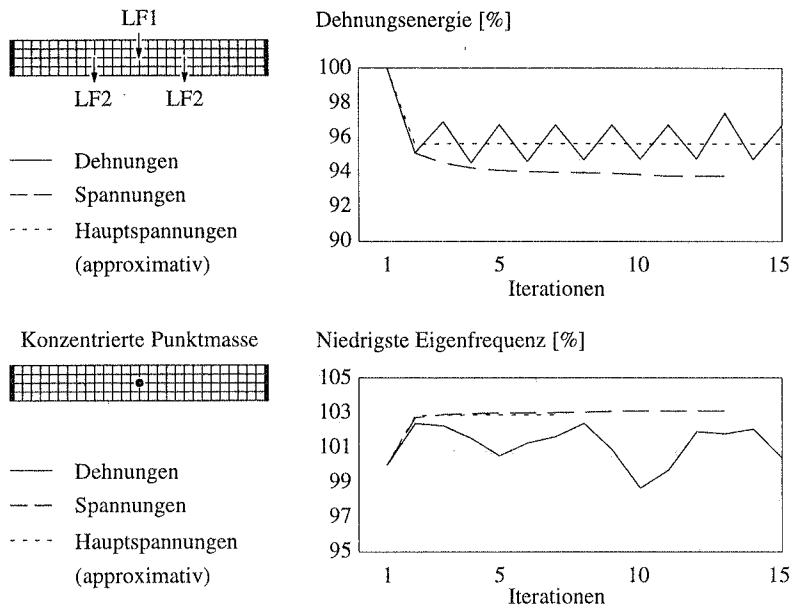


Bild A.8: Vergleich der Verfahren zur Orientierung orthotroper Werkstoffe

und die zweite Ableitung der Inversen des Werkstoffensors aus:

$$\frac{\partial^2(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}^2} = - \frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}^2} \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \hat{\Theta}} \frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})}{\partial \hat{\Theta}} \quad (\text{A.75})$$

3. Die Werkstofftensoren und damit die Integrale in den Optimalitätsbedingungen (A.65), (A.67) bzw. (A.70), (A.72) sind π -periodische Funktionen des Orientierungswinkels $\hat{\Theta}$. Daher ist mit Hilfe der zweiten Ableitungen zu überprüfen, ob das Newton-Verfahren gegen das Minimum konvergiert.

Die Eigenschaften der verschiedenen Ansätze zur Optimierung der Ausrichtung werden anhand des Beispiels in Bild A.8 veranschaulicht. Das Scheibenträgerwerk wird zum einen hinsichtlich der Steifigkeit für zwei Lastfälle (LF) nach der Wichtungsmethode (2.31) mit $w_1 = w_2$ und zum anderen hinsichtlich der maximalen, niedrigsten Eigenfrequenz mit der Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion bei Berücksichtigung der beiden kleinsten Eigenfrequenzen optimiert. Es sind nur die Orientierungswinkel der 112, 8-knotigen, 2×2 reduziert integrierten Verschiebungselemente variabel. Die richtungsbezogenen Dichten im makroskopischen, orthotropen Werkstoffmodell (3.44) sind mit $\hat{\chi}_1 = 2\hat{\chi}_2$ vorgegeben. Der Verlauf der Zielfunktionswerte im Optimierungsprozeß zeigt, daß das an den Dehnungen orientierte Verfahren in beiden Optimierungsproblemen erheblich oszilliert. Die Zielfunktionswerte sind auf die des Startent-

wurfs bezogen. Der an den Spannungen orientierte Algorithmus dagegen konvergiert monoton gegen das Optimum. Die Ausrichtung des Winkels Θ an den Hauptspannungen ist ebenfalls stabil und führt auf nur geringfügig schlechtere Ergebnisse.

A7 Algorithmus zur Adaption des Entwurfsmodells für die Topologie- und Formoptimierung

Die Anpassung des Entwurfsmodells an die Zwischenergebnisse im Optimierungsprozeß stellt die Schlüsselstelle in der adaptiven Topologieoptimierung und bei der Integration der Formoptimierung in den adaptiven Topologieoptimierungsprozeß dar. Die Grundzüge des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Algorithmus wurden in Abschnitt 6.2.2 an einem Beispiel zur adaptiven Topologieoptimierung eines Schalentragwerks vorgestellt. In diesem Abschnitt wird der Adaptionalgorithmus im Detail erläutert.

Geometrische Beschreibung des Entwurfsraums, der Lasten und Auflager

Der Entwurfsraum sowie die Last- und Auflagerbedingungen werden im Rahmen der adaptiven Topologieoptimierung nicht, wie sonst üblich, auf einem FE-Netz definiert, sondern rein geometrisch beschrieben (Bild A.9). So sind beispielsweise rechteckige Entwurfsräume und Auflagerbereiche über die Positionen von deren Eck-Knoten festgelegt. Die Punkte für die Lasteinleitung werden über deren Koordinaten angegeben. Die Kanten des Entwurfsraums werden in eine bestimmte Anzahl von Intervallen unterteilt, woraus ein Netz aus 4-knotigen, rechteckigen Elementen generiert wird. Der gesamte Adaptionprozeß wird im Parameterraum $\xi \in \mathbb{R}^2(\Omega_c)$ durchgeführt, um räumlich gekrümmte Tragwerke bzw. Entwurfsräume einfach modellieren zu können. Daher werden die Eingabedaten sowie das Hintergrundnetz in den Parameterraum projiziert.

Adaptionsprozeß

Der Adaptionprozeß ist in Tabelle A.6 in Form eines Struktogramms dargestellt und in Bild A.10 an einem Beispiel veranschaulicht. Das Ergebnis eines vorangegangenen Topologie-

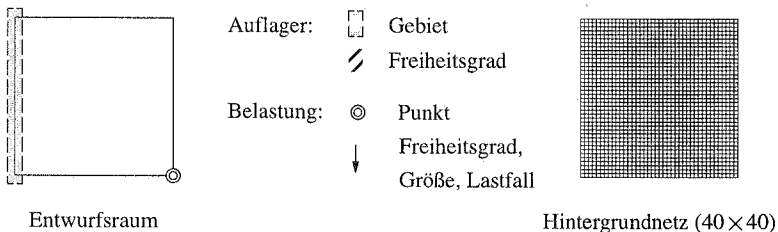


Bild A.9: Geometrische Beschreibung des Entwurfsraums sowie der Lasten und Auflager

