

**Numerische Simulation
des nichtlinearen Tragverhaltens
von Stahlverbundträgern**

von

Horst Menrath

z
20.4.99



3869

Bericht Nr. 29 (1999)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1999

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart, bezogen werden.

**Numerische Simulation
des nichtlinearen Tragverhaltens
von Stahlverbundträgern**

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Horst Menrath

aus Kirchentellinsfurt

Hauptberichter:	Prof. Dr.–Ing. E. Ramm
Mitberichterin:	Prof. Dr.–Ing. U. Kuhlmann
Tag der mündlichen Prüfung:	16. Februar 1999

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 1999

Zusammenfassung

Die wissenschaftliche Herausforderung, das komplexe Tragverhalten von Stahlverbundkonstruktionen wirklichkeitsnah numerisch zu simulieren, ist Ausgangspunkt dieser Promotion. In dieser Arbeit werden sogenannte „klassische“ Verbundträger numerisch simuliert. Diese Konstruktionsart sieht eine Stahlbetonplatte vor, die auf einem Stahlträger liegt, verbunden mit Kopfbolzendübeln, die dominant Scherkräfte übertragen.

Die jeweiligen Materialmodelle dieser drei Querschnittskomponenten basieren auf der ratenunabhängigen Plastizitätstheorie. Die lokale Integration der konstitutiven Beziehungen für gekoppelte Fließflächen erfolgt mit dem Euler–Backward–Verfahren.

Das Materialverhalten von Baustahl wird mit einem einfachen, isotrop elasto–plastischen Werkstoffmodell abgebildet. Es berücksichtigt eine lineare kombinierte Verfestigung (isotrop und kinematisch).

Für gerissenen Stahlbeton unter Zugbeanspruchung wird angenommen, daß sich die Steifigkeit des bewehrten Querschnitts aus den Komponenten unbewehrter Beton, Betonstahl und dem Mitwirken des Betons zwischen den Rissen (*tension–stiffening*) additiv zusammensetzt. Das auf Bruchenergien basierende Betonmodell berücksichtigt das einaxiale *softening*–Verhalten von Beton (G_f für Zug– und G_c für Druckverhalten) in einer objektiven Formulierung. Die Geometrie der Fließfläche des dreidimensionalen gekoppelten Betonmodells (zwei Drucker–Prager–Teilflächen und eine Kugelkappe) läßt sich mit vier weiteren Parametern definieren. Eine dritte Drucker–Prager–Teilfläche dient der numerischen Behandlung im Bereich der Singularität der ersten Drucker–Prager–Teilfläche.

Zwischen Beton und Betonstahl wird ein unnachgiebiger Verbund angenommen. Der *tension–stiffening*–Effekt wird in Richtung der Bewehrung berücksichtigt. Das Werkstoffmodell setzt ein eindimensionales, elasto–plastisches Verhalten mit linearer Verfestigung voraus.

Im Rahmen einer fiktiven Wechselbeziehung werden das Tragverhalten der Kopfbolzendübel und die geometrischen Diskontinuitäten in der Verbundfuge über *interface*–Elemente modelliert. Die Kopfbolzendübel werden dabei nicht diskret, sondern über ein „verschmiertes Federmodell“ abgebildet. Das nichtlineare Tragverhalten der Verbundmittel wird im Rahmen der Plastizitätstheorie über das Coulombsche Reibungsgesetz beschrieben.

Anhand zweidimensionaler numerischer Untersuchungen werden die Materialmodelle verifiziert. Während der numerischen Integration erfolgt die Kondensation der konsistenten Materialtangente und des Spannungstensors an jedem Gaußpunkt.

Abstract

Basis of the present thesis is the challenge to simulate the real load carrying performance of composite steel–concrete constructions. It describes the numerical simulation of „classical“ steel–concrete beams, which are composed of an upper concrete slab and a lower steel beam, connected at the interface by studs transmitting shear and normal forces.

Rate–independent elastoplasticity for small strains is applied individually to each of the three material components (steel, concrete and interface layer). The local integration procedure is based on a Return–Backward–Euler algorithm for multisurface yield functions.

For the steel–beam the classical von–Mises–elastoplasticity model with combined linear work–hardening (kinematic and isotropic hardening) is applied.

The algorithmic constitutive law for cracked reinforced–concrete combines several features commonly accepted for modelling plain concrete, reinforcement and tension–stiffening (the so called interaction stress contribution). The concrete is modelled by softening plasticity with fracture–energy, G_f for tensile behaviour and G_c for compressive behaviour. Due to the underlying approach mesh–independent results can be obtained with respect to the postcritical regime. Having two Drucker–Prager regions and a spherical cap the geometry of the 3D–multisurface yield criterion is defined by four additional parameters to describe the combined yield function. A third Drucker–Prager yield function is used to handle the singularity problem at the first one.

For reinforcement perfect bond is assumed on the one hand, on the other hand tension–stiffening is considered as an additional stress in rebar direction. The constitutive law for reinforcement is based on a one–dimensional elastoplastic model with hardening.

Interface layers are introduced to model the load carrying behaviour of the studs and the geometrical discontinuities between beam and slab. Here the studs are modelled in a smeared approach instead of being modelled by discrete connectors. This thesis describes the materially non–linear interface behaviour using the Coulomb friction law.

The proposed numerical simulation is verified by two–dimensional examples. The 3D–constitutive law for concrete and the related stress tensor are condensed to 2D on the Gaussian point level.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik an der Universität Stuttgart. Der Schwerpunkt meiner Tätigkeit am Institut lag in den ersten Jahren auf der Lehre, danach konzentrierte ich mich auf die Promotion.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Professor Dr. – Ing. E. Ramm. Er übernahm nicht nur den Hauptbericht, sondern schuf durch sein engagiertes wissenschaftliches Interesse und mit fachlichen sowie menschlichen Gesprächen die wertvolle Ausgangsbasis für dieses Promotionsvorhaben.

Desweiteren gebührt mein Dank Frau Professorin Dr. – Ing. U. Kuhlmann für die Übernahme des Mitberichtes. Ihr Interesse an dieser Arbeit hat mich sehr erfreut.

Dank gilt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik, die mit ihrer Hilfsbereitschaft und mit zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen für eine sehr angenehme, die Arbeit fördernde Umgebung sorgten. Die konstruktive Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Entwicklung elasto – plastischer Materialmodelle mit dem Kollegen André Haufe sei hier besonders erwähnt.

Für die Fachkorrektur einzelner Kapitel sei den Freunden und ehemaligen Kollegen Drs. – Ing. Deane Roehl und Rodolfo Suanno sehr herzlich gedankt. In diesem Zusammenhang bedanke ich mich auch bei Susanne Müller für die Durchsicht der Erstkorrektur.

Nicht zuletzt möchte ich meiner lieben Ehefrau Annette Ziegler ein ganz großes Dankeschön aussprechen, die mir nicht nur die nötige Motivation für diese Arbeit gab, sondern diese durch ihre Korrektur auch tatkräftig unterstützte.

Horst Menrath

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziele der Arbeit	3
1.3 Überblick	4
2 Verbundkonstruktionen	6
2.1 Einführung	6
2.2 Werkstoffkenngrößen	7
2.3 Verbundmittel	10
2.3.1 Tragfähigkeit	10
2.3.2 Duktilität und Steifigkeit	12
2.4 Modellieren von Verbundtragwerken	12
2.5 Materialmodelle	15
2.5.1 Mechanisches Verhalten von Verbundkonstruktionen	15
2.5.2 Plastizitätsmodelle	16
3 Ratenunabhängiges elasto–plastisches Materialverhalten im Rahmen der Methode der Finiten Elemente	19
3.1 Vorbemerkungen	19
3.2 Ratenunabhängiges Materialverhalten	19
3.2.1 Fließbedingung	19
3.2.2 Druckersches Stabilitätskriterium	20
3.2.3 Fließregel	20
3.2.4 Ver–/Entfestigungsgesetz	21
3.2.5 Be– und Entlastungsbedingungen	22
3.2.6 Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation	24
3.2.7 Elasto–plastischer Materialtensor	25
3.3 Inkrementelle Formulierung	25
3.3.1 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ...	25
3.3.2 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen ...	28

3.4	Kondensation der konstitutiven Gleichungen (3D → 2D)	31
4	Numerische Behandlung elasto–plastischer Materialmodelle	34
4.1	Einführung	34
4.2	Fließgesetz von Drucker–Prager: Eine erweiterte J2–Plastizität	35
4.2.1	Fließfunktion	35
4.2.2	Analogie zur J2–Plastizität	37
4.2.3	Elastischer Prädiktor	37
4.2.4	Projektion der Prädiktorspannung auf Fließfläche (<i>radial return mapping</i>)	38
4.2.5	Konsistente elasto–plastische Materialtangente	41
4.2.6	Sonderformen des Drucker–Pragerschen Fließgesetzes	43
4.3	Eindimensionale Plastizität	45
4.4	Die Kugelfläche als Fließbedingung	47
4.4.1	Fließfunktion und assoziiertes Ver–/Entfestigungsgesetz	47
4.4.2	Elastischer Prädiktor und Rückprojektion (<i>closest point projection</i>)	48
4.4.3	Konsistente elasto–plastische Materialtangente	50
4.5	Algorithmischer Modul	53
4.6	Numerische Behandlung diskontinuierlicher Fließflächen	54
4.6.1	Gekoppelte Drucker–Pragersche Fließflächen	54
4.6.2	Der „ <i>inverted cone</i> “ der Drucker–Pragerschen Fließfläche ..	61
5	Beton und Stahlbeton	66
5.1	Vorbemerkungen	66
5.2	Grundlagen des Materialmodells	67
5.2.1	Interpretation der Rißentwicklung	67
5.2.2	Aspekte zur Diskretisierung	68
5.2.3	Tragverhalten von unbewehrtem Beton	69
5.2.4	Tragverhalten von Stahlbeton	76
5.2.5	Zusammenfassung	80
5.3	Modellieren von unbewehrtem Beton	81
5.3.1	Werkstoffmodell mit gekoppelten Teilflächen	81
5.3.2	Identifikation der Fittingparameter	85

5.3.3	Versagensmechanismen des isotropen Werkstoffmodells . . .	86
5.3.4	Lokaler Entlastungszustand – Berücksichtigung der Schädigung	89
5.3.5	Vergleich mit alternativen elasto–plastischen Werkstoffmodellen	92
5.4	Modellieren von Stahlbeton	95
5.4.1	Bewehrungsmodellierung	95
5.4.2	Eingebettete Formulierung	95
5.4.3	Konstitutive Beziehungen für bewehrten Beton	96
6	Numerische Beispiele zum Stahlbetonmodell	99
6.1	Unbewehrte Betonkonstruktionen	99
6.1.1	Druckstab mit Imperfektion	99
6.1.2	L–förmige Scheibe	100
6.1.3	Vierpunktgestützter Balken (<i>SEN–beam</i>)	103
6.2	Stahlbetonkonstruktionen	107
6.2.1	Verifikation des <i>tension–stiffening</i> Modells	107
6.2.2	Balken ohne Schubbewehrung	112
6.2.3	Schubbeanspruchte Scheibe	116
7	<i>Interface</i>–Elemente	120
7.1	Vorbemerkungen	120
7.2	Finite Elemente Formulierung	120
7.2.1	Kontinuierliche Zwischenelemente	120
7.2.2	Konzentrierte Zwischenelemente	123
7.3	Nichtlineare Verbund–Schlupf–Beziehung	124
7.3.1	Coulombsches Reibungsgesetz	125
7.3.2	Ver–/Entfestigungsverhalten	126
7.3.3	Algorithmisches Vorgehen	126
7.4	Verbundmodellierung	129
7.4.1	Ver–/Entfestigungsmodell	129
7.4.2	Parameteridentifikation	130
7.4.3	Testbeispiel	132
7.5	Numerisches Beispiel: Vergleich kontinuierliche/konzentrierte <i>interface</i> –Elemente	133

7.5.1	Linear elastisches Verhalten ($P=10$ [N])	134
7.5.2	Nichtlineares Verhalten	135
8	Numerische Beispiele: Stahlverbundträger	137
8.1	<i>Push-out</i> -Versuch nach EC4	137
8.2	Durchlaufträger mit Einzellasten	143
8.3	Träger mit Stegöffnung	148
9	Zusammenfassung und Ausblick	154
9.1	Zusammenfassung	154
9.2	Schlußfolgerungen und Ausblick	158
	Literatur	159
A	Anhang: Elasto–plastische Materialmodelle	168
A 1	Algorithmischer Modul	168
A 1.1	Projektionsmatrizen	168
A 1.2	Diagonalmatrizen und orthonormale Transformationsmatrix	168
A 2	Rückprojektion und Berechnung der konsistenten elasto–plastischen Materialtangente	169
A 2.1	<i>Inverted cone</i>	169
A 2.2	Betonmodell: Bereich der drei Drucker–Prager–Teifflächen	171
B	Anhang: Verbundmittel	174
B 1	Last–Schlupf–Charakteristiken von Kopfbolzendübeln	174
B 2	Tragfähigkeit von Verbundmitteln	176
B 2.1	Blockdübel in Vollbetonplatten	176
B 2.2	Haken– und Schlaufenanker in Vollbetonplatten	176
B 2.3	Winkeldübel in Vollbetonplatten	177
B 2.4	Reibungsverbund	178

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

Abkürzungen

CARAT	FEM Programmsystem – Computer Aided Research and Analysis Tool
FEM	Finite Elemente Methode
FE	Finite Elemente
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Geometrie

Allgemein

A_e	Elementfläche
h	mittlere Elementfläche
J	Jacobi-Matrix

Beton (Kap. 2, 5, 6 und 8)

$A_{c,eff}$	effektiv auf Zug beanspruchter Betonquerschnitt
c	Betondeckung
d_{max}	Durchmesser vom Größtkorn des Zuschlags
t_c	Dicke der Betonstruktur
t_{eff}	effektiv auf Zug beanspruchte Betondicke

Betonstahl (Kap. 5, 6 und 8)

$(.)_i$	Richtung der Bewehrungslage, indiziert
$A_{s,i}$	Querschnittsfläche
\varnothing_i	Durchmesser
$l_{s,i}$	mittlerer Rißabstand
ρ_i	Bewehrungsgrad
θ_i	Winkel zwischen Richtung der ersten Hauptzugspannung und Bewehrungsrichtung
φ_i	Richtungswinkel

Verbundmittel (Kap. 2, 7 und 8; Anhang B 1)

α	Geometriefaktor (=h/d)
b	Breite der Verbundfuge
d, \varnothing	Schaftdurchmesser des Dübels
e	Dübelabstand
h	Gesamtlänge des Bolzens

Kinematik

E	Green–Lagrange Verzerrungstensor
ϵ	allgemeiner Verzerrungstensor
u	Verschiebungen
Δu	Relativverschiebungen
v	Elementverschiebungsvektor

Kräfte, Lasten, Spannungen

Allgemein

b_o	Volumenkraftvektor bezüglich Referenzkonfiguration
S	2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor
σ	allgemeiner Spannungstensor
t_o	Spannungsvektor bezüglich des Flächenelements dA in der Referenzkonfiguration

Elasto–plastische Materialmodelle (Kap. 3, 4, 5 und 7)

I_1, J_2	Spannungsinvarianten
q	<i>backstress</i> Tensor
s	deviatorischer Spannungstensor
$ s $	Norm des deviatorischen Spannungstensors
σ_c	Spannungskomponente Beton
σ_s	Spannungskomponente Betonstahl
σ_{ia}	Spannungskomponente <i>tension stiffening</i>
σ_m	hydrostatischer Spannungstensor
$\bar{\sigma}$	Fließ– oder äquivalente Spannung
t	Kraftvektor

Werkstoff, Material

Allgemein

C	Materialtensor
G	Schubmodul
K	Kompressionsmodul
ρ_o	Massendichte bezüglich Referenzkonfiguration

Beton (Kap. 2, 5, 6 und 8)

α_F	Bezugskoeffizient Größtkorn Zuschlag/Bruchenergie
d	Schädigungsparameter
E_{cm}	Mittelwert des Sekantenmoduls des Betons
f_{bd}	übertragbare Verbundspannung
f_{ck}	charakteristische Zylinderdruckfestigkeit

f_{cm}	maximale Druckfestigkeit
f_{ctm}	mittlere Zugfestigkeit
G_c	Bruchenergie (einaxialer Druckversuch)
G_f	Bruchenergie (einaxialer Zugversuch)
ν_c	Querdehnzahl

Bau- / Betonstahl (Kap. 2, 5, 6 und 8)

E_s	Elastizitätsmodul
E_H	elasto-plastischer Modul
f_{su}	Nennwert der Zugfestigkeit
f_{sy}	Nennwert der Streckgrenze
ν_{st}	Querdehnzahl

Verbundmittel (Kap. 2 und 7; Anhang B)

f_u	spezifizierte Zugfestigkeit des Bolzenmaterials
γ_v	Teilsicherheitsbeiwert im Grenzzustand der Tragfähigkeit
P_u	maximale Dübeltragfähigkeit
P_t	theoretische Traglast des Dübels
P_{Rk}	charakteristischer Wert der Dübeltragfähigkeit
P_{Rd}	Bemessungswert der Dübeltragfähigkeit

Interface-Elemente (Kap. 2, 7 und 8; Anhang B 1)

c_t	über den Dübelabstand e verteilte maximale Dübeltragfähigkeit
$c(\kappa)$	Kohäsionswert
K_{rs}	elastische <i>inplane</i> Steifigkeit des Einzeldübels
K_t	elastische transversale Steifigkeit des Einzeldübels
K_{rs}	elastische <i>inplane</i> Steifigkeit, über den Dübelabstand e verteilt
k_t	elastische transversale Steifigkeit, über den Dübelabstand e verteilt
μ	Reibungszahl oder -beiwert
φ	Reibungswinkel

Sonstige

Notation (Kap. 3, 4, 5 und 7; Anhang A)

$()$	Ableitung nach der Zeit
$(\cdot)_i$	Summationsindex
$(\cdot)_j$	Fließfunktion j

Elasto-plastische Materialmodelle (Kap. 3, 4, 5 und 7)

α	Vektor der inneren Variablen, definiert im Verzerrungsraum
α_j, μ	Reibungsbeiwert
β_j	Formfunktionen der Drucker-Prager-Teilflächen

c_j	Flag für aktive Fließfläche
\mathbf{D}	Matrix der allgemeinen plastischen Moduln
f	Fließfunktion
F	spannungsabhängiger Anteil von f
g_e	plastisches Potential
g_a	Ver-/Entfestigungspotential
γ_1, γ_2	Fittingparameter
H	plastischer Modul
k	von der Fließspannung abhängiger Anteil von f
κ	effektive plastische Verzerrung
λ	Konsistenzparameter oder plastischer Multiplikator
\mathbf{q}	Vektor der inneren Variablen, definiert im Spannungsraum
Θ	algorithmischer Modul
W^{pl}	Rate der plastischen Arbeit

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Forderung nach leistungsfähigeren und wirtschaftlicheren technischen Bauweisen steht im Einklang mit dem Bestreben, neben den traditionellen Bauweisen des reinen Stahl-, Holz- und Massivbaus in zunehmendem Maße Verbundbauweisen zu etablieren, die nicht nur die Vorteile des jeweiligen Werkstoffes miteinander verbinden, sondern auch die der jeweiligen Bauweisen.

Als Beispiel einer *Verbundbauweise* kann der Ingenieurholzbau genannt werden, bei dem mit Holz als tragendem Element große Spannweiten oder Stützhöhen überbrückt und gleichzeitig die Vorteile des Stahls im Bereich der Verbindungen und Anschlüsse genutzt werden. Als wohl ältester vom Menschen gemachter *Verbundwerkstoff* verbindet Stahlbeton die Vorteile der Komponenten Stahl und Beton.

Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton eröffnen eine Vielzahl von neuen Möglichkeiten. Durch die schubfeste Verbindung von Stahlprofilen mit Betonteilen entstehen Verbundtragwerke für Decken, Träger und Stützen, die durch hohe Tragfähigkeiten bei kleinen Bauhöhen und großen Stützweiten gekennzeichnet sind [99].

In einer wirtschaftlichen Bemessung kommt dem nichtlinearen Verhalten dieser Verbundkonstruktionen immense Bedeutung zu, weshalb verstärkt zuverlässige Berechnungsmethoden gefordert werden, die die Material- und Systemreserven im Rahmen der geltenden Normen ausnutzen. Einfache Berechnungsmodelle reichen meist nicht mehr aus, um komplizierte Versagensmechanismen, Spannungsumlagerungen und teilweises oder gesamtes Systemversagen abbilden zu können. Hier sind Werkstoffgesetze mit einzubeziehen, die das Verhalten der inhomogenen Struktur und somit der jeweiligen Materialien möglichst gut erfassen.

Die wissenschaftliche Basis zur Simulation realistischen Tragverhaltens ist, verbunden mit der permanent steigenden Leistungsfähigkeit der Rechensysteme, die Methode der Finiten Elemente. Als wesentliches Instrument zur Lösung von Problemen der Strukturmechanik ermöglicht sie die Umsetzung von mathematischen Modellen, die beobachtete phänomenologische Materialeigenschaften wirklichkeitsnah abbilden. Da bei den nichtlinearen Analysen im Bauwesen das Abschätzen der Sicherheit gegen Strukturversagen und die Gebrauchsfähigkeit im Vordergrund stehen, eignen sich Materialmodelle, die die Versagensmechanismen in der Meso- oder Makroebene beschreiben, am besten für Strukturberechnungen.

Das stark unterschiedliche Materialverhalten von Stahl und Beton erfordert eine differenzierte Betrachtung beider Werkstoffe. Zwischen den Verbundkonstruktionen und

Stahlbeton besteht insofern ein Analogon, daß jeweils die Einzelkomponenten Stahl und Beton, aber auch deren Zusammenwirken (Verbund) zu modellieren sind.

Das komplexe Werkstoffverhalten von Beton ist Anlaß zur Entwicklung neuartiger, z.T. komplizierter Werkstoffmodelle, mit denen beispielsweise das mikromechanische Verhalten dieses Werkstoffes beschrieben wird. Die im Bauwesen geführten Analysen sind jedoch auch unter dem Aspekt der Wirtschaftlichkeit zu sehen. Um dieser Forderung gerecht zu werden, müssen folgende Kriterien erfüllt sein:

- Materialmodelle, deren Parameter einfach identifiziert werden können, z.B. anhand der in Normen angegebenen Werkstoffkenngrößen;
- größtmögliche numerische Stabilität innerhalb tolerierbarer Rechenzeiten;
- Zuverlässigkeit bei der Beurteilung von Versagensmechanismen.

Im Hinblick auf die numerische Stabilität ist es zweckmäßig, daß die Materialmodelle aller Komponenten eines Verbundquerschnittes auf derselben theoretischen Grundlage basieren. Diese These steht nur scheinbar im Widerspruch zu dem doch unterschiedlichen Materialverhalten der jeweiligen Werkstoffe.

Bei den im Bauwesen üblichen kleinen Deformationen ist die numerische Simulation metallischer Strukturen mit elasto–plastischem Materialverhalten weitgehend Stand der Technik. Die Modellierung dieser Strukturen wird nicht weiter erläutert. Verwiesen wird in diesem Zusammenhang unter anderem auf Krieg et al. [63] und [64], Simo et al. [109] und Chen [22]. Zudem ist die Anwendung derartiger Materialmodelle sowohl bei Stahlbetonstrukturen als auch bei der Modellierung des nichtlinearen Verbundverhaltens üblich. Die theoretische Grundlage der hier vorgestellten Materialmodelle ist die *Plastizitätstheorie*.

In einer Vielzahl von Veröffentlichungen zur Modellierung von Betonstrukturen sind trotz der erwähnten, vielfältigen Entwicklungen die Plastizitätsmodelle weiterhin stark verbreitet. Bei den eher „klassischen“ Modellen wird dabei das Ver–/Entfestigungsverhalten über einen internen Parameter beschrieben; das Zug– und Druckverhalten sind somit gekoppelt ([130], [23] u.a.). Neuere Plastizitätsmodelle wurden dahingehend modifiziert, daß beim Ver–/Entfestigungsverhalten zwischen Druck– und Zugversagen unterschieden und kombinierte Ver–/Entfestigungsgesetze zur Berücksichtigung des anisotropen Werkstoffverhaltens berücksichtigt werden ([38], [49]). Des weiteren werden bei Betonmodellen die Plastizitäts– und Schädigungstheorie gekoppelt ([43], [119], [84]).

Das Modellieren einzelner Verbundmittel innerhalb einer komplexen Struktur erweist sich als zu aufwendig. Deshalb etablierte sich in der Forschung ein Modell, welches das Verbundverhalten von „verschmierten“ Verbundmitteln in der Verbundfuge zwischen Stahlprofil und Betonteil abbildet ([76], [15], [28] u.a.). Zum Bestimmen der Schubtrag-

fähigkeit der jeweiligen Verbundmittel wird auf die in Normen [31] oder Einzelzulassungen ([121], [37] u.a.) angegebenen Rechenmodelle zurückgegriffen, die mit *push-out*-Versuchen verifiziert wurden. Das hier vorgestellte Verbundmodell orientiert sich bei der Parameteridentifikation am EC4. Dieses ingenieurmäßige Vorgehen erfolgt analog zum Betonmodell. Insofern ist es auch zweckmäßig, Parallelen bei der Entwicklung von Algorithmen für beide Modelle zu ziehen. Den Kern dieser Arbeit stellt das hier entwickelte elasto-plastische Betonmodell dar. Aufgrund dessen Allgemeingültigkeit können Teile der Algorithmen auch beim Verbundmodell genutzt werden.

1.2 Ziele der Arbeit

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, die materiellen Nichtlinearitäten der Komponenten Stahl und Betonstahl, Beton und die des Verbundes unter Anwendung der Methode der Finiten Elemente abzubilden. Die Wahl der Materialmodelle berücksichtigt, daß auf dieser Arbeit aufbauende Forschungen dreidimensionale Modellierungen durchführen können. Schwerpunkt dieser Arbeit sind die dreidimensionalen Materialmodelle der jeweiligen Verbundkomponenten, die zunächst an Strukturen untersucht werden, die eine zweidimensionale Modellierung rechtfertigen.

Die klare Trennung der Komponenten Stahlbeton, Baustahl und Verbundverhalten ermöglicht folgende Gliederung bei der Bearbeitung:

- Aufbereitung der mit den Werkstoffmodellen verbundenen konstitutiven Gleichungen für kleine plastische Deformationen. Angabe der gewählten Integration für die Stoffgesetze und Bereitstellung der jeweiligen konsistenten Materialtangente.
- Formulierung eines dreidimensionalen Werkstoffgesetzes für Beton, das die wesentlichen phänomenologischen Versagensmechanismen des Werkstoffes wiedergibt. Das Werkstoffmodell soll größtmögliche numerische Stabilität besitzen. Die Identifikation der Parameter konzentriert sich in einem ingenieurmäßigen Vorgehen auf die Materialkenngrößen der geltenden Normen (EC2, CEB-FIP).
- Implementierung von Zwischenelementen zur Modellierung des nichtlinearen Verbundverhaltens in der Verbundfuge, einschließlich der mit den plastischen Werkstoffeigenschaften verknüpften Algorithmen. Wie beim Betonmodell sind auch hier die Parameter über geltende Normen zu bestimmen. Diese Zwischenelemente stellen ein *tool* dar, das sich auch zum Modellieren von diskreten Rissen bei Betonstrukturen eignet [101].
- Modellieren von Stahlverbundträgern und Untersuchung der Anwendbarkeit der zuvor genannten Werkstoffmodelle.
- Innerhalb der zweidimensionalen Modellierung sind im Falle des ebenen Spannungszustandes die dreidimensionalen Werkstoffgesetze zu kondensieren.

- In Beispielrechnungen wird sowohl das Verhalten der Komponenten unbewehrter und bewehrter Beton als auch das Verbund- und Tragverhalten von Verbundkonstruktionen modelliert.

Der Einbau der Materialmodelle erfolgt im Programmsystem CARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart.

1.3 Überblick

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel:

In **Kapitel 2** werden die Komponenten der Verbundkonstruktionen und das jeweilige Tragverhalten erläutert. Schwerpunkt in diesem Kapitel sind die Verbundmittel. Das Vorgehen beim Modellieren dieser Verbundtragwerke korrespondiert mit der Wahl der Materialmodelle, die auf der Plastizitätstheorie basieren.

Kapitel 3 gibt eine Übersicht über die phänomenologische Plastizitätstheorie und führt die erforderlichen Begriffe ein. Unter Voraussetzung kleiner Deformationen werden in einer inkrementellen Formulierung lediglich die konstitutiven Gleichungen linearisiert. Abschließend wird die für die zweidimensionale Modellierung notwendige Kondensation der dreidimensionalen konstitutiven Gleichungen im Rahmen des Newton – Verfahrens erläutert.

In **Kapitel 4** werden die Projektionsalgorithmen und die jeweilige konsistente Materialtangente der Drucker – Pragerschen Fließfunktion und der Kugelfläche als Fließfläche abgeleitet. Das algorithmische Vorgehen bei der Fließfunktion von Drucker – Prager wird für den Fall von mehrteiligen Fließflächen mit nicht glatten Übergängen erweitert.

Kapitel 5 befaßt sich in einem ersten Abschnitt mit den wesentlichen mechanischen Eigenschaften von Beton und Stahlbeton. Das jeweilige Tragverhalten, beobachtete phänomenologische Materialeigenschaften wie *cracking*, *crushing* und *tension – stiffening* werden aufgezeigt und deren Umsetzung im Werkstoffmodell erläutert.

Das hier vorgestellte Werkstoffmodell mit gekoppelten Teilflächen ist der Klasse „Cap – Modell“ zuzuordnen. Es beinhaltet eine dreidimensionale Erweiterung der zweidimensionalen Betonmodelle von Chen und Chen [23] bzw. Feenstra [38]. Wesentlich ist hierbei, daß sich die Versagensmechanismen näherungsweise auf die Kenngrößen des einaxialen Zug – und Druckverhaltens beschränken lassen. Die Versagensmechanismen werden jeweils über ein *softening* – Modell wiedergegeben. Wie Feenstras Modell hat es den Vorteil, daß die Anzahl der Parameter gering ist und diese über die geltenden Normen (EC2, CEB – FIP) bestimmt werden können.

Um die Brauchbarkeit des konstitutiven Modells für Stahlbeton zu überprüfen, werden in **Kapitel 6** zunächst Beton – und anschließend Stahlbetontragwerke untersucht. Die Beispiele sind in der Literatur angegebene Versuche und *benchmarks*. Die Analysen

stellen die materielle Nichtlinearität in den Vordergrund. Die Belastung der jeweiligen Strukturen erfolgt verschiebungsgesteuert.

Durch die Wahl des *Coulombschen Reibungsgesetzes* als Modell für das nichtlineare Verbundverhalten werden in **Kapitel 7** Parallelen zur Drucker–Pragerschen Fließfläche gezogen; das algorithmische Vorgehen ist nahezu identisch. Im Hinblick auf die numerische Stabilität werden zwei Elementtypen untersucht: kontinuierliche und konzentrierte Zwischenelemente (*interface*–Elemente).

Das nichtlineare Verbundverhalten wird über zwei alternative Modelle abgebildet. Das *softening*–Modell lehnt sich an das des einaxialen Zugverhaltens von Beton an. Über das Modellieren des Verbundverhalten von Stahlverbundkonstruktionen hinaus eignet sich dieses Modell zum Modellieren diskreter Risse in Geomaterialien. Das *multilineare* Modell approximiert relativ genau das in Versuchen gemessene Last–Schlupf–Verhalten. Beispiele zeigen das unterschiedliche Approximationsverhalten beider Modelle auf und untersuchen den Einfluß beider Elementtypen auf das numerische Verhalten.

Die entwickelten elasto–plastischen Materialmodelle werden in **Kapitel 8** auf Stahlverbundkonstruktionen angewandt. Da sich speziell Strukturen mit einer gedruckten Betonplattenbreite für ein zweidimensionales Modellieren eignen, stellen Versuche und Untersuchungen von Bode et al. ([13], [15]) Referenzlösungen für die hier untersuchten Strukturen dar. Die Methodik bei den Tragwerksanalysen entspricht jener von Kap. 6.

In **Kapitel 9** werden Schlußfolgerungen aus dieser Arbeit gezogen und die Vor– und Nachteile der Materialmodelle erörtert. Hieraus ergeben sich Anknüpfungspunkte für weiterführende wissenschaftliche Entwicklungen.

Zur Ergänzung und Vertiefung sind im **Anhang A** zum einen bei der Berechnung des algorithmischen Moduls erforderliche Matrizen aufgeführt, zum anderen werden für gekoppelte Teilflächen ergänzende algorithmische Details abgeleitet. In **Anhang B** sind Last–Schlupf–Charakteristiken von Kopfbolzendübeln angegeben und alternative Verbundmittel aufgelistet.

Hinweise auf die Literatur finden sich in den einzelnen Kapiteln.

2 Verbundkonstruktionen

Nach einer allgemeinen Einführung über den Aufbau von Stahlverbundkonstruktionen wird auf die Werkstoffkenngrößen, speziell der im Stahlbau üblichen Verbundmittel, eingegangen. Das Modellieren der einzelnen Querschnittskomponenten und der Tragwerke im gesamten ist ausschlaggebend für die Wahl der Materialmodelle.

2.1 Einführung

Schon seit Mitte der 60er Jahre werden Stahlverbundkonstruktionen im konstruktiven Ingenieurbau angewendet. Als Verbundkonstruktionen werden Konstruktionen bezeichnet, bei welchen die Werkstoffe Baustahl (Stahlprofile, Stahlrohre, Stahlfachwerke) und Beton (Stahl- bzw. Spannbeton) schubfest miteinander verbunden sind und planmäßig zusammenwirken [66]. Die hier behandelten Verbundkonstruktionen beschränken sich auf den Verbund von Baustahl und Stahlbeton, wobei es sich bei Stahlbeton ebenfalls um einen Verbundwerkstoff handelt.

Für Verbundbauweisen typisch ist die optimale Nutzung der Eigenschaften unterschiedlicher Werkstoffe und deren Komponenten. Wie auch beim Stahlbeton bestehen die Vorteile dieser Verbundtragwerke in der

- großen Zugfestigkeit des Stahls und der
- großen Druckfestigkeit des Betons.

Die Vorteile der Stahlbauweise, u.a.

- kurze Bauzeiten durch einen hohen Grad an Vorfertigung,
- große Spannweiten bei niedriger Bauhöhe,
- große Gebrauchsfähigkeit und Flexibilität,
- schlanke und filigrane Bauweise mit geringen Querschnittshöhen

treffen auch im Verbundbau zu [66]. Aus der Symbiose beider Werkstoffe ergeben sich weitere Vorteile:

- bauphysikalischer Vorteil des Betons (Brandschutz);
- Stahlteile übernehmen auch die Funktionen der Rüstung und Schalung.

Ausgehend von den eher „klassischen“ Konstruktionsformen (Verbundträger, Verbunddecken mit Trapezblech, Verbundstützen: siehe Bild 2.1), bewirkten Innovationen in den letzten Jahren eine weitere Verbreitung dieser Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen. Im Bereich des Industrie- und Hochbaus sei hier exemplarisch die Entwicklung neuer Verbund- und Flachdeckensysteme (z.B. *slim floor*), die Einführung neuer Verbindungstechniken und Lasteinleitungsstrukturen für Verbundstützen, die Entwicklung neuer oder die Weiterentwicklung bekannter Verbundmittel genannt [46].

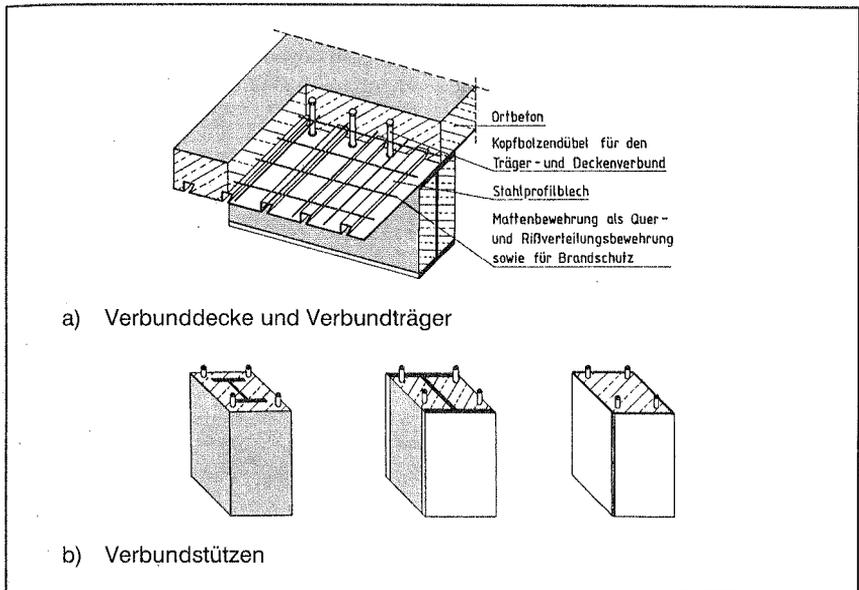


Bild 2.1 „Klassische“ Verbundkonstruktionen [99]

Für die numerische Simulation von Verbundkonstruktionen konzentriert sich diese Arbeit auf das Modellieren von Verbundträgern, bestehend aus den drei Komponenten Stahlprofil, Stahlbetonplatte und Verbundmittel. Um diese Komponenten werkstoffgerecht abbilden zu können, wird in einer ingenieurmäßigen Vorgehensweise auf die charakteristischen Werkstoffkenngrößen der entsprechenden Normen (DIN 18800 [32], EC4 [31], EC2 [34] oder CEB–FIP [21], u.a.) zurückgegriffen. Ziel ist es, das Tragverhalten von Verbundtragwerken möglichst wirklichkeitsgetreu abzubilden und Versagensmechanismen phänomenologisch zu erfassen. Dazu ist die maximale Beanspruchbarkeit des jeweiligen Werkstoffes zu bestimmen.

2.2 Werkstoffkenngrößen

Die für die Bemessung wichtigsten Werkstoffeigenschaften sind in den oben genannten Normen, geordnet nach Festigkeits- oder Güteklassen, angegeben. Zudem definieren die Normen Beziehungen zwischen der Bemessungsgröße und der maximalen Beanspruchbarkeit des jeweiligen Werkstoffes.

• Beton

Festigkeitsprüfungen beim Werkstoff Beton sind bekanntermaßen großen Streuungen ausgesetzt. Im EC2 bzw. CEB–FIP wird beispielsweise der Unterschied zwischen der

charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} als Fraktilwert (siehe Bild 2.2a) und der mittleren Druckfestigkeit als Mittelwert f_{cm} eines Stichprobenumfangs mit 8 [N/mm²] angegeben (siehe auch Tafel 5.1 in 5.2.3).

• Baustahl

Die in Versuchen ermittelten Kenngrößen der jeweiligen Stahlgüten sind geringeren Streuungen unterworfen. Deshalb können die Nennwerte der Streckgrenze f_{sy} und der Zugfestigkeit f_{su} als charakteristische Werte ([32], [31]) des Werkstoffs Baustahl (siehe Bild 2.2b) angesetzt werden.

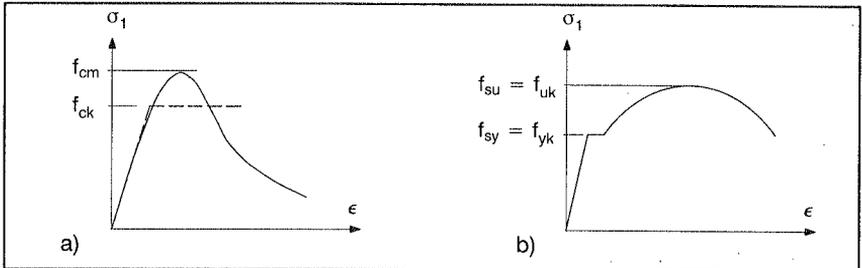


Bild 2.2 Werkstoffkenngrößen
a) Beton ([34] u.a.)

b) Baustahl [32]

• Verbundmittel

Speziell für Kopfbolzendübel gab es in den vergangenen Jahren zahlreiche Veröffentlichungen zu *push-out*-Versuchen. Im deutschsprachigen Raum sind hier Roik et al. [97] [98], Bode [11], Kuhlmann et al. [67] sowie Hanswille et al. [45] [47] zu nennen. Diese bestätigen die derzeitigen Rechenmodelle im EC4 zum Bestimmen der Traglast von Kopfbolzendübeln in Verbundkonstruktionen. Die Traglastformeln des EC4 werden in dieser Arbeit dem Werkstoffmodell zur Verbundmodellierung zugrunde gelegt.

Veröffentlichungen zu Versuchen mit alternativen Verbundmitteln sind eher selten ([1], [74], [120], [65]). Dennoch gibt der EC4 die Grenzscherkräfte P_{Rd} nicht nur für Kopfbolzendübel, sondern auch für Blockdübel, Haken- und Schlaufenanker in Vollplatten, Winkeldübel in Vollplatten und für Reibungsverbund vor. Die Beurteilung, inwieweit die Traglastformeln der zuletzt genannten Verbindungsmittel lediglich auf empirischen Untersuchungen basieren, steht hier nicht zur Diskussion. Die maximale Beanspruchbarkeit dieser Verbindungsmittel kann mit dem EC4 abgeschätzt werden.

Das Mittel aller experimentellen Traglasten wird im EC4 und bei Roik et al. [98] als „theoretische Traglast“ P_t bezeichnet (siehe auch Bild 2.3); Rechenmodelle (oder Formeln) geben diese wieder. Die charakteristische Tragfähigkeit entspricht, unter Vorausset-

zung eines ausreichend großen Stichprobenumfangs, einem Fraktilwert. Dieser ist ein garantierter Mindestwert, der nur von einem gewissen Prozentsatz aller Versuche unterschritten wird. Im Regelfall ist dies die 5%–Fraktile (siehe Bild 2.3).

Bei einem kleinen Stichprobenumfang (mindestens drei Versuche) ist nach EC4 der charakteristische Wert P_{Rk} der Schertragfähigkeit (siehe Bild 2.4) der um 10% abgeminderte kleinste Versuchswert. Danach definiert folgende Näherung eine Beziehung zwischen dem Bemessungswert P_{Rd} und dem kleinsten Versuchswert P_u .

$$P_u \approx P_{Rk} / 0,90 = P_{Rd} \gamma_v / 0,90 \quad (2.1)$$

Dieser Schätzwert der maximalen Beanspruchbarkeit von Verbundmitteln ist dann zu bestimmen, wenn keine detaillierten Versuchsergebnisse vorliegen.

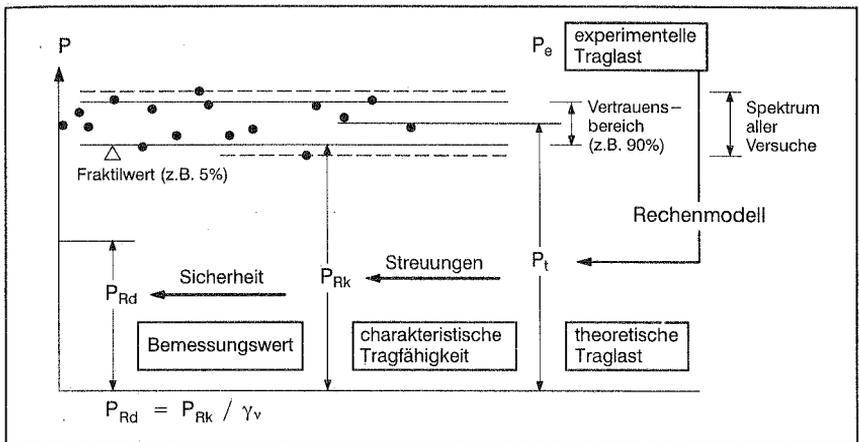


Bild 2.3 Ermittlung der charakteristischen Tragfähigkeiten und der Bemessungswerte der Tragfähigkeit aus Versuchsergebnissen [98]

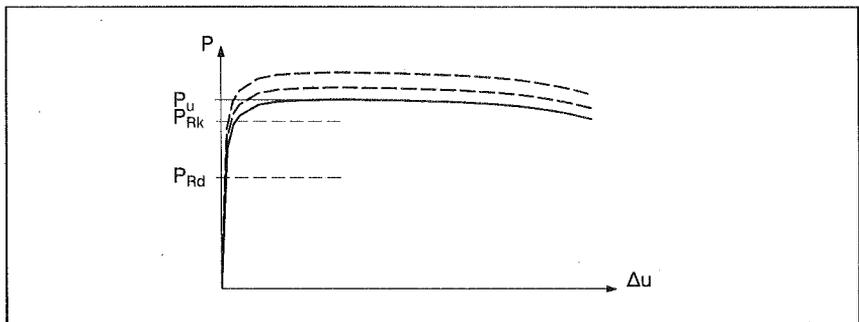


Bild 2.4 Last-Schlupf-Charakteristik bei kleinem Versuchsumfang

2.3 Verbundmittel

Das nichtlineare Verhalten der Verbundmittel in der Verbundfuge zwischen der Stahlbetonplatte und dem Stahlträger beeinflusst in großem Maße das Last–Verformungsverhalten des Verbundträgers [76]. Die *Tragfähigkeit*, *Duktilität* und *Steifigkeit* als Kenngrößen der Verbundmittel bestimmen das Tragverhalten. Dominante Aufgabe der Verbundmittel ist es, Schubkräfte zwischen den zu verbindenden Teilquerschnitten zu übertragen.

Die Verbundmittel sind teure Konstruktionselemente, so daß deren Reduktion (teilweise Verdübelung) die Wirtschaftlichkeit der Verbundkonstruktionen erhöht [28]. Bei einer *teilweisen Verdübelung* kommt der Steifigkeit und der Duktilität der Verbundmittel eine wesentliche Bedeutung zu.

„Als duktil werden Verbundmittel mit einem Verformungsvermögen bezeichnet, das die Annahme eines ideal–plastischen Verhaltens in der Verbundfuge bei der Berechnung des Tragwerks rechtfertigt“ (EC4 [31], Abschnitt 6.2.1).

Insofern sind nach EC4 *elastisch–plastische* Nachweisverfahren (elastische Ermittlung des Schubkraftverlaufs, plastische Tragfähigkeit des Einzeldübels) starren und damit nicht duktilen Verbundmitteln zuzuordnen, *plastisch–plastische* Nachweisverfahren (plastische Ermittlung des Schubkraftverlaufs, plastische Tragfähigkeit des Einzeldübels) nachgiebigen und damit duktilen Verbundmitteln. Um das Verbundverhalten wirklichkeitsnah modellieren zu können, ist die Identifikation der oben genannten Kenngrößen von entscheidender Bedeutung.

2.3.1 Tragfähigkeit

Der EC4 (Abschnitt 3.5.2) definiert die Tragfähigkeit von Verbundmitteln als die maximale Last in der betrachteten Richtung (im Regelfall parallel zur Verbundfuge), die bis zum Versagen der Verbundmittel übertragen werden kann. Der charakteristische Wert der Tragfähigkeit P_{Rk} und der Bemessungswert P_{Rd} wurden im vorigen Kapitel erläutert. Für ein wirklichkeitsnahes Modellieren ist die maximale Beanspruchbarkeit oder Tragfähigkeit des einzelnen Verbundmittels entsprechend Gl.(2.1) zu bestimmen, falls in den Normen keine detaillierten Angaben dazu gemacht werden.

Von entscheidender Bedeutung für die Tragfähigkeit des Verbundmittels ist die Güte des angrenzenden Betons und dessen Bewehrungsgrad. Die Querbewehrung hat dabei Spaltzugkräfte aufzunehmen ([98], [76], [67] u.a.).

Diesbezüglich fordert der EC4 nicht nur eine konstruktive Mindestbewehrung (Abschnitt 6.6.4), sondern auch, daß *„die Querbewehrung des Betongurtes für den Grenz-zustand der Tragfähigkeit so zu bemessen ist, daß ein Versagen infolge Längsschub bzw. örtlicher Krafteinleitung in den Betongurt vermieden wird“* (EC4, Abschnitt 6.6.1).

Unter Berücksichtigung einer konstruktiven und statisch erforderlichen Bewehrung sind im EC4 Berechnungsmodelle zum Bestimmen der Grenzscherkräfte diverser Verbundmittel angegeben. Auszugsweise sind dies:

● **Kopfbolzendübel in Vollbetonplatten**

Die Rechenmodelle zum Bestimmen der Grenzscherkraft eines Kopfbolzendübels beruhen auf den Versagensmechanismen Beton- und/oder Dübelversagen. Statistische Auswertungen von *push-out*-Versuchen für Dübel mit Durchmessern bis zu $d=25$ [mm] bestätigten diese Rechenmodelle ([98], [46] u.a.).

Für Schub-Zugbruch des Dübels oberhalb des Schweißwulstes (siehe Bild 2.5) ist dies

$$P_{Rd} = 0,8 f_u \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\gamma_v} \quad (2.2)$$

Tritt ein örtliches Betonversagen im Bereich des Bolzenfußes oder/und ein Herausreißen des Betons (siehe Bild 2.5) auf, läßt sich die Grenzscherkraft über

$$P_{Rd} = 0,29 \alpha d^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}} \frac{1}{\gamma_v} \quad (2.3)$$

bestimmen. Der kleinste beider Werte ist maßgebend. Darin sind:

d ... Schaftdurchmesser des Dübels

f_u ... spezifizierete Zugfestigkeit des Bolzenmaterials (≤ 500 [N/mm²])

f_{ck} ... charakteristischer Wert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons

E_{cm} ... Mittelwert des Sekantenmoduls des Betons

$$\alpha \begin{cases} = 0,2 [(h/d) + 1] & \text{für } h/d < 4,0 \\ = 1,0 & \text{für } h/d \geq 4,0 \end{cases}$$

h ... Gesamtlänge des Bolzens

$\gamma_v = 1,25$ (Teilsicherheitsbeiwert im Grenzzustand der Tragfähigkeit)

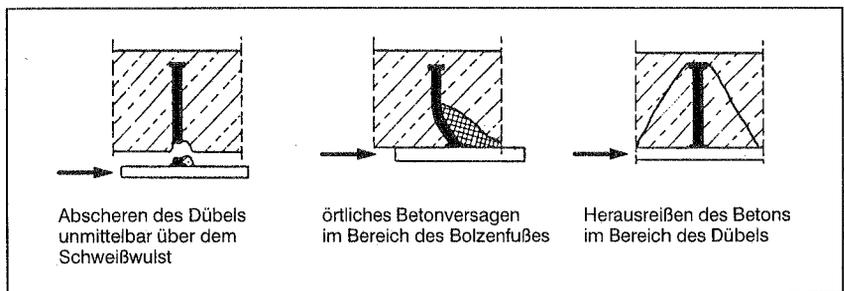


Bild 2.5 Mögliche Versagensarten bei Abscherversuchen [31]

Die Grenzscherkräfte der Verbundmittel **Blockdübel, Haken- und Schlaufenanker, Winkeldübel** und **Reibungsverbund** gemäß EC4 sind im Anhang B 2 tabelliert.

2.3.2 Duktilität und Steifigkeit

Duktilität und Steifigkeit werden wie die Tragfähigkeit von einer Vielzahl von Parametern (Betongüte, Bewehrungsgrad, Querbewehrung, Bolzenmaterial und -durchmesser) beeinflusst. Doch liegen zu beiden Größen im EC4 keine Rechenmodelle oder adäquate Angaben vor. Die Werte dieser Kenngrößen sind Last-Schlupf-Charakteristiken, siehe beispielsweise Anhang B 1, zu entnehmen.

Für die **Duktilität** ist das Last-Verformungsverhalten nach Erreichen der Traglast entscheidend. In Bild 2.6 werden die zuvor genannten Verbundmittel dahingehend eingestuft.

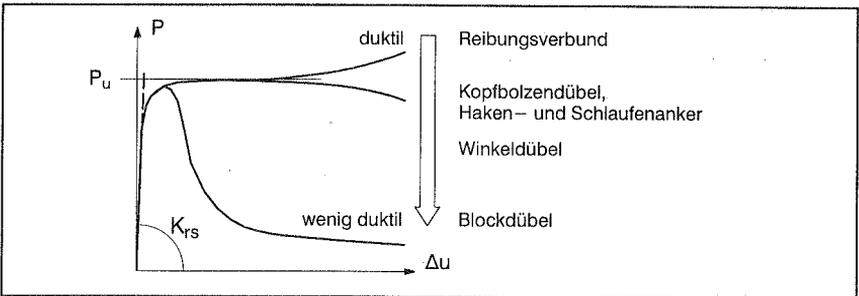


Bild 2.6 Duktilität der Verbundmittel im Verbund

Analog zu den Werkstoffen Beton und Stahl wird das Last-Verformungsverhalten von einer Anfangselastizität geprägt. Die Größe der **elastischen Sekantensteifigkeit K_{rs}** ist einem Last-Verformungsdiagramm entsprechend Bild 2.6 zu entnehmen.