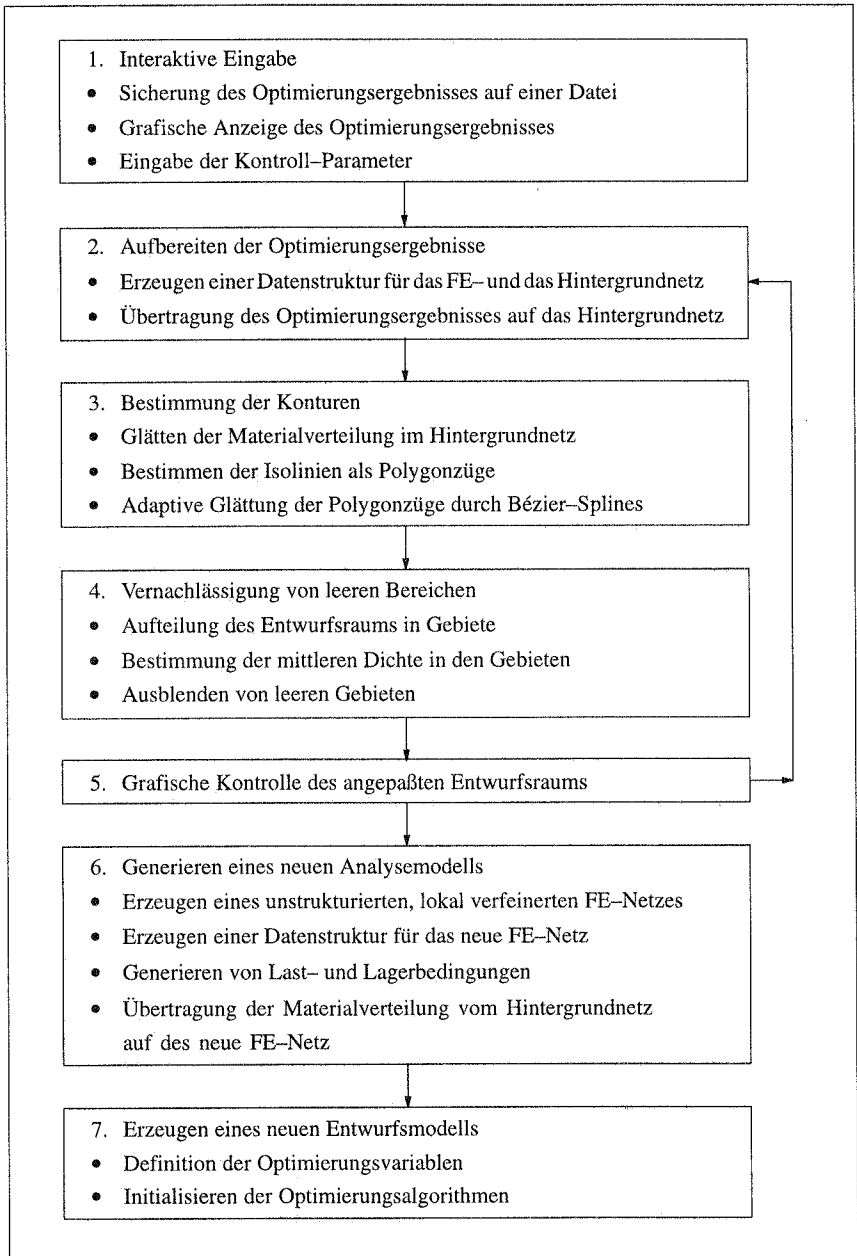
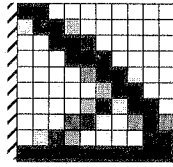


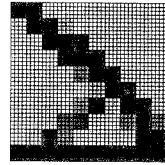
Tabelle A.6: Aufbau des Algorithmus zur Adaption des Entwurfsmodells

zu Punkt 2:

Optimierungsergebnis:
Materialverteilung im FE-Netz



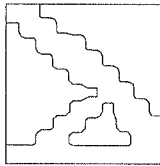
Materialverteilung
im Hintergrundnetz



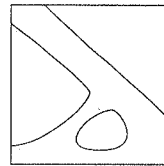
zu Punkt 3:

Isolinien für $\rho_c / \rho_0 = 0.2$

Polygonzüge

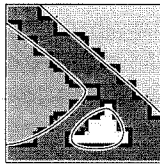


Bézier-Spline Approximation

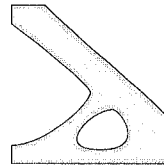


zu Punkt 4:

Aufteilung in Gebiete

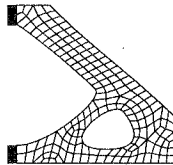


Kontur des
angepaßten Entwurfsraums



zu Punkt 6:

Neues FE-Netz



Materialverteilung
im neuen FE-Netz

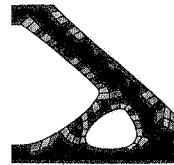


Bild A.10: Schritte im Adaptionsprozeß des Entwurfsmodells

oder Formoptimierungsschrittes bildet den Ausgangspunkt für den Algorithmus. Für die nachfolgende Anpassung des Entwurfsmodells wird das Optimierungsergebnis in beiden Fällen als optimierte Materialverteilung im Entwurfsraum interpretiert.

Interaktive Eingabe

Das Optimierungsergebnis wird zunächst auf einer Datei gesichert und grafisch dargestellt, um die interaktive Eingabe der Kontroll-Parameter zu unterstützen:

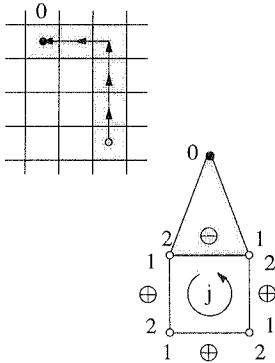
- ρ_{iso} : Dichtewerte für die n_{iso} Isolinien. Die kleinste Dichte definiert im allgemeinen die Isolinie, welche die Kontur des angepassten Entwurfsraums beschreibt.
- n_{smo} : Maß für die Glättung der Materialverteilung.
- e_{apx} : Zulässiger Fehler für die Approximation der Isolinien durch Bézier-Splines.
- $|\bar{\Omega}|$: Minimaler Flächeninhalt der Löcher.
- $\bar{\rho}_m$: Schwellenwert für die mittlere Dichte beim Ausblenden von leeren Gebieten.
- $h_{\text{U}}^{\text{ref}}$: Maximale Netzdichte für die lokale Netzverfeinerung.
- $h_{\text{L}}^{\text{ref}}$: Minimale Netzdichte für $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\text{L}}$ bzw. $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\text{U}} = \rho_0$.
- $\bar{\rho}_{\text{ref}}$: Dichtewert für die maximale Netzdichte.
- n_{map} : Gemittelte oder "exakte" Übertragung der Materialverteilung vom Hintergrundnetz auf das neue FE-Netz.

Aufbereiten der Optimierungsergebnisse

Bei der Adaption des Entwurfsmodells wird die Materialverteilung vom alten FE-Netz auf das Hintergrundnetz und vom Hintergrundnetz auf das neue FE-Netz übertragen. Bei diesen Aufgaben tritt immer wieder das Problem auf, das Element zu bestimmen, in dem ein bestimmter Punkt liegt. Hierfür stehen verschiedene Algorithmen, wie beispielsweise die "Quadtree"-Methode, zur Verfügung. Im vorliegenden Algorithmus wird das Verfahren der "gerichteten Suche" eingesetzt. Das Verfahren ist in Bild A.11 skizziert und wird u.a. bei Rehle [209] ausführlicher beschrieben. Die Suche wird mit einem beliebigen Element begonnen. Die Kanten des Elements werden im mathematisch positiven Sinn umlaufen und dabei überprüft, ob sich der gesuchte Punkt links oder rechts von der Kante befindet. Hierzu wird der Flächeninhalt des Dreiecks, das aus dem Punkt \mathbf{x}_0 und den Enden der Kante \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 gebildet wird, berechnet.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{11} - x_{10} & x_{21} - x_{20} \\ x_{12} - x_{10} & x_{22} - x_{20} \end{vmatrix} \quad (\text{A.76})$$

Je nach Umlaufsinn der Knoten ist die Fläche A_{Δ} größer oder kleiner Null, d.h. liegt der Knoten links oder rechts von der aktuellen Kante. Die Suche wird beschleunigt, indem für die Netze vorab eine Kanten-Element-Tabelle aufgestellt wird.