2.4 Modellieren von Verbundtragwerken

Verbundtragwerke erfordern aufgrund der Inhomogenität der Werkstoffe besondere Berechnungsverfahren, um sowohl die globale Strukturantwort als auch lokale Versagensmechanismen erfassen zu können. Das in der Praxis und Forschung etablierte *Fließgelenkverfahren* (materiell nichtlineare Stabtheorie 1. und 2. Ordnung) kann nichtlineare Einflüsse nur mit erheblichen Einschränkungen und abstrahierenden Annahmen wiedergeben. Effekte wie Nachgiebigkeit der Verdübelung, Verfestigung des Baustahls, Betonversagen unter Druck, Rißbildung oder das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen bleiben im Regelfall unberücksichtigt. Bereiche mit geometrischen und statischen Diskontinuitäten (Querschnittssprünge, Rahmenecken, Lasteinleitung) erfordern zusätzliche Behelfsmodelle.

Als praktisches Verfahren zur Lösung nichtlinearer Randwertprobleme der Kontinuumsmechanik ist die Methode der Finiten Elemente (FE) weit verbreitet und anerkannt, weshalb sie auch in der vorliegenden Arbeit angewandt wird. Die Publikationen zu dieser Methode sind zahlreich. Insbesondere die Standardwerke von Bathe [3] und Zienkiewicz et al. [133] bzw. [134] sind hier zu nennen, die außer den Grundlagen auch zahlreiche Detailfragen erörtern.

Den Zusammenhang zwischen Strukturantworten, Dehnungen, Spannungen oder Versagensvorgängen definieren grundlegende Beziehungen der Kontinuumsmechanik (kinematische Beziehungen, Spannungsmaße, Bilanzgleichungen, Arbeits- und Energieprinzipien). Sehr übersichtlich sind diese in den Arbeiten von Roehl [96] und Braun [19] zusammengestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit stehen die Funktionalität und Plausibilität der Materialmodelle im Vordergrund. Um die numerischen Simulationen mit einem vertretbaren Aufwand betreiben zu können, werden hier die Strukturen zweidimensional modelliert. Dazu haben die Verbundtragwerke die folgenden Voraussetzungen zu erfüllen:

- symmetrischer Querschnitt;
- symmetrische Last bezüglich der Querschnittsachse;
- Querschnittsverwölbungen müssen vernachlässigbar gering sein;
- Querschnitts- bzw. Trägerstabilität (keine seitlichen Verschiebungen infolge Biegedrillknicken bzw. Biegeknicken oder Beulen [90]).

Betonplatte und Stahlträger können dann mit ebenen FE unterschiedlicher Dicke modelliert werden (siehe Bild 2.7). Daraus folgt, daß über die Dicke der FE die Spannungen beispielsweise konstant oder Risse gleichmäßig verteilt sind. Diese Phänomene sind in der Regel nur bei dünnen Strukturen zu beobachten.

Üblicherweise wird das Abscherverhalten anhand von *push-out*-Versuchen untersucht und mit Last-Schlupf-Charakteristiken dokumentiert. Ribilder und der Zustand der nach Versuchsende freigelegten Verbundmittel lassen Rückschlüsse auf die Versagensmechanismen zu. Die Last-Schlupf-Charakteristiken geben somit das Tragverhalten der Verbundmittel wieder, das, wie in der Literatur üblich, mit Federmodellen simuliert wird ([76], [103], [11], [15], [61] u.a.). Prinzipiell sind zwei gängige Federmodelle denkbar:

- Einzelfeder je Dübel, oder
- „verschmiertes“ Federmodell, d.h. die Kenngrößen der Tragfähigkeit eines Dübels werden über den Dübelabstand e verteilt (siehe Bild 2.7).

Bei beiden Federmodellen wird über die Größe der Traglast festgelegt, welcher der beiden Versagensmechanismen, Beton- oder Dübelversagen nach Gl. (2.2) bzw. Gl. (2.3),

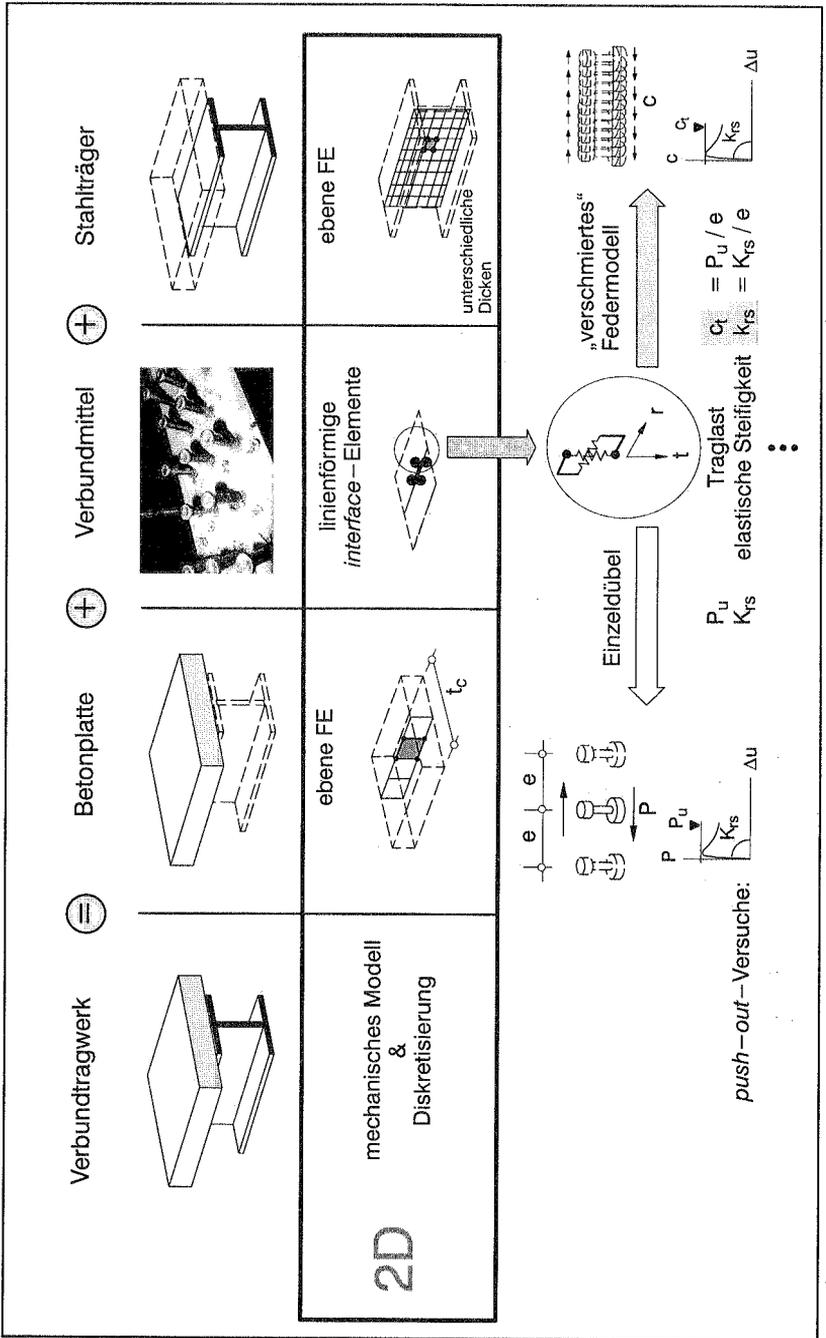


Bild 2.7 Modellieren von Verbundträgern

maßgebend wird. Der Vorteil dieser Federmodelle im Vergleich zum Modellieren diskreter Verbundmittel liegt im geringen Modellierungsaufwand.

Die beschriebene Art der Modellierung ist dann gerechtfertigt, wenn bei der numerischen Simulation des Tragverhaltens das globale Strukturverhalten im Vordergrund steht. Gleichzeitig gilt es, das Verhalten unterschiedlicher Materialien möglichst werkstoffgerecht abzubilden. Die im folgenden deklarierten Ziele weisen bereits darauf hin, daß die Art der Diskretisierung eng mit der Wahl der Materialmodelle zusammenhängt.

- Ziele:*
1. *Globales Verhalten von Verbundkonstruktionen analysieren.*
 2. *Versagensmechanismen phänomenologisch erfassen.*

2.5 Materialmodelle

2.5.1 Mechanisches Verhalten von Verbundkonstruktionen

Die Inhomogenität dieser Verbundkonstruktionen erfordert differenzierte Betrachtungsweisen bei der Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Werkstoffe Baustahl, Beton und Verbundmittel. Prinzipiell sind drei Betrachtungsweisen denkbar:

Untersuchungen in der *Mikroebene* geben Aufschluß über das Zusammenwirken von Kristallen oder Molekülen. Dadurch können beispielsweise beim Beton als „Zweistoffsystem“ von Zementstein und Zuschlag die betontechnischen Zusammenhänge werkstoffspezifisch und detailliert nachgewiesen und die Eigenschaften des frischen und des erhärteten Betons genauer erklärt werden. Zur Analyse des globalen Verhaltens der Verbundkonstruktionen ist eine mikroskopische Modellierung jedoch unzumutbar.

Betrachtungen in der *Mesoebene* geben Rückschlüsse auf Inhomogenitäten im Werkstoff. Dabei sind zwei Klassen zu unterscheiden. Der *Bauschinger-Effekt* und *Hystereseschleifen*, die durch unterschiedliche plastische Verformungen der Körner mit unterschiedlicher Orientierung verursacht werden [119], sind Beispiele der ersten Inhomogenitätsklasse; Rißentwicklungen und Scherfugen als Effekte sind mit der zweiten Inhomogenitätsklasse in Verbindung zu bringen. Zur phänomenologischen Beschreibung des mechanischen Verhaltens der genannten Werkstoffe werden die auf der Mesoebene beobachteten Versagensmechanismen z.B. über „verschmierte“ Rißmodelle wiedergegeben.

Als dritte Betrachtungsweise ist die der *Makroebene* zu nennen. Hier wird der Werkstoff Beton nicht mehr als ein Zweistoffsystem angesehen; die Eigenschaften beider Komponenten werden bei der makromechanischen Betrachtungsweise „verschmiert“ und der Werkstoff als homogenes Kontinuum betrachtet.

Das mechanische Verhalten der Materialien Stahl, Stahlbeton oder auch der Verbundmittel ist hochgradig nichtlinear. Obwohl z.B. die Eigenschaft der Rissebildung beim Be-

ton eher diskontinuierliche Materialmodelle fordern würde, werden alle Einzelkomponenten der Verbundkonstruktionen – Stahl, Beton, Betonstahl – als zusammenhängende Materie, d.h. als Kontinuum behandelt. Jedoch reichen die klassischen linearen Materialhypothesen wie das *Hookesche* Gesetz bei weitem nicht aus, das komplexe mechanische Verhalten des jeweiligen Materials zu beschreiben [7].

Um die Simulationen mit vertretbarem numerischen Aufwand durchführen zu können, basieren die hier gewählten Werkstoffmodelle aller Verbundkomponenten auf der Plastizitätstheorie, die für globale Betrachtungsweisen in der Literatur bereits etabliert ist.

2.5.2 Plastizitätsmodelle

Eine an der Kontinuumsmechanik orientierte Plastizitätstheorie dient weniger dazu, Prozesse im kristallinen Bereich eines Werkstoffes mikroskopisch zu modellieren. Ziel ist vielmehr das phänomenologische Erfassen der Deformationsevolution unter mechanischer Beanspruchung, die maßgeblich vom mikromechanischen Verhalten geprägt ist [119].

Die Entwicklung von Plastizitätsmodellen war in ihren Anfängen fast ausschließlich auf das Beschreiben metallischen Werkstoffverhaltens fixiert. Hier sind insbesondere Tresca (1864), de Saint Venant und Levy (1870), Huber (1904) und von Mises (1913) zu nennen. In den vergangenen Jahrzehnten wurde die Entwicklung plastischer Modelle für Geomaterialien (Boden, Gestein, Beton) forciert. Die Plastizitätstheorie hat sich bei der Berechnung duktiler Prozesse als Standardmethode etabliert, bleibt aber bei der Anwendung für Geomaterialien umstritten [60].

● Baustahl, Betonstahl

Als Ursache für das nichtlineare Verhalten von Metallen, die in ihrer üblichen Zusammensetzung polykristallin sind, gelten Defekte in der Mikrostruktur. Zum Beispiel ist nach allgemeiner Überzeugung die plastische Verzerrung in Kristallen die Folge einer Versatzbewegung.

Als phänomenologische Eigenschaften des plastischen Verhaltens, u.a. in [109], [22] und [7] definiert und erläutert, sind zu nennen [119]:

- Plastische Verformungen, die nach Wegnahme der Belastung unabhängig von der Zeit erhalten bleiben;
- Verfestigungseffekte, die nach einer plastischen Belastung, d.h. einer Überschreitung der elastischen Grenze, für deren Zunahme verantwortlich sind;
- Hystereseeffekte, bei denen Entlastungs- und Wiederbelastungspfade nicht übereinstimmen und Energie dissipiert wird.

Analog zu Simo et al. [109], Hofstetter et al. [49] u.a. können diese Phänomene mit einem einfachen Werkstoffmodell abgebildet werden, dem folgende Annahmen zugrunde liegen:

1. Lineare kombinierte Verfestigung;
2. Inkompressibilität der plastischen Verformungsanteile (J_2 -Plastizität).

Das Werkstoffmodell, basierend auf dem von Mises Fließkriterium, wird hier als Sonderfall des Drucker–Pragerschen Fließkriteriums gesehen.

Annahme: Isotrop elasto–plastisches Werkstoffmodell für Stahl

● **Beton**

Das Werkstoffverhalten von Beton ist insofern dem von polykristallinen Metallen ähnlich, als nach einer vollständigen Entlastung bleibende Verformungen auftreten.

Wie die übrigen Geomaterialien hat Beton im Gegensatz zu Metallen unterschiedlich große Zug– bzw. Druckfestigkeiten und reagiert sehr sensibel auf Veränderungen unter Druckbeanspruchung (einaxial bzw. mehraxial). Zudem kann ein Spektrum weiterer, im Regelfall komplizierter Phänomene beobachtet werden, die das in Kapitel 5 vorgestellte Betonmodell abstrahiert wiedergibt.

Phänomen	beobachtet	zugrunde gelegtes Betonmodell
Druckbeanspruchung	Extensions– und Kompressionsverhalten ist unterschiedlich	Extensions– und Kompressionsverhalten ist gleich
elastische Degradation	anisotrop	isotrop
plastischer Fließvorgang	nichtassoziiert	assoziiert
Nachversagensverhalten	Entfestigung	Entfestigung
Entlastungsschleifen	hysteretisch	ungeeignet

Tafel 2.1 Phänomenologisches Verhalten von Beton

Diese Annahmen dienen auch dazu, eine größtmögliche numerische Stabilität zu erzielen, wazu exakt linearisierbare Algorithmen erforderlich sind. Das auf der Plastizitätstheorie basierende Betonmodell hat zudem den Vorteil, daß in dieser „verschmierten Betrachtungsweise“ die Materialparameter auf der Makroebene identifiziert werden können. Die Rißentwicklung, die auf der Mesoebene beobachtet werden kann, wird über die Entfestigung im Sinne eines einaxialen Zug– bzw. Druckversagens berücksichtigt.

Annahme: Isotrop elasto–plastisches Betonmodell

● Verbundmittel

Die Qualität des Werkstoffes der Verbundmittel muß auf die speziellen Anforderungen (Tragfähigkeit, Duktilität, Steifigkeit) und auf das Befestigungsverfahren abgestimmt werden (EC4, Abschnitt 3.5.2). Die Erfordernisse an die mechanischen Eigenschaften lassen im Grunde nur Verbundmittel des Werkstoffes Stahl zu. Die Duktilität dieses Werkstoffes wird im Verbund mit Stahlbeton mehr oder weniger stark abgebaut.

Das Tragverhalten des Einzeldübels wird im Rahmen einer fiktiven Wechselwirkung über die Verbundfuge modelliert; die in Kap. 2.3 beschriebenen Kenngrößen der Verbundmittel werden über makroskopische Beobachtungen (Last–Schlupf–Charakteristiken aus *push–out*–Versuchen) bestimmt. Die in Versuchen beobachtete Rißentwicklung des Betons oder die Verformung der Verbundmittel lassen Rückschlüsse auf den Schädigungsmechanismus (Mesoebene) zu. Beim Verbundmodell entsprechen die Rechenmodelle von Gl.(2.2) oder Gl.(2.3) diesen Versagensmechanismen.

Derzeit existieren im EC4 analog zu [121] bzw. [37] keine Interaktionsbeziehungen, die zur Tragfähigkeit der Verbundmittel bei gleichzeitiger Scher– und Normalkraftbeanspruchung eine Aussage machen. Speziell bei Kopfbolzendübeln zeigt sich, daß die Behinderung der vertikalen Dübelkopferschiebung eine Zugkraft im Dübelschaft bewirkt, der Dübel sich folglich über den Dübelkopf am Beton abstützt [98]. Hier wird angenommen, daß im linear elastischen Fall beide Beanspruchungsrichtungen entkoppelt sind. Das richtungsabhängige Tragverhalten der Verbundmittel wird im elasto–plastischen Fall über das Coulombsche Reibungsgesetz abgebildet.

Annahme: Orthotrop entkoppelt elastisches, bzw. orthotrop elasto–plastisches Verbundverhalten

Hinweis:

Anhang B 1 zeigt, daß in der Literatur beispielsweise unterschiedliche Kennlinien für denselben Typ von Kopfbolzendübeln ($\varnothing 22$ [mm] in Vollbetonplatten) existieren. Gründe dafür sind bei den unterschiedlichen Versuchsdurchführungen zu suchen. Demzufolge hängt das Tragverhalten der Kopfbolzendübel nicht nur vom Material des Dübels, dem Material der Betonkörper und dem Bewehrungsgrad; sondern auch von der Belastungsgeschwindigkeit während des Versuchs [13] ab.

Zum Bestimmen des Tragverhaltens der Verbundmittel bedarf es noch weiterer Entwicklungs– und Forschungsarbeiten, um einerseits die komplizierten Schädigungs– und Versagensmechanismen detaillierter zu spezifizieren (Interaktionsverhalten von Schub– und Normalkräften) und andererseits ein möglichst einheitliches Berechnungsmodell zum Bestimmen der Traglast, der Duktilität und Steifigkeit der Verbundmittel zu finden.

3 Ratenunabhängiges elasto–plastisches Materialverhalten im Rahmen der Methode der Finiten Elemente

3.1 Vorbemerkungen

Für die Anwendung elasto–plastischer Werkstoffmodelle werden in Kap. 3.2 die Gleichungen der ratenunabhängigen Plastizitätstheorie aufgestellt. Die für die Finite Elementberechnung notwendige Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen wird für das *Newton–Verfahren* vorgenommen (Kap. 3.3.1). Da das phänomenologische Verhalten unterschiedlicher Materialien im Verbund (Beton, Betonstahl, Baustahl, Verbindungsmittel) untersucht werden soll, reduziert sich die Linearisierung auf den Materialtensor unter Zuhilfenahme des *Rückwärts–Euler* Verfahrens (Kap. 3.3.2).

Für die 2D–Modellierung und unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes werden hier nicht die 2D spezifischen Projektionsalgorithmen wie unter [109] oder [80] angewandt, sondern es wird eine Kondensation der 3D–Werkstoffgesetze analog zu [17] vorgenommen (Kap. 3.4).

3.2 Ratenunabhängiges Materialverhalten

Ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Prozeß des sich ändernden Materialverhaltens abläuft, ohne Bedeutung, kann das zeit– bzw. ratenunabhängige elasto–plastische Materialverhalten als Sonderfall des viskoplastischen Materialverhaltens angesehen werden. Deshalb werden im folgenden alle *inelastischen* Größen als *plastisch* bezeichnet.

Annahme: Ratenunabhängige Elastoplastizität

Werden die konstitutiven Beziehungen im Rahmen der *Deformationszuwachstheorie* ([7], [73]) formuliert und zudem kleine Verzerrungen vorausgesetzt (vgl. Kap. 3.3.1), kann die Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}$ additiv in einen reversiblen, elastischen Anteil $\dot{\epsilon}^{\text{el}}$ und einen irreversiblen, plastischen Anteil $\dot{\epsilon}^{\text{pl}}$ aufgespalten werden, siehe Gl.(3.1). $\dot{\epsilon}^{\text{el}}$ wird über das *Hookesche* Gesetz von Gl.(3.2) definiert.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{\text{el}} + \dot{\epsilon}^{\text{pl}} \quad (3.1)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{el}} : \dot{\epsilon}^{\text{el}} = \mathbf{C}^{\text{el}} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{\text{pl}}) \quad (3.2)$$

3.2.1 Fließbedingung

Ein Charakteristikum des elasto–plastischen Materialverhaltens ist der Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand, der durch eine Fließbedingung beschrieben

wird. Dabei werden die aus dem einachsigen Spannungszustand (z.B. aus einaxialen Versuchen) gewonnenen Erkenntnisse auf den sechsdimensionalen Spannungs- bzw. Verzerrungsraum übertragen [119]. Die durch Gleichung (3.3) definierte skalarwertige Fließbedingung wird im Spannungsraum als Fließfläche interpretiert. In ihr ist σ der allgemeine Spannungstensor und \mathbf{q} der Vektor aller im Spannungsraum definierten inneren Variablen.

$$f(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.3)$$

3.2.2 Druckersches Stabilitätskriterium

Das Eintreten der plastischen Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}^{pl}$ ist an eine Belastungsrate dergestalt gebunden, daß beim stabilen Material die geleistete innere Arbeit nicht negativ ist.

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} \geq 0 \quad (3.4)$$

Diese Druckersche Definition stabilen Werkstoffverhaltens kann auch für einen Lastzyklus weiter gefaßt werden.

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o) \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} \geq 0 \quad (3.5)$$

In Gleichung (3.5) ist σ ein Punkt auf der Fließfläche; σ^o stellt einen Punkt dar, der entweder im elastischen Gebiet oder auf der Fließfläche liegt, d.h. der Zuwachs ist nicht mehr differentiell. Es wird angenommen, daß zwischen σ^o und σ eine elastische Beanspruchung stattfindet und anschließend eine plastische von σ nach $(\sigma + d\sigma)$. Diese zusätzliche Spannung $d\sigma$ wird durch den differentiellen plastischen Verzerrungsanteil $d\epsilon^{pl}$ hervorgerufen. Anschließend wird wieder auf σ^o entlastet.

Aus dem erweiterten *Druckerschen Stabilitätskriterium* leiten sich die Bedingungen einer *assozierten Fließregel* und einer *konvexen Fließfläche* ab ([77], [49]). Diese Bedingungen sind für die Gültigkeit dieses Postulates zwar notwendig, aber nicht hinreichend, da damit ein Expandieren (Verfestigen) oder Kontraktieren (Entfestigen) der Fließfläche nicht festgelegt wird [49].

3.2.3 Fließregel

Die Evolution der plastischen Verzerrungen ϵ^{pl} von Gl.(3.1) wird im allgemeinen von der skalarwertigen Funktion $g_\epsilon(\sigma, \mathbf{q})$, dem sogenannten *Fließpotential*, abgeleitet (3.6)₁. Die *Normalenregel* stellt eine spezielle Form der Fließregel, die sogenannte *assozierte Fließregel* (3.6)₂, dar, da die Fließfläche als plastisches Potential angesetzt wird und somit $g_\epsilon = f$ ist (siehe *Druckersches Stabilitätskriterium*). Der Index von g_ϵ stellt gemäß Gl.(3.6) den Bezug zu den plastischen Verzerrungen dar.

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} g_{\epsilon}(\sigma, \mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \text{assoziiert } (g_{\epsilon} = f) : \dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} f(\sigma, \mathbf{q}) \quad (3.6)$$

In Gl.(3.6) ist der Parameter $\dot{\lambda}$ als eine nicht negative skalare Funktion zu verstehen; er wird als *plastischer Multiplikator* oder *Konsistenzparameter* bezeichnet.

3.2.4 Ver-/Entfestigungsgesetz

Im Rahmen der ratenunabhängigen Plastizitätstheorie wird das nichtlineare Materialverhalten mittels interner Variablen (Vektor \mathbf{q}) beschrieben, die das Ver- und Entfestigungsverhalten wiedergeben sollen. Die Ratengleichung des Ver-/Entfestigungsgesetzes lautet nach [109]

$$\dot{\mathbf{q}} = - \mathbf{D} \dot{\alpha} \quad , \quad (3.7)$$

wobei der Vektor α die zum Vektor \mathbf{q} energetisch konjugierten, im Verzerrungsraum definierten inneren Variablen enthält. \mathbf{D} stellt dabei die Matrix der allgemeinen plastischen Moduln dar. Analog zu den plastischen Verzerrungen ϵ^{pl} kann die Evolution der inneren „Verzerrungsvariablen“ α von einer skalarwertigen Funktion $g_{\alpha}(\sigma, \mathbf{q})$ abgeleitet werden (3.8)₁. Die Erfüllung des Prinzips vom *Maximum der plastischen Dissipation* (siehe Kap.3.2.6) bedingt nicht nur die Verwendung einer *assoziierten Fließregel*, sondern auch die Formulierung eines *assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetzes*, siehe Gl.(3.8)₂.

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} g_{\alpha}(\sigma, \mathbf{q}) \quad \Rightarrow \quad \text{assoziiert } (g_{\alpha} = f) : \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} f(\sigma, \mathbf{q}) \quad (3.8)$$

Das Ver-/Entfestigungsgesetz als Ratengleichung lautet

$$\dot{\mathbf{q}} = - \dot{\lambda} \mathbf{D} \partial_{\mathbf{q}} g_{\alpha} \quad . \quad (3.9)$$

Prinzipiell ist zwischen *isotropem* und *kinematischem Verfestigungsgesetz* zu unterscheiden. Die Auswirkungen beider Evolutionsgleichungen und deren Kombination auf die Fließfläche im Spannungsraum sind anschaulich in Hofstetter et al. [49], Suanno [119] u.a. dargestellt. Für beide Ver-/Entfestigungsgesetze wird vorab der Vektor der inneren Variablen \mathbf{q} in einen isotropen und einen kinematischen Anteil aufgeteilt $\mathbf{q} = [\xi, \varrho]$.

• isotrope Ver-/Entfestigung

Bei der mathematischen Formulierung isotropen Ver-/Entfestigungsverhaltens sind die Einflüsse des Spannungszustandes und der inneren Variablen in der Fließfunktion f entkoppelt. Zum einen ist dies eine von den Spannungen σ abhängige Funktion $F(\sigma)$, zum andern die Fließspannung $k(\xi)$.

$$f(\sigma, \xi) = F(\sigma) - k(\xi) \quad (3.10)$$

Dabei hängt die Fließspannung $k(\xi)$ von den skalaren inneren Variablen ξ ab, die das isotrope Ver-/Entfestigungsverhalten beschreiben. Nach [49] kann dies beispielsweise die effektive plastische Verzerrung κ ($\xi = \kappa$) sein. Gleichung (3.11) stellt dann eine für isotrope Ver-/Entfestigung typische Ratengleichung dar

$$\dot{k}(\kappa) = H_i(\kappa) \dot{\kappa} \quad , \quad (3.11)$$

wobei $H_i(\kappa)$ der isotrope Ver-/Entfestigungsmodul ist. Die geometrische Interpretation der isotropen Ver-/Entfestigung ist durch Expansion/Kontraktion der Fließfläche gekennzeichnet, weshalb in diesem Fall die hydrostatische sowie die Achse der Fließfläche zwangsläufig zusammenfallen.

• kinematische Ver-/Entfestigung

Im Falle einer *kinematischen Ver-/Entfestigung* wird der sogenannte kinematische Ver-/Entfestigungstensor oder *backstress*-Tensor \boldsymbol{q} definiert, der die Translation der Fließfläche im Spannungsraum beschreibt. Man spricht dann von einer *induzierten Anisotropie*. Wird in der Fließfunktion Gl.(3.10) das Argument in der Funktion F durch $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{q})$ ersetzt und k konstant gehalten, erhält man die Fließfunktion von Gl.(3.12).

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = F(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{q}) - k \quad (3.12)$$

Üblicherweise wird die Ratengleichung des kinematischen Ver-/Entfestigungsgesetzes entsprechend Gl.(3.13) angesetzt [49].

$$\dot{\boldsymbol{q}} = H_k(\kappa) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \quad (3.13)$$

• kombinierte Ver-/Entfestigung

Die Kombination der Gleichungen Gl.(3.10) und (3.12) führt zu einer Fließfunktion mit *kombinierter Ver-/Entfestigung*

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \kappa) = F(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{q}) - k(\kappa) \quad (3.14)$$

Nach [109], [49] u.a. wird die kombinierte Verfestigung über den Parameter β $0 \leq \beta \leq 1$ und den gemeinsamen Hardening/Softening-Modul $H(\kappa)$ definiert. Dadurch lassen sich das isotrope und kinematische Ver-/Entfestigungsgesetz von Gl.(3.11) bzw. (3.13) mit folgenden Ver-/Entfestigungs-Moduli modifizieren

$$H_i(\kappa) = \beta H(\kappa) \quad , \quad H_k(\kappa) = (1 - \beta) H(\kappa) \quad (3.15)$$

β gibt somit bei kombinierter Ver-/Entfestigung den Anteil der isotropen Ver-/Entfestigung an der gesamten Ver-/Entfestigung an.

3.2.5 Be- und Entlastungsbedingungen

Zulässige Werte für $\boldsymbol{\sigma}$ und \boldsymbol{q} werden durch die Fließbedingung von Gl.(3.3) durch $f \leq 0$ begrenzt. Während einer *plastischen Belastung* muß im Rahmen der ratenunabhängi-

gen Elastoplastizität die Bedingung $f = 0$ erhalten bleiben. Dies läßt sich auch durch den inkrementellen Zuwachs $\dot{f} = 0$ ausdrücken, der sogenannte *Konsistenzbedingung*.

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\mathbf{q}} f : \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.16)$$

Gleichung (3.9) eingesetzt in Gl.(3.16) und mit $H_{ik} = \partial_{\mathbf{q}} f : \mathbf{D} : \partial_{\mathbf{q}} g_{\alpha}$ ergibt folgende Beziehungen für den Konsistenzparameter $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{H_{ik}} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \dot{\boldsymbol{\sigma}} & \text{für } f = 0, \\ 0 & \text{für } f < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

H_{ik} ist der skalare kombinierte Ver-/Entfestigungsmodul. Ausgehend von Gl.(3.17) werden nun die Be-/Entlastungsbedingungen eingeführt

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 ; \quad \dot{\lambda} \geq 0 ; \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.18)$$

die in der Optimierungstheorie als *Kuhn-Tucker Bedingungen* ([75], [109]) bezeichnet werden. $\dot{\lambda}$ und \dot{f} erfüllen die Konsistenzbedingung

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad \text{oder für } \dot{\lambda} > 0 : \dot{f} = 0. \quad (3.19)$$

Anhand Gl.(3.17) lassen sich die Be-/Entlastungsbedingungen nur für verfestigende Werkstoffe angeben. Im Falle idealer Plastizität ($H=0$) ist die rechte Seite von Gl.(3.17)₁ unbestimmbar; im Falle eines entfestigenden Verhaltens ($H<0$) kann keine Aussage darüber gemacht werden, ob elastische Entlastung von der Fließfläche aus stattfindet oder ob die Fließfläche kontrahiert.

Damit die Be-/Entlastungsbedingungen unabhängig vom Werkstoffverhalten formuliert werden können, sind nach Simo et al. [109] die Ratengleichungen in Abhängigkeit der Prädiktorspannung zu formulieren. Wird in Gl.(3.17)₁ die konstitutive Ratengleichung Gl.(3.2) eingesetzt, erhält man unter Berücksichtigung der Evolution der plastischen Verzerrungen $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}$ von Gl.(3.6)₁ und nach Umformen von Gl.(3.17)₁ folgende Beziehung für den Konsistenzparameter

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C}^{el} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} g_{\epsilon} + H_{ik}} \quad (3.20)$$

Wird zudem die Rate der elastischen Prädiktorspannung eingeführt

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.21)$$

können unabhängig vom Materialverhalten die Be-/Entlastungsbedingungen gemäß Tafel 3.1 formuliert werden. Bild 3.1 ist eine geometrische Interpretation der Gl.(3.20).

Voraussetzung zur Formulierung dieser Be-/Entlastungsbedingungen ist, daß der Nenner von Gl.(3.20) positiv ist. Da dieser Nenner identisch mit dem elasto-plastischen Materialtensor von Gl.(3.23) ist, gibt er Rückschluß auf ein numerisch stabiles Materialverhalten. Mit dem Nenner wird eine Restriktion für die Größe des Entfestigungsmoduls definiert (vgl. Maier und Hueckel [77], Simo und Hughes [109], Schreyer und Nielsen [108], Willam et al. [128]).

$f < 0$	\Rightarrow	elastische Belastung
$f = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\sigma^f} : \dot{\sigma}^* < 0 \\ \partial_{\sigma^f} : \dot{\sigma}^* = 0 \\ \partial_{\sigma^f} : \dot{\sigma}^* > 0 \end{array} \right.$	\Rightarrow Entlastung vom plastischen Zustand
		\Rightarrow neutrale Belastung
		\Rightarrow plastische Belastung

Tafel 3.1 Mögliche Be-/Entlastungszustände

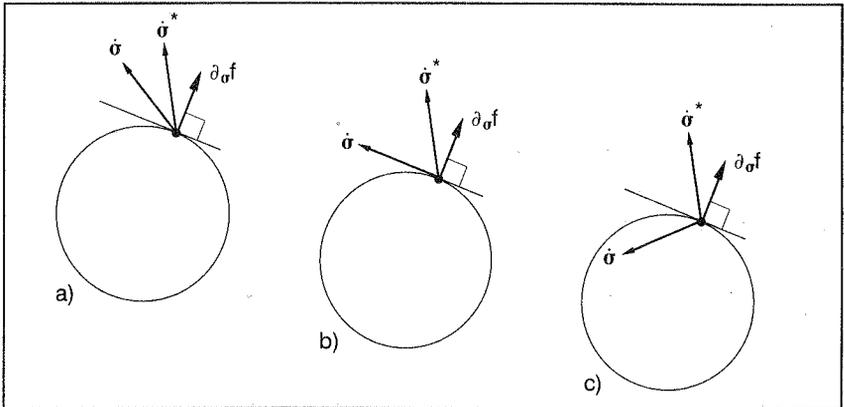


Bild 3.1 Plastische Belastung, basierend auf der Rate der Prädiktorspannungen
a) verfestigendes
b) ideal-plastisches
c) entfestigendes Material

3.2.6 Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation

Das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation geht auf von Mises (1928), Taylor (1932) und Hill (1948) zurück. Es besagt, daß die von wirklich auftretenden Spannungen an einer vorgegebenen plastischen Verzerrung geleistete Arbeit größer als die Arbeit ist, die durch einen beliebigen zulässigen Spannungszustand an derselben Verzerrung geleistet wird [96]. Durch dieses Prinzip wird eine diskrete variationelle Formulierung gewonnen, welche die Euler-Lagrange Gleichungen (Gleichgewichtsbedingungen, kinematische Gleichungen, Werkstoffbeziehungen [119]) des entsprechen-

den Funktionals erzeugen. Dabei berücksichtigen die Werkstoffbeziehungen die diskrete Fließregel und das Ver-/Entfestigungsgesetz in der Form des sogenannten *Closest Point Projection* Algorithmus, sowie die Be-/Entlastungsbedingungen in der Kuhn–Tuckerschen Form. Zudem führt dieses Prinzip auch auf die Normalität der Fließregel im Spannungsraum, zur Konvexität der Fließfläche ([112], [119]) und zu einem assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetz ([112], [49]).

3.2.7 Elasto–plastischer Materialtensor

Die Fließregel von Gl.(3.6), die Evolution der inneren „Verzerrungsvariablen“ von Gl.(3.8) und die Konsistenzbedingung Gl.(3.19) führen in Kombination mit der konstitutiven Ratengleichung Gl.(3.2) auf den elasto–plastischen Materialtensor \mathbf{C}^{ep} von Gl.(3.22) bzw. (3.23).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.22)$$

$$\text{mit } \mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C}^{\text{el}} - \frac{(\mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{g}_{\boldsymbol{\epsilon}}) \otimes (\mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f})}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} : \mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{g}_{\boldsymbol{\epsilon}} + H_{\text{lik}}} \quad (3.23)$$

Gl.(3.23) verdeutlicht, daß nur Werkstoffmodelle, die das Prinzip vom *Maximum der plastischen Dissipation* ($\mathbf{g}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{f}$) erfüllen, auf einen symmetrischen elasto–plastischen Materialtensor führen [49].

3.3 Inkrementelle Formulierung

3.3.1 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) stellt die schwache Form des Gleichgewichtes dar. Die residuale Form G des PvV in der materiellen Darstellung lautet nach [79]

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_{B_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_{0,\sigma}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0, \quad (3.24)$$

wobei ρ_0 die Massendichte, \mathbf{b}_0 die eingepprägten Volumenkräfte und \mathbf{t}_0 die eingepprägten Oberflächenkräfte bezüglich der Referenzkonfiguration B_0 bezeichnen; \mathbf{S} ist der zweite Piola–Kirchhoff Spannungstensor, \mathbf{E} der Green–Lagrange Verzerrungstensor von Gl.(3.25) und $\delta \mathbf{E}$ der virtuelle Green–Lagrange Verzerrungstensor von Gl.(3.26). Diese Darstellung wird nach [93] und [4] als *totale Lagrange–Formulierung* bezeichnet.

$$\mathbf{E}_{\text{IJ}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\text{I}}}{\partial X_{\text{J}}} + \frac{\partial u_{\text{J}}}{\partial X_{\text{I}}} + \frac{\partial u_{\text{L}}}{\partial X_{\text{I}}} \frac{\partial u_{\text{L}}}{\partial X_{\text{J}}} \right) \quad (3.25)$$

$$\delta \mathbf{E}_{\text{IJ}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\delta u_{\text{I}})}{\partial X_{\text{J}}} + \frac{\partial (\delta u_{\text{J}})}{\partial X_{\text{I}}} + \frac{\partial (\delta u_{\text{L}})}{\partial X_{\text{I}}} \frac{\partial u_{\text{L}}}{\partial X_{\text{J}}} + \frac{\partial u_{\text{L}}}{\partial X_{\text{I}}} \frac{\partial (\delta u_{\text{L}})}{\partial X_{\text{J}}} \right] \quad (3.26)$$

Die Strategie zur Lösung nichtlinearer Probleme führt zur Kopplung von inkrementellen und iterativen Methoden. Ein sehr effizientes Verfahren ist dabei das Newton–Verfahren, das eine zumindest quadratische Rate asymptotischer Konvergenz zur Lösung aufweist. Voraussetzung dafür ist eine exakte Linearisierung von Gl.(3.24).

Zum Zeitpunkt t_n sei der Gleichgewichtszustand nach Aufbringen des n –ten Lastinkrementes bekannt. Die schwache Formulierung des Gleichgewichtszustandes nach dem PvV ergibt sich dann zu

$$G(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u}) = - \int_{B_0} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_n \, dV + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_{0,\sigma}} \mathbf{t}_{0,n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.27)$$

und zum Zeitpunkt t_{n+1} zu

$$G(\mathbf{u}_{n+1}, \delta \mathbf{u}) = - \int_{B_0} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E}_{n+1} \, dV + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_{0,\sigma}} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.28)$$

Das in Gleichung (3.28) unbekannte Verschiebungsfeld \mathbf{u}_{n+1} , bzw. unbekannte inkrementelle Verschiebungsfeld $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1} \quad (3.29)$$

wird durch Lösen von Gleichung (3.28) mit dem Newton–Verfahren errechnet. Hierzu wird $G(\mathbf{u}_{n+1}, \delta \mathbf{u})$ von Gl.(3.28) linear approximiert

$$G_{\text{lin}}(\mathbf{u}_{n+1}, \delta \mathbf{u}) = G(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u}) + D_{\Delta \mathbf{u}} G(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u}) \quad (3.30)$$

wobei $D_{\Delta \mathbf{u}}$ die Richtungsableitung ist. Bei der Beschränkung auf eine, vom Verschiebungsfeld unabhängige Belastung ist der zweite und dritte Term in Gl. (3.27) und (3.28) als bekannt vorauszusetzen. Beide Terme spiegeln die virtuelle Arbeit der äußeren Belastung wider. Gleichung (3.31) ergibt sich aufgrund der Linearisierung von Gl.(3.28).

$$\begin{aligned} G_{\text{lin}}(\mathbf{u}_{n+1}, \delta \mathbf{u}) = & - \int_{B_0} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_n \, dV \\ & - \int_{B_0} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_n}{\partial \mathbf{E}_n} : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}_n \right) : \delta \mathbf{E}_n + \mathbf{S}_n : D_{\Delta \mathbf{u}}(\delta \mathbf{E}_n) \right] dV \\ & + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_{0,\sigma}} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Im folgenden werden die Richtungsableitungen $D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}_n$ und $D_{\Delta \mathbf{u}}(\delta \mathbf{E}_n)$ mit $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$ bzw. $\Delta(\delta \mathbf{E}_{n+1})$ abgekürzt. Wird $\delta \mathbf{u}$ in Gl.(3.26) durch $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$ ersetzt, erhält man für den Green–Lagrange Verzerrungstensor

$$\Delta \mathbf{E}_{IJ} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Delta u_I)}{\partial X_J} + \frac{\partial(\Delta u_J)}{\partial X_I} + \frac{\partial(\Delta u_L)}{\partial X_I} \frac{\partial u_L}{\partial X_J} + \frac{\partial u_L}{\partial X_I} \frac{\partial(\Delta u_L)}{\partial X_J} \right] \quad (3.32)$$

sowie die seiner virtuellen Darstellung

$$\Delta(\delta E_{I,J}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_I)}{\partial X_I} \frac{\partial(\Delta u_I)}{\partial X_J} + \frac{\partial(\Delta u_I)}{\partial X_I} \frac{\partial(\delta u_I)}{\partial X_J} \right]. \quad (3.33)$$

Aufgrund der vereinfachten Notation bezieht sich die Gesamtverschiebung \mathbf{u} in Gl.(3.32) und (3.33) auf den Zeitpunkt t_n und die inkrementelle Verschiebung $\Delta \mathbf{u}$ auf den Zeitpunkt t_{n+1} . Analog erhält man in Gl.(3.31) die lineare Approximation der inkrementellen Spannungen $\Delta \mathbf{S}_{n+1}$ von Gl.(3.31)

$$\frac{\partial \mathbf{S}_n}{\partial \mathbf{E}_n} : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}_n = \mathbf{C}_n : \Delta \mathbf{E}_{n+1} = \Delta \mathbf{S}_{n+1}; \quad (3.34)$$

wobei \mathbf{C}_n der Materialtensor im Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt t_n ist, bezogen auf die Anfangs- bzw. Referenzkonfiguration B_0 . Durch Umformung und unter Berücksichtigung von Gl.(3.34) wird aus Gl.(3.31)

$$\begin{aligned} & \int_{B_0} \left[(\mathbf{C}_n : \Delta \mathbf{E}_{n+1}) : \delta \mathbf{E}_n + \mathbf{S}_n : \Delta(\delta \mathbf{E}_{n+1}) \right] dV \\ = & \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial B_{0,n}} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{B_0} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_n dV \end{aligned} \quad (3.35)$$

Bei Beschränkung auf verformungsabhängige Belastungen sind alle Terme auf der rechten Seite von Gl.(3.35) bekannt. Diese rechte Seite stellt das durch Aufbringen des Lastinkrementes zum Zeitpunkt t_{n+1} hervorgerufene Ungleichgewicht zwischen äußerer und innerer virtueller Arbeit dar.

Das mechanische Verhalten der Verbundkonstruktionen ist im allgemeinen nichtlinear, wobei zwischen materieller und geometrischer Nichtlinearität zu unterscheiden ist. Jedoch soll die Frage der Gebrauchsfähigkeit für die in dieser Arbeit dokumentierten Strukturen im Vordergrund stehen. Ein Stabilitätsversagen (siehe Kap. 2.4) soll von vornherein ausgeschlossen werden. Dies rechtfertigt die Annahme kleiner Verschiebungen, folglich auch kleiner Verzerrungen. Die Erweiterung auf große Verschiebungen und Rotationen bei kleinen Dehnungen kann entsprechend Gl.(3.35) problemlos durchgeführt werden.

Annahme: Kleine Verschiebungen \Rightarrow geometrische Linearität

Durch die Annahme kleiner Verschiebungen erübrigt sich die Unterscheidung hinsichtlich verformter Konfiguration oder Ausgangszustand beim Materialtensor. Zudem entfallen die Unterscheidungen zwischen Green-Lagrangeschem und allgemeinem Verzerrungstensor $\mathbf{E} \equiv \boldsymbol{\epsilon}$, siehe Gl.(3.36), sowie zwischen zweitem Piola-Kirchhoff und allgemeinem Spannungstensor $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\sigma}$. Die inkrementellen Spannungen sind dann $\Delta \mathbf{S}_{n+1} \equiv \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, siehe Gl.(3.37).

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \epsilon_n} : D_{\Delta u} \mathbf{E}_n = \mathbf{C}_n : \Delta \epsilon_{n+1} = \Delta \sigma_{n+1} \quad (3.37)$$

Der virtuelle Verzerrungstensor wird zu $\delta \mathbf{E} \equiv \delta \epsilon$ und seine Richtungsableitung ist, unter Berücksichtigung der vereinfachten Notation, $\Delta(\delta \mathbf{E}) = \mathbf{0}$. Dadurch reduziert sich Gl.(3.35) zu

$$\begin{aligned} & \int_{B_0} (\mathbf{C}_n : \Delta \epsilon_{n+1}) : \delta \epsilon \, dV \\ &= \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_{0,v}} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{B_0} \sigma_n : \delta \epsilon \, dV \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aufgrund der nichtlinearen konstitutiven Beziehungen ist in Gl.(3.38) der Materialtensor \mathbf{C}_n im Rahmen des Newton–Verfahrens zu linearisieren.

3.3.2 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen

Im Rahmen der Methode der Finiten Elemente werden endliche Zeit– bzw. Lastschritte verwendet. Anders als bei der Formulierung auf Kontinuumsebene sind die Ratengleichungen von Kap. 3.2 dem numerischen Verfahren entsprechend zu linearisieren [114].

• Allgemeine Herleitung

Zu einem Zeitpunkt t_n seien die gesamten Spannungen, Verzerrungen und die internen Variablen bekannt, zudem der inkrementelle Verzerrungstensor $\Delta \epsilon_{n+1}$ des aktuellen Zeitschrittes t_{n+1} . Die Grundproblematik der numerischen Plastizitätstheorie stellt sich darin, die konstitutiven Beziehungen zu aktualisieren:

$$(\sigma_n, \epsilon_n, \mathbf{q}_n; \Delta \epsilon_{n+1}) \rightarrow (\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (3.39)$$

Wird das „Rückwärts–Euler“ Verfahren zugrunde gelegt, führt dies nach Simo et al. [111] auf ein Optimierungsproblem, definiert über die diskreten Kuhn–Tucker Bedingungen von Gl.(3.40). Hier gilt: $\Delta \lambda_{n+1} = \lambda \Delta t_{n+1}$. In diversen Studien – Krieg und Krieg [64], Schreyer, Kulak und Kramer [107], Ortiz und Popov [87], Simo und Taylor [115] – wird gezeigt, daß das „Rückwärts–Euler“ Verfahren, unabhängig von der Form der Fließfläche und der Schrittgröße, unbedingt stabil ist.

$$\mathbf{f}_{n+1}(\sigma_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 ; \quad \Delta \lambda_{n+1} \geq 0 ; \quad \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{f}_{n+1} = 0 \quad (3.40)$$

Nach dem Diskretisieren erhält man für den *Verzerrungstensor*

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad , \quad (3.41)$$

für den *Spannungstensor* aus der konstitutiven Beziehung von Gl.(3.2)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}) \quad , \quad (3.42)$$

für das *Fließgesetz* von Gl.(3.6)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} &= \boldsymbol{\epsilon}_n^{pl} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} \\ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} &= \Delta \lambda_{n+1} \partial_{\sigma} \mathbf{g}_{\epsilon, n+1} \quad , \end{aligned} \quad (3.43)$$

und für das *Ver-/Entfestigungsgesetz* von Gl.(3.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_{n+1} \\ \Delta \mathbf{q}_{n+1} &= - \mathbf{D}_{n+1} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = - \mathbf{D}_{n+1}^{-1} \Delta \mathbf{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{g}_{\alpha, n+1} \quad .$$

Die Herleitung der elasto-plastischen Materialtangente eines verallgemeinerten „return“-Algorithmus [109] erfordert das totale Differential der Größen $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}$, $d\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ und $d\mathbf{f}_{n+1}$. In Gl.(3.45) ist $d\lambda_{n+1}$ das totale Differential des inkrementellen Konsistenzparameters $\Delta \lambda_{n+1}$.

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left\{ \mathbf{C}^{el} : (d\boldsymbol{\epsilon} - d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}) \right\}_{n+1} \\ d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} &= \left\{ d\lambda \partial_{\sigma} \mathbf{g}_{\epsilon} + \Delta \lambda \left(\partial_{\sigma\sigma}^2 \mathbf{g}_{\epsilon} : d\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 \mathbf{g}_{\epsilon} d\mathbf{q} \right) \right\}_{n+1} \\ d\boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \left\{ d\lambda \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{g}_{\alpha} + \Delta \lambda \left(\partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 \mathbf{g}_{\alpha} d\mathbf{q} + \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2 \mathbf{g}_{\alpha} : d\boldsymbol{\sigma} \right) \right\}_{n+1} \\ d\mathbf{f}_{n+1} &= \left\{ \partial_{\sigma} f : d\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\mathbf{q}} f d\mathbf{q} \right\}_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

In einer vereinfachten Schreibweise sind alle Komponenten innerhalb $\{\dots\}_{n+1}$ Komponenten des totalen Differentials der oben genannten Größe zum Zeitpunkt t_{n+1} . Zudem enthalten alle Beziehungen von Gl.(3.45) die konvergierten Größen einer Newton-Iteration zum Zeitpunkt der i -ten Iteration, wobei die diese Iteration kennzeichnende Notation unterbleibt, was zur Vereinfachung beiträgt. Nach Einsetzen von Gl.(3.45)₂ in Gl.(3.45)₁, erhält man

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left\{ \Theta : \left[d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \partial_{\sigma} \mathbf{g}_{\epsilon} - \Delta \lambda \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 \mathbf{g}_{\epsilon} d\mathbf{q} \right] \right\}_{n+1} \quad (3.46)$$

$$\text{mit } \Theta_{n+1} = \left\{ \left[\left(\mathbf{C}^{el} \right)^{-1} + \Delta \lambda \partial_{\sigma\sigma}^2 \mathbf{g}_{\epsilon} \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad , \quad (3.47)$$

und Gleichung (3.46) wiederum in die diskrete Konsistenzbedingung von Gl.(3.45)₄ ergibt

$$\left\{ d\lambda \left[\partial_{\sigma f} : \Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} \right] + \Delta\lambda \left[\partial_{\sigma f} : \Theta : \partial_{\sigma q}^2 g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{qf} \right] d\mathbf{q} \right\}_{n+1} \quad (3.48)$$

$$= \{ \partial_{\sigma f} : \Theta : d\epsilon \}_{n+1} .$$

Einsetzen von Gleichung (3.46) in Gl.(3.45)₃ führt unter Anwendung des inkrementellen Ver-/Entfestigungsgesetzes von Gl.(3.44)₂ zu

$$\left\{ d\lambda \Delta\lambda \left[\partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} : \Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{q\alpha} g_{\alpha} \right] \right\}_{n+1}$$

$$+ \left\{ \Delta\lambda^2 \left[\partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} : \Theta : \partial_{\sigma q}^2 g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{q\alpha}^2 g_{\alpha} - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \mathbf{D}^{-1} \right] d\mathbf{q} \right\}_{n+1} \quad (3.49)$$

$$= \left\{ \Delta\lambda \left[\partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} : \Theta : d\epsilon \right] \right\}_{n+1} .$$

Das Lösen der Gl.(3.48) und (3.49) nach $d\lambda_{n+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1}$ führt zu

$$\begin{bmatrix} d\lambda_{n+1} \\ \Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma f} : \Theta_{n+1} : d\epsilon_{n+1} \\ \partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha, n+1} : \Theta_{n+1} : d\epsilon_{n+1} \end{bmatrix} . \quad (3.50)$$

Hierin hat die (2×2) -Matrix \mathbf{Z}_{n+1} die Elemente

$$z_{11, n+1} = \{ \partial_{\sigma f} : \Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} \}_{n+1}$$

$$z_{12, n+1} = \left\{ \partial_{\sigma f} : \Theta : \partial_{\sigma q}^2 g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{qf} \right\}_{n+1}$$

$$z_{21, n+1} = \left\{ \partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} : \Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{q\alpha} g_{\alpha} \right\}_{n+1} \quad (3.51)$$

$$z_{22, n+1} = \left\{ \partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} : \Theta : \partial_{\sigma q}^2 g_{\epsilon} - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{q\alpha}^2 g_{\alpha} - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \mathbf{D}^{-1} \right\}_{n+1} .$$

Die Gleichungen (3.50), eingesetzt in Gl.(3.46), führen auf die konsistente elasto-plastische Materialtangente (siehe Gl.(3.52)), bei der $z_{ij, n+1}^{-1}$ die Koeffizienten der invertierten Matrix \mathbf{Z}_{n+1} bezeichnen.

Offensichtlich unterscheidet sich der konsistente elasto-plastische Materialtensor von Gl.(3.52) vom konstitutiven Tensor des Kontinuums, Gl.(3.23). Für infinitesimal kleine Schritte ($\Delta t_{n+1} \rightarrow 0$, $\Delta\lambda_{n+1} \rightarrow 0$) geht der konsistente Materialtensor in den konstitutiven Tensor des Kontinuums über.

$$\left\{ \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right\}_{n+1} = \left\{ \Theta - z_{11}^{-1} \left(\Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} \right) \otimes \left(\Theta : \partial_{\sigma f} \right) \right.$$

$$- z_{12}^{-1} \left(\Theta : \partial_{\sigma} g_{\epsilon} \right) \otimes \left(\Theta : \partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} \right)$$

$$- z_{21}^{-1} \left(\Theta : \partial_{q\sigma}^2 g_{\epsilon} \right) \otimes \left(\Theta : \partial_{\sigma f} \right)$$

$$\left. - z_{22}^{-1} \left(\Theta : \partial_{q\sigma}^2 g_{\epsilon} \right) \otimes \left(\Theta : \partial_{q\sigma}^2 g_{\alpha} \right) \right\}_{n+1} \quad (3.52)$$

• **Assoziierte Fließregel, assoziiertes Ver-/Entfestigungsgesetz**

In Kap. 3.2 wurde bereits erwähnt, daß unter den Bedingungen einer assoziierten Fließregel ($g_\epsilon = f$) und eines assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetzes ($g_\alpha = f$) das Prinzip vom *Maximum der plastischen Dissipation* erfüllt wird. Unter diesen Voraussetzungen erhält man anstelle von Gl.(3.52) folgende konsistente elasto–plastische Materialtangenten

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}} = \left[\frac{d\sigma}{d\epsilon} \right]_{n+1} = \left\{ \Theta - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \right\}_{n+1} \quad (3.53)$$

$$\text{mit } \mathbf{N}_{1,n+1} = \Theta_{n+1} : \partial_{\sigma} f_{n+1}, \quad \mathbf{N}_{2,n+1} = \Theta_{n+1} : \partial_{\mathbf{q}}^2 f_{n+1} \quad (3.54)$$

Die Koeffizienten der Matrix \mathbf{Z}_{n+1} sind dann

$$\begin{aligned} z_{11,n+1} &= \{ \partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f \}_{n+1} \\ z_{12,n+1} &= \left\{ \partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\mathbf{q}}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\mathbf{q}} f \right\}_{n+1} = z_{21,n+1} \\ z_{22,n+1} &= \left\{ \partial_{\mathbf{q}}^2 f : \Theta : \partial_{\mathbf{q}}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\mathbf{q}}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \mathbf{D}^{-1} \right\}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.55)$$

wodurch die konsistente Materialtangenten $\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}}$ symmetrisch wird.

3.4 Kondensation der konstitutiven Gleichungen (3D → 2D)

Die konstitutiven Gleichungen von Gl.(3.2) oder (3.22) sind im allgemeinsten Fall im sechsdimensionalen Spannungs– und Verzerrungsraum definiert. Für eine ebene 2D–Modellierung haben der Spannungs– und der Verzerrungstensor jeweils folgende vier Komponenten

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T \\ \epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{xy} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.56)$$

wobei im Falle des *ebenen Verzerrungszustandes (plane strain)* ein um zwei Schubkomponenten reduzierter 3D–Werkstofftensor die konstitutive Beziehung beschreibt. Dies kann als geometrische Zwangsbedingung in Dickenrichtung ($\epsilon_{zz} = 0, \sigma_{zz} \neq 0$) interpretiert werden. Im Falle des *ebenen Spannungszustandes (plane stress: $\epsilon_{zz} \neq 0, \sigma_{zz} = 0$)* wird in der vorliegenden Arbeit die 3D–Formulierung des Werkstofftensors beibehalten. Für eine globale Gleichgewichtssiteration, z.B. nach dem Newton–Verfahren, sind nun der Spannungs– und der Materialtensor lokal, d.h. am Materialpunkt, zu kondensieren [17]. Ausgehend vom *ebenen Verzerrungszustand* wird hin zum *ebenen Spannungszustand* iteriert.

Im linear-elastischen Fall wird die Verzerrungskomponente in Dickenrichtung ϵ_{zz}^{el} aufgrund der Bedingung $\sigma_{zz} = 0$ mit dem Hookeschen Gesetz Gl.(3.2) bestimmt.

$$\epsilon_{zz}^{el} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx}^{el} + \epsilon_{yy}^{el}) \quad (3.57)$$

Innerhalb der Plastizitätstheorie berechnen sich, wie im Kapitel zuvor erläutert, die Spannungen inkrementell-iterativ. Dazu wird während des Iterationsprozesses der Verzerrungstensor des ebenen Verzerrungszustandes am Anfang jeder Gleichgewichtsiteration um die ϵ_{zz} -Komponente erweitert.

Für die Herleitung der Kondensationen, bei gleichzeitiger Erweiterung des Verzerrungstensors, wird der aktuelle Spannungstensor in einem ersten Schritt mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung linear approximiert

$$\sigma^{(i+1)} \approx \sigma^{(i)} + \frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial \epsilon^{(i)}} : \Delta \epsilon^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \mathbf{C}^{(i)} : \Delta \epsilon^{(i+1)}, \quad (3.58)$$

wobei (i) den Anfang und (i+1) das Ende des aktuellen Iterationsschrittes definiert. Mit (m) wird die notwendige Anzahl an Iterationen gekennzeichnet. Die den diskreten Zeitpunkt kennzeichnende Notation n+1, siehe Bild 3.2, bleibt bei der formalen Herleitung unberücksichtigt.

In Gl. (3.58) wird die konsistente Materialtangente über folgende Untermatrizen definiert

$$\mathbf{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix}^{(i)}$$

mit $\mathbf{C}_{11}^{(i)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{41} \\ C_{21} & C_{22} & C_{24} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} \end{bmatrix}$ und $\mathbf{C}_{13}^{(i)} = [C_{13} \ C_{23} \ C_{43}]^T$ (3.59)

bzw. $\mathbf{C}_{31}^{(i)} = [C_{31} \ C_{32} \ C_{34}]$

In der Vektordarstellung wird nun der aktualisierte Spannungstensor der (i+1)-Iteration in folgende Untervektoren zerlegt

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}^{(i)} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\epsilon} \\ \Delta \epsilon_{zz} \end{bmatrix}^{(i+1)}, \quad (3.60)$$

wobei der Spannungsvektor $\bar{\sigma}$ die Komponenten $\bar{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T$ enthält. Analog dazu hat der Tensor der veränderlichen inkrementellen Verzerrungen die Komponenten

$\Delta \bar{\epsilon} = [\Delta \epsilon_{xx} \ \Delta \epsilon_{yy} \ \Delta \epsilon_{xy}]^T$. Mit der Bedingung $\sigma_{zz}^{(i+1)} = 0$ läßt sich aus Gl. (3.60) die Verzerrungskomponente $\Delta \epsilon_{zz}^{(i+1)}$ des nachfolgenden Iterationsschrittes (i+1) bestimmen.

$$\Delta \epsilon_{zz}^{(i+1)} = -\frac{1}{C_{33}^{(i)}} \left[\mathbf{C}_{31}^{(i)} \Delta \bar{\epsilon}^{(i+1)} + \sigma_{zz}^{(i)} \right] \quad (3.61)$$

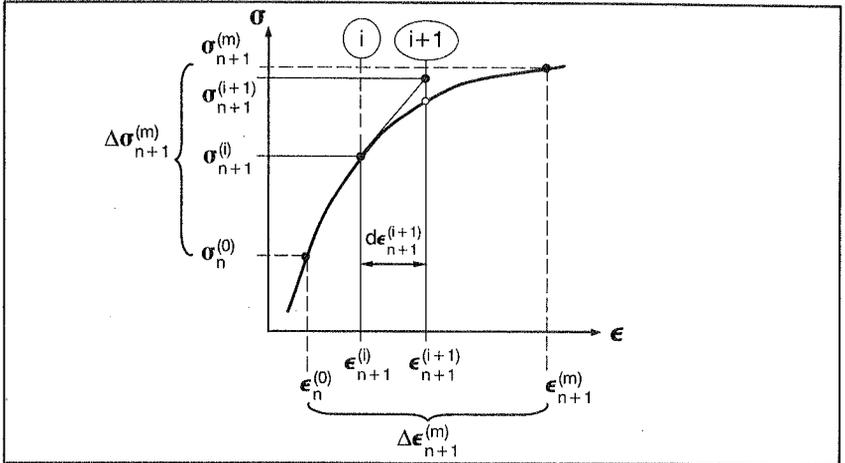


Bild 3.2 Auswirkung der globalen Gleichgewichtsiteration (Newton-Verfahren) am Materialpunkt

Dies verdeutlicht, daß die Spannungskomponente σ_{zz} innerhalb des Iterationsprozesses gegen Null konvergiert, wobei sie innerhalb eines Iterationsschrittes (i) nicht notwendigerweise gleich Null sein muß. Die Konvergenzrate dieser Spannungskondensation am Materialpunkt ist identisch mit jener der globalen Gleichgewichtsiteration, und zwar quadratisch innerhalb des Konvergenzradius [17].

Die korrekte konsistente Materialtangente und die adäquaten Spannungen zur Bestimmung der inneren Kräfte erhält man, indem man Gl.(3.61) in Gl.(3.60) einsetzt.

$$\bar{\sigma}^{(i+1)} = \left[\mathbf{C}_{11} - \frac{\mathbf{C}_{13}\mathbf{C}_{31}}{\mathbf{C}_{33}} \right]^{(i)} \Delta \bar{\epsilon}^{(i+1)} + \left[\bar{\sigma} - \frac{\mathbf{C}_{13}}{\mathbf{C}_{33}} \sigma_{zz} \right]^{(i)} = \hat{\mathbf{C}}^{(i)} \Delta \bar{\epsilon}^{(i+1)} + \hat{\sigma}^{(i)} \quad (3.62)$$

mit $\hat{\mathbf{C}}^{(i)} = \left[\mathbf{C}_{11} - \frac{\mathbf{C}_{13}\mathbf{C}_{31}}{\mathbf{C}_{33}} \right]^{(i)}$ und $\hat{\sigma}^{(i)} = \left[\bar{\sigma} - \frac{\mathbf{C}_{13}}{\mathbf{C}_{33}} \sigma_{zz} \right]^{(i)}$

Hier stellt $\hat{\mathbf{C}}^{(i)}$ den kondensierten Materialtensor und $\hat{\sigma}^{(i)}$ den zur Berechnung der inneren Kräfte notwendigen Spannungstensor dar.

4 Numerische Behandlung elasto–plastischer Materialmodelle

4.1 Einführung

Im folgenden werden die Werkstoffmodelle von Drucker–Prager, eine Erweiterung des von Mises Fließgesetzes [22], und das der Kugelfläche für ein allgemein ver–/entfestigendes Materialverhalten vorgestellt. Beide Fließfunktionen zeichnen sich durch ihre in der Deviatorebene kreisförmigen und somit glatten Fließflächen aus, was bei der Entwicklung von Algorithmen im Rahmen der Methode der Finiten Elemente von Vorteil ist. Im Gegensatz dazu stehen gleichwertige Modelle mit nicht glatten Fließflächen, wie z.B. das Fließgesetz von Tresca oder das von Mohr–Coulomb. Unter „allgemein ver–/entfestigend“ wird die Kombination der isotropen und kinematischen Ver–/Entfestigung verstanden.

Eine elasto–plastische Analyse erfordert die numerische Integration der konstitutiven Gleichungen. Der *radial return* als klassischer Integrationsalgorithmus der dreidimensionalen J_2 –Plastizität wurde ursprünglich von Wilkins [131] für ein isotropes, ideal–plastisches Werkstoffverhalten vorgeschlagen. Die Erweiterungen hinsichtlich verfestigender J_2 –Plastizität und eines für den ebenen Spannungszustand spezifischen Algorithmus nahmen u.a. Krieg und Key [63], Krieg und Krieg [64], Schreyer et al. [107] vor. Der *radial return* kann dem allgemeinen Begriff *Projektionsverfahren* zugeordnet werden, einer Klasse von verzerrungsgesteuerten Algorithmen, die in zwei Schritten arbeiten [119]. Im ersten Schritt, dem sogenannte *elastischen Prädiktor*, wird ein rein elastisches Verhalten angenommen. Die entsprechende elastische Prädiktorspannung wird auf die Fließbedingung hin überprüft. In einem zweiten Schritt, dem sogenannten *plastischen Korrektor*, wird dieser elastische Prädiktorzustand nach Durchlaufen einer rein plastischen Relaxation [80] auf die Fließfläche projiziert.

Die Herleitung der Projektionsalgorithmen und der jeweiligen elasto–plastischen Materialtangente erfolgt für die Drucker–Pragersche Fließfläche in Kap. 4.2 und für die Kugelfläche in Kap. 4.4. Beide Fließflächen sind Teilflächen des Werkstoffmodells für Beton. Bei der dort vorliegenden Kopplung mehrerer Drucker–Prager–Teilflächen entstehen diskontinuierliche Übergänge, auf deren numerische Behandlung in Kap. 4.6 eingegangen wird.

Für die kegelförmige Fließfunktion von Drucker–Prager zeigten Hofstetter et al. in [52] bzw. [51], daß unter Berücksichtigung eines ideal–plastischen Materialverhaltens der *radial return* als J_2 –Projektionsalgorithmus in einer erweiterten Formulierung angewandt werden kann. In Kap. 4.2 berücksichtigt dieser für die Drucker–Pragersche Fließfläche erweiterte *radial return* ein ver–/entfestigendes Materialverhalten.

In [52] wird zudem eine numerische Behandlung für die Rückprojektion im Bereich der Kegelspitze vorgeschlagen, die anschaulich zwei Projektionsrichtungen beinhaltet: die

deviatorische (nichtassoziiert zur Fließfläche) oder die assoziierte Projektion auf die hydrostatische Achse mit anschließender hydrostatischer Rückprojektion auf die Kegelspitze. In der vorliegenden Arbeit wird ein Projektionsalgorithmus vorgeschlagen, der im Bereich dieser Singularität eine zusätzliche, invertierte Drucker–Pragersche Fließfunktion, den sogenannte *inverted cone* (Kap. 4.6.2), benötigt.

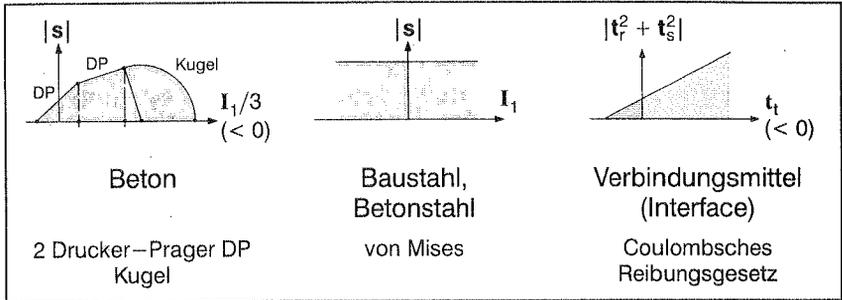


Bild 4.1 Fließflächen der Einzelkomponenten des Verbundquerschnittes

Die Werkstoffmodelle der einzelnen Komponenten des Verbundquerschnittes basieren auf den zuvor genannten Fließfunktionen, vgl. Bild 4.1. Für Beton handelt es sich beim elasto–plastischen Werkstoffmodell um eine Fließfläche, bei der zwei Fließflächen vom Typ Drucker–Prager und eine Kugelfläche gekoppelt werden (siehe Kap. 5). Jede dieser Fließflächen ist konvex. Jedoch induziert der in Kap. 4.6.2 vorgeschlagene Algorithmus des *inverted cone* ein nichtassoziiertes Ver–/Entfestigungsgesetz.

Das Werkstoffmodell für Baustahl basiert auf der bereits erwähnten klassischen J_2 –Plastizität und kann als Sonderform von Drucker–Prager gesehen werden (vgl. Kap. 4.2.6). Dem Betonstahl wird ein eindimensional plastisches Verhalten zugrunde gelegt. Das zugehörige Werkstoffmodell wird in Kap. 4.3 von der J_2 –Plastizität abgeleitet.

Das Coulombsche Reibungsgesetz als Fließfunktion der Verbindungsmittel ist ein Analogon zur Fließfunktion von Drucker–Prager; die für Drucker–Prager entwickelten numerischen Integrationsalgorithmen sind übertragbar.

4.2 Fließgesetz von Drucker–Prager: Eine erweiterte J_2 –Plastizität

4.2.1 Fließfunktion

• ideale Plastizität

Das Fließgesetz von Drucker–Prager ist die einfachste Fließfunktion, die zur Beschreibung des Verhaltens von solchen Materialien geeignet ist, bei denen das Fließen (plastisches Verhalten) auch vom hydrostatischen Druck abhängt. Beispielsweise sind dies Böden, Fels und Beton. Nach [22] ist das Fließgesetz von Drucker–Prager eine Kombination der Fließfunktion von von Mises mit der Coulombschen Reibung

$$f(I_1, \mathbf{s}) = |\mathbf{s}| + \frac{\mu}{\sqrt{3}} I_1 - \sqrt{2} \tau_F \quad ,$$

wobei μ den Reibungsbeiwert und τ_F die Fließspannung im reinen Schubzustand darstellen [51]. Wird τ_F über die Fließspannung $\bar{\sigma}$ des einaxialen Zugversuches ausgedrückt ($\bar{\sigma} = \sqrt{3} \tau_F$) und der Reibungsbeiwert mit α allgemeiner gefaßt, ergibt sich

$$f(I_1, \mathbf{s}) = |\mathbf{s}| + \alpha I_1 - k \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \quad . \quad (4.1)$$

Der Spannungstensor σ wird in die zueinander orthogonalen Komponenten, den hydrostatischen (σ_m) und deviatorischen (\mathbf{s}) Spannungstensor, aufgespalten.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} = \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \sigma \quad \Rightarrow \quad I_1 = \sigma_m : \mathbf{1} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{s} = \sigma - \sigma_m = \mathbf{P}^{\text{dev}} : \sigma$$

$\mathbf{1}$ ist der zweistufige Einheitstensor. Die erste Invariante wird durch die Spur des Spannungstensors $I_1 = \text{tr}(\sigma)$ definiert, die Norm des deviatorischen Spannungstensors ist $|\mathbf{s}| = (\mathbf{s} : \mathbf{s})^{1/2} = (2J_2)^{1/2}$. Desweiteren bilden die Tensoren $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$ und \mathbf{P}^{dev} jeden beliebigen zweistufigen Tensor auf dessen hydrostatische Komponente bzw. auf den Deviator ab [119] (siehe Anhang, Kap. A 1.1).

Unter Annahme eines assoziierten Fließgesetzes erhält man die Rate der plastischen Verzerrungen analog Gl.(3.6)₂, wobei \mathbf{n} die deviatorische Komponente des Gradienten der Fließfläche (Fließrichtung) ist, siehe Bild 4.2.

$$\dot{\epsilon}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} f = \dot{\lambda} (\mathbf{n} + \alpha \mathbf{1}) \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \quad (4.3)$$

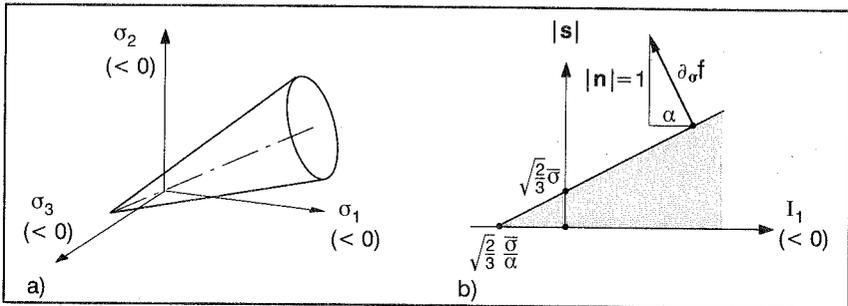


Bild 4.2 Drucker–Prager'sche Fließfunktion

a) im Hauptspannungsraum

b) in Invariantendarstellung

• kombinierte Ver-/Entfestigung

Unter Berücksichtigung eines kombinierten Ver-/Entfestigungsgesetzes entsprechend Kap. 3.2.4 ändert sich die Fließfunktion von Gl.(4.1) wie folgt

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}, \kappa) = |\mathbf{s} - \boldsymbol{\rho}^{\text{dev}}| + \alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}) - k(\kappa) \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa) \quad (4.4)$$

Gemäß Gleichung (4.5) definiert $\boldsymbol{\eta}$ den um den kinematischen Ver-/Entfestigungstensor reduzierten Spannungstensor von Gl.(4.4). Dessen deviatorische und hydrostatische Komponenten lassen sich dann durch Gl.(4.2) bestimmen.

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\eta}) = I_1(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{1} \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}} = \mathbf{P}^{\text{dev}} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{s} - \boldsymbol{\rho}^{\text{dev}}$$

Die deviatorische Komponente \mathbf{n} der Fließrichtung gemäß Gl.(4.3) muß nun die deviatorische Komponente des Spannungstensors $\boldsymbol{\eta}$ berücksichtigen.

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} f = \dot{\lambda} (\mathbf{n} + \alpha \mathbf{1}), \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}}{|\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}|} = \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\rho}^{\text{dev}}}{|\mathbf{s} - \boldsymbol{\rho}^{\text{dev}}|} \quad (4.6)$$

4.2.2 Analogie zur J_2 -Plastizität

Die in den Fließregeln gemäß Gl.(4.3) oder (4.6) enthaltene Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$ kann in eine vom Spannungszustand abhängige, deviatorische Komponente \mathbf{n} und eine konstante, hydrostatische und somit zu \mathbf{n} orthogonale Komponente $\alpha \mathbf{1}$ aufgespalten werden.

$$\partial_{\sigma} f = \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}^*) + \alpha \mathbf{1} \quad (4.7)$$

Das Splitten in einen spannungsabhängigen deviatorischen und einen konstanten hydrostatischen Anteil entspricht einer „verzerrten“ J_2 -Plastizität (schräger Kegelschnitt), weshalb sich das Problem der Rückprojektion analog zur J_2 -Plastizität handhaben läßt. Nach [52] kann der *radial return*-Algorithmus als Projektionsverfahren angewandt werden. Beim *radial return* wird der Prädiktorzustand $\boldsymbol{\sigma}^*$ über die kürzeste Entfernung auf die Fließfläche rückprojiziert; seine Normalen auf die Fließflächen zu den diskreten Zeitpunkten t_n und t_{n+1} sind hier identisch (siehe Bild 4.3).

4.2.3 Elastischer Prädiktor

Zur Formulierung der Prädiktorspannung wird angenommen, daß zum Zeitpunkt t_{n+1} innerhalb eines „Rückwärts-Euler“ Verfahrens eine elastische Überspannung vorliegt. Somit wird der inkrementelle Spannungszuwachs $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ in diesem ersten Schritt elastisch angenommen.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \mathbf{C}^{\text{el}} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{pl}}) = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^{\text{el}} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (4.8)$$

Die Berechnung der elastischen Prädiktorspannungen beruht ausschließlich auf den konvergierten Werten der inneren Variablen des vorangegangenen Last- bzw. Zeitinkrements t_n . Im Prädiktorzustand sind folglich die inneren Variablen

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}^* &= \rho_n \\ \kappa_{n+1}^* &= \kappa_n\end{aligned}\quad (4.9)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (4.8) und (4.9) in Gl.(4.4) zeigt, ob mit $f_{n+1}^*(\sigma_{n+1}^*, \rho_n, \kappa_n)$ die Fließbedingung verletzt wird. Allein aufgrund dieses Wertes wird bestimmt, ob eine elastische Be- bzw. Entlastung oder plastische Belastung vorliegt. Voraussetzung hierfür ist jedoch auch die Konvexität der Fließfläche, was in [49] nachgewiesen wird.

4.2.4 Projektion der Prädiktorspannung auf Fließfläche (*radial return mapping*)

Wird in Gl.(3.43) ein assoziiertes Fließgesetz ($g_\epsilon = f$) vorausgesetzt, erhält man aus Gl.(4.8) folgende Beziehungen zwischen Spannungstensor und Prädiktorspannung

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \mathbf{C}^{\text{el}} : (\Delta \epsilon_{n+1}^{\text{el}} + \Delta \epsilon_{n+1}^{\text{pl}}) = \sigma_{n+1} + \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\sigma} f_{n+1}, \quad (4.10)$$

bzw. für deren hydrostatische und deviatorische Komponenten die Beziehungen von Gl.(4.11). Hierin sind K der Kompressions- und G der Schubmodul.

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n+1}^* &= \sigma_{m,n+1} + 3K \Delta \lambda_{n+1} \alpha \mathbf{1} \\ \mathbf{s}_{n+1}^* &= \mathbf{s}_{n+1} + 2G \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Zum Zeitpunkt t_{n+1} erhält man den Spannungstensor und dessen deviatorische bzw. hydrostatische Komponenten aus den Gl.(4.10) und (4.11)

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\sigma} f_{n+1} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n+1} &= \sigma_{m,n+1}^* - 3K \Delta \lambda_{n+1} \alpha \mathbf{1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^* - 2G \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Während der Korrektorphase wird der elastische Prädiktor σ_{n+1}^* radial, somit auch normal auf die Fließfläche rückprojiziert, vgl. Bild 4.3. Unter Voraussetzung eines assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetzes ($g_\alpha = f$) kann anhand der Fließbedingung von Gl.(4.4) gezeigt werden, daß die Richtung des Gradienten des kinematischen Ver-/Entfestigungstensors $\partial_{\rho} f$ entgegengesetzt zur Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$ ist. Dies wird auch in Bild 4.3 veranschaulicht.

$$\partial_{\rho} f_{n+1} = - \partial_{\sigma} f_{n+1} \quad (4.12)$$

Als Folge daraus und unter Anwendung des Ver-/Entfestigungsgesetzes von Gl.(3.44)₁ mit $\mathbf{D} = H_k(\kappa)$ erhält man den kinematischen Ver-/Entfestigungstensor ρ_{n+1}

$$\begin{aligned}\rho_{n+1} &= \rho_n + \Delta \lambda_{n+1} H_k(\kappa_{n+1}) (\mathbf{n}_{n+1} + \alpha \mathbf{1}) \\ \rho_{n+1}^{\text{hyd}} &= \rho_n^{\text{hyd}} + \Delta \lambda_{n+1} H_k(\kappa_{n+1}) \alpha \mathbf{1} \\ \rho_{n+1}^{\text{dev}} &= \rho_n^{\text{dev}} + \Delta \lambda_{n+1} H_k(\kappa_{n+1}) \mathbf{n}_{n+1}\end{aligned}\quad (4.13)$$

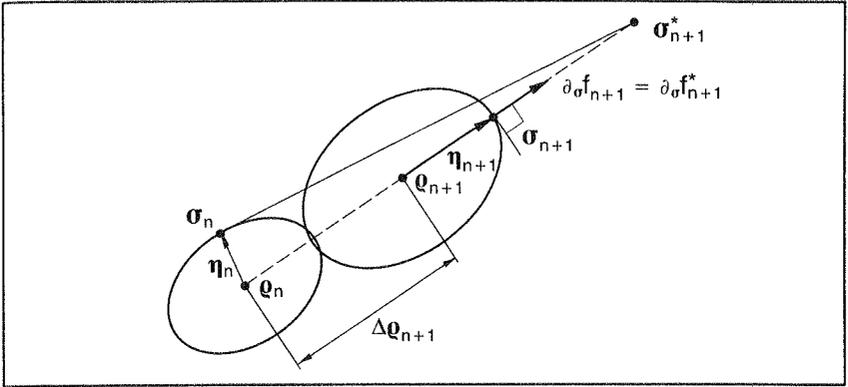


Bild 4.3 Geometrische Interpretation des „radial return“-Algorithmus

Setzt man die Beziehungen der Gleichungen (4.11)₂ und (4.13)₃ in die deviatorische Komponente $\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}$ von Gl.(4.5)₃ ein, erhält man

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}} &= \mathbf{s}_{n+1}^* - \rho_{n+1}^{\text{dev}} - (2G \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} + \Delta\lambda_{n+1} H_k(\kappa_{n+1}) \mathbf{n}_{n+1}) \\ &= \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*} - (2G + H_k(\kappa_{n+1})) \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad .\end{aligned}\quad (4.14)$$

Die mit dem elastischen Prädiktor vorgegebene Fließrichtung von Gl.(4.7) bleibt während des plastischen Korrektur-Schrittes erhalten, somit auch deren deviatorische Komponente \mathbf{n} [109].

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}}{|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}|} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}}{|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}|} = \mathbf{n}_{n+1}^* \quad (4.15)$$

Einsetzen von Gl.(4.15) in (4.14) und Umformen der so erhaltenen Gleichung nach $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}$ führt zu Gl.(4.16); der in eckigen Klammern stehende Ausdruck ist skalarwertig. Wie Gl.(4.15) zeigt, weisen $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}$ und $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}$ die gleiche Richtung auf, nur die Norm beider Tensoren ist unterschiedlich. Normiert man beide Tensoren, ergibt sich Gl.(4.17).

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*} \left[\underbrace{1 - \frac{(2G + H_k(\kappa_{n+1})) \Delta\lambda_{n+1}}{|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}|}}_{\text{skalarwertig}} \right] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}| \left[\underbrace{1 - \frac{(2G + H_k(\kappa_{n+1})) \Delta\lambda_{n+1}}{|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}|}}_{\text{skalarwertig}} \right] \\ &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}| - (2G + H_k(\kappa_{n+1})) \Delta\lambda_{n+1}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Analog erfolgt das Vorgehen bei der ersten Invariante I_1 . Nach Einsetzen der Beziehungen von Gl.(4.11)₁ und (4.13)₂ in (4.5)₂ erhält man

$$\begin{aligned} I_{1,n+1} &= \left[\sigma_{n,n+1}^* - \rho_n^{\text{hyd}} - (3K + H_k(\kappa_{n+1})) \alpha \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{1} \right] : \mathbf{1} \\ &= I_{1,n+1}^* - (9K + 3H_k(\kappa_{n+1})) \alpha \Delta\lambda_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zum Zeitpunkt t_{n+1} muß die Fließbedingung Gl.(4.4) erfüllt sein. Einsetzen der Gleichungen (4.17) und (4.18) in diese Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| - (2G + H_k(\kappa_{n+1})) \Delta\lambda_{n+1} \\ &\quad + \alpha I_{1,n+1}^* - (9K + 3H_k(\kappa_{n+1})) \alpha^2 \Delta\lambda_{n+1} \\ &\quad - k(\kappa_{n+1}) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Diese Fließbedingung enthält zwei skalarwertige Unbekannte, den Konsistenzparameter $\Delta\lambda_{n+1}$ und die interne Verzerrungsvariable κ_{n+1} . Wie in Kap. 3.2.4 postuliert, beschreibt die interne Variable das nichtlineare Materialverhalten über die Zeit, die sogenannte Materialgeschichte. Wird dabei κ über die *Rate der plastischen Arbeit* definiert (*work hardening hypothesis*, u.a. in [7], [22], [38]), erhält man

$$\dot{W}^{\text{pl}} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{pl}} = k(\kappa) \dot{\kappa} \quad (4.20)$$

$$\text{wobei} \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{\text{dev}} + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{1} \quad (4.5)$$

$$\text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}}{|\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}|} + \alpha \mathbf{1} \right) . \quad (4.6)$$

Nach Einsetzen von Gl.(4.5) und (4.6) in (4.20) ist die Rate der plastischen Arbeit

$$\begin{aligned} \dot{W}^{\text{pl}} &= \dot{\lambda} \left(\underbrace{\frac{\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}}{|\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}|} : \frac{\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}}{|\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}|}}_{=1} |\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}| + \frac{1}{3} \alpha \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{1}}_{=3} \right) \\ &= \dot{\lambda} (|\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}| + \alpha \text{tr}(\boldsymbol{\eta})) \equiv k(\kappa) \dot{\kappa} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mit Erfüllen der Fließbedingung von Gl.(4.20) bzw. (3.3) erhält man $\dot{\kappa} = \dot{\lambda}$. Für das Lastinkrement $n+1$ gilt zum diskreten Zeitpunkt t_{n+1}

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \quad \rightarrow \quad d\kappa = d\lambda \quad \rightarrow \quad \Delta\kappa_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1} . \quad (4.21)$$

Im Hinblick auf das Koppeln mehrerer Drucker–Prager–Teilflächen (siehe Kap. 4.6.1) ist es sinnvoll, Gleichung (4.19) durch Einsetzen von Gl.(4.21) auf eine skalare nichtlineare Gleichung in $\Delta\lambda_{n+1}$ überzuführen, die iterativ mit dem Newton–Verfahren gelöst werden kann. Ist $\Delta\lambda_{n+1}$ und somit auch $\Delta\kappa_{n+1}$ bekannt, können durch entsprechende

Umformungen die internen Variablen und damit als weitere Folge auch die Spannungen vom Zeitpunkt t_{n+1} bestimmt werden, siehe Tafel 4.1.

1. Initialisierung	$\Delta\lambda_{n+1}^{(0)} = 0$ $\kappa_{n+1}^{(0)} = \kappa_n$	
2. Newton-Iteration zur Berechnung von $\Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)}$	$f_{n+1}^{(i)} = \eta_{n+1}^{\text{dev}*} - (2G + H_k(\kappa_{n+1}^{(i)})) \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} + \alpha I_{1,n+1}^* - (9K + 3H_k(\kappa_{n+1}^{(i)})) \alpha^2 \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} - k(\kappa_{n+1}^{(i)})$	(4.19)
	$Df_{n+1}^{(i)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} - \frac{f_{n+1}^{(i)}}{Df_{n+1}^{(i)}}$	} berechnen
	Update der internen Variablen und des Konsistenzparameters	
	$\Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)}$	(4.21)
	$\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \kappa_{n+1}^{(i)} + \Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)}$	
3. Update der Spannungen		
	$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{\text{dev}*}}{ \eta_{n+1}^{\text{dev}*} }$	(4.15)
	$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{C}^{\text{el}} : (\mathbf{n}_{n+1} + \alpha \mathbf{1})$	(4.10)
	$\rho_{n+1} = \rho_n + \Delta\lambda_{n+1} H_k(\kappa_{n+1}) (\mathbf{n}_{n+1} + \alpha \mathbf{1})$	(4.13)

Tafel 4.1 Konsistenzbedingung und Berechnung des Konsistenzparameters

4.2.5 Konsistente elasto-plastische Materialtangenten

Da bei der radialen Rückprojektion die Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$ entgegengesetzt zur Richtung des Gradienten des kinematischen Ver-/Entfestigungstensors $\partial_{\rho} f$ ist, hängen beide Gradienten und deren Richtungsableitungen nur vom Prädiktorspannungszustand ab. Von Gl.(4.12) kann geschlossen werden

$$\partial_{\sigma\rho}^2 f_{n+1} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{\rho\sigma}^2 f_{n+1} = 0 \quad . \quad (4.22)$$

Diese auch von Simo et al. [109] bestätigte Unabhängigkeit als Eigenschaft des *radial returns* bei der J_2 -Plastizität erleichtert die Herleitung der konsistenten elasto-plastischen Materialtangenten, die analog zu Kap. 3.3.2 erfolgt.

Unter Berücksichtigung einer assoziierten Fließregel sowie der Gleichung (4.22) wird die konstitutive Beziehung von Gl.(3.46) zu

$$d\sigma_{n+1} = \{\Theta : [d\epsilon - d\lambda \partial_{\sigma} f]\}_{n+1} . \quad (4.23)$$

Da die Fließbedingung nur noch vom Spannungszustand und von der internen Variablen κ abhängt ($f(\sigma, \rho(\kappa), \kappa) \rightarrow f(\sigma, \kappa)$), vereinfacht sich die Konsistenzbedingung von Gl.(3.45)₄

$$df_{n+1} = \{\partial_{\sigma} f : d\sigma + \partial_{\kappa} f d\kappa\}_{n+1} = 0 . \quad (4.24)$$

Einsetzen von Gl.(4.23) in (4.24) ergibt analog zu Gl.(3.48)

$$\{\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f d\lambda - \partial_{\kappa} f d\kappa\}_{n+1} = \{\partial_{\sigma} f : \Theta : d\epsilon\}_{n+1} . \quad (4.25)$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(4.21) $d\kappa = d\lambda$ erhält man aus Gl.(4.25) analog zu Gl.(3.50) folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} d\lambda_{n+1} \\ d\kappa_{n+1} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f & - \partial_{\kappa} f \\ 1 & - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} f : \Theta : d\epsilon \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{n+1}$$

oder

$$d\lambda_{n+1} = \left\{ [\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f - \partial_{\kappa} f]^{-1} (\partial_{\sigma} f : \Theta : d\epsilon) \right\}_{n+1} , \quad (4.26)$$

wobei die Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$ Gl.(4.7) zu entnehmen ist. Einsetzen von Gl.(4.26) in (4.23) ergibt die konsistente elasto-plastische Materialtangente

$$\left\{ \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right\}_{n+1} = \left\{ \Theta - \frac{(\Theta : \partial_{\sigma} f) \otimes (\Theta : \partial_{\sigma} f)}{\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f - \partial_{\kappa} f} \right\}_{n+1} . \quad (4.27)$$

Die Ableitung der skalaren Fließbedingung Gl.(4.19) nach der internen Variable κ führt zu der Beziehung

$$\partial_{\kappa} f_{n+1} = - \left\{ (1 + 3\alpha^2) H_k + \partial_{\kappa} k \right\}_{n+1} . \quad (4.28)$$

Der algorithmische Modul Θ von Gl.(3.47) wird zu

$$\Theta_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{el})^{-1} + \Delta\lambda \partial_{\sigma\sigma}^2 f \right]^{-1} \right\}_{n+1} ; \quad (4.29)$$

die Inversion von Gl.(4.29) wird in Kap. 4.5 hergeleitet. Ein Bestandteil von Θ ist $\partial_{\sigma\sigma}^2 f$, die zweite Ableitung der Fließbedingung. Für die J_2 -Plastizität wird dieser vierstufige Tensor u.a. bei Simo et al. [109] hergeleitet. Er ist abhängig vom deviatorischen Projektionstensor \mathbf{P}^{dev} und dem dyadischen Produkt der deviatorischen Spannungskomponente \mathbf{n} der Fließrichtung und unabhängig von der ersten Invariante I_1 .

$$\partial_{\sigma\sigma}^2 f_{n+1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{dev}|} \left(\mathbf{P}^{dev} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} \right) . \quad (4.30)$$

1. Elastische Prädiktorspannung

$$\begin{aligned}\Delta \epsilon_{n+1} &= \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \\ \sigma_{n+1}^* &= \mathbf{C}^{el} : \Delta \epsilon_{n+1} + \sigma_n \\ \eta_{n+1}^* &= \sigma_{n+1}^* - \rho_n \\ \kappa_{n+1}^* &= \kappa_n\end{aligned}$$

2. Fließbedingung überprüfen

$$f_{n+1}^* = |\eta_{n+1}^{dev*}| + \alpha \operatorname{tr}(\eta_{n+1}^*) - k(\kappa_n) = 0 \quad (?)$$

im elastischen Bereich $f_{n+1}^* \leq 0$: $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^*$

Weiterrechnen im elastischen Bereich

für $f_{n+1}^* > 0$:

3. Berechnen von $\Delta \lambda_{n+1}$, $\Delta \kappa_{n+1} \rightarrow \kappa_{n+1}$
über lokale Newton-Iteration

} siehe Tafel 4.1

4. Update der Spannungen

5. Konsistente elasto-plastische Materialtangente

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \left\{ \Theta - \frac{(\Theta : \partial_{\sigma f}) \otimes (\Theta : \partial_{\sigma f})}{\partial_{\sigma f} : \Theta : \partial_{\sigma f} - \partial_{\kappa f}} \right\}_{n+1} \quad (4.27)$$

$$\partial_{\sigma f}_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{dev}}{|\eta_{n+1}^{dev}|} + \alpha \mathbf{1} \quad (4.6) \text{ und } (4.7)$$

$$\partial_{\kappa f}_{n+1} = - \left\{ (1 + 3\alpha^2) H_k + \partial_{\kappa k} \right\}_{n+1} \quad (4.28)$$

$$\Theta_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{el})^{-1} + \Delta \lambda \partial_{\sigma \sigma f}^2 \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.29)$$

$$\partial_{\sigma \sigma f}_{n+1}^2 = \frac{1}{|\eta_{n+1}^{dev}|} \left[\mathbf{p}^{dev} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} \right] \quad (4.30)$$

Tafel 4.2 „Radial return“-Algorithmus für die Drucker-Pragersche Fließfläche

Die wesentlichen Schritte des *radial return*-Algorithmus bis hin zur Ermittlung der konsistenten elasto-plastischen Materialtangente sind tabellarisch in Tafel 4.2 aufgelistet.

4.2.6 Sonderformen des Drucker-Pragerschen Fließgesetzes

Im folgenden werden einige Sonderformen des Fließgesetzes von Drucker-Prager kurz erörtert.

● **isotropes Ver-/Entfestigungsgesetz**

Hier entfallen die kinematischen Ver-/Entfestigungsanteile. Die entsprechenden Kenngrößen, wie Ver-/Entfestigungsmodul und -tensor, sind gleich Null.

$$H_k = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \eta = \sigma$$

$$\left\{ \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right\}_{n+1} = \left\{ \Theta - \frac{(\Theta : \partial_{\sigma} f) \otimes (\Theta : \partial_{\sigma} f)}{\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f + \partial_{\kappa} k} \right\}_{n+1} \quad (4.31)$$

● **lineares Ver-/Entfestigungsgesetz**

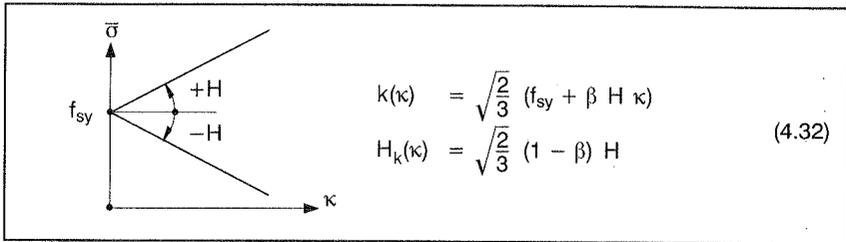


Bild 4.4 Lineares Ver-/Entfestigungsgesetz

Bei Annahme eines linearen Ver-/Entfestigungsgesetzes gemäß Bild 4.4 vereinfacht sich der *radial return*-Algorithmus. Der beim kinematischen Ver-/Entfestigungsmodul von Gl.(4.32)₂ auftretende Faktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ erscheint hier unmotiviert, ermöglicht aber im Zuge der numerischen Realisierung die Zusammenfassung von isotroper und kinematischer Verfestigung zu einem kombinierten Ver-/Entfestigungsmodul H , siehe auch Kap. 3.2.4. Für $\partial_{\kappa} k_{n+1}$ erhält man

$$\partial_{\kappa} k_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta H$$

und aus Gleichung (4.28) wird

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa} f_{n+1} &= - (1 + 3\alpha^2) \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - \beta) H - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta H \\ &= - \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + 3\alpha^2(1 - \beta)) H \end{aligned} \quad (4.33)$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(4.33) wird aus der Fließbedingung Gl.(4.19) eine lineare Gleichung, aufgrund derer $\Delta \lambda_{n+1}$ direkt bestimmt werden kann [109].

• J_2 -Plastizität mit kombinierter Ver-/Entfestigung

Die Plastizitätstheorie wurde ursprünglich für metallische Werkstoffe entwickelt, bei denen der Einfluß des hydrostatischen Drucks auf den Fließeintritt vernachlässigt werden kann. Da zudem nahezu keine plastische Volumenänderung festgestellt wird, verhalten sich Metalle plastisch inkompressibel. Die für Metalle typische von Mises Fließbedingung kann als Grenzfall aus jener von Drucker-Prager abgeleitet werden für

$$\alpha = 0 \quad , \quad (4.34)$$

wodurch der Einfluß der ersten Invariante und somit des hydrostatischen Drucks unterbunden ist. Die Werkstoffmodelle für Metalle orientieren sich überwiegend an einaxialen Zugversuchen (siehe auch Bild 4.5), weshalb das Verfestigungsverhalten über die *Rate der plastischen Verzerrungen* definiert wird [22]. Im Gegensatz zur Gl.(4.21) ergibt sich dann folgende Beziehung zwischen der internen Verzerrungsvariablen κ und dem Konsistenzparameter λ ([22], [49], [109], u.a.)

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} \quad \rightarrow \quad \Delta \kappa_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda_{n+1} \quad . \quad (4.35)$$

Die Gleichungen (4.34) und (4.35) bedingen nun folgende Veränderungen bei der Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$, beim Verfestigungsverhalten $\partial_{\kappa} f$ und bei der konsistenten elasto-plastischen Materialtangente \mathbf{C}^{ep}

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma} f &= \frac{\boldsymbol{\eta}^{dev}}{|\boldsymbol{\eta}^{dev}|} = \mathbf{n} \\ \partial_{\kappa} f_{n+1} &= -\frac{2}{3} H \\ \mathbf{C}_{n+1}^{ep} &= \left\{ \boldsymbol{\Theta} - \frac{(\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n}) \otimes (\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n})}{\mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n} + \frac{2}{3} H} \right\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3 Eindimensionale Plastizität

Im Gegensatz zum Beton sind die Materialeigenschaften des Betonstahls eindeutiger zu bestimmen. Die mechanischen Materialeigenschaften wie Zugfestigkeit und Duktilität wurden wie beim Baustahl aufgrund von Standard-Zugversuchen bestimmt, die dem idealisierten $\sigma - \epsilon$ Diagramm von Bild 4.5 entsprechen. Beim Werkstoffmodell wird ein eindimensionales elasto-plastisches Verhalten mit isotroper Verfestigung angenommen, welches es vom von Mises Modell (vgl. J_2 -Plastizität von Kap. 4.2.6) abzuleiten gilt.

Innerhalb einer einaxialen Formulierung lautet die Fließbedingung wie folgt

$$f_{n+1} = \sigma - \bar{\sigma}(\kappa) \quad , \quad (4.37)$$

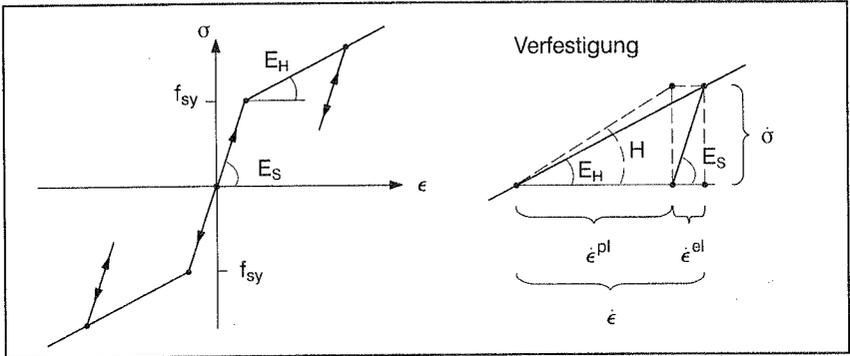


Bild 4.5 Einaxiales Werkstoffmodell für Betonstahl

wobei die äquivalente Spannung $\bar{\sigma}$ aufgrund der linearen Beziehung von Bild 4.4 gegeben ist. Im Vergleich zu Gl.(4.36), (4.30) und (4.33) sind die Fließrichtung $\partial_{\sigma} f$, der Gradient der Fließrichtung $\partial_{\sigma\sigma}^2 f$ und das Verfestigungsgesetz $\partial_{\kappa} f$

$$\partial_{\sigma} f = 1, \quad \partial_{\sigma\sigma}^2 f = 0, \quad \partial_{\kappa} f = -H. \quad (4.38)$$

Dadurch läßt sich die Fließregel wie folgt ableiten

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} f = \dot{\lambda} \rightarrow \Delta \epsilon_{n+1}^{pl} = \Delta \lambda_{n+1}. \quad (4.39)$$

Wird, wie im Fall des räumlichen Spannungszustandes, die interne Variable κ über die Rate der plastischen Arbeit hergeleitet, gilt auch hier analog Gl.(4.21) $\dot{\kappa} = \dot{\lambda}$. Nach dem Update des Spannungszustandes entsprechend Gl.(4.10)

$$\sigma_{n+1} = E_S (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{pl} - \Delta \lambda_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}) \quad (4.40)$$

ist dessen infinitesimale Änderung zu bestimmen.

$$d\sigma_{n+1} = E_S (d\epsilon_{n+1} - d\lambda_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1} - \Delta \lambda_{n+1} \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \sigma^2} d\sigma_{n+1}) \quad (4.41)$$

Die Konsistenzbedingung $df = \partial_{\sigma} f d\sigma + \partial_{\kappa} f d\kappa = 0$ führt, unter Ausnutzung der Gleichungen (4.38)₃ und (4.21), zu folgender Beziehung

$$d\lambda_{n+1} = \frac{1}{H} \partial_{\sigma} f_{n+1} d\sigma_{n+1}, \quad (4.42)$$

die, eingesetzt in Gl.(4.41), zur konsistenten elasto-plastischen Materialtangente führt:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{ep} &= E_S - \frac{E_S \partial_{\sigma} f \partial_{\sigma} f E_S}{\partial_{\sigma} f E_S \partial_{\sigma} f + H} = E_S - \frac{E_S E_S}{E_S + H} \\ &= \frac{E_S H}{E_S + H} = E_H. \end{aligned} \quad (4.43)$$

E_H ist dabei der elasto–plastische Verfestigungsmodul der bilinearen $\sigma - \epsilon$ Charakteristik des einaxialen Zugversuches von Bild 4.5. Er kann analog über die in dieser Abbildung dargestellten, infinitesimalen Beziehung von Gl.(4.44) hergeleitet werden.

$$\dot{\sigma} = E_H \dot{\epsilon} = E_H (\dot{\epsilon}^{pl} + \dot{\epsilon}^{el}) = E_S \dot{\epsilon}^{el} = H \dot{\epsilon}^{pl} \quad (4.44)$$

4.4 Die Kugelfläche als Fließbedingung

4.4.1 Fließfunktion und assoziiertes Ver–/Entfestigungsgesetz

Die Kugelfläche als Fließbedingung ist eine Teilfläche des gekoppelten Betonmodells. Ihre einfache Geometrie kann mit zwei Parametern (Kugelmittelpunkt bzw. –radius) beschrieben werden. Innerhalb dieses Modells übernimmt sie die Funktion, den hydrostatischen Druck zu begrenzen. Funktionell ist sie äquivalent zur elliptischen Kappe des in der Literatur etablierten CAP–Modells ([30], [110], [50], [119]), ursprünglich konzipiert als Werkstoffmodell für Geomaterialien. Geometrisch kann die Kugel als Sonderform eines Ellipsoiden verstanden werden; deshalb ist deren numerische Behandlung als Fließfläche an diejenige von Hofstetter et al. [50] oder Suanno [119] angelehnt. Die Form der Kugel ist in der mit $I_1/3$ skalierten Invariantendarstellung von Bild 4.6 durch folgende Funktion gegeben

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = F_c(\mathbf{s}, I_1, \kappa) - R(\kappa)$$

mit
$$F_c(\mathbf{s}, I_1, \kappa) = \sqrt{|\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{9}(I_1 - L(\kappa))^2} \quad (4.45)$$

Die erste Invariante I_1 und die Norm des deviatorischen Spannungstensors $|\mathbf{s}|$ wurden bereits in Kap. 4.2.1 definiert, die Größen $L(\kappa)$ und $R(\kappa)$ sind geometrisch als Kugelmittelpunkt bzw. –radius zu verstehen (siehe Bild 4.6).