1. Schleife über alle Kanten des Elementes j
(Umlaufsinn: mathematisch positiv)
 A_{Δ} : Flächeninhalt des Dreiecks (0–1–2)
wenn $A_{\Delta} < 0$, dann:
 Ende der Schleife
 Angrenzendes Element : neues Element j
 gehe zu 1.
wenn alle $A_{\Delta} > 0$, dann:
 Element gefunden

Bild A.11: Verfahren der “gerichteten Suche”

Das FE–Netz, das im Anschauungsraum $x \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$ definiert ist, wird in den Parameterraum abgebildet und die optimierte Materialverteilung, die auf dem FE–Netz gespeichert ist, in das Hintergrundnetz übertragen (Tabelle A.7). Die Materialkennwerte im Hintergrundnetz werden unter Berücksichtigung der oberen und unteren Restriktionen so korrigiert, daß die Gesamtmassen in beiden Netzen übereinstimmen.

Bestimmung der Isolinien

Die Materialverteilung im Hintergrundnetz kann geglättet werden, um eine “künstliche” Unschärfe einzuführen (\rightarrow Abschnitt 6.2.2). Hierzu werden die Dichtewerte der Elemente mit den Elementgrößen gewichtet in den gemeinsamen Knoten gemittelt und anschließend die mittlere Dichte des Elements aus den Knotenwerten berechnet. Je öfters diese Schleife durchlaufen wird, desto glatter ist die Materialverteilung im Hintergrundnetz. Die Schleife wird $(n_{smo} + 1)$ –mal abgearbeitet.

1. Berechne der Flächen der Elemente im FE–Netz und Hintergrundnetz : A_i^{fc} A_i^{hg}
2. Schleife über alle Elemente im Hintergrundnetz
 - 2.1 Berechne den Mittelpunkt des Hintergrund–Elementes x_m^{hg}
 - 2.2 Bestimme Element im FE–Netz, in welchem x_m^{hg} liegt.
 - 2.3 Übertrage Materialkennwerte des Finiten Elements auf das Hintergrund–Element

 Ende der Schleife
3. Abgleich der Gesamtmassen im FE–Netz und Hintergrundnetz

Tabelle A.7: Übertragen der Materialverteilung auf das Hintergrundnetz

Schleife über alle Dichtewerte ρ_{iso} der Isolinien

1. Bestimme Stützstellen der Isolinien

1.1 Schleife über alle Hintergrund-Elemente

1.1.1 Schleife über alle Kanten

Überprüfe, Dichtewerte in den Knoten 1, 2 :

$$\min(\rho_1, \rho_2) < \rho_{\text{iso}} < \max(\rho_1, \rho_2)$$

wenn ja : Berechne Position der Stützstelle auf der Kante

Markiere Hintergrund-Element im Index-Feld mit (-1)

Ende der Schleife

Ende der Schleife

2. Verbinde Stützstellen zu Polygonzügen

2.1 Wähle Stützstelle auf dem Rand des Entwurfsraum

(nur ein Eintrag in der Kanten-Element-Tabelle)

wenn möglich: Kennzeichne Polygonzug als Randsegment

wenn nicht möglich: Kennzeichne Polygonzug als inneres Segment

wenn keine Stützstelle gefunden: Ende

2.2 Untersuche die Kanten des Elements auf weitere Stützstellen

(Umlaufsinn: in Richtung des Knotens mit kleinerem Dichtewert)

wenn neue Stützstelle gefunden, dann

Markiere Stützstelle als "gefunden"

Wechsle zum benachbarten Element

Gehe zu 2.2

wenn nicht, dann gehe zu 2.1

Tabelle A.8: Ermittlung der Isolinien als Polygonzüge

Zur Berechnung der Isolinien werden, wie zuvor beschrieben, die Dichtewerte der Elemente in den gemeinsamen Knoten gemittelt und die Stützstellen der Isolinien auf den Elementkanten durch eine lineare Interpolation bestimmt. Hierfür werden zunächst die Kanten von allen Hintergrund-Elementen untersucht und anschließend die Stützstellen durch Polygonzüge verbunden (Tabelle A.8). Für die weiteren Schritte werden die Elemente, auf deren Kanten sich eine Stützstelle befindet, in einem Index-Feld mit (-1) gekennzeichnet. Weiterhin wird zwischen Polygonzügen mit Punkten auf dem Rand des Entwurfsraums (Randsegment) und Polygonzügen im Inneren unterschieden.

Die einzelnen Polygonzüge werden adaptiv durch kubische Bézier-Splines nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate geglättet. Dies führt auf ein quadratisches Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen in den Positionen der Kontroll-Knoten $\hat{\zeta}^k$ der Bézier-Splines.

$$\min_{\hat{\zeta}^k} \sum_{i=1}^{n_p} \|\zeta_i^p - \zeta_i^b\|^2 \quad ; \quad \zeta_i^b(\xi_i) = \sum_{j=1}^{n_k} N_j(\xi_i) \zeta_j^k \quad (\text{A.77})$$

Die n_p Stützstellen auf dem Polygonzug werden mit ζ_i^p , die entsprechenden Punkte auf den Bézier-Splines mit ζ_i^b bezeichnet. Die lokalen Koordinaten ξ_i auf dem Bézier-Spline werden aus der Lage der entsprechenden Stützstelle auf dem Polygonzug bestimmt.

$$\xi_i = \frac{a_i}{a_{n_p}} \quad ; \quad a_i = \sum_{m=1}^i \|\zeta_m^p - \zeta_{m-1}^p\| \quad (\text{A.78})$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des Optimierungsproblems stellen ein lineares Gleichungssystem dar, das mit Hilfe einer Householder-Transformation effizient gelöst werden kann (Deufflhard, Hohmann [73]).

$$\tilde{N}^T \tilde{N} \hat{\zeta}^k = \tilde{N}^T \zeta_p \quad (\text{A.79})$$

Die Koeffizientenmatrix N ist aus den Ansatzfunktionen $N_j(\xi_i)$ aufgebaut. Der Glättungsalgorithmus beginnt mit einem kubischen Bézier-Spline und bestimmt für diese Approximation die optimalen Positionen der Kontroll-Knoten. Wenn der Approximationsfehler e_{apx} größer als ein vorgegebener Sollwert ist, wird die Anzahl der Bézier-Splines sukzessive erhöht und das Optimierungsproblem erneut gelöst.

$$e_{\text{apx}} = \frac{1}{a_{n_p}} \sum_{i=1}^{n_p} \|\zeta_i^p - \zeta_i^b\| \quad (\text{A.80})$$

Die C_g^1 -Kontinuität der Elementübergänge ist zu beachten, um glatte Konturen zu erhalten. Hierfür werden die Positionen von Kontroll-Knoten, wie in Abschnitt 5.1 erläutert, miteinander verknüpft. Dies führt zu einer Reduktion der Anzahl von Optimierungsvariablen, die sich jedoch lediglich auf den Aufbau der Koeffizientenmatrix N auswirkt. Die Wirkungsweise der adaptiven Glättung ist an zwei Beispielen in Bild A.12 dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind der offene und der geschlossene Polygonzug jeweils nur durch deren Stützpunkte angedeutet.