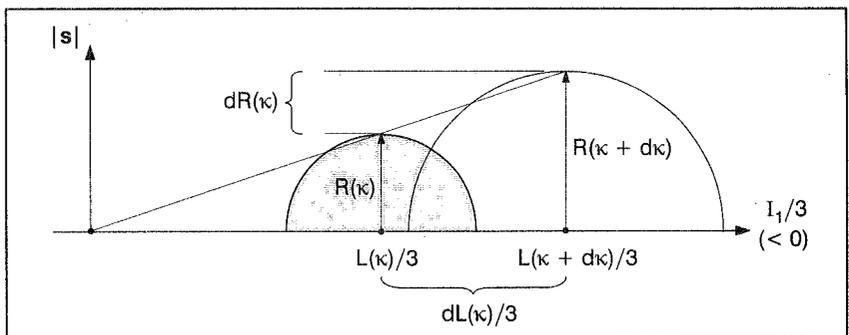


Bild 4.6 Kugelförmige Fließfläche mit gekoppelter Ver–/Entfestigung

Der Gradient der Fließfläche ist

$$\partial_{\sigma} f = F_c^{-1} \left\{ \mathbf{s} + \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) \mathbf{1} \right\} . \quad (4.46)$$

Über die interne Verzerrungsvariable κ wird ein kombiniertes Ver-/Entfestigungsverhalten dergestalt beschrieben, daß sich der Radius $R(\kappa)$ der Kugel proportional zur kinematischen Bewegung der Fließfläche längs der hydrostatischen Achse verändert. Für ein infinitesimales Ver-/Entfestigungsverhalten gilt nach dem Ähnlichkeitssatz von Thales (Strahlensatz)

$$\begin{aligned} \frac{dL(\kappa)}{dR(\kappa)} &= \frac{L(\kappa)}{R(\kappa)} = \frac{L(\kappa + d\kappa)}{R(\kappa + d\kappa)} = k_1 \\ \text{oder} \quad \frac{dL(\kappa)}{d\kappa} &= k_1 \frac{dR(\kappa)}{d\kappa} = k_1 H(\kappa) \\ \text{mit} \quad \frac{dR(\kappa)}{d\kappa} &= H(\kappa) . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Berücksichtigung eines kombinierten, assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetzes entsprechend Kap. 3.2.4, Gl.(3.7) und (3.8)₂, erfordert die Ableitung der Fließfläche nach der internen Variablen κ

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa} f &= \partial_{L(\kappa)} f \frac{dL(\kappa)}{d\kappa} + \partial_{R(\kappa)} f \frac{dR(\kappa)}{d\kappa} \\ &= -\frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) F_c^{-1} \frac{dL(\kappa)}{d\kappa} - \frac{dR(\kappa)}{d\kappa} \\ &= -\left\{ \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) F_c^{-1} k_1 + 1 \right\} H(\kappa) \end{aligned} \quad (4.48)$$

zur Aufbereitung der Ver-/Entfestigungsevolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= -\dot{\lambda} \frac{1}{H(\kappa)} \partial_{\kappa} f \\ &= \left\{ \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) F_c^{-1} k_1 + 1 \right\} \dot{\lambda} . \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.4.2 Elastischer Prädiktor und Rückprojektion (*closest point projection*)

Innerhalb des Rückwärts-Euler Verfahrens wird analog zu Gl.(4.10) der Spannungszustand zum Zeitpunkt t_{n+1} in Abhängigkeit des Prädiktorspannungszustandes dargestellt

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{\text{el}} : \partial_{\sigma} f_{n+1} \\ &= \sigma_{n+1}^* - \left\{ \Delta \lambda \mathbf{C}^{\text{el}} : \left\{ \mathbf{s} + \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) \mathbf{1} \right\} F_c^{-1} \right\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

und kann in seine hydrostatische und deviatorische Komponente aufgespalten werden. Dabei wird aufgrund der Fließbedingung $f(\sigma, \kappa) = 0$, Gl.(4.45), die Beziehung $F_{c,n+1} = R_{n+1}(\kappa)$ ausgenutzt.

$$\sigma_{m,n+1} = \sigma_{m,n+1}^* - \left\{ 3K \Delta\lambda \left\{ \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) \mathbf{1} \right\} F_c^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^* - 2G \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{s}_{n+1} F_{c,n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{s}_{n+1}^* \left\{ \frac{F_c}{2G \Delta\lambda + F_c} \right\}_{n+1} \\ &= \mathbf{s}_{n+1}^* \left\{ \frac{R(\kappa)}{2G \Delta\lambda + R(\kappa)} \right\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Diese vektoriellen Gleichungen können analog zur Herleitung der Gl.(4.16) bis (4.18) auf skalare Gleichungen, basierend auf der ersten Invarianten I_1 und der deviatorischen Norm $|\mathbf{s}|$, reduziert werden.

$$I_{1,n+1} = I_{1,n+1}^* - \left\{ K \Delta\lambda \frac{I_1 - L(\kappa)}{R(\kappa)} \right\}_{n+1} \quad (4.53)$$

oder

$$\{I_1 - L(\kappa)\}_{n+1} = \left\{ \frac{R(\kappa) (I_1^* - L(\kappa))}{K \Delta\lambda + R(\kappa)} \right\}_{n+1} \quad (4.54)$$

und

$$|\mathbf{s}_{n+1}| = |\mathbf{s}_{n+1}^*| \left\{ \frac{R(\kappa)}{2G \Delta\lambda + R(\kappa)} \right\}_{n+1} \quad (4.55)$$

Zum Zeitpunkt t_{n+1} muß die Fließbedingung Gl.(4.45) erfüllt sein. Einsetzen von Gl.(4.54) und (4.55) in (4.45) ergibt nach mehreren Umformungen die nichtlineare Gleichung (4.56) in Abhängigkeit von κ_{n+1} und $\Delta\lambda_{n+1}$.

$$f_{n+1}(\kappa, \Delta\lambda) = \sqrt{\left[\frac{R(\kappa) |\mathbf{s}^*|}{2G \Delta\lambda + R(\kappa)} \right]_{n+1}^2 + \frac{1}{9} \left[\frac{R(\kappa) (I_1^* - L(\kappa))}{K \Delta\lambda + R(\kappa)} \right]_{n+1}^2} - R(\kappa_{n+1}) = 0 \quad (4.56)$$

Eine weitere nichtlineare Beziehung besteht nach Gl.(4.49) zwischen $\Delta\kappa_{n+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}$

$$\Delta\lambda_{n+1}(\kappa) = \left\{ \frac{1}{9} \frac{I_1 - L(\kappa)}{R(\kappa)} k_1 + 1 \right\}_{n+1}^{-1} \Delta\kappa_{n+1} \quad (4.57)$$

Einsetzen dieser Gleichung in Gl.(4.56) führt zu einer skalaren nichtlinearen Beziehung für κ_{n+1} .

$$\left[\frac{f(\kappa)}{R(\kappa)} \right]_{n+1}^2 = \left[\frac{|\mathbf{s}^*|}{2G \Delta\lambda(\kappa) + R(\kappa)} \right]_{n+1}^2 + \frac{1}{9} \left[\frac{I_1^* - L(\kappa)}{K \Delta\lambda(\kappa) + R(\kappa)} \right]_{n+1}^2 - 1 = 0 \quad (4.58)$$

Dadurch wird das Bestimmen von $\Delta\lambda_{n+1}$ und $\Delta\kappa_{n+1}$ schrittweise entkoppelt und das Lösen eines Gleichungssystems mit beiden Unbekannten umgangen.

1. Initialisierung $\Delta\lambda_{n+1}^{(0)} = 0$

$$\kappa_{n+1}^{(0)} = \kappa_n$$

2. Newton-Iteration zur Berechnung von $\kappa_{n+1}^{(i+1)}, \Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)}$

$$\left\{ \left[\frac{f(\kappa)}{R(\kappa)} \right]^2 \right\}_{n+1}^{(i)} = \left\{ \left[\frac{|\mathbf{s}^*|}{2G \Delta\lambda(\kappa) + R(\kappa)} \right]^2 + \frac{1}{9} \left[\frac{I_1^* - L(\kappa)}{K \Delta\lambda(\kappa) + R(\kappa)} \right]^2 - 1 = 0 \right\}_{n+1}^{(i)}$$

$$Df_{n+1}^{(i)} \left. \vphantom{\left[\frac{f(\kappa)}{R(\kappa)} \right]^2} \right\} \quad (4.58)$$

$$\Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\kappa_{n+1}^{(i)} - \frac{f_{n+1}^{(i)}}{Df_{n+1}^{(i)}} \quad \left. \vphantom{\Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)}} \right\} \text{ berechnen}$$

Update der internen Variablen und des Konsistenzparameters

$$\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \kappa_{n+1}^{(i)} + \Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)}$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} = \left[\frac{1}{9} \frac{I_1 - L(\kappa)}{R(\kappa)} \kappa_1 + 1 \right]^{-1} \Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)} \quad (4.57)$$

3. Update der Spannungen

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \left\{ \Delta\lambda \mathbf{C}^{el} : \left[\mathbf{s} + \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) \mathbf{1} \right] \mathbf{F}_c^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.50)$$

Tafel 4.3 Konsistenzbedingung und Berechnung des Konsistenzparameters

Diese *closest point*-Projektion ist in Bild 4.7 dargestellt. Hier wird deutlich, daß eine Abhängigkeit zwischen dem plastischem Fluß und der Evolution der Ver-/Entfestigung besteht, sich somit infolge der Ver-/Entfestigung die Fließrichtung bei der Kugelfläche ändert.

4.4.3 Konsistente elasto-plastische Materialtangente

Die Herleitung der konsistenten Materialtangente erfolgt auch hier analog Kap. 3.3.2. Wird das Fließgesetz Gl. (3.45)₂ in die konstitutive Beziehung von Gl. (3.45)₁ eingesetzt, erhält man, analog zu Gl. (3.46), Gleichung (4.59). Hierbei wird eine assoziierte Fließregel vorausgesetzt und der im Spannungsraum definierte interne Variablenvektor \mathbf{q} durch die im Verzerrungsraum definierte skalarwertige interne Variable κ ersetzt.

$$d\sigma_{n+1} = \left\{ \Theta : \left[d\epsilon - d\lambda \partial_{\sigma} f - \Delta\lambda \partial_{\sigma\kappa}^2 f d\kappa \right] \right\}_{n+1} \quad (4.59)$$

$$\text{mit } \Theta_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{el})^{-1} + \Delta\lambda \partial_{\sigma\sigma}^2 f \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.29)$$

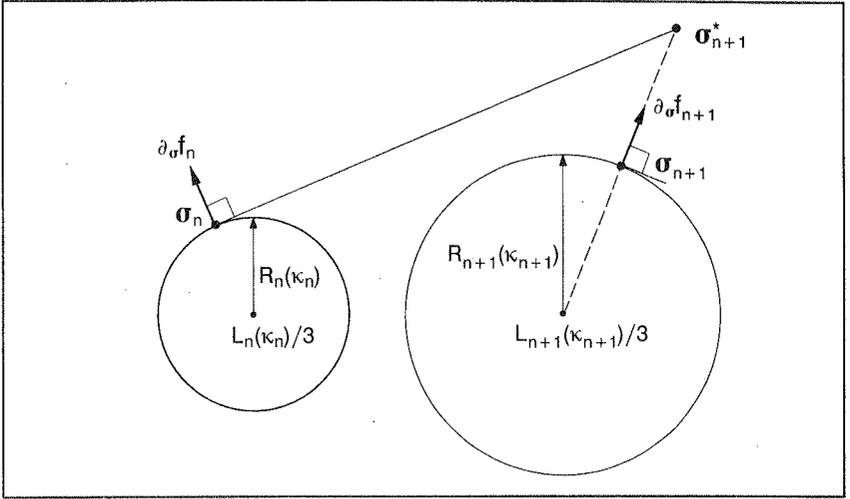


Bild 4.7 Geometrische Interpretation der „closest point“-Projektion

Wie in Kap. 4.2.5 lautet auch hier die Konsistenzbedingung

$$df_{n+1} = \{\partial_{\sigma} f : d\sigma + \partial_{\kappa} f d\kappa\}_{n+1} = 0 \quad (4.24)$$

Einsetzen von Gl.(4.59) in (4.24) ergibt analog zu Gl.(3.48)

$$\left\{ d\lambda \left[\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f \right] + \Delta\lambda \left[\partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\kappa} f \right] d\kappa \right\}_{n+1} = \{\partial_{\sigma} f : \Theta : d\epsilon\}_{n+1} \quad (4.60)$$

Das assoziierte Ver-/Entfestigungsgesetz von Gl.(4.21) läßt sich in der inkrementellen Form darstellen

$$\{\Delta\kappa H(\kappa) + \Delta\lambda \partial_{\kappa} f\}_{n+1} = 0 \quad (4.61)$$

mit dem totalen Differential

$$\left\{ \left[H(\kappa) + \Delta\kappa \frac{dH(\kappa)}{d\kappa} \right] d\kappa + d\lambda \partial_{\kappa} f + \Delta\lambda \left[\partial_{\sigma\kappa}^2 f : d\sigma + \partial_{\kappa\kappa}^2 f d\kappa \right] \right\}_{n+1} = 0 \quad (4.62)$$

Analog zu Gl.(3.49) wird Gl.(4.59) in (4.62) eingesetzt

$$\begin{aligned} & \left\{ d\lambda \Delta\lambda \left[\partial_{\sigma\kappa}^2 f : \Theta : \partial_{\sigma} f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\kappa} f \right] \right\}_{n+1} \\ & + \left\{ \Delta\lambda^2 \left[\partial_{\sigma\kappa}^2 f : \Theta : \partial_{\sigma\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\kappa\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \left(H(\kappa) + \Delta\kappa \frac{dH(\kappa)}{d\kappa} \right) \right] d\kappa \right\}_{n+1} \\ & = \left\{ \Delta\lambda \left[\partial_{\sigma\kappa}^2 f : \Theta : d\epsilon \right] \right\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.63)$$

1. Elastische Prädiktorspannung: siehe Tafel 4.2

2. Fließbedingung überprüfen

$$\left\{ \begin{bmatrix} f \\ R \end{bmatrix}^2 \right\}_{n+1}^* = \left[\frac{|\mathbf{s}_{n+1}^*|}{R(\kappa_n)} \right]^2 + \frac{1}{9} \left[\frac{I_{1,n+1}^* - L(\kappa_n)}{R(\kappa_n)} \right]^2 - 1 = 0 \quad (?)$$

im elastischen Bereich $f_{n+1}^* \leq 0$: $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^*$

Weiterrechnen im elastischen Bereich

für $f_{n+1}^* > 0$:

3. Berechnen von $\Delta\lambda_{n+1}$, $\Delta\kappa_{n+1} \rightarrow \kappa_{n+1}$
 4. Update der Spannungen } siehe Tafel 4.1

5. Konsistente elasto-plastische Materialtangente

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}} = \left\{ \Theta - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Z_{ij}^{-1} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \right\}_{n+1} \quad (3.53)$$

mit $\mathbf{N}_{1,n+1} = \Theta_{n+1} : \partial_{\sigma} f_{n+1}$, $\mathbf{N}_{2,n+1} = \Theta_{n+1} : \partial_{\kappa}^2 f_{n+1}$ (3.54)

Koeffizienten der Matrix $\mathbf{Z}_{1,n+1}$ ($\rightarrow \mathbf{Z}_{1,n+1}^{-1}$ mit Komponenten $z_{ij,n+1}^{-1}$):

$$z_{11,n+1} = \{ \partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\sigma} f \}_{n+1}$$

$$z_{12,n+1} = \left\{ \partial_{\sigma} f : \Theta : \partial_{\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\kappa} f \right\}_{n+1} = z_{21,n+1} \quad (3.55)$$

$$z_{22,n+1} = \left\{ \partial_{\kappa}^2 f : \Theta : \partial_{\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda} \partial_{\kappa}^2 f - \frac{1}{\Delta\lambda^2} \left(H(\kappa) + \frac{dH(\kappa)}{d\kappa} \right) \right\}_{n+1}$$

mit $H(\kappa) = \frac{dR(\kappa)}{d\kappa} \rightarrow \frac{dH(\kappa)}{d\kappa} = \frac{dR^2(\kappa)}{d\kappa^2}$ (4.47)

Gradienten:

$$\partial_{\sigma} f_{n+1} = R_{n+1}^{-1}(\kappa) \left\{ \mathbf{s} + \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) \mathbf{1} \right\}_{n+1} \quad (4.46)$$

$$\partial_{\kappa} f_{n+1} = - \left\{ \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa)) R(\kappa)^{-1} k_1 + 1 \right\}_{n+1} H_{n+1}(\kappa) \quad (4.48)$$

Koeffizienten der Hesse-Matrix:

$$\partial_{\sigma\sigma}^2 f_{n+1} = R_{n+1}^{-1}(\kappa) \left\{ \mathbf{P}^{\text{dev}} - \partial_{\sigma} f \otimes \partial_{\sigma} f + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right\}_{n+1} \quad (4.64)$$

$$\partial_{\sigma\kappa}^2 f_{n+1} = - \left\{ \frac{1}{9} \frac{1}{R(\kappa)} \left(\mathbf{1} - \frac{I_1 - L(\kappa)}{R(\kappa)} \partial_{\sigma} f \right) k_1 H(\kappa) \right\}_{n+1} \quad (4.65)$$

$$\partial_{\kappa\kappa}^2 f_{n+1} = \left\{ \frac{k_1^2 H^2(\kappa)}{9 R(\kappa)} \left[\mathbf{1} - \frac{1}{9} \left(\frac{I_1 - L(\kappa)}{R(\kappa)} \right)^2 \right] + \frac{\partial_{\kappa} f}{H(\kappa)} \frac{dH(\kappa)}{d\kappa} \right\}_{n+1} \quad (4.66)$$

Tafel 4.4 „Closest point“-Algorithmus für eine kugelförmige Fließfläche

Wie in Gl.(3.50) stellen nun die Gleichungen (4.60) und (4.63) ein Gleichungssystem zum Lösen nach $d\lambda_{n+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}d\kappa_{n+1}$ dar. Nach Einsetzen beider Größen in die konstitutive Beziehung von Gl.(4.59) läßt sich, analog zu Gl.(3.53) bis (3.55), die konsistente elasto–plastische Materialtangente bestimmen. Durch die im Verzerrungsraum definierte interne Variable κ ändert sich die Notation wie folgt

$$\mathbf{q} \rightarrow \kappa, \quad \partial_{\mathbf{q}}f \rightarrow \partial_{\kappa}f, \\ \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2f = \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2f \rightarrow \partial_{\sigma\kappa}^2f = \partial_{\kappa\sigma}^2f, \quad \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2f \rightarrow \partial_{\kappa\kappa}^2f,$$

was auch Auswirkungen auf die inverse Matrix der allgemeinen plastischen Moduln \mathbf{D}^{-1} von Gl.(3.55)₃ hat.

$$\mathbf{D}^{-1} \rightarrow \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\kappa) + \frac{d\mathbf{H}(\kappa)}{d\kappa} \quad (4.67)$$

Die Herleitung der Materialtangente \mathbf{C}^{ep} ist tabellarisch in Tafel 4.4 zusammengefaßt.

4.5 Algorithmischer Modul

Beim Implementieren beider Fließflächen (Drucker–Prager, Kugelfläche) ist der algorithmische Modul Θ_{n+1} innerhalb jeder Iteration und an jedem Gaußpunkt zu bestimmen. Dabei ist der Ausdruck innerhalb der Klammern von

$$\Theta_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{\text{el}})^{-1} + \Delta\lambda \partial_{\sigma\sigma}^2f \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.29)$$

zu invertieren, was unter Anwendung der Sherman–Morrison Formel [135] geschieht. Die zweite Ableitung der Drucker–Pragerschen Fließfläche bezüglich σ lautet

$$\partial_{\sigma\sigma}^2f(\text{DP})_{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{n}_{n+1}^{\text{dev}}|} \left\{ \mathbf{p}^{\text{dev}} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} \right\} \quad (4.30)$$

und die der kugelförmigen Fließfläche

$$\partial_{\sigma\sigma}^2f(\text{KU})_{n+1} = \frac{1}{R_{n+1}(\kappa)} \left\{ \mathbf{p}^{\text{dev}} - \partial_{\sigma}f \otimes \partial_{\sigma}f + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right\}_{n+1} \quad (4.64)$$

Die beiden Gleichungen (4.65) und (4.66) sind in Tafel 4.4 enthalten. In bezug auf Gl.(4.30) und (4.64) kann Θ_{n+1} allgemeiner gefaßt werden [52]

$$\Theta_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{\text{el}})^{-1} + c_1 \mathbf{p}^{\text{dev}} + c_2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - c_1 \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right]^{-1} \right\}_{n+1} \\ = \left\{ \left[\mathbf{A}^{-1} - c_1 \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right]^{-1} \right\}_{n+1}, \quad (4.68)$$

wobei

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{C}^{\text{el}})^{-1} + c_1 \mathbf{P}^{\text{dev}} + c_2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

	c_1	c_2	\mathbf{p}
Drucker-Prager	$\frac{\Delta\lambda}{ \boldsymbol{\eta}^{\text{dev}} }$	0	\mathbf{n}
Kugel	$\frac{\Delta\lambda}{R(\kappa)}$	$\frac{\Delta\lambda}{9 R(\kappa)}$	$\partial_{\sigma f}$

Mit der Sherman–Morrison Formel ([29], [135]) erhält man

$$\boldsymbol{\Theta}_{n+1} = \left\{ \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A} : \mathbf{p} \otimes \mathbf{A} : \mathbf{p}}{\mathbf{p} : \mathbf{A} : \mathbf{p} - \frac{1}{c_1}} \right\}_{n+1} \quad (4.69)$$

Die Inversion von \mathbf{A}^{-1} zu \mathbf{A} beruht auf einer Spektralzerlegung, die ausführlich u.a. in [80] und [119] beschrieben ist. Die vierstufigen Tensoren \mathbf{P}^{dev} und $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, als Komponenten von Gl.(4.68)₃, sind im Anhang A 1 in Matrizenschreibweise dargestellt. Nach einer Spektralzerlegung dieser Matrizen verändert sich Gl.(4.68)₃ wie folgt

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q} \left[(\Lambda^{\text{C}})^{-1} + c_1 \Lambda^{\text{dev}} + c_2 \Lambda^{\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}} \right] \mathbf{Q}^T, \quad (4.70)$$

wobei die Matrix \mathbf{Q} (siehe Anhang A 1.2) spaltenweise die orthonormierten Eigenvektoren der Matrizen \mathbf{C}^{-1} , \mathbf{P}^{dev} und $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ enthält und die Komponenten der Diagonalmatrizen $(\Lambda^{\text{C}})^{-1}$, Λ^{dev} und $\Lambda^{\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}}$ (siehe Anhang A 1.2) die entsprechenden Eigenwerte sind. Die Inverse von \mathbf{A}^{-1} wird wie folgt bestimmt

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \left[(\Lambda^{\text{C}})^{-1} + c_1 \Lambda^{\text{dev}} + c_2 \Lambda^{\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}} \right]^{-1} \mathbf{Q}^T, \quad (4.71)$$

wobei die Inversion des Klammerausdrucks als Diagonalmatrix trivial ist.

4.6 Numerische Behandlung diskontinuierlicher Fließflächen

In diesem Kapitel wird auf die numerische Behandlung mehrteiliger Fließflächen mit nicht glatten Übergängen eingegangen. Wie bereits in Kap. 4.1 angesprochen, besteht das Betonmodell aus drei Drucker–Prager–Teilflächen, einschließlich dem *inverted cone*. In Kap. 4.6.1 wird in bezug auf das Betonmodell ein rechnerisch effizienter Algorithmus für mehrteilige Fließflächen, bestehend aus m Drucker–Prager–Flächen, aufgezeigt und in Kap. 4.6.2 speziell die Behandlung der Singularität an der Kegelspitze der Fließfläche von Drucker–Prager erörtert.

4.6.1 Gekoppelte Drucker–Pragersche Fließflächen

Besteht eine Fließfläche aus mehreren Teilflächen mit nicht glatten Übergängen, ist der Gradient der Fließfläche und damit die assoziierte Fließregel in derartigen Punkten nicht

eindeutig definiert. Die nicht glatte Fließfläche soll nun aus m Drucker–Prager–Flächen bestehen, die jeweils analog zu Gl.(4.4) definiert sind (siehe auch Bild 4.8):

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}, \kappa) = |\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}| + \alpha_j \operatorname{tr}(\boldsymbol{\eta}) - k_j(\kappa) \quad \text{für } j = 1, \dots, m \quad (4.72)$$

Zwischen mehrteiligen Fließflächen mit nicht glatten Übergängen, die sich zudem durch ein ver-/entfestigendes Materialverhalten auszeichnen, und einfachen Fließflächen besteht ein wesentlicher Unterschied. Verletzt im Falle einer einfachen Fließfläche der elastische Prädiktor die Fließbedingung, bleibt die Fließfläche während der iterativen Rückprojektion stets aktiv. Werden im anderen Fall mehrere Fließbedingungen durch den elastischen Prädiktor verletzt, ist nicht garantiert, daß alle verletzten Fließflächen am Ende des Fließprozesses beteiligt, d.h. aktiv sind [119].

Simo, Kennedy und Govindjee [111] schlagen deshalb für mehrteilige Fließflächen einen unbedingt stabilen Algorithmus für eine beliebige Anzahl von Flächenabschnitten mit nicht glatten Übergängen vor, bei dem am Ende des Fließprozesses die Zahl der noch aktiven Fließflächen kleiner oder gleich der verletzten Fließbedingungen ist. Die Fließfläche f_j wird deaktiviert, wenn während der Iteration der korrespondierende inkrementelle plastische Multiplikator $\Delta\lambda_j$ negativ wird. Diesem Algorithmus steht der von Pramono et al. [92] gegenüber. Hier wird die Rückprojektion zuerst lediglich an der aktiven Fließfläche mit dem größten Einfluß vorgenommen. Sind dann noch weitere Fließbedingungen verletzt, erfolgt die Rückprojektion des elastischen Prädiktors mit allen noch aktiven Fließflächen. Diese Strategie wird beim Betonmodell zum Bestimmen der Lage des glatten Übergangs zwischen der Drucker–Prager–Teilfläche und der Kugelkappe angewandt. Ist nach der Rückprojektion auf die Drucker–Prager–Teilfläche die Kugelkappe noch aktiv, erfolgt die Rückprojektion nochmals auf die Kugelkappe.

Für die algorithmische Behandlung von nicht glatten Übergängen wird in [111] eine Lagrangesche Funktion (siehe z.B. Kapitel 14 von Luenberger [75]) mit Hilfe des Prinzips vom Maximum der plastischen Dissipation formuliert und somit das Bestimmen des endgültigen Zustandes als Minimierungsaufgabe verstanden. Im Hinblick auf ein lokales Newton–Verfahren führt die quadratische Approximation der Lagrangeschen Funktion auf Richtungsableitungen. Diese beinhalten den Gradienten, somit die ersten Ableitungen, und die Hesse–Matrix mit den zweiten Ableitungen der Lagrangeschen Funktion.

Der hier beschrittene Weg ist analog zu Simo et al. [111] zu sehen. Für die lokale Newton–Iteration sind alle Fließfunktionen bezüglich des Prädiktorschrittes (\rightarrow Gradient der Lagrangeschen Funktion) zu linearisieren und die Jacobi–Matrix (\rightarrow Gradient der Lagrangeschen Funktion) zu bestimmen. Am Ende des Iterationsprozesses müssen alle m Fließflächen die diskreten Kuhn–Tucker Bedingungen erfüllen:

$$f_{j,n+1}(\sigma_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) \leq 0; \quad \Delta\lambda_{j,n+1} \geq 0; \quad f_{j,n+1} \Delta\lambda_{j,n+1} = 0 \quad (4.73)$$

für $j = 1, \dots, m$.

Koiter [56] hat eine modifizierte Fließregel vorgeschlagen, die z aktive Fließflächen kombiniert.

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \sum_{i=1}^z \dot{\lambda}_i \partial_{\sigma} f_i \quad \text{mit } z \leq m \quad (4.74)$$

• **elastischer Prädiktor / plastischer Korrektor**

Innerhalb des elastischen Prädiktor / plastischen Korrektor-Verfahrens ist die Koiter'sche Regel Gl.(4.74) in der konstitutiven Beziehung von Gl.(4.10) zu berücksichtigen. Nach Umformungen gemäß Kap. 4.2.3 und 4.2.4 führt dies entsprechend Gl.(4.19) für jede aktive Fließbedingung j zu folgender Beziehung

$$\begin{aligned} f_{j,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{dev*}| - \sum_{i=1}^z (2G + H_{k_i}(\kappa_{i,n+1})) \Delta\lambda_{i,n+1} \\ &+ \alpha_j I_{1,n+1}^* - \alpha_j \sum_{i=1}^z (9K + 3H_{k_i}(\kappa_{i,n+1})) \alpha_i \Delta\lambda_{i,n+1} \\ &- k(\kappa_{j,n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

oder für alle Teilflächen zum Gleichungssystem

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(f_{1,n+1}, f_{2,n+1}, \dots, f_{z,n+1}) = \mathbf{0} \quad (4.76)$$

Dieses Gleichungssystem aller Fließbedingungen enthält eine Anzahl von $2z$ Unbekannten, z Konsistenzparameter $\Delta\lambda_{i,n+1}$ und z interne Verzerrungsvariablen $\kappa_{i,n+1}$. Analog zu Gl.(4.20) bis (4.21) werden die internen Variablen über die Rate der plastischen Arbeit definiert.

$$\dot{W}_j^{pl} = \boldsymbol{\eta} : \sum_{i=1}^z \left(\zeta_{ji} \frac{k_j}{k_i} \lambda_i \partial_{\sigma} f_i \right) \equiv k_j \dot{\kappa}_j \quad (4.77)$$

Hierin koppeln die skalaren Komponenten ζ_{ji} die internen Variablen κ_j der einzelnen Fließflächen mit den Konsistenzparametern aller aktiven Fließflächen. Nach Umformen und unter Anwendung der Fließbedingungen von Gl.(4.75) erhält man folgende Beziehungen für die internen Variablen

$$\dot{\kappa}_j = \sum_{i=1}^z \zeta_{ji} \dot{\lambda}_i = \zeta_{j1} \dot{\lambda}_1 + \zeta_{j2} \dot{\lambda}_2 + \dots$$

oder in deren inkrementeller Formulierung

$$\Delta\kappa_{j,n+1} = \sum_{i=1}^z \zeta_{ji} \Delta\lambda_{i,n+1} = \left\{ \zeta_{j1} \Delta\lambda_1 + \zeta_{j2} \Delta\lambda_2 + \dots \right\}_{n+1} \quad (4.78)$$

und in der zugehörigen Matrizendarstellung

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \bar{\mathbf{Z}} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1z} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \dots & \zeta_{2z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_{z1} & \zeta_{z2} & \dots & \zeta_{zz} \end{bmatrix} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_z] .$$

Die Kopplungsmatrix $\bar{\mathbf{Z}}$ ist im allgemeinen (siehe auch bei *inverted cone*) singulär und deshalb nicht invertierbar. Als Folge davon, aber auch aufgrund der Einfachheit der Drucker–Pragerschen Fließfläche, sind innerhalb der lokalen Iteration schrittweise zuerst der Vektor der Konsistenzparameter $\Delta\lambda_{n+1}$ über das Gleichungssystem Gl.(4.76), und anschließend der Vektor der internen Variablen $\Delta\kappa_{n+1}$ über den Update mit dem Gleichung (4.78)₃ zu bestimmen.

Wie erwähnt sind während dieser Newton–Iteration die inaktiven Teilflächen nach Verletzen der Kuhn–Tucker Bedingung ($\Delta\lambda_{j,n+1} < 0$) zu eliminieren. Für das algorithmische Vorgehen wird hierzu für jede der m Fließbedingungen eine skalare Größe c_j eingeführt, die eine aktive Fließfläche für $\Delta\lambda_{j,n+1} > 0$ mit $c_j = 1$ „signalisiert“. Bleibt die Fließfläche für $\Delta\lambda_{j,n+1} \leq 0$ inaktiv, ist $c_j = 0$. Nach [38] ist für jede Fließfläche f_j die Abhängigkeit von c_j wie folgt definiert

$$\bar{f}_{j,n+1} = \left\{ c_j f_j(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \dots \Delta\lambda_m) + (1 - c_j) \Delta\lambda_j \right\}_{n+1} \quad \text{für } j = 1, \dots, m \quad (4.79)$$

und für das Gleichungssystem Gl.(4.76)

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1} + \bar{\mathbf{c}}_{n+1} \Delta\lambda_{n+1} . \quad (4.80)$$

Analog hierzu wird das Gleichungssystem Gl.(4.78)₃ mit den Matrizen der skalaren Größen erweitert

$$\Delta\kappa_{n+1} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c}_{n+1} \Delta\lambda_{n+1} . \quad (4.81)$$

In Gl.(4.80) und (4.81) beinhalten die Diagonalmatrizen \mathbf{c} und $\bar{\mathbf{c}}$ die skalaren indikativen Größen c_j in folgender Form

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \text{diag} [c_1, c_2, \dots, c_m] \\ \bar{\mathbf{c}} &= \text{diag} [1 - c_1, 1 - c_2, \dots, 1 - c_m] . \end{aligned} \quad (4.82)$$

In Tafel 4.5 ist das Newton–Verfahren tabellarisch wiedergegeben. Hier ist anzumerken, daß das Betonmodell maximal aus drei zu koppelnden Drucker–Prager–Teilflächen besteht und die zugehörige Jacobi–Matrix eine Größe von 3×3 hat, die exakt invertiert werden kann. Da während der Iteration permanent die inaktiven Fließflächen zu eliminieren sind, findet ein *Update der Problemstellung* und somit ein *Verschieben des*

1. Initialisierung $\Delta\lambda_{j,n+1}^{(0)} = 0$

$$\kappa_{j,n+1}^{(0)} = \kappa_{j,n}$$

2. Newton-Iteration zur Berechnung aller $\Delta\lambda_{j,n+1}^{(i+1)}$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j,n+1}^{(i)} &= |\eta_{n+1}^{\text{dev}*}| - \sum_{i=1}^z \left(2G + H_{k_i}(\kappa_{i,n+1}^{(i)}) \right) \Delta\lambda_{i,n+1}^{(i)} \\ &+ \alpha_j I_{1,n+1}^* - \alpha_j \sum_{i=1}^z \left(9K + 3H_{k_i}(\kappa_{i,n+1}^{(i)}) \right) \alpha_i \Delta\lambda_{i,n+1}^{(i)} \\ &- k(\kappa_{j,n+1}^{(i)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

und des Gleichungssystems

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{c}_{n+1}^{(i)} \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} + \bar{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i)} \Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} \quad (4.80)$$

Bestimmen der Jacobi-Matrix und der Konsistenzparameter

$$\mathbf{J}_{n+1}^{(i)} = \left. \begin{aligned} &= \left\{ \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots, \Delta\lambda_m)} \right\}_{n+1}^{(i)} \\ &= \left\{ \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{F}(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots, \Delta\lambda_m)} + \bar{\mathbf{c}} \right\}_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{berechnen} \\ \text{und} \\ \text{invertieren} \end{array}$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} - \mathbf{J}_{n+1}^{(i)-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{(i)} \quad \text{berechnen}$$

Elimination inaktiver Fließflächen

$$\Delta\lambda_{j,n+1}^{(i+1)} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \mathbf{c}_{j,n+1}^{(i+1)} = 1 \\ \mathbf{c}_{j,n+1}^{(i+1)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{c}^{(i+1)}, \bar{\mathbf{c}}^{(i+1)} \quad (4.82)$$

Update der internen Variablen

$$\Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c}_{n+1}^{(i+1)} \Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} \quad (4.81)$$

$$\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \kappa_{n+1}^{(i+1)} + \Delta\kappa_{n+1}^{(i+1)}$$

3. Update der Spannungen

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{\text{dev}*}}{|\eta_{n+1}^{\text{dev}*}|} \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \sum_{i=1}^m c_i \Delta\lambda_{i,n+1} \mathbf{C}^{\text{el}} : (\mathbf{n}_{n+1} + \alpha_i \mathbf{1}) \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{n+1} = \boldsymbol{\rho}_n + \sum_{i=1}^m c_i \Delta\lambda_{i,n+1} H_k(\kappa_{i,n+1}) (\mathbf{n}_{n+1} + \alpha_i \mathbf{1}) \quad (4.13)$$

Tafel 4.5 Konsistenzbedingungen und Berechnung der Konsistenzparameter für gekoppelte Drucker-Pragersche Fließflächen

Konvergenzradius statt. Erst nach einer Konsolidierung auf ein Minimum an aktiven Fließflächen (endgültige Problemstellung) ist die Konvergenzrate quadratisch. Bisherige Beispiele zeigen, daß das Verfahren mit weniger als 10 Schritten konvergiert.

• **konsistente elasto–plastische Materialtangente**

Die konstitutive Beziehung von Gl.(4.10) gilt es für die Koitersche Regel Gl.(4.74) weiter zu fassen

$$\sigma_{n+1}^* = \mathbf{C}^{el} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{pl}) = \sigma_{n+1} + \sum_{i=1}^m c_i \Delta \lambda_{i,n+1} \mathbf{C}^{el} : \partial \sigma_{f_i,n+1} \quad (4.83)$$

Analog zu Gl.(4.23) und (4.29) erhält man die totale Ableitung

$$d\sigma_{n+1} = \left\{ \bar{\Theta} : \left[d\epsilon - \sum_{i=1}^m c_i d\lambda_i \partial \sigma_{f_i} \right] \right\}_{n+1} \quad (4.84)$$

$$\text{mit } \bar{\Theta}_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{el})^{-1} + \sum_{i=1}^m c_i \Delta \lambda_i \partial_{\sigma\sigma}^2 f_i \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.85)$$

Wie in Kap. 4.2.5 gezeigt wurde, hängt die zweite Ableitung jeder einzelnen Drucker–Pragerschen Fließfläche von \mathbf{P}^{dev} und dem dyadischen Produkt der deviatorischen Spannungskomponente \mathbf{n} ab. Dies hat zur Folge, daß innerhalb eines Iterationsschrittes der Tensor der zweiten Ableitungen der Fließflächen konstant, d.h. für jeden Spannungszustand gleich ist und somit der algorithmische Modul Gl.(4.85) lediglich die Summe der Konsistenzparameter beinhaltet.

$$\bar{\Theta}_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{C}^{el})^{-1} + \left[\sum_{i=1}^m c_i \Delta \lambda_i \right] \partial_{\sigma\sigma}^2 f \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.85)$$

In einer allgemeineren Formulierung nach Riggs et al. [95] kann Gl.(4.84) in einer Matrixdarstellung wie folgt geschrieben werden

$$d\sigma_{n+1} = [\bar{\Theta} (d\epsilon - \mathbf{U} d\lambda)]_{n+1} \quad (4.86)$$

wobei die Matrix \mathbf{U} die Vektoren der Fließrichtungen (hier die assoziierten Fließrichtungen) beinhaltet

$$\mathbf{U}_{n+1} = [c_1 \partial \sigma_{f_1}, c_2 \partial \sigma_{f_2} \dots c_m \partial \sigma_{f_m}]_{n+1} \quad (4.87)$$

und beim Vektor $d\lambda$ die Konsistenzparameter der Teilflächen die Komponenten sind.

$$d\lambda_{n+1} = [d\lambda_1, d\lambda_2 \dots d\lambda_m]_{n+1}^T \quad (4.88)$$

In der Konsistenzbedingung jeder Teilfläche j wird die skalare Größe c_j zur Identifikation einer aktiven oder inaktiven Fließfläche in folgender Form eingeführt [38]

$$df_{j,n+1} = \left\{ c_j (\partial_{\sigma} f_j : d\sigma + \partial_{\kappa} f_j d\kappa) + (1 - c_j) d\lambda_j \right\}_{n+1} = 0 \quad (4.89)$$

Wird der Vektor der inneren Variablen nach Gl.(4.81) über die Beziehung $d\kappa = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} d\lambda$ ausgedrückt und \mathbf{c} wie auch $\bar{\mathbf{c}}$ entsprechend Gl.(4.82) berücksichtigt, kann von der Konsistenzbedingung der Einzelfläche Gl.(4.89) auf das Gleichungssystem der Konsistenzbedingungen aller m Teilflächen wie folgt geschlossen werden

$$d\mathbf{F}_{n+1} = \left\{ \mathbf{V}_{\sigma}^T d\sigma + (\mathbf{V}_{\kappa}^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}}) d\lambda \right\}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (4.90)$$

mit

$$\mathbf{V}_{\sigma,n+1} = [c_1 \partial_{\sigma} f_1, c_2 \partial_{\sigma} f_2 \dots c_m \partial_{\sigma} f_m]_{n+1}$$

$$\mathbf{V}_{\kappa,n+1} = [c_1 \partial_{\kappa} f_1, c_2 \partial_{\kappa} f_2 \dots c_m \partial_{\kappa} f_m]_{n+1} \quad .$$

Ist die Matrix der plastischen Moduln folgendermaßen definiert

$$\mathbf{E}_{n+1} = - \left[\mathbf{V}_{\kappa}^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} \right]_{n+1} \quad (4.91)$$

erhält man nach Umformen von Gl.(4.90) den Vektor der plastischen Multiplikatoren $d\lambda$.

$$d\lambda_{n+1} = \left\{ \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_{\sigma}^T d\sigma \right\}_{n+1} \quad (4.92)$$

Gleichung (4.92) wird in Gl.(4.86) eingesetzt

$$\left\{ \bar{\Theta}^{-1} + \mathbf{U} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_{\sigma}^T \right\}_{n+1} d\sigma_{n+1} = d\epsilon_{n+1} \quad (4.93)$$

mit der, unter Anwendung der Sherman–Morrison Formel, die konsistente elasto–plastische Materialtangente bestimmt wird.

$$\left\{ \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right\}_{n+1} = \left\{ \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \mathbf{U} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_{\sigma}^T \bar{\Theta} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}_{\sigma}^T \bar{\Theta} \right\}_{n+1} \quad (4.94)$$

Die wesentlichen Schritte des *radial return*–Algorithmus für gekoppelte Drucker–Pragerische Fließflächen sind in Tafel 4.6 aufgeführt. Als Grundlage für Kapitel 4.6.2 wird anhand eines Beispiels mit zwei gekoppelten Teilflächen die Matrix der plastischen Moduln \mathbf{E} aufgestellt. Voraussetzungen hierfür sind, daß ein entkoppeltes nichtlineares Materialverhalten beider Teilflächen vorliegt und für jede Teilfläche ein assoziiertes Ver–/Entfestigungsgesetz existiert. Für den Fall, daß nur die Teilfläche f_1 aktiv ist (siehe Bild 4.8b), wird

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\partial_{\kappa} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{V}_{\sigma} = \begin{bmatrix} -\partial_{\sigma} f_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Theta} = \Theta \quad .$$

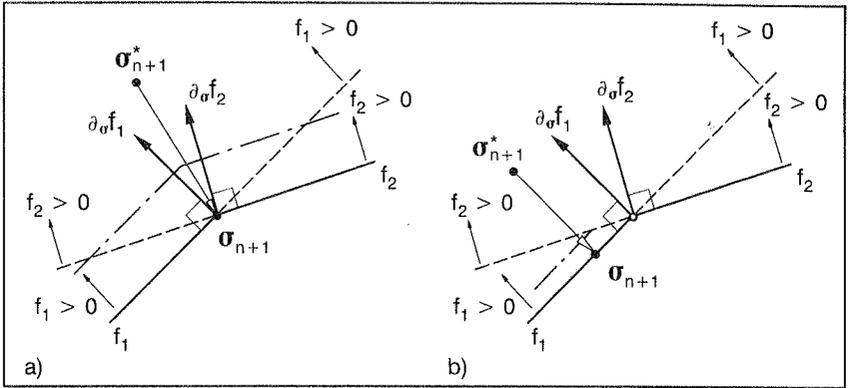


Bild 4.8 „Radial return“ bei zwei gekoppelten Drucker–Prager–Teilflächen
 a) beide Teilflächen aktiv b) Teilfläche f_1 aktiv

Als konsistente Materialtangente erhält man

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}} = \left\{ \Theta - \Theta \partial_{\sigma} f_1 (-\partial_{\kappa} f_1 + \partial_{\sigma} f_1 \Theta \partial_{\sigma} f_1)^{-1} \partial_{\sigma} f_1^T \Theta \right\}_{n+1},$$

welche erwartungsgemäß der von Gl.(4.27) entspricht.

4.6.2 Der „inverted cone“ der Drucker–Pragerschen Fließfläche

Die hier vorgeschlagene numerische Behandlung im Bereich der Singularität der Drucker–Pragerschen Fließfläche erfolgt mit einem sogenannte *inverted cone*. Er ist eine zusätzliche Teilfläche, weshalb hier auch die Koitersche Regel angewandt werden kann. Der Projektionsalgorithmus im Bereich des invertierten Kegels erscheint konträr zu dem von Hofstetter et al. [52]. Für die assoziierte und nicht–assoziierte Drucker–Prager–Plastizität wird dort unter Anwendung der Koiterschen Regel einerseits auf die hydrostatische Achse, andererseits entlang der hydrostatischen Achse (*tension cutoff*) hin zur Kegelspitze projiziert. Beide Vorgehensweisen sind anschaulich in Bild 4.9 dargestellt. Die Idee des *inverted cone* wurde für ein idealplastisches Werkstoffverhalten u.a. von Pontes et al. [91] aufgegriffen und wird in dieser Arbeit für ein ver–/entfestigendes Materialverhalten erweitert. Pankaj et al. stellen in [89] ein adäquates Vorgehen für das Mohr–Coulombsche Werkstoffmodell (*inverted pyramid*) vor.

Das Projektionsverfahren nach Hofstetter et al. [52] könnte über eine Lagrangesche Funktion im Sinne eines Minimierungsproblems gehandhabt werden. „Invertiert“ heißt in diesem Kontext, daß zwar die Koitersche Regel weiterhin gilt, jedoch die Kuhn–Tucker Bedingungen für die Teilfläche des invertierten Kegels umgekehrt werden.

1. Elastische Prädiktorspannung: siehe Tafel 4.2

2. Alle m Fließbedingungen überprüfen

$$f_{j,n+1}^* = |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}*}| + \alpha_j \text{tr}(\boldsymbol{\eta}_{n+1}^*) - k_j(\kappa_n) = 0 \quad (?) \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

im elastischen Bereich, wenn alle $f_{n+1}^* \leq 0$: $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^*$

Weiterrechnen im elastischen Bereich

für alle $f_{j,n+1}^* > 0$: $c_j^* = 1$; ansonsten: $f_{j,n+1}^* \leq 0$: $c_j^* = 0$

3. Berechnen von $\Delta\lambda_{n+1}$, $\Delta\kappa_{n+1} \rightarrow \kappa_{n+1}$

4. Update der Spannungen

} siehe Tafel 4.5

5. Konsistente elasto-plastische Materialtangente

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep}} = \left\{ \bar{\boldsymbol{\Theta}} - \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U} \left(\mathbf{E} + \mathbf{V}_\sigma^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{V}_\sigma^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \right\}_{n+1} \quad (4.94)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{n+1} = \left\{ \left[\left(\mathbf{C}^{\text{el}} \right)^{-1} + \left[\sum_{i=1}^m c_i \Delta\lambda_i \right] \partial_{\sigma\sigma}^2 f \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{V}_{\sigma,n+1} = [c_1 \partial_{\sigma f_1}, c_2 \partial_{\sigma f_2} \dots c_m \partial_{\sigma f_m}]_{n+1} \quad (4.90)_2$$

assoziierte Fließregel: $\mathbf{U} = \mathbf{V}_{\sigma,n+1}$

ansonsten: $\mathbf{U} = [c_1 \partial_{\sigma g_{\epsilon 1}}, c_2 \partial_{\sigma g_{\epsilon 2}} \dots c_m \partial_{\sigma g_{\epsilon m}}]_{n+1}$

Matrix der plastischen Moduln

$$\mathbf{E}_{n+1} = - \left[\mathbf{V}_\kappa^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} \right]_{n+1} \quad (4.91)$$

Beispiel für zwei gekoppelte Fließflächen

$$\text{mit } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & 0 \\ 0 & 1 - c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{entkoppeltes Materialverhalten } \bar{\mathbf{Z}} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

assoziierte Ver-/Entfestigung $\mathbf{V}_{\kappa,n+1} = [c_1 \partial_{\kappa f_1}, c_2 \partial_{\kappa f_2}]_{n+1}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_{n+1} = - \begin{bmatrix} c_1 c_1 \partial_{\kappa f_1} \mathbf{z}_1 + (1 - c_1) & c_1 c_2 \partial_{\kappa f_1} \mathbf{z}_2 \\ c_2 c_1 \partial_{\kappa f_2} \mathbf{z}_1 & c_2 c_2 \partial_{\kappa f_2} \mathbf{z}_2 + (1 - c_2) \end{bmatrix}$$

Tafel 4.6 „Radial return“-Algorithmus für gekoppelte Drucker-Prager-Fließflächen

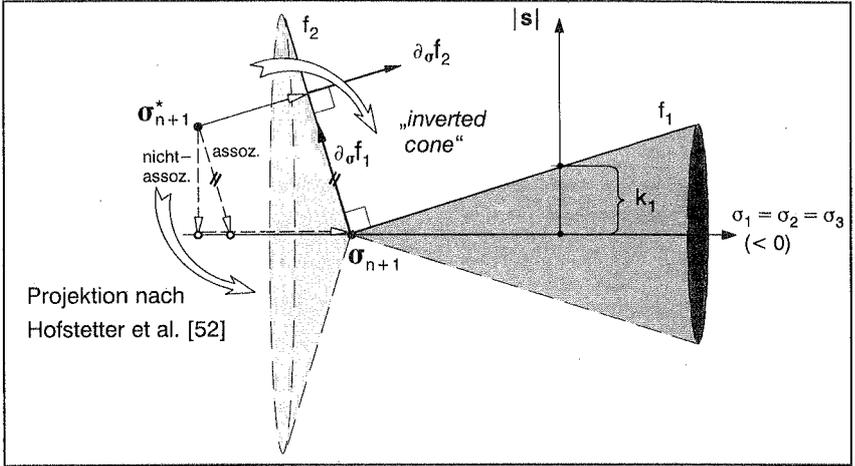


Bild 4.9 Projektionsverfahren im Bereich der Kegelspitze

Die Gleichungen (4.95) ersetzen Gl.(4.73).

$$f_{j,n+1}(\sigma_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) > 0 ; \quad \Delta \lambda_{j,n+1} \leq 0 ; \quad f_{j,n+1} \Delta \lambda_{j,n+1} = 0 \quad (4.95)$$

Die Rückprojektion im Bereich der Singularität wird im Sinne zweier zu koppelnder Teilflächen („Haupt“-Drucker-Pragersche Fließfläche und invertierter Kegel) gehandhabt. Das Vorgehen entspricht deshalb jenem des vorigen Kapitels.

Die Fließbedingungen beider Teilflächen werden über Gleichung (4.72) definiert. Für die „Haupt“-Drucker-Pragersche Fließfläche f_1 ist dies

$$f_1(\sigma, \rho, \kappa) = |\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}| + \alpha_1 \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) - k_1(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \kappa_1 \quad (4.96)$$

und für den invertierten Kegel

$$f_2(\sigma, \rho, \kappa) = |\boldsymbol{\eta}^{\text{dev}}| + \alpha_2 \text{tr}(\boldsymbol{\eta}) - k_2(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \kappa_1 \quad (4.97)$$

Der invertierte Kegel wird, im Gegensatz zu Kap. 5.3, mit f_2 bezeichnet (in Kap. 5.3 mit f_3). Hier basiert Gleichung (4.97) auf den Annahmen, daß im Bereich der Singularität nur f_1 das nichtlineare Materialverhalten beschreibt und der invertierte Kegel lediglich die Funktion übernimmt, den Algorithmus der Rückprojektion hin zur Kegelspitze zu stabilisieren.