Für die weitere, numerische Behandlung der Isolinien werden die Bézier-Splines zusätzlich als Polygonzüge mit einer hohen Auflösung gespeichert. Die Abweichung dieser Polygonzüge von den Bézier-Splines kann vernachlässigt werden.

Vernachlässigung von leeren Bereichen

Der Entwurfsraum wird durch die geglätteten Polygonzüge in verschiedene Gebiete A–D unterteilt (Bild A.13a). Die Gebiete werden jeweils durch einen geschlossenen Polygonzug definiert,

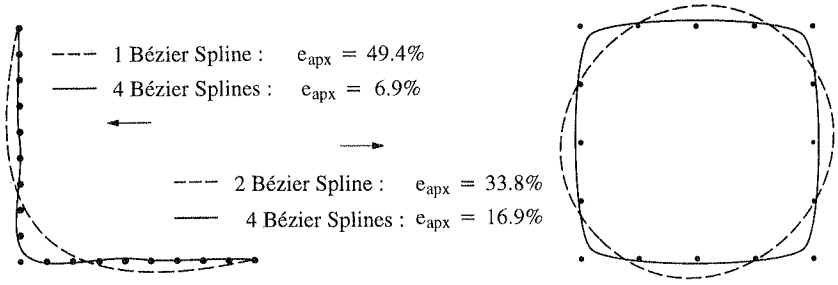


Bild A.12: Adaptive Approximation von Polygonzügen mit Bézier-Splines

wobei die Stützstellen im mathematisch positiven Umlaufsinn numeriert werden. Hierfür sind zunächst die Randsegmente durch gerade Linien auf dem Rand des Entwurfsraums zu ergänzen. Die Polygonzüge im Inneren werden doppelt vorgehalten, da sie sowohl das Gebiet nach innen (A) wie auch nach außen (A^{-1}) begrenzen. Die Typ der Begrenzung wird abermals durch den Umlaufsinn definiert, wie die Stützstellen im Polygonzug numeriert sind:

- mathematisch positiv : Polygonzug schließt das Gebiet ein.
- mathematisch negativ : Polygonzug grenzt das Gebiet aus.

Die mittleren Dichtewerte der einzelnen Gebiete A–D werden bestimmt, um zu entscheiden, welche Gebiete im neuen, angepaßten Entwurfsmodell vernachlässigt werden können. Hierzu sind die vektorielle Beschreibung der Isolinien über Splines bzw. Polygonzüge mit der pixelorientierten Abspeicherung der Materialverteilung im Hintergrundnetz zu koppeln.

Die Elemente im Hintergrundnetz werden hierfür gemeinsamen, zusammenhängenden Gebieten zugeordnet. Dies erfolgt durch ein “flood-fill”-Verfahren, das in zahlreichen pixelorientierten Bildverarbeitungsprogrammen eingesetzt wird. Die Grenze der Flutungsbereiche wird durch die Hintergrund-Elemente mit einem negativen Eintrag im Index-Feld gekennzeichnet (Bild A.14a). Auf diese Weise können, abgesehen von den Grenz-Elementen, alle Hintergrund-Elemente den Gebieten I–IV zugeordnet werden (Bild A.14b). Aus den Materialkenn-

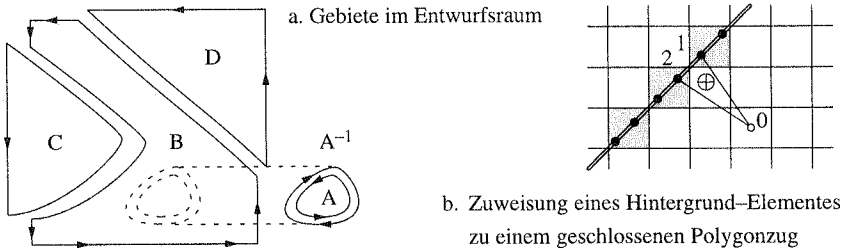
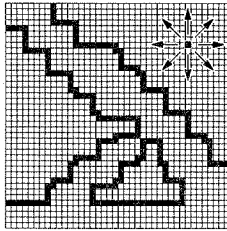


Bild A.13: Aufteilung des Entwurfsraums in verschiedene Gebiete

a. Markierte Hintergrund-Elemente
"Fluten der Gebiete"



b. Zuordnung der Hintergrund-Elemente
zu gemeinsamen Gebieten

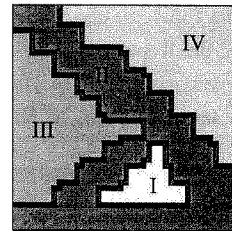


Bild A.14: Aufteilung des Hintergrundnetzes in zusammenhängende Gebiete

werten sowie den Flächen der entsprechenden Hintergrund-Elemente werden die mittlere Dichte sowie der Flächeninhalt der einzelnen Gebiete bestimmt. Schließlich sind die Gebiete I–IV im Hintergrundnetz den Bereichen A–D der vektoriellen Beschreibung zuzuordnen. Hierfür ist es ausreichend, ein Hintergrund-Element eines jeden Gebietes zu untersuchen (Tabelle A.9, Bild A.13b).

Anhand der im Hintergrundnetz berechneten, mittleren Dichten und Flächeninhalte werden Gebiete mit $\rho_m < \bar{\rho}_m$ und $|\Omega| < |\bar{\Omega}|$ eliminiert. Im vorliegenden Beispiel sind dies die Gebiete A (I), C (III) und D (IV), da deren mittlere Dichtewerte die vorgegebene Grenze unterschreiten. Das innere Gebiet A wird vernachlässigt, da es ein Loch darstellt. Der gegenläufige Bézier-Spline A^{-1} wird nicht eliminiert, da er das Gebiet B gegen das Loch A abgrenzt. Für den Fall, daß das Loch A zu klein wäre ($|\Omega_A| < |\bar{\Omega}|$), würden die Konturen A und A^{-1} beseitigt.

<p>1. Setze: $\Delta_{\min} \rightarrow \infty$</p> <p>2. Schleife über alle geschlossenen Polygonzüge A–D</p> <p> 2.1 Schleife über Segmente des Polygonzugs</p> <p> A_Δ: Flächeninhalt des Dreiecks (0–1–2) \rightarrow Bild A.13b</p> <p> wenn $A_\Delta > 0$, dann:</p> <p> wenn $\Delta_{\min} > \ x_1 - x_0\$ oder $\Delta_{\min} > \ x_2 - x_0\$, dann:</p> <p> $\Delta_{\min} = \min (\Delta_{\min}, \ x_1 - x_0\ , \ x_2 - x_0\)$</p> <p> Merke aktuellen Polygonzug</p> <p> Ende der Schleife</p> <p> Ende der Schleife</p>

Tabelle A.9: Zuordnung eines Hintergrund-Elements zu einem Polygonzug

Grafische Kontrolle des angepaßten Entwurfsraums

Bei vielen Beispielen, bei denen dieses Adaptionsverfahren eingesetzt wurde, stellte sich heraus, daß die Topologie und die Form des angepaßten Entwurfsraums im Adaptionsprozeß überwacht und die Kontroll-Parameter entsprechend angepaßt werden müssen. Auf diese Weise wird beispielsweise vermieden, daß der Entwurfsraum zu stark eingeschränkt wird oder wellige Konturen entstehen.

Generieren eines neuen Analysemodells

Die zuvor erzeugte, geometrische Beschreibung des angepaßten Entwurfsraums durch Bézier-Splines und graden Linien stellt eine vollständige Eingabe für den in der vorliegenden Arbeit eingesetzten Netzgenerator dar (Rehle [209]). Die Feinheit des unstrukturierten Netzes kann in Bereichen mit Dichtewerten zwischen $0 < \rho < \rho_0$ lokal erhöht werden. Das Hintergrundnetz des Adaptionsverfahrens bildet das hierfür notwendige Netz, auf dem die Netzdichte-Funktion definiert ist. Der Verfeinerungsindikator wird durch ein abschnittsweise definiertes, kubisches Polynom in Abhängigkeit von der Dichte $\hat{\rho}_{hg}$ des jeweiligen Hintergrund-Elements und den Kontroll-Parametern h_L^{ref} , h_U^{ref} , $\bar{\rho}_{ref}$ beschrieben (Bild A.15).

$$h^{ref} = \bar{h}_L \left(2 \bar{\rho}^3 - 3 \bar{\rho}^2 + 1 \right) + \bar{h}_U \left(3 \bar{\rho}^2 - 2 \bar{\rho}^3 \right) \quad (A.81)$$

$$\rho_{hg} \leq \bar{\rho}_{ref} : \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_{hg} - \hat{\rho}_L}{\bar{\rho}_{ref} - \hat{\rho}_L} \quad ; \quad \bar{h}_L = h_L^{ref} \quad ; \quad \bar{h}_U = h_U^{ref}$$

$$\rho_{hg} > \bar{\rho}_{ref} : \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_{hg} - \bar{\rho}_{ref}}{\hat{\rho}_U - \bar{\rho}_{ref}} \quad ; \quad \bar{h}_L = h_U^{ref} \quad ; \quad \bar{h}_U = h_L^{ref}$$

Für die weiteren Schritte beim Erzeugen eines neuen Analysemodells wird eine Datenstruktur, d.h. eine Kanten-Element-Tabelle, für das neue FE-Netz aufgestellt und dieses in den Parameterraum projiziert. Die geometrisch definierten Last- und Auflagerbedingungen werden anschließend auf das neue FE-Netz übertragen. Es wird für jeden FE-Knoten geprüft, ob er sich in einem gelagerten Bereich befindet und, wenn dies der Fall ist, die entsprechenden Freiheitsgrade gesperrt. Die Einzellasten werden in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet.

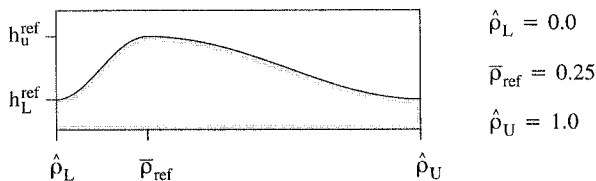


Bild A.15: Beispiel für die Netzdichtefunktion (A.81)

Hierzu werden das Element, indem sich der Lasteinleitungspunkt liegt, und die zugehörigen lokalen Koordinaten bestimmt. Abschließend wird die Materialverteilung im Hintergrundnetz auf das neue FE-Netz übertragen. Diese Aufgabe wird analog zu dem in Tabelle A.7 dargestellten Verfahren durchgeführt. Für den Fall, daß ein Formoptimierungsschritt folgt, werden allen Finiten Elementen dieselben, mittleren Materialkennwerte zugewiesen.

Erzeugen eines neuen Entwurfsmodells

Im Fall, daß ein Topologieoptimierungsschritt folgt, werden die entsprechenden Materialkennwerte aller Finiten Elemente als Optimierungsvariablen definiert. Die Problematik, ein Entwurfsmodell für die Formoptimierung von topologisch komplexen Tragwerken automatisch zu generieren, wurde in Abschnitt 6.2.4 angesprochen. Wenn keine interaktive, grafische Schnittstelle für das Optimierungsprogramm zur Verfügung steht, wie dies in der vorliegenden Arbeit der Fall war, kann das angepaßte Analysemodell zusammen mit einer CAGD-orientierten Geometriebeschreibung des angepaßten Entwurfsraums auf eine Datei geschrieben und die Optimierungsvariablen, d.h. die Positionen sowie die Bewegungsrichtungen der Kontrollknoten der Bézier-Splines, manuell definiert werden.

A8 Homogenisierungsergebnisse für die Mikrozelle mit Rechteck-Loch

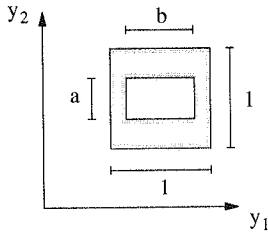
Die Mikrozelle mit Rechteck-Loch ist das bekannteste, suboptimale Werkstoffmodell in der materiellen Topologieoptimierung. Der Werkstofftensor liegt im Optimierungsprozeß als explizite Funktion der Abmessungen des Lochs vor. Hierzu werden vorab die makroskopischen Materialeigenschaften für bestimmte Abmessungen mit dem in Abschnitt 3.4 und im Anhang A4 beschriebenen Verfahren numerisch ermittelt und durch Polynomansätze interpoliert. Die Homogenisierungsergebnisse sind für verschiedene Abmessungen des Lochs bei einer Querdehnzahl $\nu = 0.3$ in Tabelle A.10 und Tabelle A.11 angegeben.

Die Komponenten des homogenisierten Materialtensors werden nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate mit Polynomen 6. Grades interpoliert. Dabei ist zu beachten, daß der homogenisierte Materialtensor stets positiv definit sein muß.

$$C_{1111}^{\square} \geq 0 \quad ; \quad C_{2222}^{\square} \geq 0 \quad ; \quad C_{1212}^{\square} \geq 0 \quad (\text{A.82})$$

$$C_{1111}^{\square} C_{2222}^{\square} - C_{1122}^{\square 2} \geq 0$$

wobei $C_{1112}^{\square} = C_{2212}^{\square} = 0$ vorausgesetzt wird. Für einen vollständigen Polynomansatz 6. Grades ergeben sich die Interpolationskonstanten α_{ij} für die Komponenten des Materialtensors nach Tabelle A.12.