Über die Orthogonalität beider Fließflächen und somit deren Gradienten lassen sich die Formparameter α_2 und k_2 von f_2 bestimmen.

$$\partial_{\sigma} f_1 = \mathbf{n} + \alpha_1 \mathbf{1}$$

$$\partial_{\sigma} f_2 = \mathbf{n} + \alpha_2 \mathbf{1}$$

$$\text{Orthogonalität: } \partial_{\sigma} f_1 : \partial_{\sigma} f_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3\alpha_1} \quad (4.98)$$

Da die Lage beider Kegelspitzen identisch und somit in beiden Punkten der hydrostatische Spannungszustand gleich ist, definiert die zugehörige erste Variante eine Bedingung für k_2 .

$$I_1(\sigma_{n+1}) = \frac{k_1}{\alpha_1} = \frac{k_2}{\alpha_2} \quad \rightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{3\alpha_1^2} k_1 \quad (4.99)$$

Das weitere Vorgehen (Rückprojektion und Bestimmen der elasto–plastischen Materialtangente) erfolgt analog zu Kap. 4.6.1. Hierzu werden in Anhang A 2.1 die Komponenten der Jacobi–Matrix und die Matrix der plastischen Moduln als wesentliche Schritte hergeleitet. Da der *inverted cone* keinen Einfluß auf das Materialverhalten haben soll ($\kappa_1 = \kappa$, $\kappa_2 = 0$), führt dies zwangsläufig zu der dort angegebenen singulären Koppelungsmatrix $\bar{\mathbf{Z}}$.

Interessant, aufgrund der getroffenen Annahmen jedoch zwangsläufig, ist das *induzierte Materialverhalten* der Teilfläche des invertierten Kegels. Beschreibt die „Haupt“–Drucker–Pragersche Fließfläche f_1 ein isotrop ver–/entfestigendes Materialverhalten,

inverted cone	Hofstetter et al. [52]
⊕ gleicher Fließflächentyp (Algorithmen direkt übertragbar)	⊖ zusätzliche Typen an Fließflächen (dev. Projektion: J_2 –Plastizität; hydr. Projektion: <i>tension cutoff</i>)
⊕ stabile Lösung ($\mathbf{C}^{ep} \neq \mathbf{0}$)	⊖ bei größerer Anzahl an Material–punkten mit $\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{0}$ instabile Lösung [52]
⊖ inverse Kuhn–Tucker Bedingung	⊕ Kuhn–Tucker Bedingung erfüllt
⊖ nichtassoziertes Ver–/ Ent–festigungsgesetz (unsymmetrische Materialtangente)	⊕ assoziiertes Ver–/ Ent–festigungsgesetz möglich (symmetrische Materialtangente)

Tafel 4.7 Vor–/Nachteile der unterschiedlichen Projektionsalgorithmen

wird beim *inverted cone*, numerisch bedingt, ein anisotropes Materialverhalten (nicht-symmetrische Materialtangente) induziert. Dies gilt auch umgekehrt: Eine kinematische Ver-/Entfestigung (induzierte Anisotropie) bei f_1 bedingt ein isotropes Ver-/Entfestigungsverhalten beim *inverted cone*.

Die Vor- und Nachteile beider Verfahren – Projektionsverfahren des *inverted cone* und der Ansatz von Hofstetter et al. [52] – sind tabellarisch in Tafel 4.7 gegenübergestellt. Der Hauptvorteil des *inverted cone* besteht darin, daß für ein plastisches Werkstoffverhalten eine stabile Iteration gewährleistet werden kann.

Die unsymmetrischen Materialtangente führen auf Strukturebene zu einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix, was den Einsatz adäquater Gleichungslöser erfordert. Gegenüber dem Lösen von symmetrischen Strukturgleichungen aufgrund *symmetrisierter Materialtangente* wird dieser Nachteil durch

- den Einsatz von effizienten Lösern von nichtsymmetrischen Gleichungen und
- der schnelleren Konvergenzrate

weitgehend kompensiert.

5 Beton und Stahlbeton

5.1 Vorbemerkungen

In Kapitel 5 wird für Stahlbeton ein Materialmodell vorgeschlagen, mit dem die nachfolgend beschriebenen phänomenologischen Eigenschaften dieses Verbundwerkstoffes erfaßt werden können. Zeitabhängige Effekte (z.B. Kriechen und Schwinden) oder der Maßstabeffekt (geometrisch ähnliche Bauteile verhalten sich bei unterschiedlicher Größe nicht ähnlich) bleiben hier unberücksichtigt.

Versuche mit **unbewehrtem Beton** zeigen im wesentlichen zwei unterschiedliche Versagensmechanismen (*cracking* und *crushing*), die beide durch ihre Art der Ribßbildung für das Material kennzeichnend sind.

• *cracking*

In *Zugversuchen* verhält sich unbewehrter Beton im Vorbruchbereich nahezu linear elastisch mit einem konstanten Elastizitätsmodul. Die durch die Hydratation und den Schwindvorgang initiierten Mikrorisse im Zementmörtel – siehe Wittmann [132] – nehmen schon vor Erreichen der maximalen Zugfestigkeit (Bild 5.1a, Pkt. A) deutlich zu und akkumulieren sich bei Erreichen dieses Grenzwertes an einer Schwachstelle des Querschnitts (Bild 5.1a, Pkt. B). Mit Überschreiten der Maximallast lokalisiert das Ribßband immer mehr, d.h. die Ribßbandbreite nimmt ab. Schon relativ kurz nach Überschreiten der maximalen Zugfestigkeit (Bild 5.1a, Pkt. C) bildet sich ein diskreter Einzelriß (*cracking*) aus, der noch, bedingt durch Materialbrücken und Kornverzahnungen, die Fähigkeit zur Kraftübertragung über die Ribßufer hat (siehe Cornelissen et al. [25], Reinhardt [94], Duda [33]). Im Bereich der Lokalisierung nehmen mit dem anschließenden Abfall der Last die Mikrorisse im Zementmörtel und in der Grenzfläche zum Zuschlagskorn zu. Die vollständige Werkstofftrennung erfolgt erst nach großen Verformungen [119].

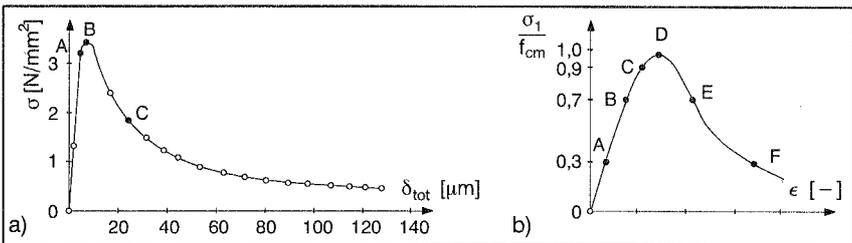


Bild 5.1 Tragverhalten von Beton

a) einaxialer Zugversuch [94]

b) einaxialer Druckversuch [125]

• *crushing* (Hofstetter und Mang [49], Eibl [36], Vonk [125], u.a.)

Auch bei einaxialen Druckversuchen mit unbewehrtem Beton zeigt sich, daß die Hydrations- und Schwindrisse im Zementmörtel bis ca. 30% der maximalen Prismendruck-

festigkeit f_{cm} (Bild 5.1b, Pkt. A) nahezu keinen Einfluß auf ein fast linear elastisches Tragverhalten nehmen. Bei höheren Spannungen, etwa bis 70% der maximalen Betondruckfestigkeit (Bild 5.1b, Pkt. B), entstehen Verbundrisse zwischen Zuschlagskörnern und Zementmörtel. Kurz vor Erreichen der maximalen Druckfestigkeit (Bild 5.1b, Bereich C bis D) ist ein absoluter Volumenzuwachs gegenüber dem Ausgangsvolumen festzustellen, der auf eine starke Auflockerung des inneren Gefüges (*crushing*) schließen läßt. Aktuellere Studien [125] belegen, daß sich die Rißbänder, ähnlich zu den Zugversuchen, nach Überschreiten der Bruchlast immer stärker lokalisieren (Bild 5.1b, Bereich D bis F).

• *tension–stiffening*

Die Rißbildung bei **bewehrtem Beton** wird maßgeblich vom Verbundverhalten zwischen Beton und Betonstahl geprägt. Hierbei spielen der Bewehrungsgrad, der Bewehrungsdurchmesser und die Oberflächenbeschaffenheit des Bewehrungsstahls eine entscheidende Rolle. Das Verbundverhalten hat zudem einen entscheidenden Einfluß auf das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen (*tension–stiffening*).

5.2 Grundlagen des Materialmodells

5.2.1 Interpretation der Rißentwicklung

Das Materialmodell des Werkstoffes Beton beruht auf der grundlegenden Annahme, daß die Rißbildung nicht diskret, sondern über ein „verschmiertes“ Rißmodell mit *fiktiver Rißbildung* erfaßt wird. Dabei wird die Relativbewegung der Rißkanten über ein Rißband der Dicke h (*charakteristische Länge*) „verschmiert“ [127]. Der Körper bleibt somit ein Kontinuum, d.h. er ist ohne Löcher und andere Defekte. Dadurch kann der Vorgang des Reißens mit den Mitteln der klassischen Kontinuumsmechanik fester Körper beschrieben werden; der Zusammenhang zwischen Spannungen, Dehnungen oder Versagensvorgängen ist an jedem Materialpunkt bestimmbar [119].

Die klassischen und heute meistverwendeten Modelle zur Bildung fiktiver Risse sind das *Fixed Crack Model*, das *Rotating Crack Model*, das *Multiple Fixed Crack Model* und das *Microplane Model*. Für weitere Einzelheiten zu diesen Modellen sei auf die Arbeiten von u.a. Willam et al. [129], Rots [101], Feenstra [38] und Weihe [127] hingewiesen.

Wie bereits in Kap. 3 angesprochen werden Materialformulierungen angewandt, die auf Spannungsinvarianten basieren. Diese zeigen insbesondere zum *Rotating Crack Model* eine enge Verwandtschaft. Die Schädigung wird nach Verletzen der Fließbedingung (vgl. Kap. 3.2.1) initiiert. Die Ausrichtung der fiktiven Risse ist analog zum *Rotating Crack Model* zu sehen.

*Annahme: Materialformulierungen, die auf Spannungsinvarianten basieren
(Analogie zum „Rotating Crack Model“)*

Über die Fließbedingung wird in Richtung der größten Hauptspannung der erste Riß im Materialpunkt initiiert. Die Ausrichtung dieses fiktiven Risses wird stets der momentanen Beanspruchungsrichtung nachgeführt. Diese Orientierung des Risses entsprechend der Hauptbeanspruchungsrichtung führt dazu, daß in den Rißflächen nur Normalspannungen auftreten (*Mode I Cracking*). Derartige Materialformulierungen gewährleisten aber, daß die Zug–Druckfestigkeit des Materials nicht überschritten wird.

Annahme: Die Rißfläche(n) wird(werden) über die Richtung der Hauptzugspannung(en) interpretiert → „*Mode I Cracking*“. Demzufolge gilt:

1. In 2D können bis zu zwei fiktive Rißflächen am Materialpunkt auftreten,
2. die orthogonal zueinander sind.

Das Wachstum und der Zusammenschluß von Mikrorissen und Poren wird beim Beton als Schädigung bezeichnet. Mit Versuchen ([94], [122]) wurde bestätigt, daß mit Überschreiten der Maximalbeanspruchung die Degradierung des Elastizitätsmoduls beginnt. Auch schließen sich die Mikrorisse nach einer Entlastung nicht mehr vollständig. Hier wird ein isotropes elasto–plastisches Werkstoffmodell angewandt, bei dem die Evolution dieser Degradierung des Elastizitätsmoduls in den konstitutiven Gleichungen, wie z.B. bei Simo et al. [113], Govindjee et al. [43], Meschke et al. [84], nicht berücksichtigt ist. Für den Fall einer lokalen Ent– und Wiederbelastung wird in Kap. 5.3.4 ein ingenieurmäßiger Ansatz zur Berechnung dieser Degradierung vorgestellt.

5.2.2 Aspekte zur Diskretisierung

Im Rahmen der lokalen, „verschmierten“ Betrachtungsweise ist die Rißbreite mit der räumlichen Diskretisierung verknüpft. Dadurch kann ein Zusammenhang zwischen dem internen Schädigungsparameter (hier mit κ bezeichnet), der in der diskreten Rißfläche freigesetzten Bruchenergie G_f und der charakteristischen Länge h (Breite des Rißbandes) definiert werden. In FE–Simulationen ist diese Länge h eine vom FE–Netz abhängige Größe (siehe Bazant und Oh [5], Crisfield [26], Willam, Pramono und Sture [129], Rots [101], Oliver [86], Pamin [88]), die im wesentlichen vom Elementtyp, der Elementgröße, der Ordnung der Ansatzfunktionen und der Integrationsordnung abhängt. Da die charakteristische Länge zudem von der Rißrichtung abhängt [86], die Risse beliebig, z.B. zickzackförmig, innerhalb eines finiten Elementes verlaufen können, schlägt Rots [101] für „verschmierte“ Rißmodelle die in Gl.(5.1) gegebene Beziehung zwischen h und der mittleren Elementlänge, berechnet über die Elementfläche A_e , vor.

$$h = \chi_h \sqrt{A_e} = \chi_h \left(\sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} \det \mathbf{J} w_\xi w_\eta \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

Die Größen w_{ξ} und w_{η} sind dabei die Wichtungsfunktionen der numerischen Integration nach Gauß. Der Faktor χ_h pauschalisiert den Einfluß eines beliebigen Rißverlaufs im finiten Element. Für rechteckige Elemente mit linearen Ansatzfunktionen schlägt Rots $\chi_h = \sqrt{2}$ vor, bei quadratischen Ansatzfunktionen $\chi_h = 1$. Diese Beziehung liefert dann gute Ergebnisse, wenn die Diskretisierung regelmäßig und die Orientierung des Risses parallel zu den Elementkanten ist. Dies ist ein Ansatz, um die *Objektivität* der Berechnung hinsichtlich der Diskretisierung zu gewährleisten.

Wie bereits erwähnt, berücksichtigt der interne Parameter κ des „verschmierten“ Rißmodells die fiktive Rißbildung. Dieser Schädigungsparameter wird analog zu Gl. (4.20) über die Rate der plastischen Arbeit definiert.

$$\dot{W}^{pl} = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl} = \bar{\sigma}(\kappa) \dot{\kappa} \quad (5.2)$$

Hierbei ist die äquivalente Spannung $\bar{\sigma}(\kappa)$ eine Funktion des internen Parameters. Die plastische Arbeit g_f wird über das Zeitintegral definiert und ist gleichzeitig die auf die charakteristische Länge bezogene absorbierte Bruchenergie des fiktiven Risses (Hillerborg [48]).

$$g_f = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \dot{W}^{pl} d\tau = \int_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \bar{\sigma}(\kappa) d\kappa \quad (5.3)$$

Mit der Annahme, daß sich die plastische Arbeit g_f gleichmäßig über die charakteristische Länge verteilt, ist folgende Beziehung zwischen der Bruchenergie G_f als Werkstoffkenngröße und g_f gegeben

$$g_f = \frac{G_f}{h} \quad (5.4)$$

Dies führt zu einem Materialmodell, das in einer objektiven Formulierung die während des irreversiblen Schädigungsprozesses freigesetzte Bruchenergie verwendet. Dieses Konzept wurde in der Literatur (siehe oben) für die Modellierung von Rissen (*cracking*) eingeführt und wird hier, analog zu Feenstra [38], auch auf das Druckversagen (*crushing*) angewandt.

Das nichtlineare Materialverhalten von Beton kann nun vollständig über skalare Beziehungen, definiert durch äquivalente Spannungen und interne Verzerrungsvariablen, beschrieben werden. Diese $\bar{\sigma} - \kappa$ Beziehungen werden im nächsten Kapitel erörtert.

5.2.3 Tragverhalten von unbewehrtem Beton

Die Baustoffeigenschaft wird durch einen charakteristischen Wert angegeben, der im allgemeinen einem Fraktilwert in einer angenommenen statistischen Verteilung der be-

trachteten Werkstoffeigenschaft entspricht. Dieser Fraktilwert wird dabei nach einschlägigen Normen, z.B. EC2 [34] oder CEB–FIP [21], festgelegt. Die in den Normen von diesem Fraktilwert abgeleiteten Materialkenngrößen sind Parameter des hier vorgeschlagenen Materialmodells.

Ausgehend von der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} des Betons sind, in Abhängigkeit von der Betongüte nach EC2, die mittlere Zugfestigkeit f_{ctm} , die maximale Druckfestigkeit f_{cm} und der Elastizitätsmodul E_{cm} zu bestimmen. Beim linear elastischen Anfangstragverhalten ist eine Querdehnzahl von 0,1 bis 0,2 möglich. Bei den Beispielen wird vom Maximal– oder Mittelwert ausgegangen.

mittlere Zugfestigkeit:	$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3}$	[N/mm ²]
maximale Druckfestigkeit:	$f_{cm} = f_{ck} + 8$	[N/mm ²]
Elastizitätsmodul:	$E_{cm} = 0,95 \cdot 10^4 f_{cm}^{1/3}$	[N/mm ²]
mittlere Querdehnzahl:	$\nu_c = 0,15$	[–]

Tafel 5.1 Materialparameter

● **einaxiales Zugverhalten**

Das für einen einaxialen Zugversuch charakteristische Spannungs–Verformungs–Diagramm ist in Bild 5.1a dargestellt. In diesem Diagramm kann bis Punkt A, also bei Erreichen von etwa 90% der mittleren Zugfestigkeit, von einem linear elastischen Tragverhalten ausgegangen werden. Da sich bei einer weiteren Zunahme der Verformungen Mikrorisse ausprägen, ist die Fläche unter der Spannungs–Verformungs–Kurve die in der Rißfläche freigesetzte Bruchenergie, siehe Gl. (5.4). Die Bruchenergie G_f ist eine von der Betongüte und vom Durchmesser d_{max} des Größtkorns vom Zuschlaggemisch abhängige Größe und wird als solche im CEB–FIP Model Code angegeben, siehe Gl. (5.5). Die Koeffizienten α_f sind in Tafel 5.2 tabelliert.

$$G_f = 10^{-3} \alpha_f f_{cm}^{0,7} \quad [\text{Nmm/mm}^2] \quad (5.5)$$

d_{max} [mm]	α_f ($\pm 30\%$)
8	4 \pm 1,2
16	6 \pm 1,8
32	10 \pm 3,0

Tafel 5.2 Koeffizienten α_f zur Berechnung von G_f nach CEB–FIP

Bis zum Erreichen der mittleren Zugfestigkeit f_{ctm} wird beim Materialmodell ein linear elastisches Tragverhalten angenommen. Das einfachste Modell, mit dem das *soften-*

ing-Verhalten im Zugbereich beschrieben wird, beinhaltet eine lineare Approximation (lin.) des abfallenden Astes (Hillerborg [48], Rots et. al. [100], Stempniewski und Eibl [118], u.a.). Da der diskontinuierliche Übergang zur Spannungsnullachse Schwierigkeiten bereiten kann (Meschke et al. [84]), wird hier, angelehnt an [38] bzw. [9] oder [117], ein exponentieller Verlauf (exp.) angenommen, der die Versuchsergebnisse weitaus besser approximiert (siehe Bild 5.2a). Die zugehörige Funktion lautet

$$\bar{\sigma}(\kappa_t) = f_{ctm} \exp\left(-\frac{\kappa_t}{\kappa_{tu}}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa_{tu} = \frac{G_f}{h f_{ctm}} \quad (5.6)$$

Der maximale Schädigungsparameter κ_{tu} stellt quasi den Übergang zur makroskopischen Rißöffnung dar. Somit hängt er über die Materialparameter mittlere Zugfestigkeit f_{ctm} und Bruchenergie G_f vom Werkstoffverhalten ab, zusätzlich, aus Gründen der Objektivität, von der charakteristischen Länge h .

Nach Überschreiten von f_{ctm} beeinflusst die Größe des *softening*-Moduls die numerische Stabilität. Sehr anschaulich kann das Phänomen des *loss of material stability* anhand der eindimensionalen Plastizität (siehe Kap. 4.3) erörtert werden, deren Anwendbarkeit aufgrund der skalaren Beziehung zwischen der äquivalenten Spannung und dem internen Parameter gerechtfertigt ist. Die dort angegebene Funktion der elasto-plastischen Materialtangente von Gl.(4.43) lautet

$$E_{n+1}^{ep} = \frac{E_s H}{E_s + H} = E_H \quad (4.43)$$

und ist für $E_s = -H$ nicht definiert. Der *softening*-Modul als Tangente dieser exponentiellen Approximation ist

$$H(\kappa_t) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\kappa_t} = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} \exp\left(-\frac{\kappa_t}{\kappa_{tu}}\right)$$

und nimmt für $\kappa_t = 0$ folgenden Extremwert an

$$H_{extr}(0) = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} = -\frac{h f_{ctm}^2}{G_f}$$

Wird in Gl.(4.43) der Elastizitätsmodul $E_s = E_{cm}$ gesetzt und zur eindeutigen Formulierung der Be-/Entlastungsbedingungen (siehe Kap. 3.2.5) gefordert, daß der Nenner positiv ist, definiert die Relation von Gl.(5.7) eine Beziehung zwischen Elastizitäts- und *softening*-Modul für eine numerisch stabile Analyse [77].

$$E_{cm} > -H_{extr} \rightarrow E_{cm} > \frac{h f_{ctm}^2}{G_f} \quad (5.7)$$

Nach Rots [101] bleibt die Objektivität dann gewährleistet, wenn die charakteristische Länge nach Umformen von Gl.(5.7) folgende Relation erfüllt

$$h < \frac{E_{cm} G_f}{f_{ctm}^2} \quad (5.8)$$

Wird diese Bedingung verletzt, muß entweder die mittlere Zugspannung f_{ctm} reduziert, die Bruchenergie G_f erhöht oder die Elementlänge h durch Neuvernetzung verkleinert werden. Letzteres ist die aufwendigste Maßnahme.

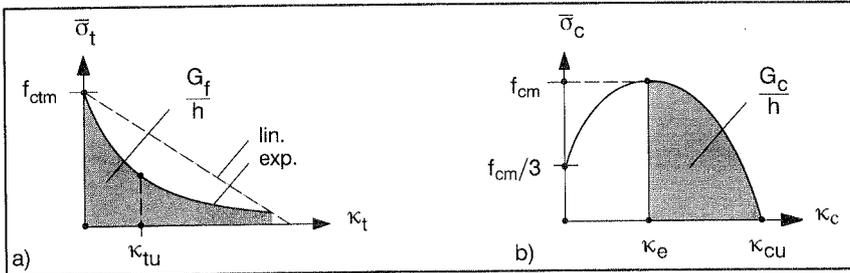


Bild 5.2. Softening-Modell

- a) einaxiale Zugbeanspruchung, verschiedene Approximationen
 b) einaxiale Druckbeanspruchung

• einaxiales Druckverhalten

Eine für einaxiale Druckversuche typische Spannungs-Verzerrungs-Charakteristik ist in Bild 5.1b dargestellt. Beim Materialmodell wird davon ausgegangen, daß bis Erreichen von ca. einem Drittel der maximalen Druckfestigkeit das Tragverhalten linear elastisch ist und es sich danach, bis hin zur maximalen Druckfestigkeit, nichtlinear verfestigend verhält. Nach van Mier et al. [123] und Vonk [125] hängt das Tragverhalten im Bereich des abfallenden Astes stark von den Randbedingungen und der Größe der Prüfkörper ab und gibt daher eher das Verhalten einer Struktur als das eines Materials wieder. Da hier vor allem phänomenologische Effekte erfaßt werden sollen, ist analog zu den einaxialen Zugversuchen das *softening*-Verhalten auf die freizusetzende Bruchenergie G_c zurückzuführen, die während des Prozesses der Schädigung freigesetzt wird. Diese Analogie zum Zugversuch basiert auf der Tatsache, daß bei beiden Versagensmechanismen ein stetiges Rißwachstum in der Mikroebene stattfindet und sie somit vergleichbar sind. Vonk [125] bestätigt, daß G_c als Materialparameter realistische Werte in der Größenordnung des 100- bis 500 fachen Wertes von G_f annehmen kann.

Die Spannungs-Verzerrungs-Charakteristik im Druckbereich wird in der Literatur über verschiedene Funktionen approximiert, bei denen es sich in der Regel um nicht auf der Bruchenergie basierende Formulierungen handelt (siehe Vecchio und Collins [124], CEB-FIP [21], EC2 [34] u.a.). Analog zu Feenstra [39] wird hier das Druckverhalten mit einem *softening*-Modell erfaßt. Der verfestigende und der abfallende Ast von Bild 5.2b werden entsprechend Gl. (5.9) je mit einer parabolischen Funktion abgebildet.

$$\bar{\sigma}(\kappa_c) = \begin{cases} \frac{f_{cm}}{3} \left[1 + 4 \frac{\kappa_c}{\kappa_e} - 2 \left(\frac{\kappa_c}{\kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \kappa_c < \kappa_e \\ f_{cm} \left[1 - \left(\frac{\kappa_c - \kappa_e}{\kappa_{cu} - \kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \kappa_e \leq \kappa_c < \kappa_{cu} \end{cases} \quad (5.9)$$

Die maximale Druckfestigkeit f_{cm} wird für $\kappa_c = \kappa_e$ erreicht, wobei κ_e nur von den elastischen Parametern abhängt

$$\kappa_e = \frac{4 f_{cm}}{3 E_{cm}} \quad (5.10)$$

Bei Erreichen des maximalen Schädigungsparameters κ_{cu} ist die Bruchenergie vollständig freigesetzt, weshalb κ_{cu} von dieser und der charakteristischen Länge h abhängt.

$$\kappa_{cu} = \frac{3}{2} \frac{G_c}{h f_{cm}} + \kappa_e \quad (5.11)$$

Analog zum Tragverhalten unter einaxialer Zugbelastung sind die materielle Stabilität und damit die Objektivität zu gewährleisten. Der skalare *softening*-Modul ist

$$H(\kappa_c) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\kappa_c} = -2 f_{cm} \frac{\kappa_c - \kappa_e}{(\kappa_{cu} - \kappa_e)^2}$$

und nimmt für $\kappa_c = \kappa_{cu}$ folgenden Extremwert an

$$H_{\text{extr}}(\kappa_{cu}) = -2 \frac{f_{cm}}{\kappa_{cu} - \kappa_e} = -\frac{4}{3} \frac{h f_{cm}^2}{G_c}$$

Analog zu Gl.(5.8) hat die charakteristische Länge folgende Relation zu erfüllen

$$h < \frac{3}{4} \frac{E_{cm} G_c}{f_{cm}^2} \quad (5.12)$$

damit nach [101] die Objektivität gewährleistet bleibt. Wird diese Bedingung verletzt, treten die bereits beim einaxialen Zugverhalten genannten Maßnahmen in Kraft.

• **zweiachsiges Tragverhalten**

Nahezu alle Strukturanalysen berücksichtigen den mehrachsigen Spannungszustand. Jedoch rechtfertigt die Untersuchung des „Haupttragverhaltens“ von Scheiben, Balken, Platten oder dünnen Schalen am ehesten die Beschränkung auf einen zweiachsigen Spannungszustand. Grundlegende Studien zum zweiachsigen Betonverhalten veröffentlichten Kupfer et al. in [70], [68] und [69]. Diese belegen, daß, je nach vorliegendem Verhältnis der beiden Hauptspannungen, das Verhalten des Betons mehr oder weniger stark vom einaxialen Fall abweicht.

Bei mehrachsigen Beanspruchungen ist es notwendig, zwischen Versagenskurven respektive –flächen und den eigentlichen Spannungs–Dehnungs–Beziehungen zu un-

terscheiden. Während sich Versagensflächen im zwei- oder dreidimensionalen Hauptspannungsraum – jede Spannungscombination ist in einem solchen als Punkt darstellbar – experimentell und eindeutig für monotone Belastungen festlegen lassen, gibt es keine generell eindeutigen Formulierungen von Spannungs–Dehnungs–Beziehungen [118].

Die biaxiale Versagenskurve von Kupfer et al. verdeutlicht (siehe Bild 5.3a), daß im Druck–Druck–Bereich (D/D) die Druckfestigkeit gegenüber dem einaxialen Druckspannungszustand deutlich gesteigert werden kann. Bei einem Hauptspannungsverhältnis von 1,0/0,5 wird die maximale Druckspannung um ca. 25% und bei gleich großen Hauptdruckspannungen um ca. 15% erhöht. Diese höhere Tragfähigkeit wird auf das Verkeilen der uneben gebrochenen Rißoberflächen (*aggregate interlock*) zurückgeführt. Anders verhält sich der Beton im Druck–Zug–Bereich (D/Z). Hier nimmt die aufnehmbare maximale Druckspannung stetig ab. Im Zug–Zug–Bereich (Z/Z) hingegen bleibt die maximale Zugspannung auf dem Niveau des einaxialen Wertes.

Diese biaxiale Versagenskurve ist nahezu unabhängig von der Belastungsgeschichte, d.h. von der Art, wie die Beanspruchung erreicht wird. Diese Unabhängigkeit vom Belastungspfad bestätigt nochmals die Aussage, daß die Versagensmechanismen des einaxialen Zug– wie Druckverhaltens zueinander ähnlich sein müssen. Die in Bild 5.3b dargestellten verschiedenen Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses nach [85] zeigen Ähnlichkeiten zu den einaxialen Versagensmechanismen.

Diese Ähnlichkeit rechtfertigt auch hier das Konzept der auf Bruchenergie basierenden Formulierung zur Modellierung von Versagensmechanismen. Jedoch existieren kaum Experimente, die das *softening*–Verhalten unter mehrachsiger Beanspruchung bestätigen, obwohl, so die einhellige Meinung, das *softening* von der Art der Beanspruchung beeinflusst wird. Vonk [125] zeigt anhand von mehrachsigen Druckversuchen, daß das *softening*–Verhalten sehr sensitiv auf den einwirkenden Spannungszustand reagiert. Jedoch zeigt er auch in biaxialen Versuchen, daß dort das Versagen stets in die dritte Richtung erfolgt und das *softening*–Verhalten davon kaum beeinflusst wird.

• **dreiaxiales Tragverhalten**

Triaxialversuche wurden in jüngster Zeit von Kupfer [68], van Mier [122], Jamet et al. [54] u.a. durchgeführt. Die Auswertung der Versuche von Kupfer et al. durch Scholz et al. [106] und Guo et al. [44] ist in Heft 447 des DAFStb dokumentiert. In Bild 5.4a sind typische Spannungs–Dehnungskurven von Beton unter triaxialer Belastung wiedergegeben. Aufgrund der Umschnürungswirkung bei dreiaxialer Druckbeanspruchung (D/D/D) tritt im Gegensatz zu ein- oder zweiaxialen Spannungszuständen kaum oder überhaupt kein Spannungsabfall auf.

In Abhängigkeit der hydrostatischen Spannung kann sich der Beton von quasi–spröde bis quasi–duktile verhalten, wobei entsprechende Versagensmodi von einem Trenn-

bruch über die Entwicklung der Mikrorisse zu einem Makroriß bis hin zum *crushing* (Zerquetschen des Zementmörtels) ändert. Im triaxialen Druckbereich sind Gleitbrüche mit ausgeprägten Gleitflächen zu beobachten. Da kaum Experimente mit triaxialer Zugbeanspruchung vorliegen, wird im Zustand triaxialer Zugbeanspruchung (Z/Z/Z) davon ausgegangen, daß sich jede Zugspannungskomponente quasi einaxial verhält [118].

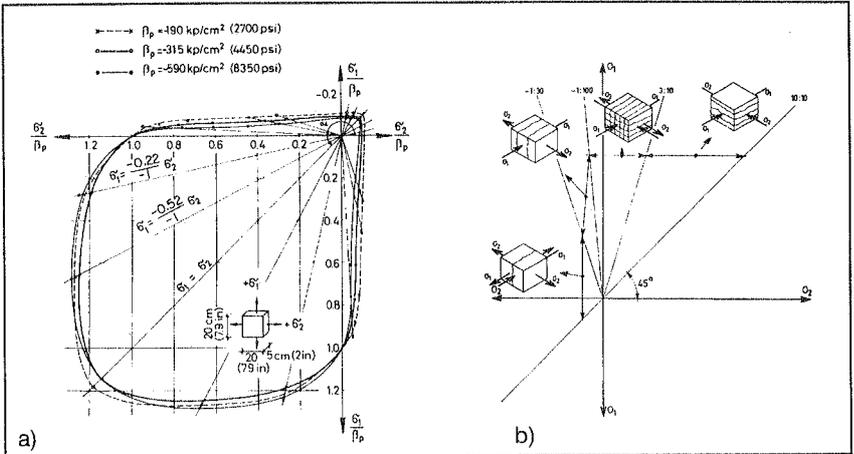


Bild 5.3 a) Biaxiale Versagenskurven von Beton nach Kupfer et al. [69]
 b) Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses σ_1/σ_2 nach Nelissen [85]

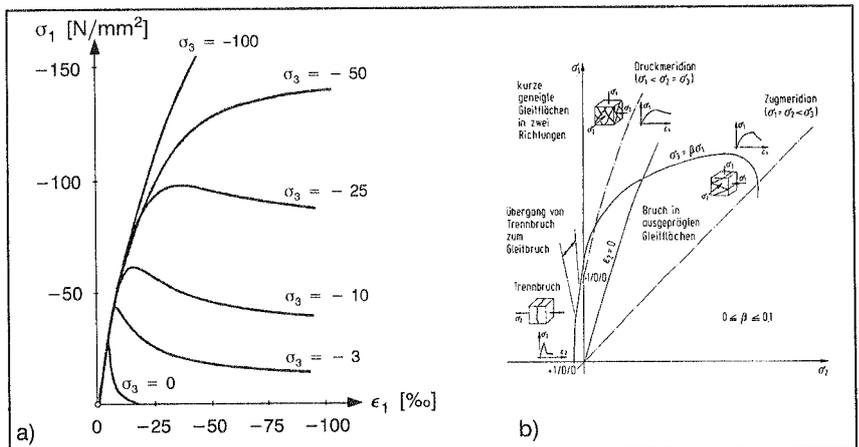


Bild 5.4 a) Einfluß des Umschnürungsdrucks bei Druckversuchen mit zylindrischen Prüfkörpern nach Jamet et al. [54]
 b) Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses σ_1/σ_2 nach van Mier [123]

5.2.4 Tragverhalten von Stahlbeton

• einaxiales Tragverhalten

Beton als Komponente des Verbundwerkstoffes Stahlbeton zeigt im Vergleich von unbewehrten mit bewehrten Strukturen kein wesentlich anderes Tragverhalten. Insofern kann das Betontragverhalten beim einaxialen Druckverhalten von Stahlbeton ohne weiteres mit dem zuvor beschriebenen Materialmodell wiedergegeben werden.

Ähnliches gilt unter Zugbeanspruchung. Jedoch beeinflusst hier das Verbundverhalten, somit das Mitwirken zwischen den Rissen oder *tension-stiffening*, das Rißbild. Bei einem mit Zugkraft belasteten Stahlbetonstab, siehe Bild 5.5a, tritt der erste Riß, wie bereits erwähnt, an der schwächsten Querschnittsstelle auf. Die Kraft, die bis dahin weitgehend durch den Beton getragen wurde, muß nun über den Bewehrungsstahl zwischen beiden Betonteilen übertragen werden. Mit zunehmendem Abstand zum Riß nimmt die Stahlspannung sukzessive ab, indem die Kraft anteilig über Verbundwirkung wieder zurück in den Beton übertragen wird. Wird der Probekörper weiterbelastet, bilden sich nach und nach weitere Risse, bis das endgültige Rißbild entstanden ist. Die Spannungen, aufgetragen über die mittlere Dehnung des Bewehrungsstabes, ergeben die Kraft-Dehnungs-Beziehung von Bild 5.5b, bei der die Dehnungen erheblich kleiner sind als bei einem „nackten“ Stahl [118].

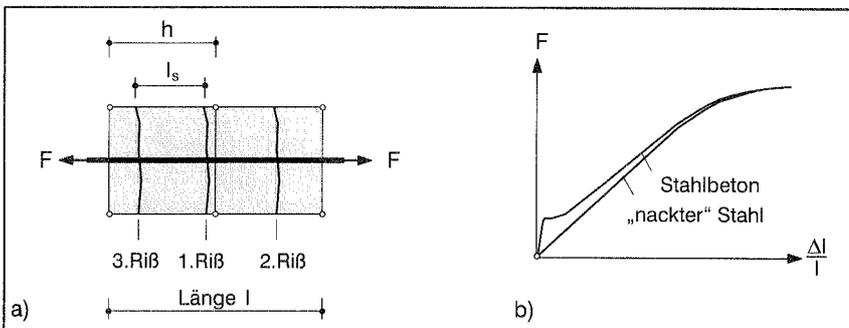


Bild 5.5 bewehrter Zugstab

a) Rißbild und FE-Diskretisierung b) $F-\Delta\varepsilon$ Diagramm

Die Form der idealisierenden Beziehung hängt im wesentlichen von der Betonzugfestigkeit f_{ctm} , dem Stabdurchmesser \varnothing der Bewehrung und dem Bewehrungsgrad ρ ab. Dabei stehen zur Berücksichtigung des *tension-stiffening* Effektes prinzipiell zwei Modellierungsmöglichkeiten zur Verfügung: zum einen eine ersatzweise Modifikation des Betons, zum anderen eine Modifikation des Bewehrungsstahles. Da das *tension-stiffening* maßgeblich von der Bewehrungsrichtung abhängt, somit ein quasi-orthotropes Verhalten aufweist, ist die letztgenannte Variante zweckmäßiger. Hierzu existieren in der

Literatur unterschiedlichste Formulierungen; nur wenige berücksichtigen die freigesetzte Bruchenergie (siehe [84], [38]).

Der Einfluß des *tension-stiffening* in einem auf der Bruchenergie basierenden Materialmodell berücksichtigt die freigesetzte Bruchenergie G_f des Einzelrisses, den mittleren Rißabstand (*average crack spacing*) l_s und nimmt aus Gründen der Objektivität Bezug auf die charakteristische Elementlänge h .

$$g_f = \frac{G_f}{l_s^{cr}} \quad \text{mit: } l_s^{cr} = \min \{ l_s, h \} \quad (5.13)$$

Diese Beziehung berücksichtigt eine mögliche Akkumulation mehrerer Risse innerhalb eines Finiten Elements, falls der mittlere Rißabstand l_s kleiner als die charakteristische Elementlänge h ist. Die über den mittleren Rißabstand „verschmierte“, freigesetzte Bruchenergie wird dann maßgebend.

Die Größe des mittleren Rißabstandes l_s wiederum hängt von der Betondeckung und, wie bereits erwähnt, vom Stabdurchmesser \varnothing der Bewehrung und folglich auch vom Bewehrungsgrad ρ ab. Nach CEP-FIP [21] läßt sich l_s entsprechend Gl.(5.14) berechnen. Die dort getroffene Fallunterscheidung zwischen Rißabstand zum 1. Riß und zu den Folgerissen läßt sich ineinander überführen, da unter der Voraussetzung eines realistischen Bewehrungsgrades von $\leq 5\%$ der Term $1 + 0,85\rho_{\text{eff}}$ vernachlässigt werden kann. Aufgrund des Kräftegleichgewichts (siehe Gl.(5.14)₄) von der Zugkraft des mitwirkenden Betons zwischen den Rissen und der Zugkraft des Betonstahls im Bereich des gerissenen Querschnitt ist Gleichung (5.14)₁ identisch zu Gl.(5.14)₂. Im CEB-FIP wird die Beziehung zwischen der übertragbaren Verbundspannung f_{bd} und der Betonzugfestigkeit f_{ctm} gemäß Gl.(5.14)₃ definiert; σ_s bezeichnet die Stahlspannung im Riß.

$$l_s \approx \frac{2}{3} l_{s,\text{max}} = \left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \frac{\sigma_s}{2 f_{bd}} \varnothing \frac{1}{1 + 0,85 \rho_{\text{eff}}} \quad \text{zum 1. Riß} \\ \frac{2}{3} \frac{\varnothing}{3,6 \rho_{\text{eff}}} \quad \text{zu Folgerissen} \end{array} \right\} \\ \text{mit } f_{bd} = 1,8 f_{ctm} \\ F = f_{ctm} A_{c,\text{eff}} = \sigma_s A_s \rightarrow \rho_{\text{eff}} = \frac{A_s}{A_{c,\text{eff}}} = \frac{f_{ctm}}{\sigma_s} \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

Die oben genannten Gleichungen beziehen sich auf Stahlbetonstrukturen, z.B. Scheiben, mit zweiseitiger symmetrischer Bewehrung. Diese symmetrische Bewehrung wird hier als *eine Bewehrungslage* aufgefaßt. Deren effektiver Bewehrungsgrad ρ_{eff} berechnet sich nach Gl.(5.14)₄; die zugehörige geometrischen Größen sind Bild 5.6a zu entnehmen. Dabei ist, in Anlehnung an CEB-FIP, die Dicke des effektiv auf Zug beanspruchten Betonquerschnittes $A_{c,\text{eff}} = t_{\text{eff}} \cdot b$ gemäß Gl.(5.15) zu bestimmen. Der Faktor 2,5 in dieser Gleichung macht deutlich, daß der Betonstahl nicht exakt zentrisch

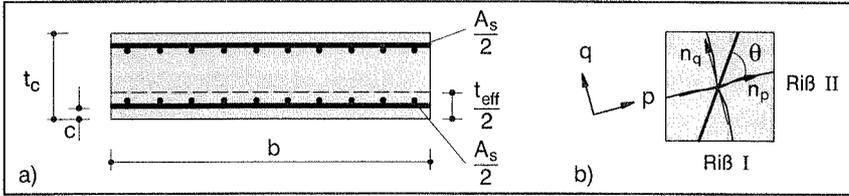


Bild 5.6 Stahlbetonscheibe, zweiseitig und zweilagig bewehrt:
a) effektiver Zugquerschnitt nach CEB-FIP [21]
b) Lage eines Bewehrungsstabes zu zwei orthogonalen Rissen

im effektiven Querschnitt liegt. Dies wird mit der Rauhgigkeit und der dadurch möglichen Verzahnung zum Querschnittskern hin begründet. Desweiteren sind c die Betondeckung und t_c die Dicke der Betonstruktur.

$$\frac{t_{\text{eff}}}{2} = \min \left\{ 2,5 \left(c + \frac{\varnothing}{2} \right) ; \frac{t_c}{2} \right\} \quad (5.15)$$

Da derartige Stahlbetonstrukturen üblicherweise mehrlagig bewehrt sind, ist bei n Bewehrungslagen der äquivalente Bewehrungsdurchmesser \varnothing_{eq} nach Gl.(5.16) zu bestimmen, der wiederum in Gl.(5.15) $\varnothing \rightarrow \varnothing_{\text{eq}}$ ersetzt.

$$\varnothing_{\text{eq}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \varnothing_i \rho_i \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^n \rho_i \right\} \quad (5.16)$$

Da die Rißrichtung und die Richtung der Bewehrungslagen nicht zwangsläufig orthogonal zueinander sind, ist der mittlere Rißabstand in der Struktur nach Gl.(5.17) der kleinste aller Bewehrungslagen. Hier wird davon ausgegangen, daß der Schädigungsprozeß gleichmäßig über die Querschnittsbreite vonstatten geht und eine Lokalisierung in Dickenrichtung nicht erfolgen kann.

$$l_s = (a_p + a_q)^{-1} \quad (5.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } a_p &= \max \left(\frac{|\cos \theta_i|}{l_{s,i}} \right) \\ a_q &= \max \left(\frac{|\sin \theta_i|}{l_{s,i}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ Bewehrungslagen}$$

In Gl.(5.17) ist θ_i der Winkel zwischen der Richtung der größten Hauptzugspannung, interpretiert als Normale n_p auf der ersten fiktiven Rißfläche (erster Riß), und der Richtung der i -ten Bewehrungslage, siehe Bild 5.6b. Die Rißfläche des zweiten fiktiven Risses wird als normal zur ersten angenommen.

Nach Erreichen eines stabilen Rißzustandes wird zwischen den Rissen die maximale Kraft vom Bewehrungsstahl wieder zurück in den Beton übertragen. Für gerissenen

Stahlbeton unter Zugbeanspruchung wird deshalb angenommen, daß sich die gesamte Steifigkeit des bewehrten Querschnittes aus den Komponenten unbewehrter Beton, Bewehrungsstahl und dem *tension–stiffening* entsprechend Gl.(5.18) additiv zusammensetzt, wobei es sich bei σ_c , σ_s und σ_{ia} um die einzelnen Spannungskomponenten handelt (siehe Bild 5.7a).

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_s + \sigma_{ia} \quad (5.18)$$

Wie bereits erwähnt, ist das *tension–stiffening* ein in Richtung der Bewehrung wirkender, versteifender Effekt, der als Funktion der Dehnung in Richtung der Bewehrung ϵ_s verstanden werden kann. Nach Cervenka, Pukl und Eligehausen [24] wird der Verlauf der Verbundspannung σ_{ia} mit drei linearen Funktionen approximiert (siehe in Bild 5.7b, die Bereiche $\epsilon_{co} - \epsilon_{cu} - \epsilon_u - \epsilon_{sy}$). Im Hinblick auf den exponentiellen Verlauf des *softening*–Verhaltens von unbewehrtem Beton wird hier im Bereich $\epsilon_{co} - 3\epsilon_{cu}$, entsprechend Bild 5.7b, die erste lineare Funktion durch eine Parabel ersetzt, um Versuchsergebnisse besser approximieren zu können.

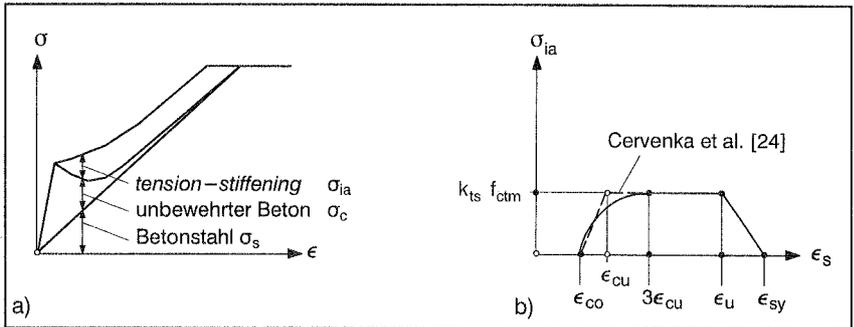


Bild 5.7 a) Werkstoffmodell für Stahlbeton b) „tension–stiffening“ Modell

Mit Überschreiten der mittleren Zugfestigkeit f_{ctm} , dem Beginn des Reißens, wird das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen initiiert. Diese elastische Grenze wird entsprechend Gl.(5.19) mit ϵ_{co} bezeichnet (siehe auch Bild 5.7b)

$$\epsilon_{co} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \cos^2 \theta \quad , \quad (5.19)$$

wobei θ den bereits erwähnten Winkel zwischen Bewehrungs– und Hauptzugspannungsrichtung kennzeichnet. Bei Erreichen des stabilen Rißzustandes, hier mit $3\epsilon_{cu}$ angenommen, findet zwischen den Rissen die maximale Kraftübertragung zwischen Bewehrungsstahl und Beton statt; die entsprechend auf den Betonquerschnitt bezogene Spannungskomponente nimmt mit $\sigma_{ia} = k_{ts} f_{ctm}$ ihren Maximalwert an. Aufgrund des in Gl.(5.14)₄ gegebenen Kräftegleichgewichtes wird der Faktor $k_{ts} = 1,0$ gesetzt.

$$\epsilon_{cu} = \frac{G_f}{I_s f_{ctm}} \cos^2 \theta \quad (5.20)$$

Kollegger [58] zeigt anhand von biaxialen Versuchen, daß das *tension–stiffening* auch nach dem Fließen der Bewehrung vorhanden ist. Da jedoch keine detaillierten Erkenntnisse über das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen nach Fließen der Bewehrung und insbesondere über die beim Bruch auftretenden Grenzdehnungen vorliegen, wird wie unter [58] das *tension–stiffening* nach Überschreiten der Fließgrenze der Bewehrung bei ϵ_{sy} vernachlässigt; der lineare Abbau beginnt ab der Stahldehnung ϵ_U .

$$\epsilon_U = \epsilon_{sy} - \frac{k_{ts} f_{ctm}}{\rho_{eff} E_s} \quad (5.21)$$

Diese Annahme hat zur Folge, daß die Fließspannung der Bewehrung nicht künstlich erhöht wird.

• mehrachsiges Tragverhalten

Die mehrachsige Versagensfläche des unbewehrten Betons kann auch auf Stahlbeton angewandt werden, da die Bewehrung das linear–elastische Tragverhalten des Betons nicht beeinflusst [58].

Diese Aussage gilt grundsätzlich für mehrachsige Druck– oder Zugbeanspruchungen. Kollegger und Mehlhorn [59] zeigen anhand von biaxialen Versuchen an Stahlbetonscheiben, daß ein Abmildern der Betondruckfestigkeit infolge Querkzug mit der Versagenskurve von Kupfer, Hilsdorf und Rüsç [70] hinreichend erfaßt wird. Eine Abminderung der Betondruckfestigkeit bei einer Druck–Zugbeanspruchung wird dann als notwendig erachtet, wenn die Versagenskurve des Betonmodells die von Kupfer et al. nicht hinreichend abbildet. Kollegger [58] schlägt in diesen Fällen eine maximale Abminderung von 20% vor, die Feenstra [38] von der Größenordnung her für zug–/druckbeanspruchte Strukturen übernimmt. Eine entsprechende Abminderung wird hier nicht als erforderlich angesehen, da trotz Überschneiden der zwei Drucker–Prager–Teilflächen in diesem Bereich die Versagenskurve von Kupfer, Hilsdorf und Rüsç gut abgebildet werden kann (vgl. Kap. 5.3.2).

5.2.5 Zusammenfassung

Einaxiale Belastungsversuche rechtfertigen die Annahme, daß sowohl beim Druck– als auch beim Zugtragverhalten auf Bruchenergie basierende Formulierungen zur Beschreibung des jeweiligen Schädigungsverhaltens zurückgegriffen werden kann. Die Annahme einer Unabhängigkeit der biaxialen Versagenskurve von der Belastungsgeschichte läßt darauf schließen, daß unter zweiachsiger Beanspruchung die Versagensmechanismen ähnlich denen der einaxialen Tragverhalten (Z und D) sind. Bei einer drei-

achsigen Beanspruchung muß jedoch differenziert werden. Während sich im Falle einer reinen dreiachsigen Zugbeanspruchung (Z/Z/Z) die Hauptzugspannungskomponenten kaum gegenseitig beeinflussen und sich somit jede Komponente quasi einaxial verhält, ist bei einer dreiachsigen Druckbeanspruchung (D/D/D) mit dominantem hydrostatischen Spannungsanteil ein *softening* kaum oder gar nicht wahrnehmbar. Der Beton nimmt ein duktileres Tragverhalten an.

In ihrer Gesamtheit können diese räumlichen Phänomene mit dem im nachfolgenden Kapitel vorgestellten Materialmodell nicht erfaßt werden. Innerhalb dieses Materialmodells wird vorausgesetzt, daß die mehrachsigen Versagensmechanismen über einaxiale Schädigungsparameter, κ_c bei Druckversagen und κ_t bei Zugversagen, abgebildet werden können, die zueinander entkoppelt sind. Dabei werden die biaxiale Versagenskurve von Kupfer et al. und das mehrachsige Tragverhalten unter reiner Zugbeanspruchung gut approximiert. Das Tragverhalten infolge des dreiachsigen Druckspannungszustandes würde eine Versagenskurve erfordern, die sich mit zunehmendem Einfluß des hydrostatischen Druckspannungszustandes nahezu idealplastisch verhält. Beim vorliegenden Modell definieren zwei gekoppelte Teilflächen (Drucker–Prager– und Kugelfläche) die Versagensfläche im Druckbereich, deren Ver–/Entfestigungsverhalten mit dem Schädigungsparameter κ_c beschrieben wird.

Für Stahlbeton kann die Steifigkeit des gesamten Querschnitts additiv in die drei Komponenten unbewehrter Beton (σ_c), Bewehrungsstahl (σ_s) und *tension–stiffening* (σ_{ia}) aufgesplittet werden. Mit einer ersatzweisen Modifikation des Bewehrungsstahls wird der Effekt des *tension–stiffening* modelliert.

5.3 Modellieren von unbewehrtem Beton

Im folgenden wird ein elasto–plastisches Werkstoffmodell vorgestellt, mit dem das in den Kapiteln zuvor beschriebene Materialverhalten phänomenologisch erfaßt wird. Es zeichnet sich durch die niedrige Anzahl an Parametern aus, die zudem einfach zu identifizieren sind.

5.3.1 Werkstoffmodell mit gekoppelten Teilflächen

Beim verwendeten elasto–plastischen Werkstoffmodell handelt es sich um eine gekoppelte Fließfläche mit nicht glatten Übergängen im Bereich dreier Drucker–Prager–Teilflächen. Für die konsistente Linearisierung der konstitutiven Beziehungen gelten die Herleitungen von Kap. 4.6 für die drei gekoppelten Drucker–Prager–Teilflächen und von Kap. 4.4 für die Kugelfläche.

Das Werkstoffmodell kann stichwortartig mit folgenden Begriffen beschrieben werden: plastisch, isotrop, ratenunabhängig, mit Entfestigung, assoziiert entsprechend der

Fließregel und des Ver-/Entfestigungsgesetzes, bestehend aus insgesamt vier Teilflächen, die durch die Invarianten $(I_1, |\mathbf{s}|)$ des Spannungstensors beschrieben sind.

Charakteristisch für dieses Modell sind drei konvexe Teilflächen, zwei Drucker-Prager- (f_1, f_2) und eine Kugelfläche f_4 . Unter Zuhilfenahme einer weiteren Drucker-Prager-Teilfläche f_3 wird die Rückprojektion im Bereich der Singularität der Teilfläche f_1 entsprechend Kap. 4.6.2 numerisch gehandhabt. Für diese vier Teilflächen gilt:

- Die Drucker-Prager-Teilfläche f_1 stellt die Versagensfläche unter mehrachsigen Zugbeanspruchungen (Z/Z/Z) und unter gemischten Beanspruchungen (Z/D/D/, Z/Z/D, usw.) dar. Deren isotrope Entfestigung spiegelt das einaxiale Zugversagen wider.
- Die Drucker-Prager-Teilfläche f_2 ist Teil der Versagensfläche unter dreiaxsigem Druck (D/D/D). Ihre Schnittkurve mit der Hauptspannungsebene σ_1/σ_2 ist die Versagenskurve unter biaxialer Druckbeanspruchung (D/D). Ihre isotrope Ver-/Entfestigung spiegelt den einaxialen Druckversagensmechanismus wider.
- Die Drucker-Prager-Teilfläche f_3 dient lediglich der numerischen Behandlung der Singularität von f_1 und ist über die Geometrie und über das Ver-/Entfestigungsverhalten mit dieser Fläche f_1 gekoppelt.
- Die Kugelfläche f_4 begrenzt den hydrostatischen Spannungszustand und wird demzufolge erst unter einer mehrachsigen Druckbeanspruchung voll aktiv. Aufgrund des glatten Übergangs zur Teilfläche f_2 ist die Kugelfläche sowohl geometrisch als auch über den einaxialen Druckversagensmechanismus mit f_2 gekoppelt.

Diese Teilflächen trennen das elastische und plastische Gebiet, was aus Bild 5.8a ersichtlich ist. Die Darstellung in der zweidimensionalen Hauptspannungsebene verdeutlicht zudem, daß im Falle des ebenen Spannungszustandes (siehe Bild 5.8b) die Versagenskurven durch die Teilflächen f_1 und f_2 definiert werden. Bei der ebenen Schnittkurve der Teilfläche f_1 handelt es sich um eine Hyperbel, bei der von f_2 um eine Ellipse. Die Punkte ① bis ③ sind dabei Schnittpunkte dieser Versagenskurven mit den Hauptspannungsachsen. Ihre Lage wird über die einaxialen Festigkeitsparameter f_{ctm} und f_{cm} , sowie den Fittingparameter γ_1 bestimmt. Der Punkt ④ definiert den Versagenszustand unter biaxialer symmetrischer Druckbeanspruchung. Die höhere Druckfestigkeit gegenüber dem einaxialen Druckspannungszustand wird mit dem Faktor γ_2 berücksichtigt, einem weiteren Fittingparameter. Gemäß Bild 5.8a definiert der Punkt ④ den tangentiellen Übergang zwischen den Teilflächen f_2 und f_4 . Die in diesen Punkten vorherrschenden Versagensmechanismen und deren Invarianten sind in Tafel 5.3 zusammengestellt.

Die Fließfunktionen der drei Drucker-Prager-Teilflächen f_1 bis f_3 sind analog Gl.(4.1)

$$f_j(\mathbf{s}, I_1, \kappa_j) = |\mathbf{s}| + \alpha_j I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{k}_j(\kappa_j)$$

$$\text{mit: } \bar{k}_j(\kappa_j) = \beta_j \bar{\sigma}(\kappa_j) \quad \text{und } j = 1, 2, 3$$

$$\text{für } f_1: \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_1 f_{cm} - f_{ctm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}}; \quad \beta_1 = \frac{2 \gamma_1 f_{cm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}}; \quad \kappa_1 = \kappa_t$$

$$\text{für } f_2: \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_2 - 1}{2 \gamma_2 - 1}; \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2 \gamma_2 - 1}; \quad \kappa_2 = \kappa_c \quad (5.22)$$

analog Gl.(4.98) und (4.99):

$$\text{für } f_3: \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3 \alpha_1}; \quad \bar{k}_3 = -\frac{1}{3 \alpha_1^2} \bar{k}_1 .$$

Für den Verlauf der äquivalenten Spannungen $\bar{\sigma}(\kappa_j)$ gelten die Beziehungen der Gleichungen (5.6) für einaxialen Zug und (5.9) für einaxialen Druck. Im Bereich der drei zusammengesetzten Drucker–Prager–Teilflächen behalten Tafel 4.5 für die Rückprojektion und Tafel 4.6 für die Berechnung der elasto–plastischen Materialtangente ihre Gültigkeit. Zur iterativen Berechnung des Konsistenzparameter ist die Jacobi–Matrix $\mathbf{J}_{n+1}^{(0)}$ zu bestimmen, beim Berechnen der elasto–plastischen Materialtangente unter anderem die Matrix der plastischen Moduln \mathbf{E}_{n+1} . Beide Matrizen werden im Anhang A 2.2 hergeleitet.

Die Kugelfläche f_4 übernimmt die Aufgabe, den hydrostatischen Druckspannungszustand zu begrenzen. Aus diesem Grund wird ihr Ver–/Entfestigungsverhalten an das der Teilfläche f_2 gekoppelt. Mit

$$\kappa \rightarrow \kappa_c \quad (5.23)$$

wird auch dieser Teilfläche der einaxiale Druckversagensmechanismus zugrunde gelegt; das in Kap. 5.2.3 erwähnte duktile Tragverhalten unter hydrostatischer Beanspruchung kann so nicht abgebildet werden.

Durch die geometrische Kopplung in Punkt ④ und unter Voraussetzung eines glatten Übergangs zwischen den Teilflächen f_2 und f_4 wird die Kugelfläche gemäß dem Fließgesetz von Gleichung (4.45)

$$f(\mathbf{s}, I_1, \kappa_c) = \sqrt{|\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{9}(I_1 - L(\kappa_c))^2} - R(\kappa_c) \quad (4.45)$$

über den Mittelpunkt $L(\kappa_c)$ und den Radius $R(\kappa_c)$ definiert.

$$\begin{aligned} L(\kappa_c) &= -\left(\sqrt{54} \alpha_2 + 2\right) \gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_c) \\ R(\kappa_c) &= \left(\sqrt{\frac{2}{3} + 6\alpha_2^2}\right) \gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_c) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Pkt.	σ_1 (σ_2)	σ_2 (σ_1)		I_1	$ \mathbf{s} $
①	f_{ctm}	0	1D Zugversagen	f_{ctm}	$\sqrt{\frac{2}{3}} f_{ctm}$
②	$\gamma_1 f_{cm}$	0	fikt. 1D Druckversagen, γ_1 -fach	$-\gamma_1 f_{cm}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_1 f_{cm}$
③	f_{cm}	0	1D Druckversagen	$-f_{cm}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} f_{cm}$
④	$\gamma_2 f_{cm}$	$\gamma_2 f_{cm}$	2D Druckversagen, symm.	$-2\gamma_2 f_{cm}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_2 f_{cm}$

Tafel 5.3 Geometrische Punkte der Drucker-Prager-Teilflächen f_1 und f_2

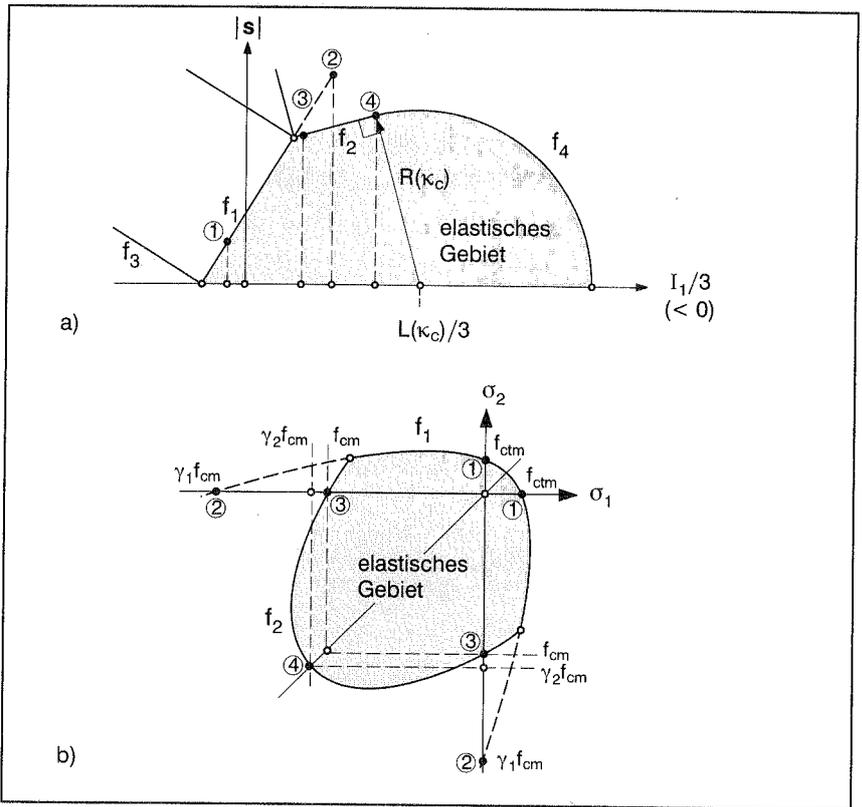


Bild 5.8 Darstellung des Werkstoffmodells
a) in der $(|\mathbf{s}|, I_1)$ -Ebene
b) in der (σ_1, σ_2) -Hauptspannungsebene

Zur mathematischen Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens von Beton werden 6 unabhängige Parameter benötigt (siehe Tafel 5.4). 4 Materialparameter beschreiben die nichtlinearen einaxialen Tragverhaltensphänomene; 2 zusätzliche Parameter (Fittingparameter) werden benötigt, um die Form der Versagensfläche vollständig beschreiben zu können. Auf diese Fittingparameter wird in Kap. 5.3.2 eingegangen.

Ursachen für diese niedrige Anzahl an Parametern sind die zuvor postulierten Analogien zwischen mehr- und einachsigem Tragverhalten, die Wahl des Fließflächentyps der Teilflächen (sowohl die Drucker–Prager– als auch die Kugelfläche können jeweils mit zwei Parametern beschrieben werden) und der glatte Übergang zwischen den Teilflächen f_2 und f_4 .

Grundsätzlich können die vier Materialkenngrößen als von der Betongüte und damit von der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit abhängige Parameter verstanden werden (vgl. Kap. 5.2.3). Aufgrund einer realistischen Streuung dieser Kenngrößen (z.B. stellen einschlägige Normen klare Anforderungen an die Güteüberwachung, um die Streuung der Betonfestigkeit möglichst gering zu halten) und für Simulationen mit versuchsabhängigen Parametern wird darauf verzichtet, die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit als einzigen materialspezifischen Parameter einzuführen.

einaxiale Materialparameter:	$f_{cm}, f_{cm} \dots$	siehe Tafel 5.1
	$G_f \dots$	siehe Gl.(5.5) und Tafel 5.2
	$G_c = 100 G_f \dots 500 G_f$	
Fittingparameter:	$\gamma_1, \gamma_2 \dots$	siehe Kap. 5.3.2

Tafel 5.4 *Materialparameter des Werkstoffmodells*

5.3.2 Identifikation der Fittingparameter

Über die Parameter γ_1 und γ_2 werden die Versagenskurven der Teilflächen f_1 und f_2 in der zweidimensionalen Hauptspannungsebene in der Form angepaßt, daß die biaxialen Versagenskurven von Kupfer et al. [69] etwa im Mittel approximiert werden.

Wie bereits erwähnt, hängt die Lage der Punkte ① bis ③ von der einaxialen Zug– bzw. Druckfestigkeit ab; die Punkte sind somit Schnittpunkte beider Versagenskurven mit den Hauptspannungsachsen. Die Schnittpunkte ② der hyperbolischen Versagenskurve f_1 mit den Hauptspannungsachsen sind von γ_1 abhängig. Bild 5.9 verdeutlicht, daß im D/Z–Bereich die Versagenskurven von Kupfer für $\gamma_1 = 1,0$ im Mittel approximiert werden und sich für $\gamma_1 = 3,0$ quasi eine Umhüllende einstellt. Schwächen zeigt dieses Werkstoffmodell im Z/Z–Bereich. Hier kann das Niveau der einaxialen Zugfestigkeit im Sinne eines Rankine–Fließkriteriums nicht beibehalten werden. Unter biaxia-

ler Beanspruchung wird die Zugfestigkeit für $\gamma_1 = 1,0$ auf $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 0,90 f_{ctm}$, für $\gamma_1 = 3,0$ auf $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 0,85 f_{ctm}$ reduziert. Beim Stahlbetonmodell wird diese Schwäche durch die Bewehrung größtenteils kompensiert, d.h. sie spielt dort nicht mehr die entscheidende Rolle.

Die elliptische Schnittkurve der Drucker–Prager–Teilfläche f_2 ist auch bei Feenstras Werkstoffmodell [40] die Versagenskurve im D/D–Bereich. Bild 5.9 verdeutlicht, daß für $\gamma_2 = 1,2$ die Kupfersche Versagenskurve besser approximiert wird als die von Feenstra ursprünglich vorgeschlagene von Mises Fließbedingung mit $\gamma_2 = 1,1$ und $\bar{\sigma}_2 = 1,1 f_{cm}$ [38]. Der Vergleich mit den Kupferschen Versagenskurven zeigt, daß auch für $\gamma_2 = 1,2$ das elastische Gebiet hin zu den Hauptspannungsachsen gedrungener ist. Grund dafür ist, daß bei Beton unter mehraxialer Druckbeanspruchung das Kompressionsverhalten im Vergleich zum Extensionsverhalten ausgeprägter ist; eine für Geomaterialien typische Eigenschaft. In der Deviatorebene hat die reale Bruchfläche die Gestalt eines ausgerundeten Dreiecks und nicht, wie hier vereinfachend angenommen, die eines Kreises.

Die mit $\gamma_1 = 3,0$ und $\gamma_2 = 1,2$ definierten Versagenskurven geben im Mittel die Versagenskurven von Kupfer gut wieder und werden bei dem hier vorgestellten, gekoppelten Werkstoffmodell für Beton im Rahmen der 2D–Simulationen als optimal angesehen.

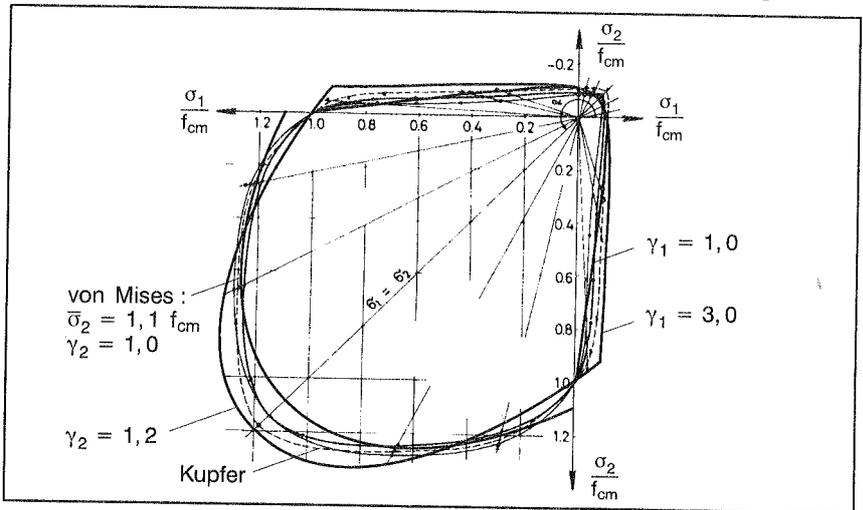


Bild 5.9 Vergleich mit Versagenskurven von Kupfer et al. [69]

5.3.3 Versagensmechanismen des isotropen Werkstoffmodells

Im Ver–/Entfestigungsverhalten der Teilflächen spiegeln sich die Versagensmechanismen des einaxialen Zug –und Druckzustandes wider. Es wurde davon ausgegangen,

daß sich beide Versagensmechanismen nicht gegenseitig beeinflussen, die zum Beschreiben des nichtlinearen Verhaltens erforderlichen internen Variablen κ_t und κ_c somit entkoppelt sind. Folglich kann ein z.B. infolge Zug geschädigtes Material nach einem Wechsel der Beanspruchungsrichtung bis hin zur maximalen Druckfestigkeit belastet werden.

- **Zugversagen**

Die isotrope Entfestigung und der damit verbundene Abbau der äquivalenten Spannung $\bar{\sigma}(\kappa_t)$ bewirkt ein Verschieben der gemeinsamen Kegelspitze der Teilflächen f_1 und f_3 hin zum Spannungsnullpunkt (Ursprung sowohl in der zweidimensionalen Hauptspannungsebene als auch im Invariantenraum). Wie bereits in Kap. 4.6.2 erwähnt, wird durch diese Translation beim *inverted cone* ein anisotropes Verhalten induziert. Von einem allgemeinen Spannungszustand (Punkt A) ausgehend, verbleibt der Materialpunkt nach einem vollständigen Freisetzen der Bruchenergie in einem Druckspannungszustand (siehe Bild 5.10, Punkt B in der 1. Spalte).

- **Druckversagen**

Die isotrope Ver-/Entfestigung der Teilfläche f_2 induziert bei der Kugelfläche ein gekoppeltes Ver-/Entfestigungsverhalten (isotrop und kinematisch). Das Expansions- und Kontraktionsverhalten beider Teilflächen erfolgt nach dem Ähnlichkeitssatz von Thales bzgl. des Spannungsnullpunktes, was die Invariantendarstellung von Bild 5.10 in der 2. Spalte verdeutlicht. Damit die Kontinuität und Konvexität zwischen den Teilflächen f_1 und f_2 gewährleistet werden kann, darf die äquivalente Spannung $\bar{\sigma}(\kappa_c)$ einen Minimalwert nicht unterschreiten. Dabei hat sich der folgende unterste Grenzwert bewährt

$$\min \bar{\sigma}(\kappa_c) = 0,03 f_{cm} \quad (5.25)$$

- **isotropes Werkstoffverhalten**

Die Ribildung beim Beton als Schädigung ist ein anisotroper Vorgang. Ein z.B. einaxial auf Zug beanspruchter Stab reißt in einem ersten Lastzyklus auf (siehe hierzu auch Bild 5.11a). Versuche belegen, daß nach Wegnahme dieser Primärbeanspruchung dieselbe Materialprobe in Querrichtung bis zum Erreichen der maximalen Zugfestigkeit belastet werden kann, was auf das anisotrope Werkstoffverhalten zurückzuführen ist.

Die Annahme eines isotropen Werkstoffverhaltens bedingt eine gleichmäßige Schädigung des Materials nach alle Richtungen. Der zuvor beschriebene Wechsel der Lastrichtung bewirkt in diesem Fall, daß das Material in Querrichtung maximal die Spannung annehmen kann, die zum Zeitpunkt der Entlastung der Primärbelastung vorlag (siehe Bild 5.11b, Spannung $\sigma_{y,u}$). Bei einer sich ändernden Beanspruchung, z.B. infolge Spannungumlagerungen, wird das Strukturverhalten weitaus weniger duktil und u.U. zu ungünstig wiedergegeben.

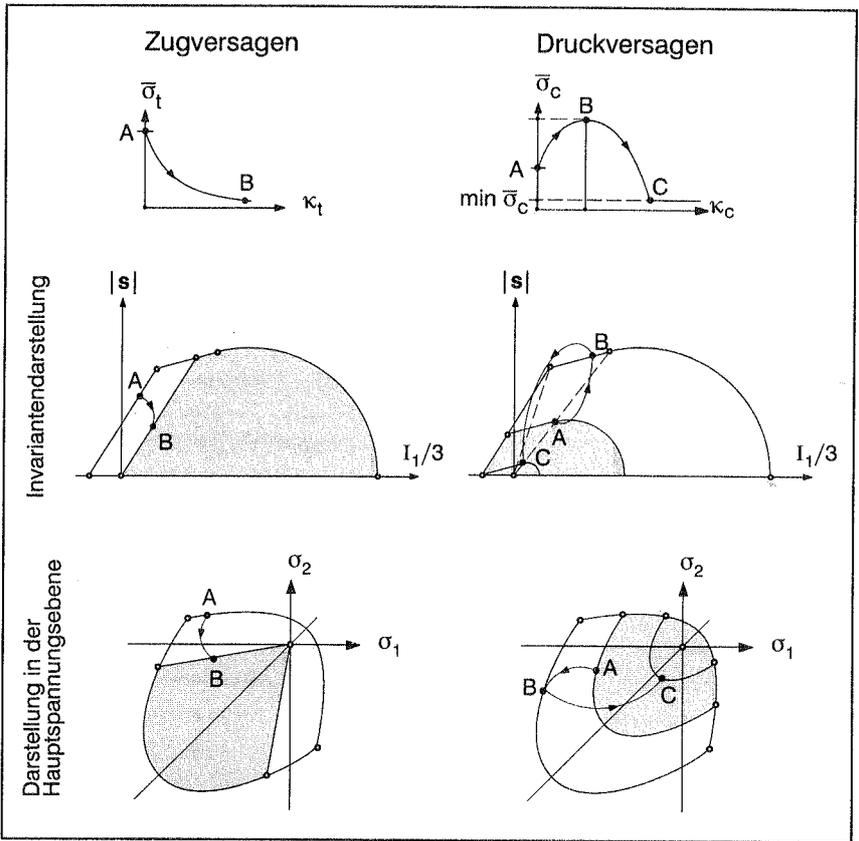


Bild 5.10 Einfluß der einaxialen Versagensmechanismen auf die Versagensflächen-/kurven

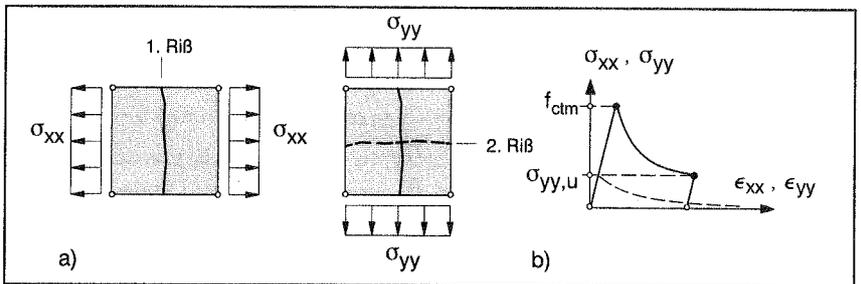


Bild 5.11 a) „Mode I cracking“ unter wechselnder Beanspruchung
b) zugehörige $\sigma_{xx}-\epsilon_{xx}$ und $\sigma_{yy}-\epsilon_{yy}$ Verläufe infolge isotropen Werkstoffverhaltens

5.3.4 Lokaler Entlastungszustand – Berücksichtigung der Schädigung

Wichtige Begriffe zur Schädigungsmechanik sowie die Klassifizierung von Schädigungsmodellen sind ausführlich bei Suanno [119] erläutert. Wesentlich ist, daß mit der Schädigung Änderungen der mechanischen Materialeigenschaften – Degradation der elastischen Materialeigenschaften – verbunden sind. Ein Berücksichtigen dieser Degradation ist für Beton nicht nur werkstoffgerecht, sondern stabilisiert die beim Werkstoffmodell verwendeten numerischen Algorithmen [26], wenn als Folge von Spannungsumlagerungen innerhalb einer Struktur ein lokaler Entlastungszustand am Materialpunkt auftritt. In diesem Fall ist der Grad der Schädigung des Materials zu bestimmen.

Innerhalb des isotropen Werkstoffmodells wird davon ausgegangen, daß die Mikroriß- und Mikrolückenverteilung in allen Richtungen gleich ist. Insofern ist die isotrope Schädigung über einen skalaren Parameter darstellbar ([81], [82]). Im Gegensatz zu Simo et al. [113], Govindjee et al. [43], Meschke et al. ([84] und nachfolgende Veröffentlichungen) bleibt die Evolution der Schädigung in den hier verwendeten Ratengleichungen ($\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon} + \dot{\mathbf{C}} : \epsilon$) unberücksichtigt.

Bei „verschmierten“ Rißmodellen kann der Grad der Schädigung in einem ingenieurmäßigen Ansatz über die äquivalenten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen $\bar{\sigma}_t - \kappa_t$ bzw. $\bar{\sigma}_c - \kappa_c$ (Crisfield et al. [27] und Cervenka et al. [24]) abgeschätzt werden. Wird das Konzept der *freien Energie* (Mazars [81], Chen [22]) auf die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken übertragen, verhält sich die Helmholtzsche freie Energie $\Psi(\epsilon, d)$ proportional zu der „freien Energie“ der äquivalenten Größen $\Psi(\bar{\epsilon}, d)$

$$\Psi(\epsilon, d) = (1 - d) \Psi_0(\epsilon) \approx \Psi(\bar{\epsilon}, d) = (1 - d) \Psi_0(\bar{\epsilon}) \quad , \quad (5.26)$$

wobei Ψ_0 die Energiegröße des ungeschädigten Materials darstellt. Für den linear elastischen Fall gilt zum Zeitpunkt n

$$\Psi_0(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_n E_0 \bar{\epsilon}_n \quad \text{wobei: } E_0 = E_{cm} \quad (5.27)$$

Nach Einsetzen von Gl.(5.27) in (5.26) bezeichnet $\bar{\sigma}_n = (1 - d)E_0\bar{\epsilon}_n$ die äquivalente, noch übertragbare Spannung des geschädigten Materials. Unter der Voraussetzung, daß sich während eines vollständigen Entlastungsprozesses der Materialpunkt degradiert linear elastisch verhält, kann mit folgender Gleichung der skalare Schädigungsparameter bestimmt werden

$$d = 1 - \frac{\bar{\sigma}_n \bar{\epsilon}_n}{\bar{\epsilon}_n E_0 \bar{\epsilon}_n} \quad , \quad \text{für: } 0 \leq d \leq 1 \quad . \quad (5.28)$$

Der Zusammenhang zwischen der degradierten Elastizität und der Elastizität des ungeschädigten Materials $E_n = (1 - d)E_0$ wird mit Bild 5.12 verdeutlicht. In Gl.(5.28) setzt

sich die äquivalente Verzerrung $\bar{\epsilon}$ additiv aus der elastischen und plastischen Komponente zusammen, wobei der plastische Anteil, definiert über die *Rate der plastischen Arbeit*, den jeweiligen internen Variablen entspricht.

$$\bar{\epsilon}_n = \bar{\epsilon}_n^{\text{el}} + \bar{\epsilon}_n^{\text{pl}}, \quad \text{wobei: } \bar{\epsilon}_n^{\text{pl}} = \kappa_{t_n} \text{ bzw. } \kappa_{c_n}. \quad (5.29)$$

Zur Entscheidung, ob eine Be- oder Entlastung vorliegt, sind die in Tafel 3.1 definierten Bedingungen heranzuziehen. Innerhalb des Lastschrittes $n+1$ liegt dann eine Entlastung vom plastischen Zustand vor, wenn $\partial_{\sigma} f_n : \Delta \sigma_{n+1}^* < 0$ ist. Die Belastungsbedingungen gelten sinngemäß.

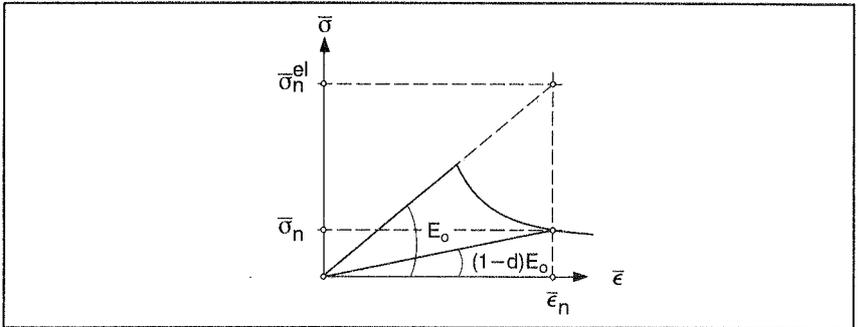


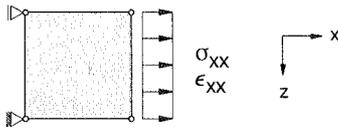
Bild 5.12 Schädigungsparameter d

• Testbeispiel

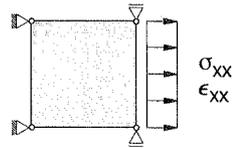
Ein auf Zug beanspruchter Stab wird mit den Systemvarianten *plane stress* und *plane strain* (siehe Bild 5.13) untersucht. Nach einer elastischen (1–2) und plastischen Belastung (2–3) werden die Strukturen vollständig entlastet (3–4) und anschließend wiederbelastet (4–3–5). Nach der vollständigen Entlastung (Punkt 4) zeigt sich, daß im Falle von *plane stress* Verzerrungen und im Falle von *plane strain* Spannungen in der Struktur verbleiben. Dies ist eine unmittelbare Folge der Annahme, daß die Schädigung lediglich mit einer skalaren Größe beschrieben wird. Insofern sind Untersuchungen von zyklisch beanspruchten Strukturen mit dieser Art der Schädigungsmodellierung von vornherein fragwürdig, aber auch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Während des Schädigungsprozesses kann es innerhalb der Struktur zu Spannungsumlagerungen kommen; lokale Entlastungen und somit das Schließen von Rissen können die Folge davon sein. Strukturanalysen zeigen, daß das Berücksichtigen der degradierten Elastizität die numerische Stabilität vergrößert. Insofern ist das Berücksichtigen dieser Degradation des Elastizitätsmoduls nicht nur physikalisch sinnvoll, sondern erhöht auch die numerische Stabilität.

plane stress



plane strain



Materialdaten:

$$E_{cm} = 19636,4 \quad [\text{N/mm}^2]$$

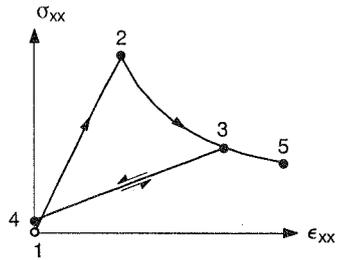
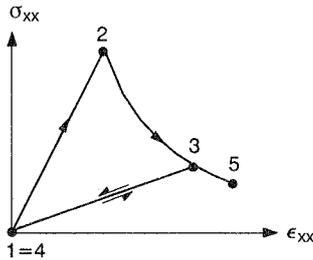
$$\nu_c = 0,1$$

$$f_{ctm} = 18,0 \quad [\text{N/mm}^2]$$

$$G_f = 0,025 \quad [\text{N/mm}]$$

$$f_{cm} = 180,0 \quad [\text{N/mm}^2]$$

Spannungs-Verzerrungs-Charakteristiken



Spannungen / Verzerrungen der jeweiligen Belastungszustände

Punkte	1	2	3	4
$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18,0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6,4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,917 \\ -0,083 \\ -0,083 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,833 \\ 0,234 \\ 0,234 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,401 \\ 0,401 \end{bmatrix}$

	1	2	3	4
$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14,0 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8,25 \\ -4,70 \\ -4,70 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,06 \\ -5,42 \\ -5,42 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,875 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,925 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

σ in $[\text{N/mm}^2]$

ϵ in $[\%]$

Bild 5.13 Testbeispiel Be- / Ent- / Wiederbelastung

5.3.5 Vergleich mit alternativen elasto–plastischen Werkstoffmodellen

Das hier vorgestellte Werkstoffmodell wird mit den elasto–plastischen Werkstoffmodellen verglichen, denen es konzeptionell angelehnt ist, bzw. in deren Richtung es in künftigen Arbeiten zu modifizieren sein wird. Auf eine umfassende Darstellung weiterer Betonmodelle wird hier nicht eingegangen. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang jedoch auf die Literaturstellen von Willam und Warnke [130], Kompfner [57] und Chen [22].

Insbesondere vier Typen von elasto–plastischen Werkstoffmodellen mit unterschiedlichen Fließflächen und Ver–/Entfestigungseigenschaften sind zu nennen. Die hier mit Typ I und Typ II bezeichneten Werkstoffmodelle sind zweidimensionale Betonmodelle, die von Typ III und IV dreidimensionale Modelle, ursprünglich zur Modellierung von Geomaterialien konzipiert.

- TYP I: *Zwei gekoppelte Versagensflächen*, definiert über die ersten beiden Spannungsinvarianten I_1 und J_2 , nach Chen und Chen [23]. Beide Teilflächen sind zusätzlich über einen internen Ver–/Entfestigungsparameter gekoppelt, der die einaxialen Versagensmechanismen wiedergibt.
Parameter: f_{cm} , f_{ctm} , γ_2 , zwei zusätzliche Geometrieparameter. Beide Teilflächen können bei einer entsprechenden Modifikation der beiden Geometrieparameter in Fließkriterien nach Drucker–Prager überführt werden.
- TYP II: *Rankine–Fließkriterium* (Hauptspannungskriterium) im Z/Z– und Z/D Bereich, *Drucker–Pragersche* Fließfläche (Invariantenkriterium) im D/D–Bereich: gekoppelte Fließflächen im ebenen Hauptspannungsraum. Beide Versagenskurven sind hinsichtlich des Ver–/Entfestigungsverhaltens entkoppelt und geben die einaxialen Versagensmechanismen in einer auf Bruchenergie basierenden Formulierung wieder.
Parameter: f_{cm} , f_{ctm} , γ_2 , G_c , G_f . Vorteil beim *Rankine–Fließkriterium*: Annahme einer kinematischen Ver–/Entfestigung induziert ein anisotropes Werkstoffverhalten.
Wesentliche Veröffentlichungen: Feenstra ([39] u.a.); Meschke et al. ([84] und nachfolgende Veröffentlichungen) berücksichtigen zudem die Evolution der Schädigung.
- TYP III: *Cap–Modelle*, bestehend aus drei gekoppelten Teilflächen: *tension cutoff*, elliptischer Zwischenbereich und elliptische Kappe definiert über die Spannungsinvarianten I_1 und J_2 . Verfestigung des elliptischen Zwischenbereichs und der elliptischen Kappe über einen Verfestigungsparameter. Im Minimum 7 geometrische und 1 Verfestigungsparameter.
Wesentliche Veröffentlichungen: DiMaggio et al. [30], Simo et al. [110], Hof-

stetter et al. [50]. Suanno [119] erweitert das *Cap-Modell* mit einem skalaren Schädigungsmodell.

- TYP IV: *Kontinuierliche, im Spannungsraum geschlossene Versagensflächen*, definiert über die Spannungsinvarianten I_1 , J_2 und J_3 . Im Minimum 7 geometrische und 1 Verfestigungsparameter.

Wichtige Veröffentlichungen: Krenk [62] und Ehlers ([35] und nachfolgende Veröffentlichungen), die in Anlehnung an Lade [72] zur Modellierung kohäsionsloser Geomaterialien ein unterschiedliches Extensions- und Kompressionsverhalten in der Deviatorebene berücksichtigt.

Im Hinblick auf eine 3D-Modellierung ist das hier vorgestellte Werkstoffmodell als eine Erweiterung der Modelle vom Typ I und II hinsichtlich der Typen III und IV zu verstehen. Folgende Anlehnungen an diese vier Modelltypen sind gegeben (siehe Bild 5.14):

In bezug auf die Drucker-Prager-Teilflächen f_1 und f_2 ist das Betonmodell dem vom Typ I angelehnt (Parameter: f_{cm} , f_{ctm} , γ_2). Der zusätzliche Fittingparameter γ_1 erlaubt eine Entkopplung des Ver-/Entfestigungsverhaltens im Sinne der Modelle vom Typ II zur Anwendung von Bruchenergie basierenden Formulierungen bei der Beschreibung von einaxialen Entfestigungsverhalten. Analog zum Typ III wird der hydrostatische Druckspannungszustand mit der Kugelfläche, einer Sonderform der elliptischen Kappe, begrenzt.

Bei einer entsprechenden Modifikation der Parameter γ_1 und γ_2 werden die Kupferschen Versagenskurven gut abgebildet. In einem ersten Schritt der Implementierungsphase wird das Betonmodell mit 2D-Simulationen getestet. Im Hinblick auf nachfolgende 3D-Simulationen ist, falls erforderlich, in einem weiteren Schritt das unterschiedliche Extensions- und Kompressionsverhalten analog zu den Modellen vom Typ IV zu implementieren. Dabei kann analog zu Ehlers [35] vorgegangen werden, der die Geometrie der Fließfläche in einem multiplikativen Ansatz über einen hydrostatischen $f_h(I_1, J_2)$ und einen deviatorischen $f_d(J_2, J_3)$ Anteil beschreibt:

$$f = f_h f_d \quad (5.30)$$

f_h entspricht den Fließbedingungen der Gl.(5.22) und (4.45), f_d ist die bei Ehlers angegebene Funktion in Abhängigkeit von der zweiten und dritten Spannungsinvariante.

Diverse Studien der oben genannten Autoren mit den TYP II-Betonmodellen belegen, daß das anisotrope Werkstoffmodell im Vergleich zum isotropen im Nachrißverhalten dann eine größere Duktilität aufweist, wenn erhebliche Spannungsumlagerungen in der Struktur stattfinden. Dieser *Nachteil* wird im Hinblick auf die vollständige 3D-Implementierung akzeptiert. Das hier vorgestellte Betonmodell hat jedoch den *Vorteil* der Typen I, III und IV, daß in der Deviatorebene die Teilflächen kontinuierlich sind. Im Vergleich

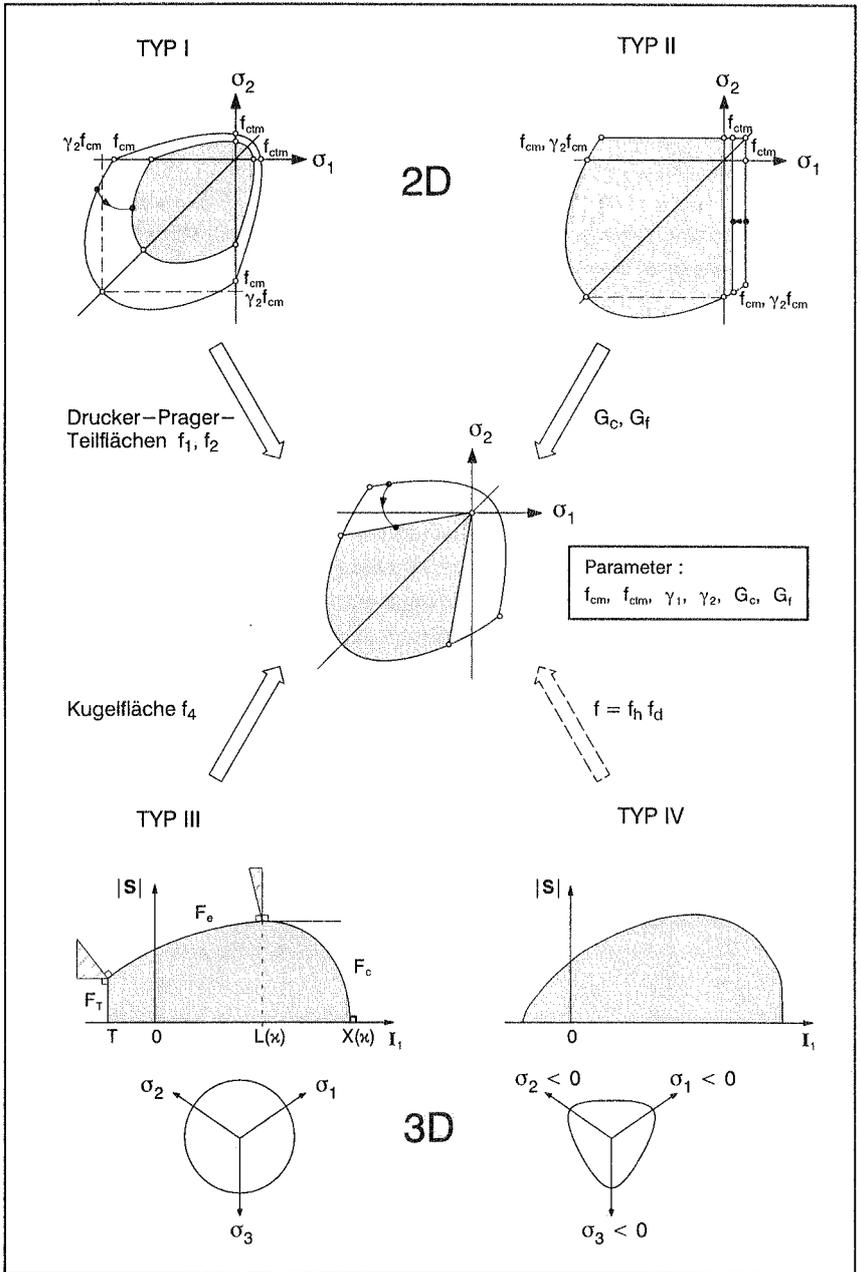


Bild 5.14 Bezug zu den Werkstoffmodellen von Typ I bis IV

zu den Werkstoffmodellen von Typ III und IV erweist sich die geringe Anzahl an Parametern von *Vorteil*. Diese können zudem leicht identifiziert werden.

Retrospektiv ist festzuhalten, daß beim vorgestellten Werkstoffmodell das Bestreben vorliegt, weitgehend die Vorteile der Modelle vom Typ I bis IV zu vereinen. Zwangsläufig bringt die geringere Anzahl an Parametern die zuvor beschriebenen Nachteile mit sich. Die Einfachheit der Fließfunktionen läßt aber mathematisch exakte Formulierungen bei den Projektionsalgorithmen und bei der Ermittlung der Materialtangente zu.

5.4 Modellieren von Stahlbeton

5.4.1 Bewehrungsmodellierung

Bei der Wechselwirkung von Beton und Betonstahl spielt die Kombination von Verbundwirkung und Reibung eine wesentliche Rolle. Die numerische Implementierung dieser Wechselwirkung beeinflußt bekanntermaßen das Genauigkeitsniveau der Analyse [118]. Insofern ist auch eine Verbindung zu den Genauigkeitsanforderungen des verwendeten Betonmodells zu sehen. Soll das Strukturverhalten lediglich phänomenologisch wiedergegeben werden, erscheint ein Modellieren dieser Wechselbeziehungen auf mikromechanischer Ebene nicht angebracht [102]; eine mikromechanische Modellierung bei der Analyse eines wirklichkeitsgetreuen Tragwerks würde erheblichen Aufwand verursachen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Wechselwirkung fiktiv über eine konzentrierte Verbund–Schlupf–Beziehung zu modellieren, in der, im Sinne der finiten Elemente, *interface*–Elemente ([101], [104], [118]) eingeführt werden (siehe auch Kap. 7). Der Beton wird durch zwei– oder dreidimensionale finite Elemente, die Bewehrung durch 1D–Elemente und die Wechselwirkung über *interface*–Elemente mit einer vorgegebenen Verbund–Schlupf–Beziehung modelliert. Diese Art der Modellierung ist, im Vergleich zur ersten Möglichkeit, mit einem geringeren Modellierungsaufwand verbunden, wodurch der Grad der Genauigkeit abnimmt. Im Regelfall muß jeder einzelne Bewehrungsstab modelliert werden.

Bei der einfachsten Art der Bewehrungsmodellierung wird die Wechselwirkung zwischen Beton und Betonstahl vernachlässigt, wobei die Bewehrung gleichmäßig verteilt („verschmierte Bewehrung“) im Betonelement eingebettet ist. Diese eingebettete Modellierung der Bewehrung ist trotz der erforderlichen Ergänzung im Integrationsprozeß rechnerisch effizienter als die Modellierung von Stabelementen ([101], [104], [119]).

5.4.2 Eingebettete Formulierung

Mit numerisch integrierten, isoparametrischen Elementen werden die Betonstrukturen modelliert. Das Konzept der „verschmierten“ eingebetteten Bewehrungsmodellierung

wurde derart implementiert [20], daß n richtungsunabhängige Bewehrungslagen im isoparametrischen Elementraum (r - und s -Richtung) definiert werden können (siehe Bild 5.15).

Die konstitutive Beziehung jeder i -ten Bewehrungslage lautet

$$\dot{\sigma}_i = \mathbf{C}_{s,i} : \dot{\epsilon}_i \quad \text{für } i = 1 \dots n, \quad (5.31)$$

wobei der inkrementelle Verzerrungstensor $\Delta \epsilon_i$ über die Transformation des Verzerrungstensors $\Delta \epsilon^{rs}$ im lokalen Koordinatensystem des Betonelements bestimmt wird.

Zum Berechnen der anteiligen inneren Kräfte jeder Bewehrungslage und deren zusätzlicher Elementsteifigkeiten mit allen erforderlichen Transformationen wird auf die Arbeiten von Feenstra [38] und Brendler [20] hingewiesen.

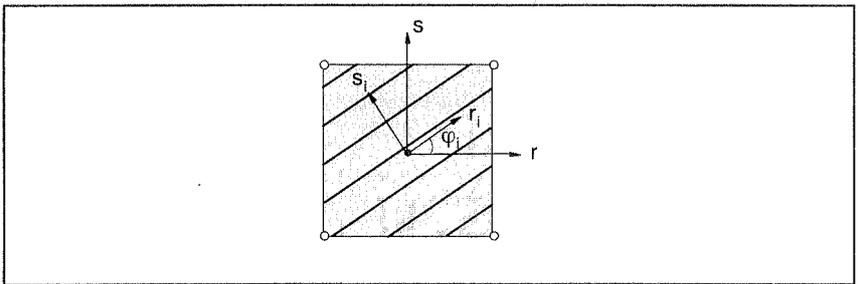


Bild 5.15 Betonelement mit eingebetteter Bewehrung

5.4.3 Konstitutive Beziehungen für bewehrten Beton

Das Tragverhalten von Stahlbeton wurde bereits in Kap. 5.2.4 ausführlich erläutert. Wie dort angesprochen, setzt sich bei einer Zugbeanspruchung die gesamte Steifigkeit des bewehrten Querschnittes aus den Komponenten unbewehrter Beton, Bewehrungsstahl und dem *tension-stiffening* additiv zusammen. Die Modellierung von unbewehrtem Beton wurde bereits in Kap. 5.3 erläutert.

• Werkstoffmodell für Bewehrung

Für die Bewehrung wird eine teilelastisch–teilplastisch konstitutive Beziehung im Sinne der eindimensionalen Plastizität von Kap. 4.3 angenommen. Unter den Voraussetzungen, daß eine bilineare Spannungs–Dehnungs–Charakteristik das Werkstoffverhalten wiedergibt und daß die Bewehrung in einem ebenen Spannungszustand modelliert wird, sind die orthotropen Werkstoffensoren $\mathbf{C}_{s,i}$ jeder i -ten Bewehrungslage wie folgt definiert

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{linear elastisch: } \mathbf{C}_{s,i}^{\text{el}} = \begin{bmatrix} \rho_i E_{s,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{elasto-plastisch: } \mathbf{C}_{s,i}^{\text{pl}} = \begin{bmatrix} \rho_i E_{H,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array} \right\} \text{für } i = 1 \dots n \quad (5.32)$$

Hierin sind ρ_i der Bewehrungsgrad, $E_{s,i}$ der Elastizitätsmodul und $E_{H,i}$ der elasto-plastische Modul der i -ten Bewehrungslage (siehe Bild 4.5). Die Schubsteifigkeit wird hier, wie in der Literatur üblich, vernachlässigt.

• Werkstoffmodell für *tension-stiffening*

Beim Werkstoffmodell, das das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen berücksichtigt, wird folgender orthotroper Werkstofftensor in Richtung des Bewehrungsstahles aufaddiert

$$\mathbf{C}_{ia,i} = \begin{bmatrix} E_{ia,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 1 \dots n \quad (5.33)$$

wobei die Verbundsteifigkeit $E_{ia,i}$ der von der Stahldehnung abhängigen Neigung einer $\sigma_{ia} - \epsilon_s$ Charakteristik (siehe Bild 5.7b) entspricht. Für die dort angegebenen drei Teilabschnitte (eine Parabel und zwei Geraden) sind dies

$$E_{ia,i} = k_{ts} f_{ctm} \begin{cases} 2 \frac{3\epsilon_{cu} - \epsilon_s}{(3\epsilon_{cu} - \epsilon_{co})^2} & \text{für: } \epsilon_{co} < \epsilon_s \leq 3\epsilon_{cu} \\ 0 & \text{für: } 3\epsilon_{cu} < \epsilon_s \leq \epsilon_u \\ -\frac{1}{\epsilon_{sy} - \epsilon_u} & \text{für: } \epsilon_u < \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \end{cases} \quad (5.34)$$

Das Werkstoffmodell für *tension-stiffening* hängt im allgemeinen vom Bewehrungsgrad, vom Durchmesser der Bewehrung und vom mittleren Rißabstand l_s ab. Wie bereits erwähnt, kann der Faktor $k_{ts} = 1, 0$ gesetzt werden. Die Dehnungsgrößen wurden bereits in Kap. 5.2.4 erläutert und sind über die Gleichungen (5.19) bis (5.21) zu bestimmen. Die Fließgrenze der Bewehrung ist, wie erläutert, $\epsilon_{sy} = f_{sy}/E_s$.

Der Schubwiderstand von gerissenem Beton setzt sich aus der Verkeilung der uneben gebrochenen Rißoberflächen (*aggregate interlock*), der Dübelwirkung der Bewehrung (*dowel action*) oder der Steifigkeit einer schräg zum Riß liegenden Bewehrung (*kinking*) zusammen (siehe Walraven und Reinhardt [126], Stempniewski und Eibl [118]). Die Schubspannungs-Schubverzerrungscharakteristiken des *aggregate interlock* und der *dowel action* weisen auf ein ähnliches Verhalten hin. Bei kleinen Rißweiten wird jedoch angenommen, daß der Anteil des *aggregate interlock* dominiert [126]. Werkstoffmodelle, die diese beiden Phänomene berücksichtigen, basieren meist auf sehr kom-

plexen Formulierungen, da Scherkraft–Schlupf–Mechanismen die Interaktion mit der Rißöffnung berücksichtigen ([41], [42]). Zwangsläufig führt dies zu einer Modellierung mittels *interface*–Elementen. Innerhalb des verschmierten Rißmodells, bei dem von mittleren Spannungen und Verzerrungen ausgegangen wird, ist es nicht möglich, mit einem einfachen mathematischen Modell verzerrungs– und richtungsabhängige Komponenten und somit das *aggregate interlock* zu berücksichtigen. Insofern wird auch beim Werkstoffmodell des *tension–stiffenings* die Schubsteifigkeit vernachlässigt.

Da die Einzelkomponenten des Werkstoffmodells die zugehörigen Materialverhalten phänomenologisch beschreiben, hat auch das Werkstoffmodell als Ganzes diese Eigenschaften. Mikromechanische Defekte werden demnach nicht einzeln abgebildet.