a = 0.0	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	1.0000	0.3000	0.3500
b = 0.1	0.9813	0.2948	0.3468
b = 0.2	0.9315	0.2803	0.3391
b = 0.3	0.8579	0.2586	0.3272
b = 0.4	0.7690	0.2322	0.3114
b = 0.5	0.6726	0.2034	0.2918
b = 0.6	0.5738	0.1738	0.2686
b = 0.7	0.4755	0.1442	0.2415
b = 0.8	0.3778	0.1147	0.2093
b = 0.9	0.2756	0.0836	0.1668
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

a = 0.1	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}	a = 0.2	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	0.9974	0.2948	0.3468	b = 0.0	0.9925	0.2803	0.3391
b = 0.1	0.9687	0.2881	0.3359	b = 0.1	0.9542	0.2720	0.3195
b = 0.2	0.9075	0.2720	0.3195	b = 0.2	0.8831	0.2537	0.2945
b = 0.3	0.8254	0.2491	0.2988	b = 0.3	0.7938	0.2292	0.2659
b = 0.4	0.7316	0.2220	0.2743	b = 0.4	0.6958	0.2010	0.2346
b = 0.5	0.6328	0.1926	0.2464	b = 0.5	0.5950	0.1711	0.2010
b = 0.6	0.5333	0.1623	0.2151	b = 0.6	0.4946	0.1406	0.1651
b = 0.7	0.4346	0.1315	0.1794	b = 0.7	0.3952	0.1100	0.1260
b = 0.8	0.3352	0.0997	0.1360	b = 0.8	0.2947	0.0791	0.0815
b = 0.9	0.2256	0.0646	0.0743	b = 0.9	0.1854	0.0475	0.0301
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000	b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

a = 0.3	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}	a = 0.4	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	0.9849	0.2586	0.3272	b = 0.0	0.9762	0.2322	0.3114
b = 0.1	0.9384	0.2491	0.2988	b = 0.1	0.9216	0.2220	0.2743
b = 0.2	0.8588	0.2292	0.2659	b = 0.2	0.8350	0.2010	0.2346
b = 0.3	0.7641	0.2036	0.2311	b = 0.3	0.7364	0.1754	0.1954
b = 0.4	0.6634	0.1754	0.1954	b = 0.4	0.6346	0.1485	0.1580
b = 0.5	0.5612	0.1465	0.1595	b = 0.5	0.5333	0.1220	0.1229
b = 0.6	0.4614	0.1177	0.1234	b = 0.6	0.4340	0.0966	0.0903
b = 0.7	0.3625	0.0897	0.0868	b = 0.7	0.3365	0.0724	0.0595
b = 0.8	0.2635	0.0626	0.0491	b = 0.8	0.2396	0.0495	0.0306
b = 0.9	0.1578	0.0356	0.0139	b = 0.9	0.1380	0.0270	0.0074
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000	b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Tabelle A.10: Homogenisierungsergebnisse für die Einheitszelle mit rechteckigem Loch (1)

a = 0.5	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}	a = 0.6	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	0.9666	0.2034	0.2918	b = 0.0	0.9569	0.1738	0.2686
b = 0.1	0.9044	0.1926	0.2464	b = 0.1	0.8873	0.1623	0.2151
b = 0.2	0.8120	0.1711	0.2010	b = 0.2	0.7905	0.1406	0.1651
b = 0.3	0.7113	0.1465	0.1595	b = 0.3	0.6894	0.1177	0.1234
b = 0.4	0.6098	0.1220	0.1229	b = 0.4	0.5894	0.0966	0.0903
b = 0.5	0.5100	0.0990	0.0915	b = 0.5	0.4915	0.0776	0.0645
b = 0.6	0.4122	0.0776	0.0645	b = 0.6	0.3954	0.0605	0.0440
b = 0.7	0.3163	0.0576	0.0406	b = 0.7	0.3007	0.0446	0.0271
b = 0.8	0.2211	0.0387	0.0196	b = 0.8	0.2069	0.0295	0.0129
b = 0.9	0.1231	0.0203	0.0043	b = 0.9	0.1118	0.0150	0.0027
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000	b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

a = 0.7	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}	a = 0.8	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	0.9471	0.1442	0.2415	b = 0.0	0.9373	0.1147	0.2093
b = 0.1	0.8704	0.1315	0.1794	b = 0.1	0.8541	0.0997	0.1359
b = 0.2	0.7710	0.1100	0.1260	b = 0.2	0.7546	0.0792	0.0815
b = 0.3	0.6712	0.0897	0.0868	b = 0.3	0.6571	0.0626	0.0491
b = 0.4	0.5735	0.0724	0.0595	b = 0.4	0.5614	0.0495	0.0306
b = 0.5	0.4775	0.0576	0.0406	b = 0.5	0.4670	0.0387	0.0196
b = 0.6	0.3827	0.0446	0.0271	b = 0.6	0.3735	0.0295	0.0129
b = 0.7	0.2890	0.0327	0.0168	b = 0.7	0.2807	0.0215	0.0082
b = 0.8	0.1961	0.0215	0.0082	b = 0.8	0.1885	0.0141	0.0045
b = 0.9	0.1031	0.0106	0.0018	b = 0.9	0.0966	0.0069	0.0013
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000	b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

a = 0.9	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}	a = 1.0	C_{1111}^{\square}	C_{1122}^{\square}	C_{1212}^{\square}
b = 0.0	0.9270	0.0836	0.1668	b = 0.0	0.9009	0.0000	0.0000
b = 0.1	0.8388	0.0646	0.0743	b = 0.1	0.8190	0.0000	0.0000
b = 0.2	0.7415	0.0475	0.0301	b = 0.2	0.7280	0.0000	0.0000
b = 0.3	0.6464	0.0356	0.0139	b = 0.3	0.6370	0.0000	0.0000
b = 0.4	0.5526	0.0270	0.0074	b = 0.4	0.5460	0.0000	0.0000
b = 0.5	0.4597	0.0203	0.0043	b = 0.5	0.4550	0.0000	0.0000
b = 0.6	0.3673	0.0150	0.0027	b = 0.6	0.3640	0.0000	0.0000
b = 0.7	0.2754	0.0106	0.0018	b = 0.7	0.2730	0.0000	0.0000
b = 0.8	0.1838	0.0069	0.0011	b = 0.8	0.1820	0.0000	0.0000
b = 0.9	0.0925	0.0034	0.0005	b = 0.9	0.0910	0.0000	0.0000
b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000	b = 1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Tabelle A.11: Homogenisierungsergebnisse für die Einheitszelle mit rechteckigem Loch (2)

	α_{00}	α_{10}	α_{01}	α_{20}	α_{11}	α_{02}	α_{30}
C_{1111}^{\square}	1.0000	-0.0031	0.1153	-0.2340	-1.1623	-3.1727	0.6154
C_{1122}^{\square}	0.3000	0.0184	0.0185	-0.8390	0.2398	-0.8383	1.7001
C_{1212}^{\square}	0.3500	-0.0037	-0.0038	-0.5404	0.3869	-0.5392	1.0990

	α_{21}	α_{12}	α_{03}	α_{40}	α_{31}	α_{22}	α_{13}
C_{1111}^{\square}	-0.6885	-0.1061	6.5249	-1.3229	2.2202	1.8531	5.9451
C_{1122}^{\square}	-1.6162	-1.6184	1.6961	-2.9513	2.9197	3.9353	2.9260
C_{1212}^{\square}	-3.6420	-3.6422	1.0946	-1.1700	0.0078	17.067	0.0092