6 Numerische Beispiele zum Stahlbetonmodell

6.1 Unbewehrte Betonkonstruktionen

6.1.1 Druckstab mit Imperfektion

Anhand eines einfachen Druckstabes wird die Objektivität der Strukturantwort hinsichtlich der Diskretisierung untersucht. Die in Bild 6.1 dargestellte Struktur wird mit $n=10$, 20 und 30 vierknotigen, vollintegrierten Elementen diskretisiert. Die Materialdaten von Tafel 6.1 sind [40] bzw. [26] entnommen. Um eine Lokalisierung auszulösen, werden die maximale Druckfestigkeit und die Bruchenergie der mittleren zwei Elemente um 10% reduziert. Alle übrigen Parameter sind identisch.

Die zugehörigen Lastverschiebungskurven von Bild 6.2a geben die wichtige Erkenntnis wieder, daß unter Anwendung der freigesetzten Bruchenergie das Konzept der homogenisierten Rißbildung auch bei druckbeanspruchten Strukturen zu netzunabhängigen Lösungen führt. Berücksichtigt ein Materialmodell die Bruchenergie G_C nicht in einer entsprechenden objektiven Formulierung, erhält man unterschiedliche Last–Verschiebungskurven (siehe Bild 6.2b): Mit zunehmender Netzdichte nimmt auch die Sprödhheit des Materials zu, da sich das Versagen auf die mittleren zwei Elemente konzentriert.

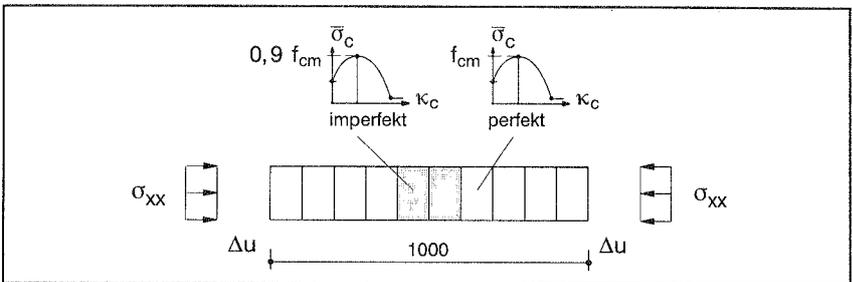


Bild 6.1 Einfacher Druckversuch

<i>perfektes Material:</i>			
$E_{cm} = 30000$	[N/mm ²]	$\nu_c = 0,2$	[–]
$f_{cm} = 3,0$	[N/mm ²]	$G_C = 1$	[N/mm]
<i>imperfektes Material:</i>			
$f_{cm} = 2,7$	[N/mm ²]	$G_C = 0,9$	[N/mm]
sonst wie oben			

Tafel 6.1 Materialdaten: Einfacher Druckversuch

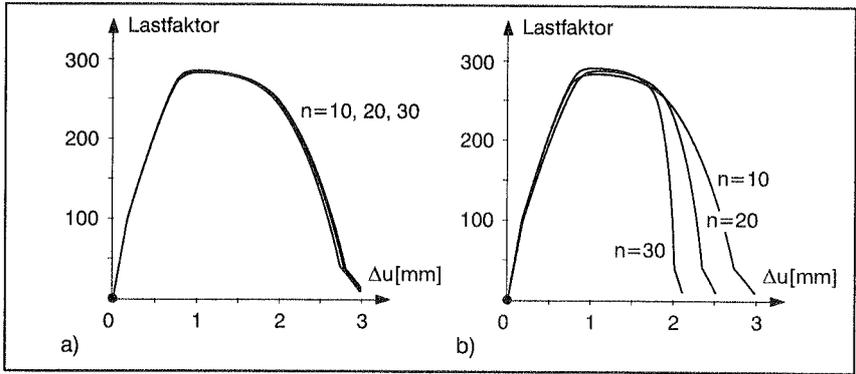


Bild 6.2 Last-Verschiebungskurven
a) mit Bruchenergie G_c

b) ohne Bruchenergie G_c

6.1.2 L-förmige Scheibe

Eine von Lackner und Mang [71] konzipierte L-förmige Scheibe wurde von Huemer [53] eingehend mit dem anisotropen Betonmodell von Meschke et al. [84] analysiert. Das hier vorgestellte isotrope Werkstoffmodell wird mit den dort angegebenen numerischen Ergebnissen verglichen. Geometrie und Lagerbedingungen sind Bild 6.3 zu entnehmen. Am vertikalen Rand des horizontalen Schenkels wird eine gleichmäßige vertikale Verschiebung u eingepreßt; der Berechnung wird ein ebener Spannungszustand zugrunde gelegt.

Das mechanische Verhalten ist, so auch [71], primär durch die Zugbeanspruchung innerhalb der Scheibe, insbesondere an der einspringenden Ecke gekennzeichnet. Insofern kommt dem Maß der Schädigung im Nachrißverhalten große Bedeutung zu. Das von Huemer eingesetzte, anisotrope Betonmodell zeichnet sich durch seine größere

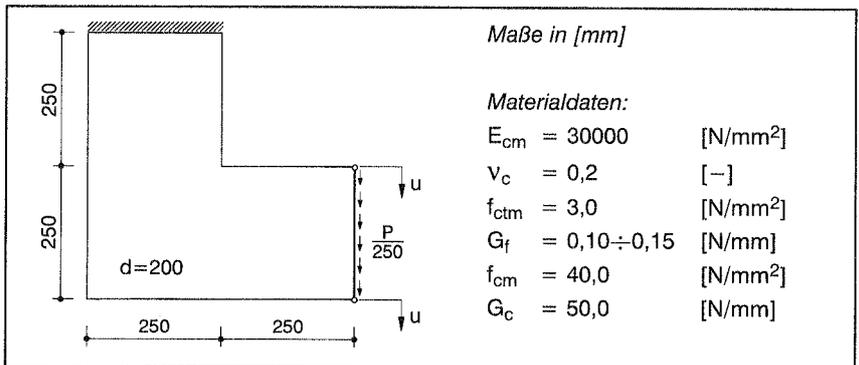


Bild 6.3 L-förmige Scheibe: Abmessungen, Lagerung, Belastung, Materialdaten

Duktilität im Nachrißverhalten aus. Deshalb wird in einem ersten Schritt das Nachrißverhalten mit einer Studie des Bruchenergie–Parameters untersucht. Die bei Huemer angegebene Bruchenergie $G_f = 0,10$ [N/mm] wird zusätzlich um 20% bzw. 50% erhöht.

In einem ersten Schritt nahm Huemer an der Struktur ausgehend von der Grundvernetzung (Netz I) eine h–adaptive („herkömmliche“) Netzverfeinerung vor (Netze II bis IV). In einem zweiten Schritt vernetzte er die Struktur mit einem Freivernetzer, der auf dem von Huemer entwickelten „inkrementell adaptiven Verfahren“ basiert. Unterschiedliche Restriktionen bei den Fehlerschranken führten zu drei weiteren Netzen (Netze A, B und C). Ziel war es, den dort vorgestellten adaptiven Algorithmus für den Fall des Auftretens von Lokalisierungen zu prüfen. Der Vergleich beider Werkstoffmodelle beschränkt sich auf Untersuchungen mit den Netzen I, II und IV, deren für die Rechnung relevante Kenngrößen in Bild 6.4 aufgelistet und dargestellt sind. Wie bei Huemer wird die Scheibe mit vierknotigen, vollintegrierten FE diskretisiert.

Hier wird vorab das Strukturverhalten von Netz I mit unterschiedlichen Bruchenergien untersucht. Für die niedrigeren Bruchenergien $G_f = 0,10$ und $0,12$ [N/mm] ist erwartungsgemäß das Nachrißverhalten weit weniger duktil als das des anisotropen Werkstoffmodells. In Bild 6.5 wird dies durch die stark abfallenden Last–Verschiebungskurven nach Überschreiten der Maximallast deutlich. Die Bruchenergie $G_f = 0,15$ [N/mm] bildet die Maximallast und das Nachrißverhalten deutlich besser ab. Ursache für die geringere Maximallast ist, daß die Drucker–Pragersche Versagenskurve unter biaxialer Zugbeanspruchung das Niveau der einaxialen Zugfestigkeit im Sinne des Rankine–Fließkriteriums nicht beibehalten kann; es ist weniger zugfest.

Die weiteren Untersuchungen an den Netzen II und IV erfolgen jedoch mit der Bruchenergie $G_f = 0,12$ [N/mm], um die Maximallasten von Huemer [53] nicht deutlich zu

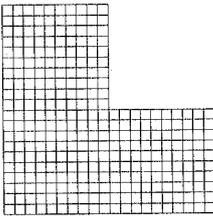
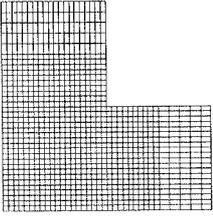
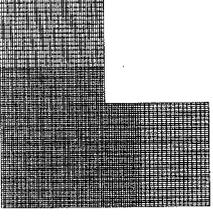
	Netz I	Netz II	Netz IV
			
Elemente:	300	1000	5400
Knoten:	341	1071	5559
FG:	650	2080	10966

Bild 6.4 Relevante Kenngrößen der Netze I, II und IV

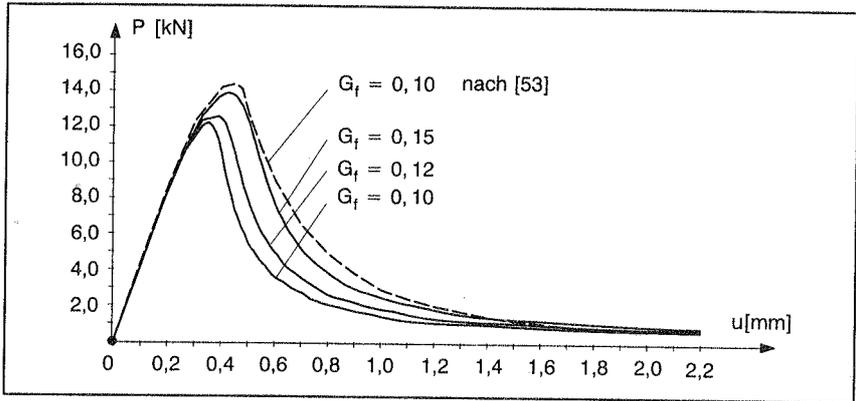


Bild 6.5 Last-Verschiebungskurven mit Netz I: unterschiedliche Bruchenergien G_f

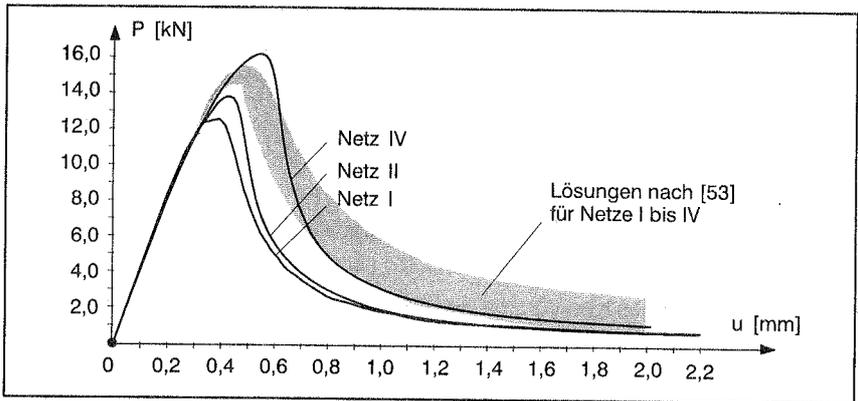


Bild 6.6 Last-Verschiebungskurven mit unterschiedlichen Netzen (Bruchenergie $G_f = 0,12$ [N/mm])

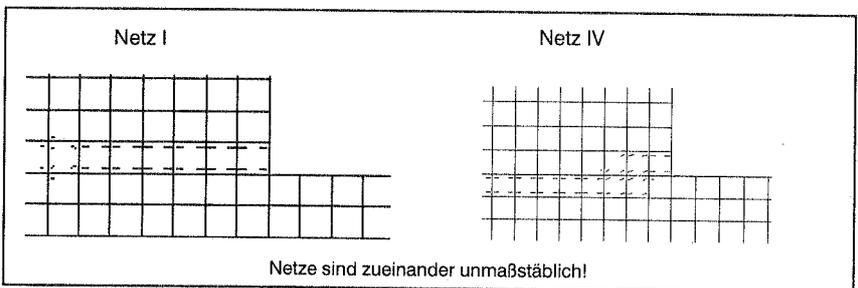


Bild 6.7 Rißverhalten der Netze I und IV ($u = \text{ca. } 0,7$ mm)

überschreiten. Für die Last–Verschiebungskurven von Bild 6.6 gelten die zuvor beschriebenen Phänomene: gute Übereinstimmung der Maximallasten, ein zu sprödes Nachrißverhalten.

Die zum Teil erheblichen Abweichungen der Last–Verschiebungskurven bei unterschiedlicher Netzverfeinerung werfen zu Recht die Frage auf, ob die Objektivität des Materialmodells hinsichtlich der Diskretisierung noch gewährleistet ist. Analog zu [53] kann mit zunehmender Verfeinerung eine Lageänderung des Risses beobachtet werden (siehe Bild 6.7). Beim Netz VI verläuft der Riß an der Rißwurzel (einspringende Ecke) nicht mehr horizontal, sondern unter einer Neigung von ca. 20° . In einer relativ geringen Entfernung von der Rißwurzel schreitet der Riß wieder geradlinig in der Elementreihe unterhalb der einspringenden Ecke fort.

Unterschiedliche Rißlagen bedingen, daß die geometrische Form der ungeschädigten Scheibenteile unterschiedlich sind und somit auch verschiedene Strukturen berechnet werden. Die Objektivität des Materialmodells bezüglich der Diskretisierung steht demnach nicht in Widerspruch zum Auftreten von Diskretisierungsfehlern bei der Beschreibung des globalen Strukturverhaltens. Auch liegt die Vermutung nahe, daß bei einer weiteren Steigerung der Netzdichte die Lage der Risse besser erfaßt wird und die Last–Verschiebungskurven zu einer Endlage konvergieren [53].

Folgende Rückschlüsse können aufgrund dieser Ergebnisse getroffen werden:

- Die höhere Duktilität im Nachrißbereich kann mit einer gegenüber dem Normwert um ca. 20% höheren Bruchenergie besser erfaßt werden.
- Im Bereich ausgeprägter Lokalisierungen gewährt eine hohe Netzverfeinerung die Objektivität des Materialmodells bezüglich der Diskretisierung (→ adaptive Verfeinerungsstrategien sind angebracht).

6.1.3 Vierpunktgestützter Balken (*SEN–beam*)

Die ersten Erkenntnisse zum Tragverhalten des *Single–Edge–Notched–beam* basieren auf den Versuchen von Arrea und Ingraffea [2]. Die Prüfkörper des SEN hatten eine Abmessung von $440 \times 100 \times 100$ [mm] und eine Einkerbung von 5×20 [mm] mittig an der Oberseite. Der Abstand der äußersten Last $P_1 = \frac{1}{11}P$ zum äußersten Lager beträgt 400 [mm], der der inneren Lastplatte mit $P_2 = \frac{10}{11}P$ zum inneren Lager 40 [mm]. Die Materialdaten von Tafel 6.2 entsprechen denen von Feenstra [38]. Der Balken wird mit neunknotigen, vollintegrierten FE diskretisiert. Insbesondere der Bereich zwischen innerem Lager und Lastplatte von P_2 ist sehr fein vernetzt, um die Rißbildung exakt erfassen zu können.

Die ersten Versuchsergebnisse zeigen das Fortschreiten eines gekrümmten Risses von der rechten inneren Ecke der Einkerbung bis zur rechten Seite der Lastplatte von P_2 .

Dieser Versuch wurde im letzten Jahrzehnt ausführlich numerisch simuliert. Zu nennen sind insbesondere folgende Arbeiten des Koiter Instituts der TU Delft, Niederlande: De Borst [16], Rots [101], Schlangen [105], Feenstra [38], Pamin [88], De Borst et al. [18]. Schlangen zeigte in weiteren Versuchen, daß die Lagerbedingungen (mehr oder weniger reibungsbehaftet) einen entscheidenden Einfluß auf die Versagensart (Schub- und/oder Biegeversagen) nehmen.

Der Vergleich der experimentellen Ergebnisse und der numerischen Simulation wird in zwei Last-Verschiebungscharakteristiken nachvollzogen. Zum einen ist dies das gegenseitige vertikale Verschieben der beiden Eckpunkte an der Oberseite der Einkerbung (*crack-mouth-sliding-displacement*, kurz: cmsd), zum anderen das horizontale Auseinanderklaffen dieser beiden Punkte (*crack-mouth-opening-displacement*, kurz: cmod).

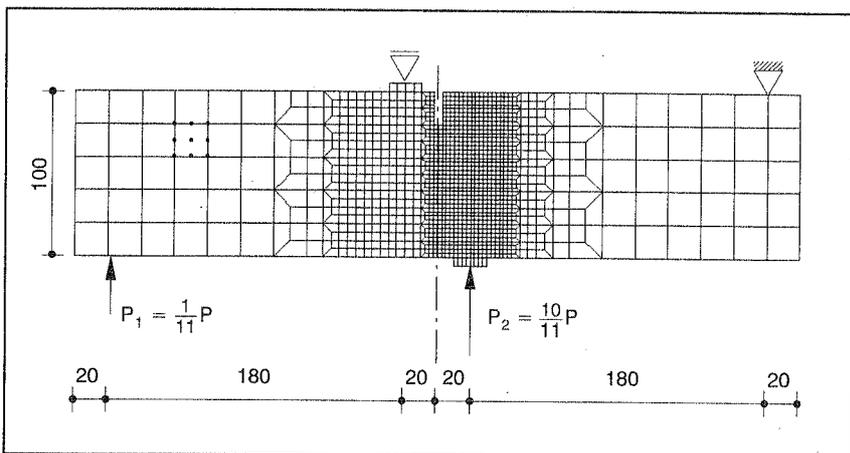


Bild 6.8 SEN-beam: Abmessungen und Diskretisierung

$E_{cm} = 35000$	[N/mm ²]	$\nu_c = 0,15$	[-]
$f_{cm} = 36,5$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0$	[N/mm]
$f_{ctm} = 2,8$	[N/mm ²]	$G_f = 0,07$	[N/mm]

Tafel 6.2 SEN-beam: Materialdaten

Die numerische Simulation gibt die Last-Verschiebungscharakteristiken zufriedenstellend wieder. Auch das Nachrißverhalten entspricht weitgehend dem des Versuches. Zu erwähnen ist, daß speziell bei diesem Beispiel Feenstra [38] keinen essentiellen Unterschied zwischen einem *Rankine*-Fließkriterium mit isotroper oder kinematischer Entfestigung nachweist.

Bei Erreichen der Maximallast wird an der rechten unteren Seite der Einkerbung ein Schubriß unter etwa 45° initiiert. Dieses Schubversagen verifiziert Schlangens experimentelles Ergebnis. Mit zunehmender Verformung verändert der Riß seine Richtung und geht bei Erreichen des endgültigen Lastniveaus rechts von der Lastplatte in einen vertikalen Riß (Biegezugversagen) über. Der Rißzustand ist in Bild 6.10b dargestellt und gibt den des Versuches gut wieder.

Die Größe der Maximallast hängt, wie erwähnt, vom Schubversagen ab. Im Gegensatz zum *Rankine*-Fließkriterium läßt das von Drucker-Prager in Abhängigkeit des Fittingparameters γ_1 eine um bis zu 15% größere maximale Zugfestigkeit zu (siehe auch 6.2.1). Dies ist der Grund für die gegenüber dem Versuch ca. 8% größere Maximallast.

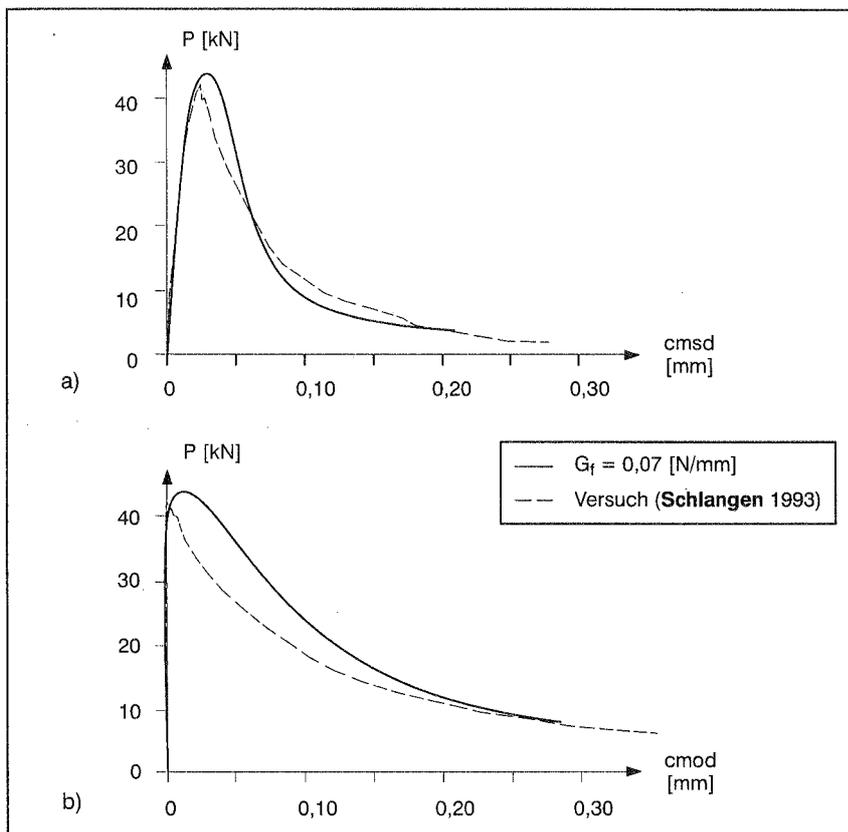


Bild 6.9 Last-Verschiebungskurven
a) $P - c_{msd}$

b) $P - c_{mod}$

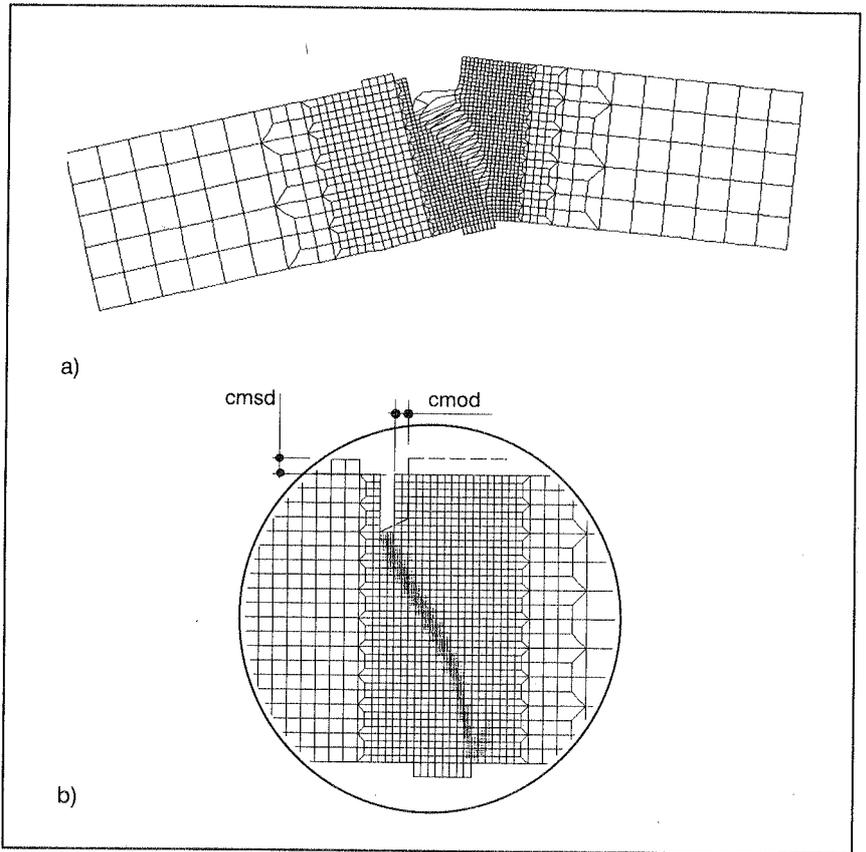


Bild 6.10 Zustand bei Erreichen des endgültigen Lastniveaus ($c_{msd} \approx 0,20$ [mm]):
 a) Verformungsfigur (stark überhöht) b) aktive Risse

6.2 Stahlbetonkonstruktionen

6.2.1 Verifikation des *tension–stiffening* Modells

Wie in Kap.5.2.4 erläutert, werden mit dem *tension–stiffening* zwei Effekte phänomenologisch erfaßt:

- zusätzliche Steifigkeit in Richtung des Bewehrungsstahls aufgrund des Mitwirkens des Betons zwischen den Rissen;
- gleichmäßige Rißverteilung durch die Bewehrung → mittlerer Rißabstand l_s .

Wie bei Feenstra [38] soll anhand von Versuchsergebnissen von ebenen, mit Normal- und Schubkräften beanspruchten Stahlbetonscheiben das *tension–stiffening* Modell verifiziert werden. Diese Stahlbetonscheiben haben durchweg eine Größe von 890x890 [mm] und eine Dicke von 70 [mm]; die Betondeckung beträgt $c=6$ [mm]. Die Diskretisierung dieser Versuchsscheiben beschränkt sich auf ein vierknotiges, vollintegriertes finites Element (siehe Bild 6.11). Die Richtungen r_1 und s_1 der Bewehrungslagen werden über den Winkel φ_1 bzgl. der Elementachse x definiert.

Desweiteren wird der Einfluß des Fittingparameters γ_1 untersucht, der die Form der Teilfläche f_1 mitbestimmt. Die Variation des Fittingparameters von $\gamma_1 = 1,0 / 3,0$ und ∞ beeinflusst bei mehraxialer Beanspruchung die Maximallast und das Nachrißverhalten. Zudem geht für $\gamma_1 \rightarrow \infty$ und zunehmender Schädigung ($\kappa_t \rightarrow \infty$) die Drucker–Prager–Teilfläche f_1 in ein *Rankine*–Fließkriterium über.

• Zugversuch: Scheibe pb13 von Bhide und Collins [8]

Die ersten Untersuchungen beziehen sich auf Zugversuche von Bhide und Collins [8], die innerhalb einer Testreihe 31 einaxial bewehrte Stahlbetonscheiben mit unterschiedlichen Zug- und Schubbeanspruchungen prüften. Hier wird die Scheibe pb13 numerisch simuliert. Sämtliche Materialdaten sind in Tafel 6.3 angegeben.

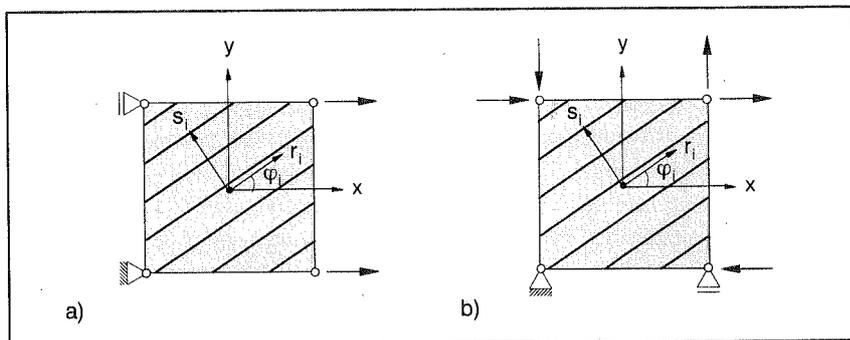


Bild 6.11 FE-Modell a) Zugversuch b) Schubversuch

Beton:			
$E_{cm} = 26000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,15$	[-]
$f_{cm} = 23,5$	[N/mm ²]		
$f_{ctm} = 1,85$	[N/mm ²]	$G_f = 0,06$	[N/mm]
Betonstahl:			
$\varnothing_r = 6,55$	[mm]	$\varnothing_s = 0$	[mm]
$\rho_r = 0,01085$	[-]	$\rho_s = 0$	[-]
$\Phi_r = 0 / 45$	[°]	$\Phi_s = 0$	[°]
$f_{sy} = 414$	[N/mm ²]		
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Tafel 6.3 pb13: Materialdaten

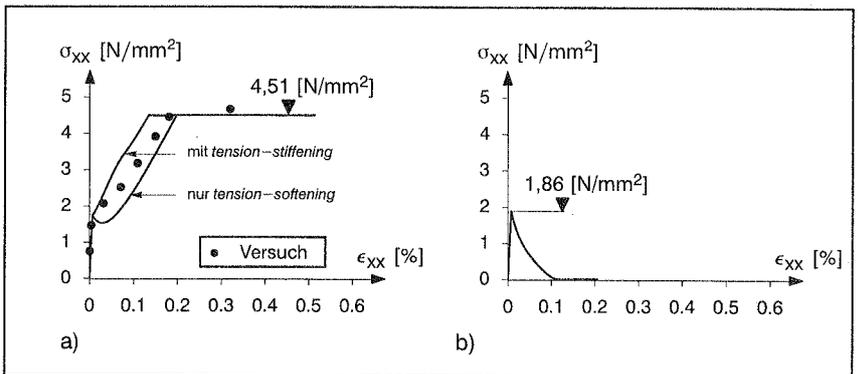


Bild 6.12 pb13: Last-Verschiebungskurven

a) pb13: $\varphi_r = 0$ [°]

b) pb13: $\varphi_r = 45$ [°]

Ein Vergleich der Last-Verschiebungskurven von Bild 6.12a zeigt, daß das Nachrißverhalten des Versuches unter Berücksichtigung des *tension-stiffening* überschätzt wird. Auch wird deutlich, daß im Versuch beim Fließen der Bewehrung noch ein Mitwirken zwischen den Rissen vorhanden sein muß, da die berechnete Maximallast von 4,51 [N/mm²] gegenüber der des Versuches um ca. 5% geringer ist. Da die Bewehrung in Richtung der Zugbeanspruchung liegt, demzufolge kein mehraxialer Spannungszustand gegeben ist, hat der Fittingparameter γ_1 keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

- **Zugversuch: Scheibe pb13, einaxiale Bewehrung unter 45°**

Bei der Scheibe pb13 wird nun die einaxiale Bewehrung unter 45° gedreht. Aufgrund der schräg liegenden Bewehrung wird die Schubsteifigkeit des Betonelementes akti-

viert; die Spannungs–Dehnungscharakteristik von Bild 6.12b entspricht der des unbewehrten, mehraxial beanspruchten Scheibenelementes; die Maximallast hat in etwa die Größenordnung der einaxialen Zugfestigkeit.

● **Zugversuch: Scheibe pk04 von Kollegger [58]**

Kollegger untersuchte innerhalb einer Testreihe von 8 gleich bewehrten Scheiben den Einfluß des Winkels zwischen Riß und Bewehrung. Hier wird die Scheibe pk04 numerisch simuliert, deren zweilagige Bewehrung unter $\varphi_i=45^\circ / 135^\circ$ symmetrisch zur Beanspruchungsrichtung liegt. Alle Materialdaten sind in Tafel 6.4 zusammengestellt.

Für $\gamma_1 \rightarrow \infty$ sind die Last–Verschiebungskurven für die Fälle mit und ohne *tension–stiffening* Bild 6.13a zu entnehmen. Die Maximallast von 7,44 [N/mm²] beider Fälle stimmt mit der von Feenstra [38] überein. Jedoch erweist sich das Nachrißverhalten im Nachrißbereich als zu steif.

Die schräg, aber symmetrisch zur Beanspruchungsrichtung liegenden Bewehrungslagen induzieren im Beton zusätzliche Druckspannungen in Querrichtung. Zwangsläufig führen unterschiedliche Formen von f_1 gemäß Bild 6.13b zu unterschiedlichen Spannungs–Dehnungscharakteristiken: mit abnehmendem γ_1 wird das Nachrißverhalten weicher und die Maximallast kleiner (siehe Tafel 6.5). Jeder Materialpunkt des Betons weist bei einer vollständigen Schädigung ($\kappa_i \rightarrow \infty$) einen biaxialen Druckspannungszustand auf (siehe Bild 6.14b).

Resümierend ist anzumerken, daß für $\gamma_1 = 3$ Kolleggers Versuchsergebnisse am besten abgebildet werden. Wie bereits in Kap. 5.3.2 festgestellt wurde, werden mit diesem Wert auch die Kupferschen Versagenskurven am besten approximiert.

<i>Beton:</i>			
$E_{cm} = 26000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,15$	[–]
$f_{cm} = 20,0$	[N/mm ²]		
$f_{ctm} = 1,6$	[N/mm ²]	$G_f = 0,06$	[N/mm]
$\gamma_1 = 1,0/3,0/\infty$	[–]		
<i>Betonstahl:</i>			
$\varnothing_r = 6,5$	[mm]	$\varnothing_s = 6,5$	[mm]
$\rho_r = 0,0106$	[–]	$\rho_s = 0,0106$	[–]
$\varphi_r = 45$	[°]	$\varphi_s = 135$	[°]
$f_{sy} = 700$	[N/mm ²]		
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Tafel 6.4 pk04: Materialdaten

● **Schubversuch: Scheibe pv4 von Vecchio und Collins [124]**

Aus einer Testreihe mit Schubversuchen von Vecchio und Collins [124] wird zum Schluß der Versuch mit der Scheibe pv4 numerisch simuliert. Ihre zweilagige Bewehrung liegt unter $\varphi_1=0^\circ$ bzw. 90° symmetrisch zur Beanspruchungsrichtung. Alle Materialdaten sind in Tafel 6.6 zusammengestellt. Im Vergleich zu Feenstra [38] wurde hier analog zur L-förmigen Scheibe (siehe Kap. 6.1.2) die Bruchenergie G_f um 20% erhöht. Entsprechend der Scheibe pk04 wird eine Studie des Fittingparameters γ_1 vorgenommen.

Die Last-Verschiebungskurven für $\gamma_1 \rightarrow \infty$ (mit und ohne *tension-stiffening*) sind Bild 6.15a zu entnehmen. Sie approximieren die Versuchsergebnisse sehr zufriedenstellend. Die Maximallast von 2,67 [N/mm²] beider Fälle stimmt auch hier mit der von Feenstra [38] überein. Jedoch überschreitet die „Anrißlast“ σ_{xy}^{cr} mit 2,10 [N/mm²] die von Feenstra um 5%. Grund hierfür ist „Fülligkeit“ der Fließfläche f_1 (siehe Bild 6.14a), die, verglichen mit der einaxialen Zugfestigkeit f_{ctm} , für $\gamma_1 \rightarrow \infty$ bis zu 33% größere Hauptspannungen zuläßt (vgl. Tafel 6.7). Die Einschränkung mit $\gamma_1 = 3$ begrenzt diese höheren Hauptspannungen auf ein noch tolerierbares Maß von 13%. Eine Folge davon ist, daß dieser Versuch etwas ungünstiger simuliert wird (vgl. Bild 6.14b und Tafel 6.7).

<i>Beton:</i>			
$E_{cm} = 30000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,15$	[-]
$f_{cm} = 26,0$	[N/mm ²]		
$f_{ctm} = 1,85$	[N/mm ²]	$G_f = 0,072$	[N/mm]
$\gamma_1 = 1,0/3,0/\infty$	[-]		
<i>Betonstahl:</i>			
$\varnothing_r = 3,45$	[mm]	$\varnothing_s = 3,45$	[mm]
$\rho_r = 0,01056$	[-]	$\rho_s = 0,01056$	[-]
$\varphi_r = 0$	[°]	$\varphi_s = 90$	[°]
$f_{sy} = 250$	[N/mm ²]		
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Tafel 6.6 pv4: Materialdaten

	$\gamma_1 = 1,0$	$\gamma_1 = 3,0$	$\gamma_1 \rightarrow \infty$
$\max \sigma_1 / f_{ctm}$	1,054	1,132	1,333
$\sigma_{xy,u}$ [N/mm ²]	2,18	2,50	2,67
$\sigma_{xy,u} / \max \sigma_{xy,u}$	0,82	0,94	1,00

Tafel 6.7 pv4: Maximallasten

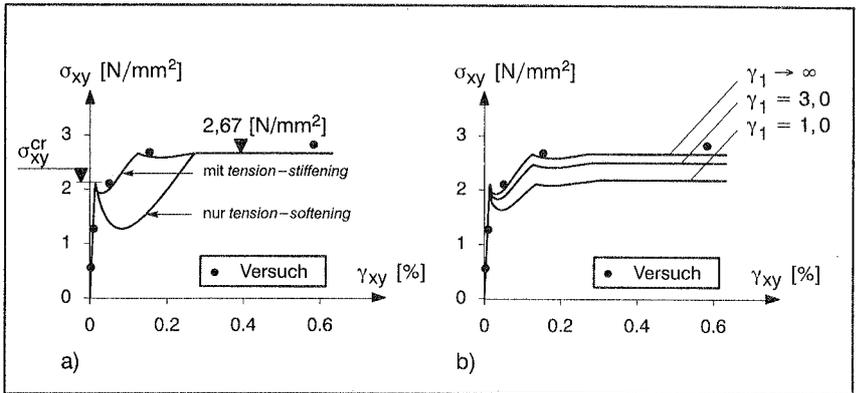


Bild 6.15 pv4: Last-Verschiebungskurven

- a) $\gamma_1 \rightarrow \infty$, mit und ohne „tension stiffening“
 b) $\gamma_1 = 1,0 / 3,0 / \infty$, mit „tension stiffening“

• Zusammenfassung

Die numerischen Simulationen dieser Stahlbetonscheiben zeigen, daß das Strukturverhalten sämtlicher Versuche gut wiedergegeben wird. Bei der Scheibe pb13, modifiziert mit einer anisotrop gerichteten Bewehrung, liegen keine Versuchsergebnisse vor. Da bei der Bewehrung keine Schubsteifigkeit berücksichtigt wird, wird hier sicher das Verhalten der bewehrten Struktur zu ungünstig wiedergegeben. Insofern sind numerische Untersuchungen von Strukturen mit nur einer Bewehrungsrichtung mit äußerster Sorgfalt zu bewerten. Ein Gegenbeispiel stellt der „Karihaloo“-Balken von Kap. 6.2.2 dar: dort entspricht die Bewehrungsrichtung in etwa der der Beanspruchung.

6.2.2 Balken ohne Schubbewehrung

Karihaloo [55] führte Versuche an ausschließlich im Zugbereich bewehrten Balken durch. Zwei Balken gleicher Geometrie, aber mit unterschiedlichem Bewehrungsgehalt, wurden von Suanno [119] mit seinem modifizierten *Cap-Modell* analysiert. Seine Ergebnisse und die von Karihaloo werden mit dem hier vorgestellten Werkstoffmodell verglichen.

Balken 1 hat dabei einen Bewehrungsgrad von 0,75% ($1 \text{ } \varnothing 12 \text{ [mm]}$), Balken 2 den doppelten ($2 \text{ } \varnothing 12 \text{ [mm]}$). Geometrie und Belastung sind in Bild 6.16 dargestellt; Tafel 6.8 enthält die Parameter für das Werkstoffmodell. Der Balken wird mit neunknotigen, vollintegrierten Elementen modelliert. Dabei wird die Bewehrung über die Höhe der untersten Elementreihe als „verschmiert“ angenommen. Aus Gründen der Symmetrie wird nur das halbe System untersucht.

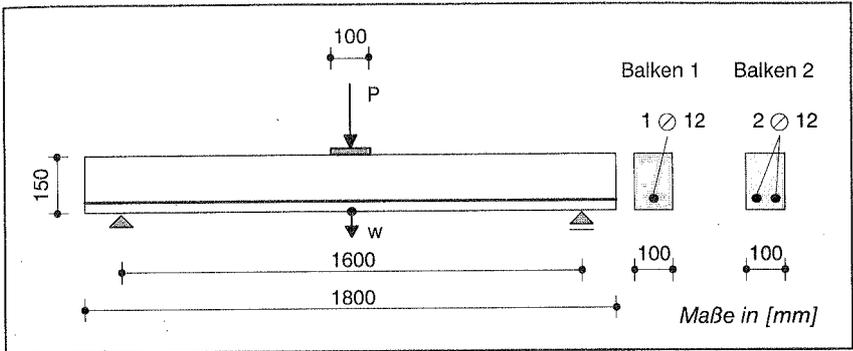


Bild 6.16 Karihaloo–Balken: Geometrie und Belastung

Beton:			
$E_{cm} = 30000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,20$	[–]
$f_{cm} = 46,0$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0$	[N/mm]
$f_{ctm} = 3,4$	[N/mm ²]	G_f	... Parameterstudie
$Y_1 = 3,0$	[–]	$Y_2 = 1,2$	[–]
Betonstahl:			
$\varnothing_r = 12,0$	[mm]	$\varnothing_s = 0$	[mm]
$A_{s,r} = 113$	[mm ²]	$A_{s,s} = 0$	[mm ²]
$\varphi_r = 0$	[°]	$\varphi_s = 0$	[°]
$f_{sy} = 463$	[N/mm ²]		
$E_s = 200000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Tafel 6.8 Karihaloo–Balken: Materialdaten nach [55]

• Einfluß der Bruchenergie

Am Balken 1 wird der Einfluß des Bruchenergie–Parameters untersucht. Karihaloo gibt dazu einen Schätzwert von $G_f = 0,05$ [N/mm] an, den er aber experimentell nicht verifiziert. Das Abschätzen der Bruchenergie nach CEB–FIP ergibt Werte in einem Bereich von 0,12 [N/mm] bis maximal 0,20 [N/mm], d.h. das bis zu Vierfache des Wertes von Karihaloo. Eine Bruchenergie von $G_f = 1000$ [N/mm] induziert ein ideal–plastisches Zugverhalten des Betons und wird somit als oberster Grenzwert angesehen.

Die Last–Verschiebungskurven von Bild 6.17a zeigen, daß nur im Falle des ideal–plastischen Zugverhaltens des Betons die Maximallast des Versuchs erreicht wird. Insofern wären die unter [55] angegebenen Materialparameter in Frage zu stellen. Jedoch be-

gründet Karihaloo das steife Verhalten und die hohe Maximallast des Versuchs mit der Dübelwirkung der Bewehrung. Ein entsprechender Effekt bleibt beim Bewehrungsmodell unberücksichtigt. Mit einer Bruchenergie von $G_f = 0,50$ [N/mm] wird die Versuchslast zu etwa 89% erreicht. Analog zu Suanno [119] sind die numerischen Ergebnisse im Vergleich zum Versuch zu duktil.

G_f [N/mm]	0,12	0,20	0,50	1000
P_u [kN]	18,0	19,6	21,5	24,3
$P_u/\max P_{\text{Vers.}}$	0,741	0,807	0,885	1,00

Tafel 6.9 Balken 1: Maximallasten

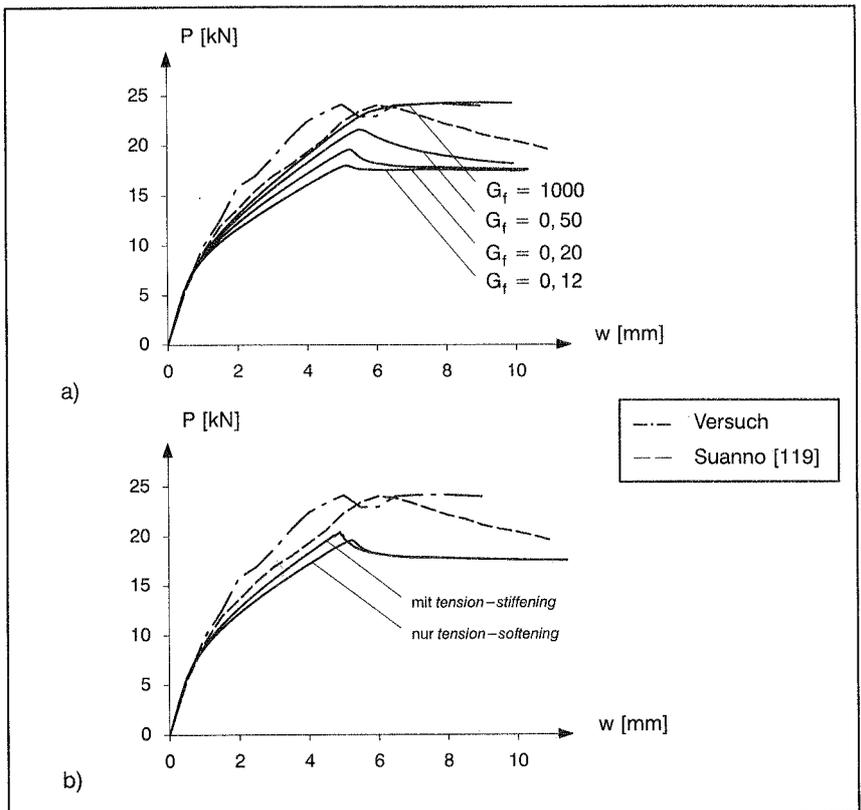


Bild 6.17 Balken 1: Last-Verschiebungskurven

a) Einfluß der Bruchenergie G_f

b) Einfluß des tension-stiffening ($G_f = 0,20$ [N/mm])

- **Einfluß des *tension–stiffening* ($G_f = 0,20$ [N/mm])**

Wird das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen berücksichtigt, ist das Tragverhalten vor Erreichen der Maximallast weniger duktil; das Versuchsergebnis wird geringfügig besser approximiert. Die Maximallast ändert sich erwartungsgemäß nur kaum ($P_u = 20,4$ [kN] statt 19,6 [kN]), da der Effekt des *tension–stiffening* zu Beginn des Stahlfließens vollständig abgebaut wird. Das Stahlfließen als Versagensmechanismus von Balken 1 wird durch die numerische Simulation erfaßt.

Bei Erreichen der Maximallast ($w = 4,9$ [mm]) wird die im Versuch auftretende, gleichmäßige Rißverteilung verifiziert (siehe Bild 6.18a). Unmittelbar nachdem die Maximallast überschritten wird, tritt ein Druck- und Schubversagen auf und die Traglast reduziert sich kontinuierlich. Im Bereich der Lasteinleitungsstelle und in mittlerer Höhe der Trägerdretpunkte sind noch schräge Schubrisse aktiv (siehe Bild 6.18b).

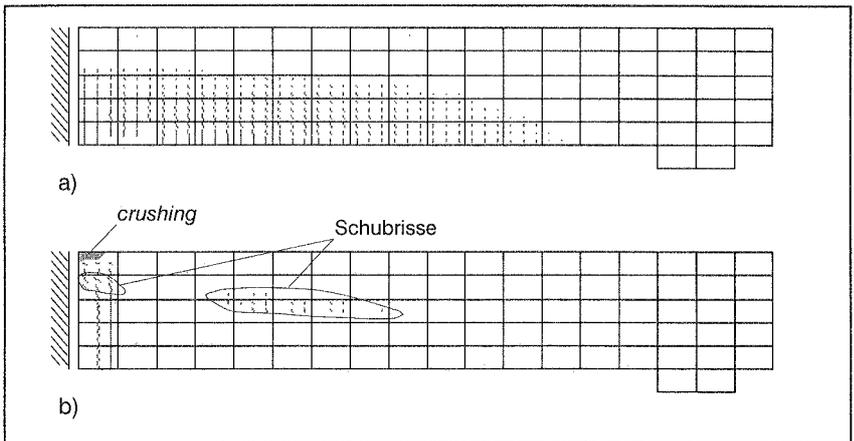


Bild 6.18 Balken1: aktive Risse ($G_f = 0,20$ [N/mm])

a) $w = 4,9$ [mm]

b) $w = 10,0$ [mm]

- **Balken 2 ($G_f = 0,20$ [N/mm])**

Balken 2 wird nun ausschließlich mit der Bruchenergie $G_f = 0,20$ [N/mm] untersucht. Im Gegensatz zum Balken 1 kommt es hier zu einem vorzeitigen Druck- und Schubversagen (siehe Bild 6.19), ein Phänomen, das auch beim Versuch festgestellt wurde. Analog zum Balken 1 erweist sich das Tragverhalten auch hier als zu duktil, wobei unter Berücksichtigung des *tension–stiffening* das Tragverhalten bis zum Erreichen der Maximallast dem von Suanno [119] entspricht (siehe Bild 6.19).

Festzuhalten bleibt, daß im Vergleich zu den Versuchen das Tragverhalten zu duktil wiedergegeben wird. Ursache dafür ist, daß die Dübelwirkung der Bewehrung beim Stahlbetonmodell unberücksichtigt bleibt.

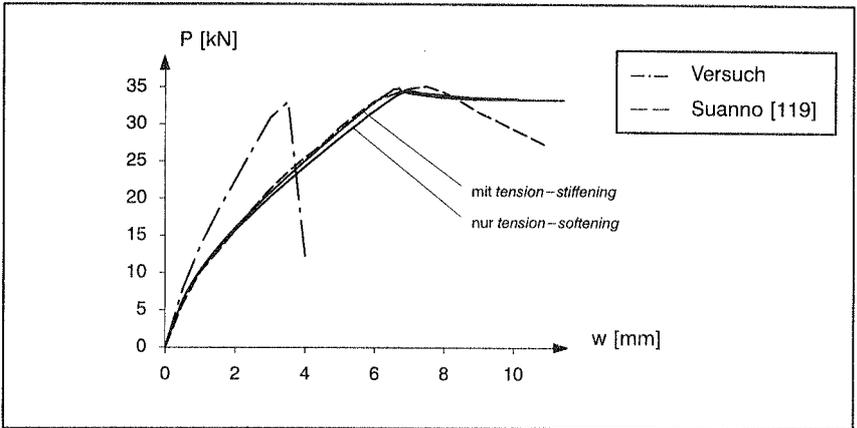


Bild 6.19 Balken 2: Last-Verschiebungskurven ($G_f = 0,20 \text{ [N/mm]}$)

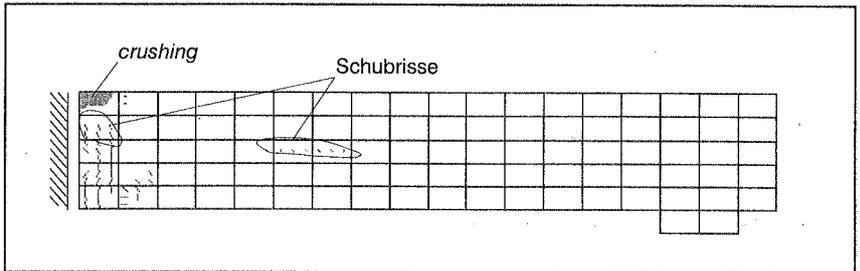


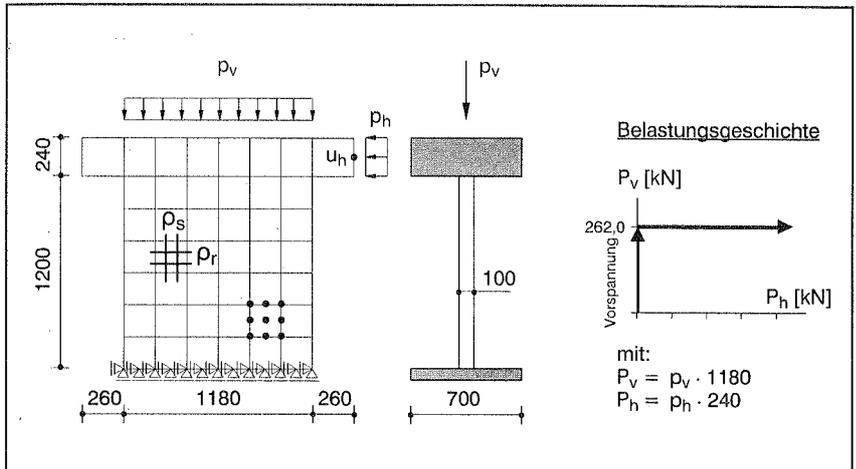
Bild 6.20 Balken 2: aktive Risse bei $w = 10,0 \text{ [mm]}$ ($G_f = 0,20 \text{ [N/mm]}$)

6.2.3 Schubbeanspruchte Scheibe

Maier und Thürlimann prüften 1983 an der ETH Zürich im Rahmen des Forschungsprojekts „Wandartige Tragwerke aus Stahlbeton“ zehn quadratische Scheiben [78], um deren Trag- und Bruchverhalten experimentell zu untersuchen. Feenstra [38] simulierte die Versuche der Scheiben S1, S2, S4 und S10, wobei sich Scheibe S4 als numerisch sehr sensitiv erwies. Hier wird Scheibe S4 untersucht.