	α_{04}	α_{50}	α_{41}	α_{32}	α_{23}	α_{14}	α_{05}
C_{1111}^{\square}	-11.597	1.4703	-1.6851	-3.1192	1.6069	-12.096	13.257
C_{1122}^{\square}	-2.9447	3.3034	-3.5671	-1.9562	-1.9640	-3.5706	3.2985
C_{1212}^{\square}	-1.1619	0.8508	1.6089	-9.2200	-9.2212	1.6070	0.8457

	α_{60}	α_{51}	α_{42}	α_{33}	α_{24}	α_{15}	α_{06}
C_{1111}^{\square}	-0.6249	0.8020	-0.0249	2.0521	-2.9086	7.4052	-6.1104
C_{1122}^{\square}	-1.5204	2.1154	-0.7837	1.8921	-0.7795	2.1154	-1.5190
C_{1212}^{\square}	-0.5673	1.5697	-3.9641	10.146	-3.9634	1.5701	-0.5660

Tabelle A.12: Parameter der Interpolationsfunktionen

$$\begin{aligned}
C_{ijkl}^{\square} = & \alpha_{00} + \alpha_{10} a + \alpha_{01} b + \alpha_{20} a^2 + \alpha_{11} a b + \alpha_{02} b^2 \\
& + \alpha_{30} a^3 + \alpha_{21} a^2 b + \alpha_{12} a b^2 + \alpha_{03} b^3 \\
& + \alpha_{40} a^4 + \alpha_{31} a^3 b + \alpha_{22} a^2 b^2 + \alpha_{13} a b^3 + \alpha_{04} b^4 \\
& + \alpha_{50} a^5 + \alpha_{41} a^4 b + \alpha_{32} a^3 b^2 + \alpha_{23} a^2 b^3 + \alpha_{14} a b^4 + \alpha_{05} b^5 \\
& + \alpha_{60} a^6 + \alpha_{51} a^5 b + \alpha_{42} a^4 b^2 + \alpha_{33} a^3 b^3 + \alpha_{24} a^2 b^4 + \alpha_{15} a b^5 + \alpha_{06} b^6
\end{aligned} \tag{A.83}$$

Diese Homogenisierungsdaten führen in einem Beispiel zur maximalen Steifigkeit bei vorgegebener Masse in Abschnitt 4.1 zu einem Optimierungsergebnis, das sich wesentlich von dem unterscheidet, das mit den Homogenisierungsdaten nach Suzuki et al. [241] erzielt wird. In Bild A.16 sind für beide Fälle die Komponenten der homogenisierten Werkstoffensoren und deren relative Differenzen über den Abmessungen des Rechteck-Lochs aufgetragen. Die Interpolationen sind für die Komponenten C_{1122}^{\square} und C_{1212}^{\square} nahezu identisch. Die Ergebnisse nach Suzuki et al. [241] sind jedoch für die Komponente C_{1111}^{\square} bzw. C_{2222}^{\square} bei einer relativen Dichte $0 < \rho/\rho_0 < 1$ deutlich weicher als die eigenen Resultate. Dies erklärt die unterschiedlichen Optimierungsergebnisse in Abschnitt 4.1. Da der poröse Werkstoff nach Suzuki et al. [241] eine geringe Steifigkeit besitzt, enthält die optimale Materialverteilung nahezu ausschließlich Bereiche mit $\rho \rightarrow 0$ bzw. $\rho = \rho_0$. Dies ist zwar hinsichtlich der Umsetzbarkeit der Optimierungsergebnisse in ein Tragwerk, das aus einem isotropen Material besteht, von Vorteil,

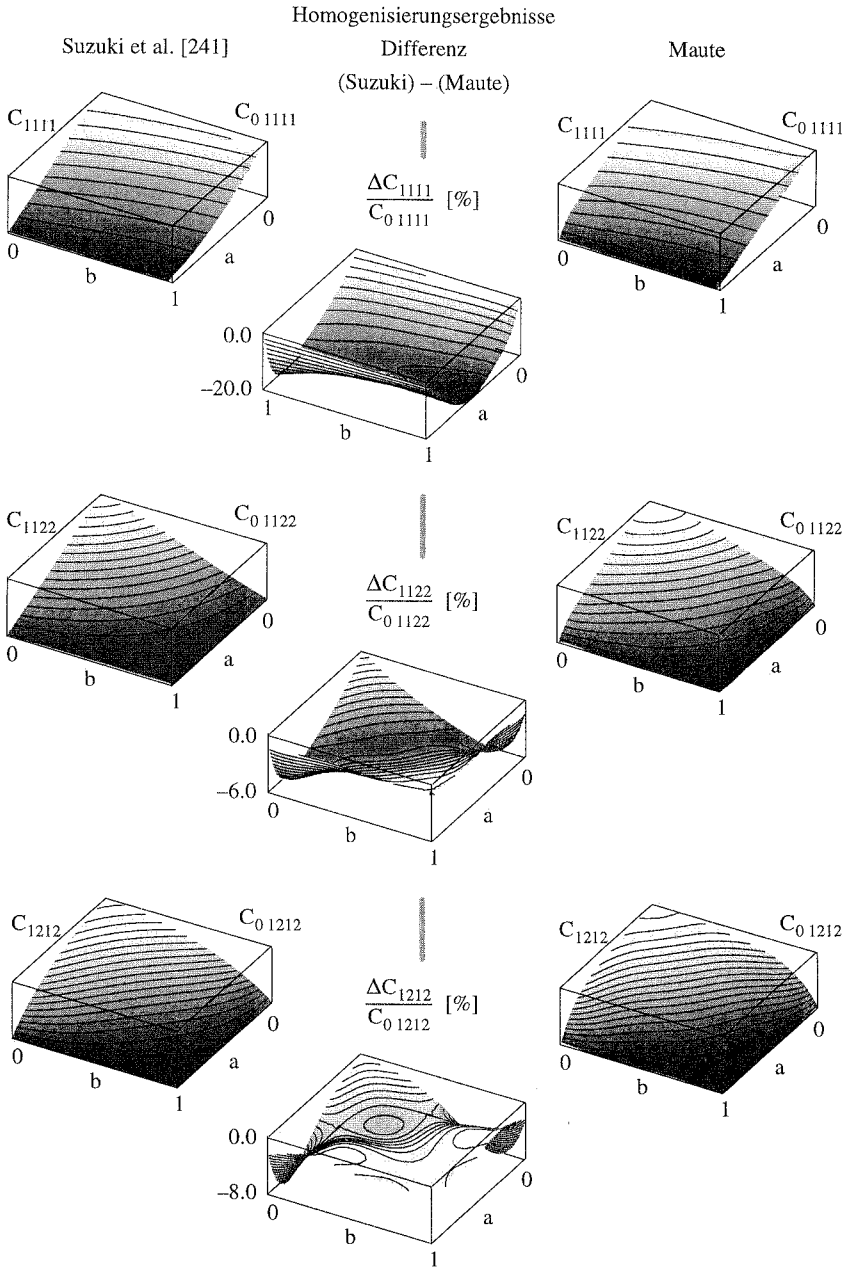


Bild A.16: Vergleich der Homogenisierungsergebnisse mit Suzuki et al. [241]

erklärt jedoch nicht den erheblichen Unterschied zwischen den Homogenisierungsergebnissen. Da die eigenen Homogenisierungsdaten mit den Resultaten von Hassani [116] nahezu übereinstimmen, liegt der Schluß nahe, daß die Ergebnisse von Suzuki et al. [241] hinsichtlich der C_{1111}^0 -Komponenten nicht korrekt sind. Dieser Sachverhalt ist um so bemerkenswerter, als daß sich zahlreiche Autoren in für die Entwicklung der materiellen Topologieoptimierung bedeutenden Arbeiten auf diese Homogenisierungsergebnisse stützen (u.a. Bendsøe, Kikuchi [26], Diaz, Kikuchi [75]).

A9 Konvergenzbeweis zu Abschnitt 3.2

Für den in Abschnitt 3.2 geführten Beweis ist zu zeigen, daß die Folge $\{u^h\}$ für $|\bar{u}| < 1$ schwach gegen \bar{u} konvergiert. Es existiert eine Diskretisierung \bar{h} , so daß für alle $h > \bar{h}$ gilt:

$$\left| \langle \tilde{G}, u^h \rangle - \langle \tilde{G}, u \rangle \right| < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0 \quad (\text{A.84})$$

$$\left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_1 (u^h - \bar{u}) + \tilde{g}_2 \nabla_x (u^h - \bar{u}) \right) dx \right| < \varepsilon \quad (\text{A.85})$$

Beweis:

Der Betrag von (A.85) kann durch die Dreiecksungleichung abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_1 (u^h - \bar{u}) + \tilde{g}_2 \nabla_x (u^h - \bar{u}) \right) dx \right| < \\ & \left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_1 (u^h - \bar{u}) \right) dx \right| + \left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_2 \nabla_x (u^h - \bar{u}) \right) dx \right| \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Die Höldersche Ungleichung liefert eine obere Grenze für den ersten Summanden in (A.86).

$$\left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_1 (u^h - \bar{u}) \right) dx \right| \leq \| \tilde{g}_1 \|_{L_2} \| u^h - \bar{u} \|_{L_2} \quad (\text{A.87})$$

Da die approximierten Verschiebungen u^h gegen die vorgegebene Kurve $\bar{u} \rightarrow \bar{u}$ konvergieren, kann die L_2 -Norm der Differenzverschiebungen mit h nach oben abgeschätzt werden.

$$\| u^h - \bar{u} \|_{L_2} \leq \frac{1}{2} h \quad (\text{A.88})$$

Für die Abschätzung des zweiten Summanden in (A.86) wird davon Gebrauch gemacht, daß die Menge $C_0^\infty(\Omega_s)$ der beliebig stetig differenzierbaren Funktionen dicht in $L_2(\Omega_s)$ ist. Dies

bedeutet, daß man die Funktion $\tilde{g}_2 \in L_2(\Omega_s)$ beliebig gut durch eine Funktion $\tilde{\tilde{g}}_2 \in C_0^\infty(\Omega_s)$ mit $\tilde{\tilde{g}}_2 = 0$ auf dem Rand Γ approximieren kann.

$$\| \tilde{g}_2 - \tilde{\tilde{g}}_2 \|_{L_2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{A.89})$$

Der Summand in (A.86) wird in zwei Anteile aufgespalten.

$$\left| \int_0^1 \left((\tilde{g}_2 - \tilde{\tilde{g}}_2) \nabla_x(u^h - \tilde{u}) \right) dx \right| + \left| \int_0^1 \left(\tilde{\tilde{g}}_2 \nabla_x(u^h - \tilde{u}) \right) dx \right| \quad (\text{A.90})$$

Der erste Anteil von (A.90) kann abermals durch die Höldersche Ungleichung abgeschätzt werden.

$$\left| \int_0^1 \left((\tilde{g}_2 - \tilde{\tilde{g}}_2) \nabla_x(u^h - \tilde{u}) \right) dx \right| \leq \underbrace{\| \tilde{g}_2 - \tilde{\tilde{g}}_2 \|_{L_2}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\| \nabla_x(u^h - \tilde{u}) \|_{L_2}}_{\leq 1 \quad \forall |\zeta| < 1} \quad (\text{A.91})$$

Der zweite Anteil in (A.90) wird unter Berücksichtigung von $\tilde{\tilde{g}}_2 = 0$ auf Γ partiell integriert.

$$\left| \int_0^1 \nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2 (u^h - \tilde{u}) dx \right| \leq \sup |\nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2| \sup |u^h - \tilde{u}| \leq \frac{1}{2} \sup |\nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2| h \quad (\text{A.92})$$

Dieses Integral kann durch das Supremum des Integranden abgeschätzt werden. Die Abschätzungen (A.87), (A.88), (A.91) und (A.92) werden wie folgt zusammengefaßt.

$$\left| \int_0^1 \left(\tilde{g}_1 (u^h - \tilde{u}) + \tilde{\tilde{g}}_2 \nabla_x(u^h - \tilde{u}) \right) dx \right| < \frac{1}{2} h \left(\| \tilde{g}_1 \|_{L_2} + \sup |\nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{A.93})$$

Da die L_2 -Norm von $g_1 \in L_2(\Omega_s)$ und der Betrag des Gradienten von $\tilde{\tilde{g}}_2 \in C_0^\infty(\Omega_s)$ per Definition beschränkt sind, läßt sich immer ein \bar{h} finden, für das gilt:

$$\frac{1}{2} \left(\| \tilde{g}_1 \|_{L_2} + \sup |\nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2| \right) h < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{A.94})$$

Für $h > \bar{h}$ mit

$$\bar{h} = \varepsilon \left(\| \tilde{g}_1 \|_{L_2} + \sup |\nabla_x \tilde{\tilde{g}}_2| \right)^{-1} \quad (\text{A.95})$$

ist die Ungleichung (A.84) bzw. (A.85) erfüllt.

$$\left| \langle G, u^h \rangle - \langle G, \tilde{u} \rangle \right| < \varepsilon \quad \square$$

Lebenslauf

Name: Kurt Karl Christian Maute

Geburtsdatum: 16.12.1965 in Stuttgart

Eltern: Friedrich und Gudrun Maute, geb. Weiss

1972 – 1976 Besuch der Johannes–Widmann–Schule in Sindelfingen / Maichingen

1976 – 1985 Besuch des Gymnasiums Unterrieden in Sindelfingen / Maichingen

Mai 1985 Abitur

1985 – 1986 Wehrdienst

1986 – 1992 Studium der Luft– und Raumfahrttechnik an der Universität Stuttgart

April 1992 Abschluß Diplom–Ingenieur

seit Juni 1992 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik
der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1** **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2** **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3** **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4** **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1** **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2** **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie
nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3** **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger
unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1** **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2** **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1** **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1** **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung
von Stahlbetonplatten.
- 79-1** **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79-2 H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrá:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.

- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten"
Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente
mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit
offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion
zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare
Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten
Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen
axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente
für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen
Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen
bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.

- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Hauser:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.