Die Geometrie dieser Scheibe ist in Bild 6.21 dargestellt. Sie wird mit 9-knotigen, vollintegrierten FE diskretisiert, wobei die Lastplatte ein linear-elastisches Materialverhalten aufweist. Die Belastung an der Lastplatte setzt sich aus einer konstanten Vertikalkraft (Vorspannung $P_v = 262,0 \text{ [kN]}$) und einer anschließend aufgebracht, variablen Horizontallast zusammen. Die beiden vertikalen Seitenränder sind frei und unbelastet, der untere Rand fest eingespannt. Die Bewehrung ist parallel zu den Seitenrändern in je zwei Lagen angeordnet.

Da der maximale Korndurchmesser des Zuschlaggemisches $d_{\max} = 16$ [mm] betrug und im Versuch eine Druckfestigkeit von $f_{cm} = 34,5$ [N/mm²] gemessen wurde, kann gemäß Gl.(5.5) für Zugversagen eine Bruchenergie von maximal $G_f = 0,10$ [N/mm] angesetzt werden. Die übrigen Materialparameter (siehe Tafel 6.10) entsprechen denen von Feenstra [38], der jedoch die Betondruckfestigkeit im Vergleich zum Versuch um 20% reduzierte (siehe auch Kap. 5.2.4: mehrachsiges Tragverhalten).



Beton:			
$E_{cm} = 30000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,15$	[-]
$f_{cm} = 27,5/34,5$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0/62,5$	[N/mm]
$f_{ctm} = 2,2$	[N/mm ²]	$G_f = 0,10$	[N/mm]
$\gamma_1 = 3,0$	[-]	$\gamma_2 = 1,2$	[-]
Betonstahl:			
$\varnothing_r = 8,0$	[mm]	$\varnothing_s = 8$	[mm]
$\rho_r = 0,0103$	[-]	$\rho_s = 0,0105$	[-]
$\varphi_r = 0$	[°]	$\varphi_s = 90$	[°]
$f_{sy} = 574$	[N/mm ²]		
$E_s = 200000$	[N/mm ²]	$E_H = 8740$	[N/mm ²]

Tafel 6.10 S4: Materialdaten nach [38] und [78]

Mit diesen Materialparametern wird die Struktur ohne und mit Berücksichtigung des *tension-stiffening* untersucht, zudem wird zwischen der Druckfestigkeit dieses Versuchs und der reduzierten von Feenstra unterschieden. Die Last-Verschiebungskurven von Bild 6.22 stellen eine Beziehung zwischen der horizontalen Last P_h und der horizontalen Verschiebung u_h am zugehörigen Lastangriffspunkt dar.

Insbesondere die numerische Simulation mit der im Versuch angegebenen Druckfestigkeit gibt, bis die Maximallast erreicht ist, die Versuchsergebnisse zufriedenstellend wieder. Die Maximallast mit maximal $P_h = 365$ [kN] liegt jedoch um ca. 10% unterhalb der des Versuches (408 [kN]). Es zeigt sich, daß das Tragverhalten nach Erreichen der Traglast maßgeblich von der Druckfestigkeit, und somit vom einaxialen Druckverhalten beeinflußt wird; wird die Maximallast überschritten, ist das Tragverhalten weit weniger duktil (siehe Bild 6.22). Ein weiteres Indiz sind hier die Hauptspannungen, die bei einer Horizontalverschiebung von $u_h \approx 20,0$ [mm] im Bereich der auf Druck beanspruchten linken unteren Ecke gegen Null gehen (siehe Bild 6.23).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die numerischen Ergebnisse mit den experimentellen gut übereinstimmen. Das im Versuch festgestellte Zug- und Druckversagen kann auch hier phänomenologisch verifiziert werden. Es zeigt sich, daß weniger der Effekt des *tension-stiffening* sondern vielmehr die Variation der Druckfestigkeit signifikante Änderungen mit sich bringt und dadurch die Versuchsergebnisse weitaus besser approximiert werden.

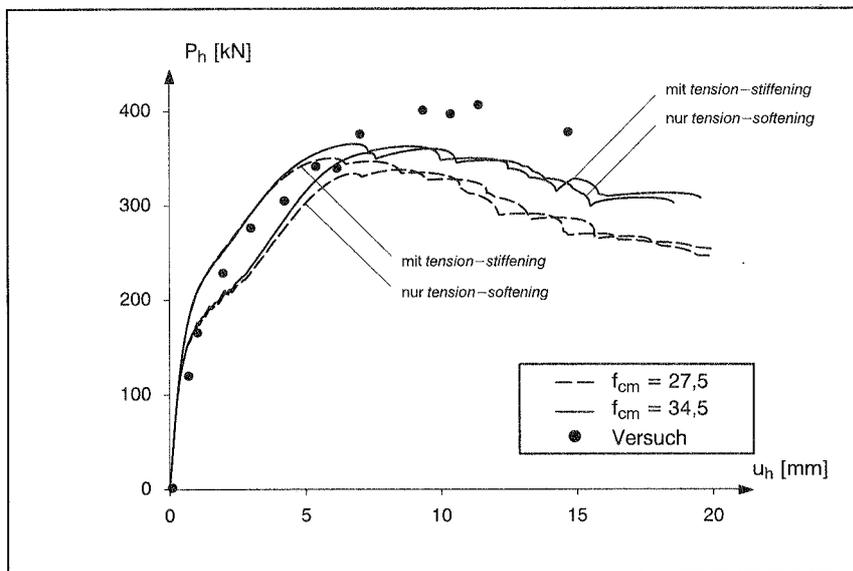
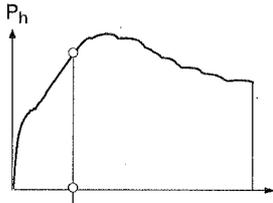
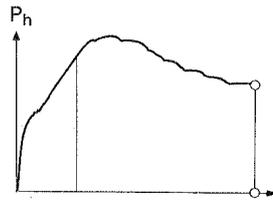


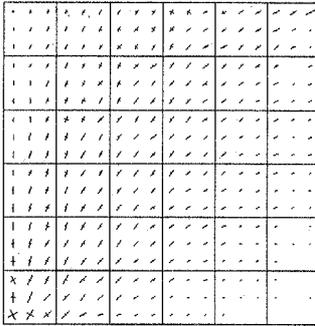
Bild 6.22 S4: Last-Verschiebungskurven



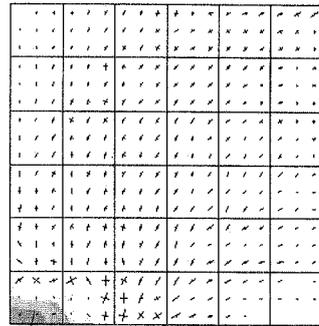
$u_h = 5 \text{ [mm]}$



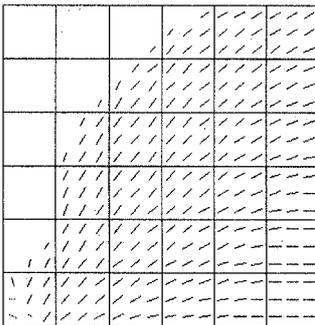
$u_h \approx 20 \text{ [mm]}$



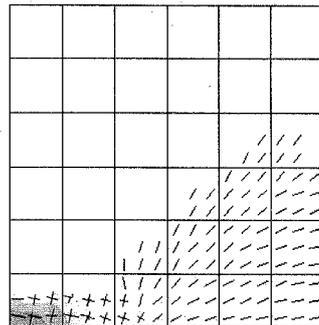
a)



crushing ($\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$)



b)



crushing

Bild 6.23 S4: Ergebnisse für $u_h = 5 \text{ [mm]}$ und $u_h \approx 20,0 \text{ [mm]}$
 a) Hauptspannungen
 b) aktive Risse

7 Interface-Elemente

7.1 Vorbemerkungen

Um die fiktive Wechselwirkung einer konzentrierten Verbund-Schlupf-Beziehung modellieren zu können, werden im Rahmen der Finite Elemente Methode Zwischenelemente, sogenannte *interface elements*, eingeführt. Prinzipiell ist dabei zwischen zwei Elementtypen zu unterscheiden. Zum einen kontinuierliche Elementtypen (*continuous interface elements*), die diese Wechselbeziehung über ein interpoliertes Verschiebungsfeld beschreiben, zum anderen konzentrierte Zwischenelemente (*lumped interface elements*), bei denen sich die erwähnten Beziehungen auf diskrete Knoten beschränken ([101], [104]).

Die Formulierung der finiten Elemente beider Typen wird in Kap. 7.2 erläutert. Dabei werden die konzentrierten Zwischenelemente durch eine Modifikation der numerischen Integrationsparameter aus den kontinuierlichen Zwischenelementen abgeleitet.

In Kap. 7.3 wird im Rahmen der Plastizitätstheorie ein nichtlineares Materialmodell vorgestellt, dessen Fließfunktion auf dem *Coulombschen Reibungsgesetz* basiert. Die Geometrie dieser Fließfunktion beschreibt eine Kegelfläche. Insofern sind bei der Integration der Ratengleichungen und demzufolge bei der Herleitung der numerischen Algorithmen Parallelen zur Drucker-Pragerschen Fließfläche gegeben.

7.2 Finite Elemente Formulierung

7.2.1 Kontinuierliche Zwischenelemente

Im allgemeinsten Fall handelt es sich beim *interface*-Element um ein 2D-Element, das zwei Volumenelemente verbindet. Das Element selbst beschreibt die Wechselwirkung innerhalb einer Fläche; es hat somit keine physikalische Höhe.

Der Elementverschiebungsvektor \mathbf{v} enthält $3m$ Freiheitsgrade

$$\mathbf{v} = \left[v_r^{(1)} \dots v_r^{(m)}, v_s^{(1)} \dots v_s^{(m)}, v_t^{(1)} \dots v_t^{(m)} \right]^T, \quad (7.1)$$

wobei die Komponenten $v_r^{(i)}$ und $v_s^{(i)}$ die tangentialen und $v_t^{(i)}$ die normale Verschiebung des Knotens (i) in Richtung der lokalen Koordinaten r , s und t sind. Mit m wird die Anzahl aller Elementknoten bezeichnet. Das kontinuierliche Verschiebungsfeld \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \left[u_r^{(A)}, u_r^{(B)}, u_s^{(A)}, u_s^{(B)}, u_t^{(A)}, u_t^{(B)} \right]^T, \quad (7.2)$$

bei dem die Unter- und Oberseiten des Elements mit A bzw. B bezeichnet sind, wird über das Verschiebungsfeld interpoliert, siehe Gl. (7.2).

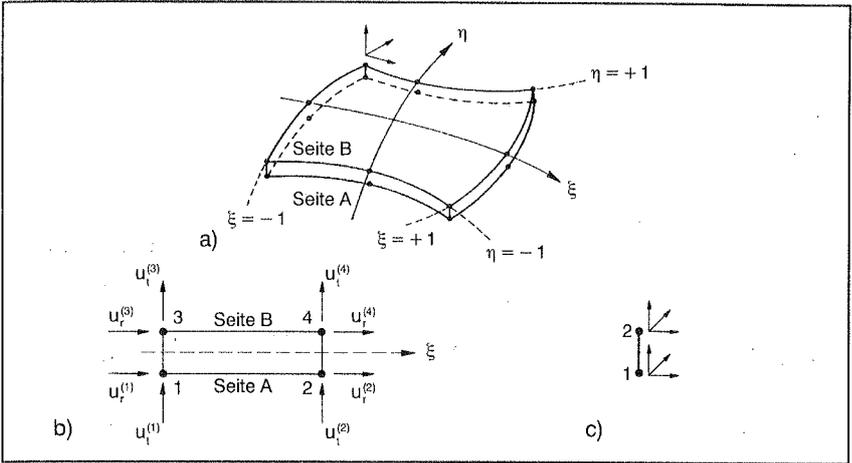


Bild 7.1 Interface-Elemente [101]
 b) 4knotiges 1D-Element

a) 16knotiges 2D-Element
 c) 2knotiges „Punktelement“

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{v} \quad (7.3)$$

$$\text{mit } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

In der Matrix Gl.(7.4) enthalten die $1^*(m/2)$ großen Untermatrizen \mathbf{N} die Ansatzfunktionen, die bekanntermaßen über die Koordinaten ξ und η des Parameterraums des *interface*-Elements ausgedrückt werden ([3], [134]).

Der Vektor der Relativverschiebungen $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_r \ \Delta u_s \ \Delta u_t]^T$ zweier an Ober- und Unterseite benachbarter Knoten ist

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (7.5)$$

$$\text{mit } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Hier ist auch der Unterschied zu den Kontinuumelementen gegeben. \mathbf{L} hat die Funktion eines Pointers und ersetzt den Differentialoperator an dieser Stelle. Anzumerken ist, daß Δ in diesem Kontext keine inkrementelle, sondern eine relative Größe, hier speziell die Relativverschiebung bzw. den Schlupf, kennzeichnet.

Gleichung (7.3) eingesetzt in Gl.(7.5) ergibt

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad , \quad (7.7)$$

wobei die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{LH}$ eingeführt wird, die die Beziehungen zwischen den Relativ- und Knotenverschiebungen definiert.

An jedem Knotenpaar des *interface*-Elements gilt folgende konstitutive Beziehung

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}^{el} \Delta \mathbf{u} \quad , \quad (7.8)$$

die den Zusammenhang zwischen den zu übertragenden Kräften $\mathbf{t} = [t_r \ t_s \ t_t]^T$ und der Relativverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ vorgibt. Über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} bestimmt ([3], [134]).

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{el} \mathbf{B} \, dA \quad (7.9)$$

Die Fläche des *interface*-Elements wird mit A bezeichnet. Wird von isoparametrischen Elementen ausgegangen, ändert sich Gl.(7.9) zu Gl.(7.10). Hierin ist $\det \mathbf{J}$ die Determinante einer 2x2 Jacobi-Matrix.

$$\mathbf{K} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{el} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\eta \, d\xi \quad (7.10)$$

In dieser Arbeit stehen die linienförmigen 1D-*interface*-Elemente im Vordergrund; deshalb reduzieren sich die Interpolationsfunktionen zu einfachen, von ξ abhängigen Funktionen. Die Verschiebungen in s -Richtung bleiben unberücksichtigt. Insofern sind die Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{L} dahingehend zu modifizieren und die Elementsteifigkeitsmatrix vereinfacht sich wie folgt

$$\mathbf{K} = b \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{el} \mathbf{B} \frac{\partial X}{\partial \xi} \, d\xi \quad , \quad (7.11)$$

wobei b die Elementbreite in η -Richtung ist. Die Matrix

$$\mathbf{k}^{el} = b \mathbf{C}^{el} = \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

definiert die über die Breite der Verbundfuge aufsummierten Federsteifigkeiten (Werkstoffmatrix); das „Verschmieren“ findet nur noch in Längsrichtung der Fuge statt; dies entspricht dem Vorgehen in Kap. 2.4 zum Modellieren der Verbundmittel. Entsprechend der Annahme von Kap. 2.5.2 ist die elastische Werkstoffmatrix \mathbf{k}^{el} orthotrop entkoppelt. Für ein vierknotiges 1D-Element, vgl. Bild 7.1, sind die Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 - \xi) & (1 + \xi) \end{bmatrix} . \quad (7.13)$$

Als Elementsteifigkeitsmatrix erhält man

$$\mathbf{K} = \frac{1}{6} L \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_t \end{bmatrix} . \quad (7.14)$$

Die Elementlänge wird mit L bezeichnet und die Untermatrizen \mathbf{K}_r bzw. \mathbf{K}_t sind wie folgt besetzt

$$\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = r, t . \quad (7.15)$$

Die Numerierung der Freiheitsgrade entspricht der von Bild 7.1b. Mit einer Gaußintegration werden vierknotige Elemente mit 2 Gaußpunkten, sechsknotige mit 3 Gaußpunkten usw. exakt integriert.

Bei einer materiell nichtlinearen Berechnung ist die Matrix der plastischen Federsteifigkeiten \mathbf{k}^{pl} im Regelfall über die Elementlänge nicht konstant; die Elementsteifigkeitsmatrix ist gemäß Gl.(7.11) zu bestimmen.

7.2.2 Konzentrierte Zwischenelemente

Konzentrierte oder punktförmige Zwischenelemente können auf zwei Arten modelliert werden. Im ersten Fall werden zwischen zwei benachbarten Knoten diskrete Federsteifigkeiten im Sinne von Einzelfedern definiert, was hier nicht weiter ausgeführt wird.

Im zweiten Fall bestimmt man die Steifigkeiten dieser diskreten Einzelfedern, indem die auf die gesamte Elementlänge kontinuierlich verteilten Federsteifigkeiten über die jeweils halbe Distanz zweier in Längsrichtung benachbarter Knoten zusammengefaßt werden. Mit einer entsprechenden Modifikation der Integrationsparameter, siehe Tafel 7.1, können die konzentrierten Zwischenelemente von den kontinuierlichen abgeleitet werden. Die Anzahl n ist hier nicht mehr die der Gaußpunkte, sondern die Anzahl der Knotenpaare.

Die Elementsteifigkeitsmatrix des vierknotigen *interface*-Elements ist dann

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} L \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_t \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = r, t . \quad (7.17)$$

n	± ξ_i	w _i		n	± ξ_i	w _i	
2	0,57735026	1,00000000	a) Gaußintegration	2	1,00000000	1,00000000	
3	0,77459666 0,00000000	0,55555555 0,88888888		3	1,00000000 0,00000000	0,50000000 1,00000000	
4	0,86113631 0,33998104	0,34785484 0,65214515		4	1,00000000 0,33333333	0,33333333 0,66666667	
a) Gaußintegration				b) Modifikation für <i>lumped interfaces</i>			

Tafel 7.1 Koordinaten ξ_i und Wichtungsfaktoren w_i

In der Matrix von Gl.(7.17) ist deutlich erkennbar, daß die Knotenpaare 1–3 und 2–4 zueinander entkoppelt sind. Ein Vergleich beider Elementtypen wird zeigen (siehe Kap. 7.5), daß insbesondere beim Modellieren von Kontaktproblemen [116], wenn also sehr große Steifigkeiten der Zwischenelemente ein Durchdringen der angrenzenden Strukturen behindern, nach [101] die konzentrierten Zwischenelemente den konsistenten vorzuziehen sind.

7.3 Nichtlineare Verbund–Schlupf–Beziehung

Da keine detaillierten Erkenntnisse über das Interaktionsverhalten von Scher– und Normalkräften in der Verbundfuge vorliegen, werden die Annahmen getroffen, daß in der Fläche der Fuge das Verbundverhalten isotrop ($k_r = k_s = k_{rs}$), das in Zugrichtung (k_t) orthotrop und die Werkstoffmatrix vollständig entkoppelt ist. Analog zu Gl.(7.12) erhält man für ein 2D–Element

$$\mathbf{k}^{el} = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{rs} & 0 & 0 \\ 0 & k_{rs} & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

und die konstitutive Beziehung von Gl.(7.8) bzw. (7.12) wird zu

$$\mathbf{t} = \mathbf{k}^{el} \Delta \mathbf{u} \quad (7.19)$$

Analog zur Verzerrungsrate von Gl.(3.1) kann der Vektor der Relativverschiebungen im Rahmen der Deformationszuwachs­theorie in einen elastischen und plastischen Anteil gesplittet werden.

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \Delta \dot{\mathbf{u}}^{el} + \Delta \dot{\mathbf{u}}^{pl} \quad (7.20)$$

Auch gelten die bei der Drucker–Pragerschen Fließfläche getroffenen Annahmen:

- diskrete Kuhn–Tucker Bedingungen entsprechend Gl.(3.40), die invertierten Kuhn–Tucker Bedingungen entsprechend Gl.(4.95);
- assoziiertes Fließgesetz ($g = f_1$) entsprechend Gl.(4.3).

7.3.1 Coulombsches Reibungsgesetz

Das nichtlineare Verhalten in der Verbundfuge wird mit einem elasto–plastischen Werkstoffmodell, basierend auf dem Coulombschen Reibungsgesetz [104], abgebildet. In Kombination mit dem Zwischenelement hängt das Fließgesetz f_1 von der Norm der Scherkräfte t_{rs} in der Verbundfuge, der Normalkraft t_t und einer internen Variablen κ , die das nichtlineare Verhalten (isotrope Ver–/Entfestigung) beschreibt, ab.

$$f_1(t_{rs}, t_t, \kappa) = |t_{rs}| + \alpha_1 t_t - k_1(\kappa) \quad (7.21)$$

$$\text{mit } t_{rs} = \sqrt{t_r^2 + t_s^2}, \quad \alpha_1 = \tan \varphi, \quad k_1(\kappa) = c(\kappa)$$

Formal sind bereits bei den Fließbedingungen Parallelen zur Fließfunktion von Druker–Prager von Gl.(4.4) bzw. (4.96) gegeben; beide Fließfunktionen definieren Kegelflächen (siehe auch Bild 7.2). Das numerische Vorgehen im Bereich der Kegelspitze entspricht dem der Kapitel 4.6.2 und A 2.1.

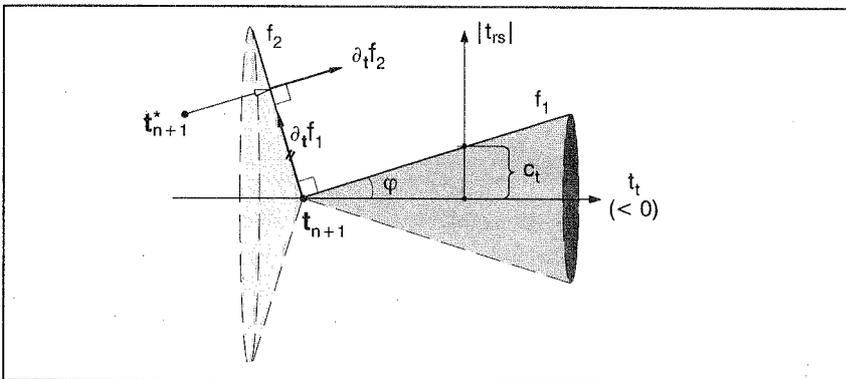


Bild 7.2 Coulombsches Reibungsgesetz als Fließfläche

Die Fließbedingung des *inverted cone* kann analog den Gleichungen (4.97) bis (4.99) bestimmt werden.

$$f_2(t_{rs}, t_t, \kappa) = |t_{rs}| + \alpha_2 t_t - k_2(\kappa) \quad (7.22)$$

$$\text{mit } \alpha_2 = -\frac{1}{\alpha_1}, \quad k_2(\kappa) = -\frac{1}{\alpha_1^2} c(\kappa)$$

Die Fließbedingungen f_1 und f_2 enthalten den Reibungswinkel φ und die Funktion der Kohäsion $c(\kappa)$ als die zu bestimmenden Kenngrößen.

7.3.2 Ver-/Entfestigungsverhalten

Beim Reibungsmodell wird angenommen, daß das Ver-/Entfestigungsverhalten von den plastischen Relativverschiebungen in der Reibungsfläche abhängt [104]. Dadurch wird die interne Variable κ wie folgt definiert

$$\kappa = \int_{t=0}^t \sqrt{(\Delta \dot{u}_r^{pl})^2 + (\Delta \dot{u}_s^{pl})^2} d\tau \quad (7.23)$$

wobei es sich bei $\Delta \dot{u}_r^{pl}$ und $\Delta \dot{u}_s^{pl}$ um die Schubkomponenten des plastischen Relativverschiebungsvektors $\Delta \dot{\mathbf{u}}^{pl}$ von Gl.(7.24) handelt.

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}^{pl} = \dot{\lambda} \partial_t \mathbf{f}_1 \rightarrow \Delta \dot{\mathbf{u}}^{pl} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{u}_r^{pl} \\ \Delta \dot{u}_s^{pl} \\ \Delta \dot{u}_t^{pl} \end{bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} t_r / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ t_s / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Die Schubkomponenten von Gl.(7.24), eingesetzt in Gl.(7.23) ergeben

$$\kappa = \int_{t=0}^t \sqrt{\dot{\lambda}^2} d\tau \quad \text{oder} \quad \dot{\lambda} = \dot{\kappa} \quad (7.25)$$

Die Annahme eines isotropen Ver-/Entfestigungsverhaltens führt zu einem Hardening-Modul entsprechend Gl.(4.28)

$$H = -\partial_{\kappa} f_1 = -\partial_{\kappa} C(\kappa) \quad (7.26)$$

der von einer äquivalenten Kohäsions-/Relativverschiebungsbeziehung abhängt.

7.3.3 Algorithmisches Vorgehen

Die nichtlinearen, konstitutiven Beziehungen werden im Rahmen des Newton-Verfahrens linearisiert. Analog zum Drucker-Pragerschen Fließkriterium wird auch hier das Zweischrittverfahren des *radial return* angewandt.

• Elastischer Prädiktor

In einem ersten Schritt wird der Kraftvektor \mathbf{t} von Gl.(7.8) in zwei Vektoren mit den Schub- und Normalkraftkomponenten \mathbf{t}_S bzw. \mathbf{t}_N gesplittet.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_S + \mathbf{t}_N = \begin{bmatrix} t_r \\ t_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_t \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Zum Zeitpunkt t_{n+1} beruht der elastische Prädiktorzustand auf dem konvergierten Wert der inneren Variablen des Zeitpunkts t_n und dem inkrementellen elastischen Zuwachs des Kraftvektors $\Delta \mathbf{t}_{n+1}$.

$$\mathbf{t}_{n+1}^* = \mathbf{k}^{el} (\Delta \mathbf{u}_{n+1} - \Delta \mathbf{u}_n^{pl}) \quad (7.28)$$

• **Plastischer Korrektor**

Nach Umformen von Gl.(7.28) errechnet sich

$$\mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_{n+1}^* - \mathbf{k}^{el} \Delta(\Delta \mathbf{u}_n^{pl}), \quad (7.29)$$

wobei $\Delta(\Delta \cdot)$ den inkrementellen Zuwachs einer relativen Größe ($\Delta \cdot$), hier speziell den Zuwachs der plastischen Relativverschiebungen $\Delta \mathbf{u}_n^{pl}$, angibt. Mit \mathbf{t}_{n+1}^* wird der elastische Prädiktor, mit $\Delta \mathbf{t}_{n+1}^{pl} = \mathbf{k}^{el} \Delta(\Delta \mathbf{u}_n^{pl})$ der plastische Korrektor bezeichnet. Für die beiden gekoppelten Fließflächen f_1 und f_2 gilt Koiters modifizierte Fließregel

$$\Delta(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{pl}) = \sum_{i=1}^2 \Delta \lambda_{i,n+1} \partial_t f_i, \quad (7.30)$$

oder, unter Berücksichtigung von Gl.(7.24),

$$\Delta(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{pl}) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \Delta \lambda_i \begin{bmatrix} t_r / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ t_s / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ \alpha_i \end{bmatrix} \right\}_{n+1} \quad (7.31)$$

Der plastische Korrektor läßt sich nun wie folgt bestimmen

$$\Delta \mathbf{t}_{n+1}^{pl} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \Delta \lambda_i \begin{bmatrix} k_{rs} & 0 & 0 \\ 0 & k_{rs} & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ t_s / \sqrt{t_r^2 + t_s^2} \\ \alpha_i \end{bmatrix} \right\}_{n+1} \quad (7.32)$$

Eine vereinfachte Darstellung der Schubkraftkomponente des plastischen Korrektors ist

$$\Delta \mathbf{t}_{S,n+1}^{pl} = k_{rs} \left(\sum_{i=1}^2 c_i \Delta \lambda_{i,n+1} \right) \mathbf{n}_{n+1} \quad (7.33)$$

$$\text{mit } \mathbf{n}_{n+1} = \frac{\mathbf{t}_{S,n+1}}{|\mathbf{t}_{S,n+1}|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{t_r^2 + t_s^2}} \begin{bmatrix} t_r \\ t_s \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{n+1};$$

die Normalkraftkomponente lautet

$$\Delta \mathbf{t}_{N,n+1}^{pl} = k_t \left(\sum_{i=1}^2 c_i \Delta \lambda_{i,n+1} \alpha_i \right) \mathbf{1} \quad \text{mit } \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Wie in Kap. 4.6, wird auch hier für jede Teilfläche f_j eine skalare Größe c_j eingeführt, die eine aktive Fließfläche für $\Delta \lambda_{j,n+1} > 0$ mit $c_j = 1$ „signalisiert“ (vgl. Kap. 4.6.1). Die Schub- und Normalenkomponenten des Kraftvektors von Gl.(7.27) lassen sich mit Gl.(7.28), (7.32) und (7.33) folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{S,n+1} &= \mathbf{t}_{S,n+1}^* - \Delta \mathbf{t}_{S,n+1}^{pl} \quad , \\ \mathbf{t}_{N,n+1} &= \mathbf{t}_{N,n+1}^* - \Delta \mathbf{t}_{N,n+1}^{pl} \quad . \end{aligned} \quad (7.35)$$

Wie beim Fließkriterium nach Drucker–Prager wird der Prädiktorzustand normal auf die Fließfläche zurückprojiziert; die Fließrichtung entspricht der Normalenrichtung der Prädiktorspannung auf die Fließfläche. Die Norm der Schubkomponente des Kraftvektors ist analog Gl.(4.17)

$$|\mathbf{t}_{S,n+1}| = |\mathbf{t}_{S,n+1}^*| - k_{rs} \sum_{i=1}^2 c_i \Delta \lambda_{i,n+1} \quad . \quad (7.36)$$

Gleichungen (7.35) und (7.34)₂, eingesetzt in die Fließbedingungen Gl.(7.21)₁ und (7.22)₁, ergeben, analog zu den Gleichungen (A.4) bis (A.6) im Anhang A 2.1, ein Gleichungssystem zum Bestimmen der Konsistenzparameter $\Delta \lambda_{1,n+1}$ und $\Delta \lambda_{2,n+1}$. Die interne Variable ist dann $\Delta \kappa_{n+1} = \Delta \lambda_{1,n+1}$; die rückprojizierten Kräfte werden über Gl.(7.35) bestimmt.

• Elasto–plastische Materialtangente

Innerhalb des Newton–Verfahrens gilt es nun, die totalen Ableitungen der diskreten konstitutiven Gleichungen zu berechnen. Eine Umformung von Gl.(7.19) führt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{n+1} &= \mathbf{k}^{el} (\Delta \mathbf{u}_{n+1} - \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{pl}) \\ &= \mathbf{k}^{el} (\Delta \mathbf{u}_{n+1} - \Delta \mathbf{u}_n^{pl} - \sum_{i=1}^2 \Delta \lambda_{i,n+1} \partial_{\mathbf{t}} \mathbf{f}_i) \quad . \end{aligned} \quad (7.37)$$

Analog zu Gl.(4.84) und (4.85) erhält man die totale Ableitung

$$d\mathbf{t}_{n+1} = \left\{ \bar{\Theta} : \left[d(\Delta \mathbf{u}) - \sum_{i=1}^2 c_i d\lambda_i \partial_{\mathbf{t}} \mathbf{f}_i \right] \right\}_{n+1} \quad (7.38)$$

$$\text{mit } \bar{\Theta}_{n+1} = \left\{ \left[(\mathbf{k}^{el})^{-1} + \sum_{i=1}^2 c_i \Delta \lambda_i \partial_{\mathbf{t}}^2 \mathbf{f}_i \right]^{-1} \right\}_{n+1} \quad . \quad (7.39)$$

In einer allgemeineren Formulierung nach Riggs et al. [95], kann Gl.(4.84) in Matrixdarstellung wie folgt geschrieben werden

$$d\mathbf{t}_{n+1} = \{ \bar{\Theta} (d(\Delta \mathbf{u}) - \mathbf{U} d\lambda) \}_{n+1} \quad , \quad (7.40)$$

wobei die Matrix \mathbf{U}_{n+1} , analog zu Gl.(4.87), die Vektoren der assoziierten Fließrichtungen beinhaltet und $d\lambda_{n+1}$, analog zu Gl.(4.88), die Konsistenzparameter der Teilflächen als Komponenten hat.

Über das Gleichungssystem der Konsistenzbedingungen beider Teilflächen kann, analog zu Gl.(4.90) bis (4.92), der Vektor $d\lambda_{n+1}$ bestimmt werden. Dieser, eingesetzt in

Gl.(7.40), führt, unter Anwendung der Sherman–Morrison Formel, auf die konsistente elasto–plastische Materialtangente

$$\left\{ \frac{d\mathbf{t}}{d(\Delta\mathbf{u})} \right\}_{n+1} = \left\{ \bar{\boldsymbol{\Theta}} - \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U} \left(\mathbf{E}_i + \mathbf{V}_t^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{V}_t^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \right\}_{n+1} = \mathbf{k}_{n+1}^{pl} \quad (7.41)$$

mit $\mathbf{V}_{t,n+1} = [c_1 \partial_t f_1, c_2 \partial_t f_2]_{n+1}$.

Die Matrix der plastischen Moduln $\mathbf{E}_{i,n+1}$ für eine isotrope Ver–/Entfestigung kann unmittelbar aus Gl.(A.10) abgeleitet werden. Unter Berücksichtigung von $H = -\partial_{\kappa} f_1$, entsprechend Gl.(7.26), und $k_2(\kappa) = -\frac{1}{\alpha_1^2} c(\kappa)$, entsprechend Gl.(7.22)₂, erhält man

$$\mathbf{E}_{i,n+1} = \begin{bmatrix} c_1 c_1 H + (1 - c_1) & 0 \\ -c_2 c_1 \frac{1}{\alpha_1^2} H & 1 - c_2 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (7.42)$$

Je nach Modell für das Ver–/Entfestigungsverhalten (Modell A oder B von Kap. 7.4.1) ist H nach Gl.(7.44) oder (7.45) zu bestimmen.

7.4 Verbundmodellierung

7.4.1 Ver–/Entfestigungsmodell

Das nichtlineare Verhalten der Verbundmittel wurde ausführlich in Kap. 2 erörtert. Letztlich orientiert sich das Werkstoffmodell stets an Last–Schlupf–Charakteristiken von *push–out*–Versuchen. Hier wird zwischen einem *Modell A*, ein auf Bruchenergie basierendes Softening–Modell mit exponentieller Charakteristik, und *Modell B*, das die Last–Schlupf–Charakteristiken multilinear approximiert, unterschieden.

• Modell A: Softening–Modell

Dieses Modell setzt voraus, daß durch das „Reißen“ in der Verbundfuge die Bruchenergie G_f freigesetzt wird. In Anlehnung an das Modell des einaxialen Zugverhaltens von Beton wird hier das nichtlineare Verhalten über die exponentielle Beziehung von Gl.(7.43) beschrieben (siehe Bild 7.3); die Kohäsion $c(\kappa)$ hängt als Funktion von der internen Variablen κ ab.

$$c(\kappa) = c_t \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_u}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa_u = \frac{G_f}{c_t} \quad (7.43)$$

$$\Rightarrow H = -\frac{c_t}{\kappa_u} \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_u}\right) \quad (7.44)$$

Die Materialparameter sind hier die maximale Kohäsion c_t bzw. die „Traglast“ der kontinuierlich „verschmierten“ Verbundmittel sowie die Bruchenergie G_f , die anhand von Last–Schlupf–Charakteristiken zu identifizieren ist.

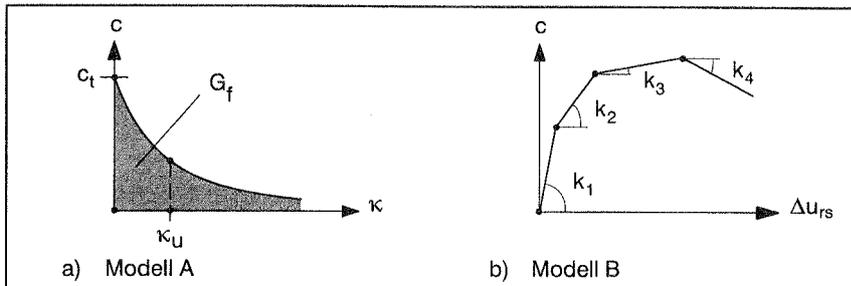


Bild 7.3 Nichtlineare Ver-/Entfestigungsmodelle

• Modell B: Multilineares Modell

Mit diesem multilinearen Modell wird die Last–Schlupf–Charakteristik eines Verbundmittels über n Schubkraft/Schlupf–Werte eines Versuches approximiert (siehe Bild 7.3). Der jeweilige Hardening–Modul eines Teilbereiches j kann nach Gl.(4.43) und einer entsprechenden Umformung nach H wie folgt bestimmt werden

$$H_j = \frac{k_1 k_j}{k_1 - k_j} \quad \text{für } j = 2 \dots n \quad (7.45)$$

mit $k_1 = k_{rs}$.

Im Vergleich zu Modell A approximiert Modell B das Last–Schlupf–Verhalten weitaus detaillierter. Jedoch besteht bei Modell A die Möglichkeit, das Rißverhalten spröder Werkstoffe diskret abzubilden.

Auch zeigen numerische Simulationen, daß die Genauigkeit der approximierten Last–Schlupf–Charakteristiken von untergeordneter Bedeutung ist, wenn die elastischen Anfangssteifigkeiten in Form der Parameter k_{rs} und k_t sowie die Traglast c_t hinreichend genau erfaßt sind. Insofern besitzt Modell A gegenüber Modell B den Vorteil der geringen Anzahl von Parametern.

7.4.2 Parameteridentifikation

Das vorgestellte elasto–plastische Werkstoffmodell zur Verbundmodellierung hat, analog zum Betonmodell, den Vorteil, daß die Parameter einfach zu identifizieren sind. Voraussetzung hierfür sind jedoch Last–Schlupf–Charakteristiken. Die Kenngrößen sind die elastischen Federkennwerte k_{rs} und k_t sowie die plastischen Kenngrößen entsprechend den jeweiligen Modellen zum Beschreiben des nichtlinearen Ver-/Entfestigungsverhaltens.

• elastische Federkennwerte

Die Kenngröße k_{rs} als *inplane* Steifigkeit ist das Maß für das elastische Scherverhalten und wird über Last–Schlupf–Charakteristiken bestimmt. Wenn keine hohe Genauig-

keit gefordert wird, approximiert sie als Sekantensteifigkeit das nichtlineare Anfangsverhalten im Mittel.

Die Steifigkeit k_t normal zur Verbundfuge übernimmt zwei Aufgaben. Einerseits soll ein nachgiebiges Verhalten unter Zugbeanspruchung abgebildet werden, andererseits ist bei Druckbeanspruchung das Durchdringen der angrenzenden Strukturen zu verhindern. Dieses *Kontaktproblem* kann nur mit unendlich großen Federsteifigkeiten modelliert werden, was innerhalb einer numerischen Simulation nicht umzusetzen ist. Um das Problem des „Überlappens“ zu minimieren und gleichzeitig die numerische Stabilität zu garantieren, wird hier für k_t der 10– bis 1000fache Wert der *inplane*–Steifigkeit vorgeschlagen. Wichtig für die Größe dieses Parameters ist auch die Steifigkeit der angrenzenden Struktur (siehe Beispiel von Kap. 7.5).

Hinweis:

Insbesondere in Kombination mit dem nichtlinearen Modell A eignen sich die Zwischenelemente zur Modellierung diskreter Risse ([101], [104], [116] u.a.). Als Voraussetzung für eine numerisch stabile Analyse schlägt Rots [101] vor, die transversale Steifigkeit auf den Minimalwert von $k_t = f_{ctm}^2/G_t$ zu begrenzen, eine Limitierung, die der von Gl.(5.7) für das einaxiale Zugverhalten von Beton entspricht.

<i>inplane</i> Steifigkeit:	k_{rs} ... Last – Schlupf – Charakteristiken
transversale Steifigkeit:	$k_t = 1,0 \dots 10^3 k_{rs}$ [N/mm ²]

Tafel 7.1 Elastische Parameter

• **plastische Kenngrößen**

Bis auf die Reibungszahl μ sind bei beiden Modellen die nichtlinearen Kenngrößen der Verbundmittel anhand von Last–Schlupf–Charakteristiken zu identifizieren. Beim Modell A ist dabei der Wert der Bruchenergie G_t so zu wählen, daß der Last–Schlupf–Verlauf im Mittel approximiert wird.

Nach dem Coulombschen Reibungsgesetz hängt die Reibungszahl μ vom Reibungswinkel φ über die Beziehung $\mu = \alpha_1 = \tan \varphi$ ab. Die Reibungszahl gibt das Verhältnis zwischen der plastisch transversalen und der plastischen *inplane*–Relativverschiebung wieder und kann somit über die in *push–out*–Versuchen beobachteten Verschiebungen bestimmt werden (Aufklaffen zwischen Stahlträger und Beton–Versuchskörper). Da hierzu im Regelfall keine Angaben gemacht werden, sind in einer ersten Näherung die in Anhang B 2.4 unter „Reibungsverbund“ angegebenen Reibungszahlen $\mu = 0,25 \div 0,60$ Anhaltswerte, die jedoch ausschließlich von der Oberflächenbeschaffenheit des Stahlträgers abhängen.

Reibungswinkel:	$\varphi = 0^\circ \dots 30^\circ$	nach [99]
Modell A		
maximale Traglast:	c_t [N/mm ²]	} Last–Schlupf–Charakteristik
Bruchenergie:	G_f [Nmm/mm]	
Modell B		
n Last–Schlupf–Werte:	$k_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta u_{rs,i} - \Delta u_{rs,i-1}}$	für $i = 2, \dots, n$
wobei	$k_1 = k_{rs} = c_1 / \Delta u_{rs,1}$	

Tafel 7.2 Plastische Kenngrößen

Das Intervall der adäquaten Reibungswinkel ist $\varphi = 15^\circ \div 30^\circ$. Eine weitere Annahme sieht für Kopfbolzendübel $\varphi = 0^\circ$ vor.

7.4.3 Testbeispiel

Anhand der Last–Schlupf–Charakteristik eines Kopfbolzendübels $\varnothing 22/100$ im bewehrten Betongurt einer Holorib–Decke ([11], [28]) wird gezeigt, wie unterschiedlich beide Modelle das Versuchsergebnis approximieren. Die entsprechenden Last–Schlupf–Werte des Versuches sind in Tafel 7.3 angegeben.

P [kN]	84,8	95,4	104,0	106,0	105,0	104,0	94,0
Δu [mm]	0,77	1,38	2,60	3,54	5,60	10,0	18,0

Tafel 7.3 Kopfbolzendübel $\varnothing 22/100$ im Betongurt auf Holorib 51/150 [11]

• Modell A

Die Traglast ist hier $P_t = c_t = 106$ [kN], als mittlere elastische Sekantensteifigkeit wird $K_{rs} = 84,8 / 0,77 = 110$ [kN/mm] angenommen. Dadurch bestimmt sich die plastische Relativverschiebung Δu^{pl} am Ende des Versuches wie folgt

$$\Delta u^{pl} = 18,0 - \frac{94,0}{110} = 17,2 \text{ [mm]} \equiv \kappa$$

Über Gl.(7.43) wird die Bruchenergie G_f abgeschätzt.

$$G_f = \frac{\kappa \cdot c_t}{\ln\left(\frac{c_t}{\bar{c}}\right)} = \frac{17,2 \cdot 106}{\ln\left(\frac{106}{94}\right)} \approx 15000 \text{ [kNmm]}$$

Wie Bild 7.4 verdeutlicht, wird die Last–Schlupf–Charakteristik des Versuches etwa im Mittel approximiert.

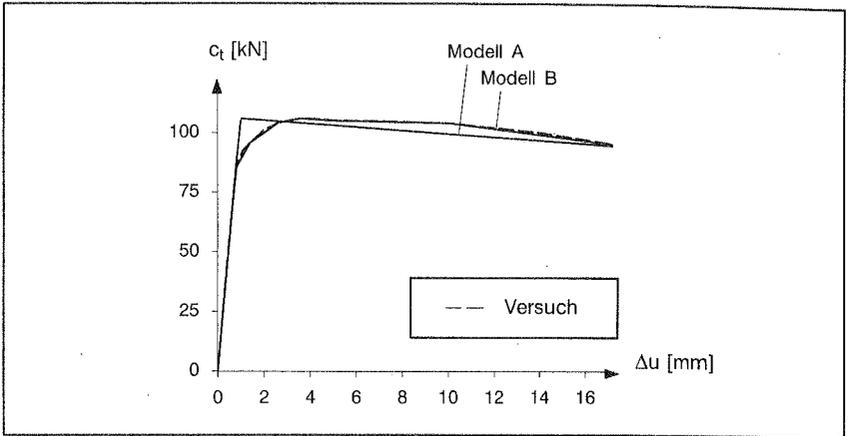


Bild 7.4 Approximation des Last–Schlupf–Verlaufs, angegeben in [11]

• Modell B

Die in Tafel 7.3 angegebenen Last–Schlupf–Werte sind Eingabewerte beim Modell B, wobei die elastische Anfangssteifigkeit K_{rs} der von Modell A entspricht. Dementsprechend zeigt Bild 7.4, daß das multilineare Modell das Versuchsergebnis nahezu exakt wiedergibt.

7.5 Numerisches Beispiel:

Vergleich kontinuierliche/konzentrierte *interface*–Elemente

Das unterschiedliche Verhalten zwischen kontinuierlichen und konzentrierten Zwischenelementen wird am Beispiel des drei–punktgestützten, in Balkenmitte gekerbten Balkens von Rots [101] analysiert.

Aus Gründen der Symmetrie wird lediglich das halbe System modelliert. Der Balken mit einer Gesamtlänge von $l=450$ [mm] wird mit vierknotigen Kontinuums-elementen diskretisiert, wobei oberhalb der Einkerbung und entlang der Symmetrieachse vierknotige Zwischenelemente die Tragwerkshälften verbinden. Geometrie und Belastung sind in Bild 7.5 dargestellt, die Materialdaten sind Tafel 7.4 zu entnehmen.

Die linear elastischen Untersuchungen sind dahingehend motiviert, daß der maximale Wert der transversalen Steifigkeit k_t der Zwischenelemente gesucht wird, der den ungerissenen Zustand ohne Zwischenelemente wiedergibt. In einer Parameterstudie werden für k_t die Werte 10^5 , 10^6 und 10^7 [N/mm²] angenommen, die 22,5– bis $22,5 \cdot 10^2$ –fachen Werte der elastischen Steifigkeit $E \cdot d/l$ des Balkens.

In Abhängigkeit des Elementtyps wird anschließend das nichtlineare Verhalten der Zwischenelemente untersucht. Für $k_t = 10^7$ [N/mm²] wird, anhand von Modell A, ein

ideal–plastisches Verhalten für $G_f = 10$ [Nmm/mm] und ein *softening*–Verhalten für $G_f = 0,002$ [Nmm/mm] bei einer Traglast von $c_t = 2,0$ [N/mm] numerisch simuliert.

7.5.1 Linear elastisches Verhalten ($P=10$ [N])

In Bild 7.6 sind die Normalkräfte oberhalb der Einkerbung bis zur Balkenoberkante in Abhängigkeit des Elementtyps und der transversalen Steifigkeit k_t aufgetragen.

Bei den kontinuierlichen Zwischenelementen zeigt sich, daß mit zunehmendem k_t die Lösung gegen die der unnachgiebigen Verbindung konvergiert. Unmittelbar über der Einkerbung prägt sich eine Singularität aus, über die Resthöhe des Querschnitts bleibt der Kraftverlauf kontinuierlich.

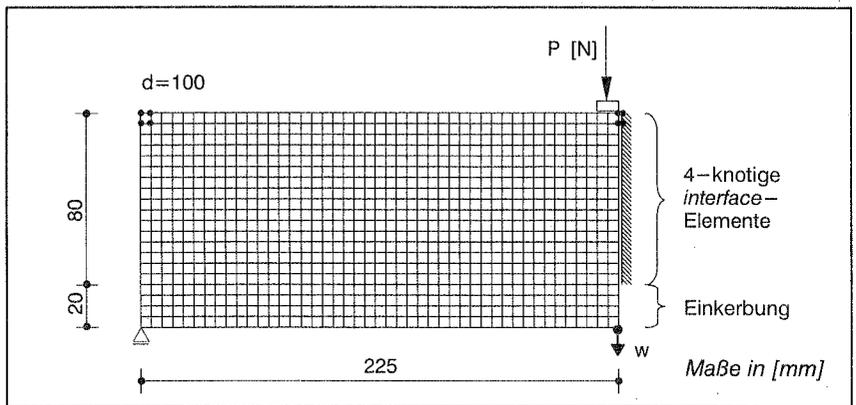


Bild 7.5 Eingekerbter Balken: Geometrie und Belastung

Beton:			
$E_{cm} = 20000$	[N/mm ²]	$\nu_c = 0,20$	[–]
interface–Elemente:			
$k_{rs} = 10^5$	[N/mm ²]		
$k_t = 10^5 / 10^6 / 10^7$	[N/mm ²]		
$c_t = 2,0$	[N/mm]	$\varphi = 45$	[°]
$G_f = 0,002 / 10$	[Nmm/mm]		

Tafel 7.4 Eingekerbter Balken: Materialdaten

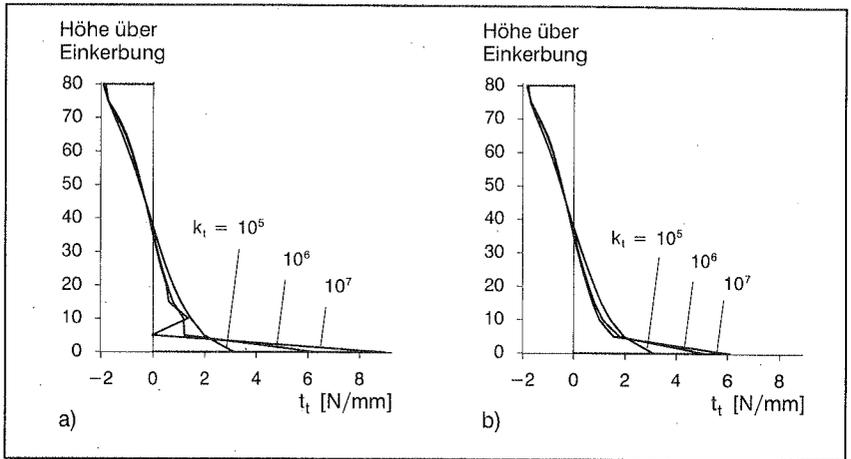


Bild 7.6 Eingekerbter Balken: Verlauf der Normalkräfte
 a) kontinuierliche interfaces b) konzentrierte interfaces

Sind bei den kontinuierlichen Zwischenelementen die Verläufe der Normalkräfte im Druckbereich noch nahezu identisch mit denen der konzentrierten, werden mit zunehmendem k_t Oszillationen unmittelbar über der Einkerbung sichtbar. Ein von Rots [101] durchgeführter Vergleich beider Elementtypen zeigt, daß bei den vierknotigen Zwischenelementen zwei der acht Eigenwerte bzw. –formen, die sogenannten „Biegemodes“, differieren. Bei den kontinuierlichen Zwischenelementen entsprechen die Eigenwerte dieser beiden Modes einem Drittel der Eigenwerte der konzentrierten Zwischenelemente, weshalb sich die kontinuierlichen Zwischenelemente mit zunehmendem Steifigkeitsunterschied zur angrenzenden Struktur eher instabil verhalten. Oszillationen bei den Relativverschiebungen – proportional dazu verhalten sich im linear elastischen Fall die Kräfte – sind dafür ein Indiz.

7.5.2 Nichtlineares Verhalten

Sowohl beim ideal–plastischen wie auch beim *softening*–Verhalten, sind für beide Elementtypen kaum Unterschiede bei den Last–Verschiebungs–Charakteristiken erkennbar, siehe Bild 7.7. Im Fall von *softening* differieren die Traglasten um 0,1 % (kontinuierliche Zwischenelemente: 21,849 [N]; konzentrierte Zwischenelemente: 21,847 [N]). Zu Beginn des Fließens, also unmittelbar über der Einkerbung, konvergieren die kontinuierlichen Zwischenelemente geringfügig langsamer, was mit den im elastischen Fall beobachteten Oszillationen zusammenhängt.

Ähnliches gilt für den Verlauf der Kräfte. Bis auf die für die kontinuierlichen Elemente typischen Diskontinuitäten am Elementübergang vom Druck– zum Zugbereich, differie-

ren die Kräfte im Zugbereich nur minimal: im Kraftverlauf von Bild 7.8 sind Abweichungen von maximal 1,5% festzustellen. Insofern bleibt festzuhalten, daß die bei den elastischen Berechnungen festgestellten Oszillationen mit materiell nichtlinearen Analysen nicht auftreten. Lediglich aufgrund des besseren Konvergenzverhaltens sind die konzentrierten den kontinuierlichen Zwischenelementen vorzuziehen.

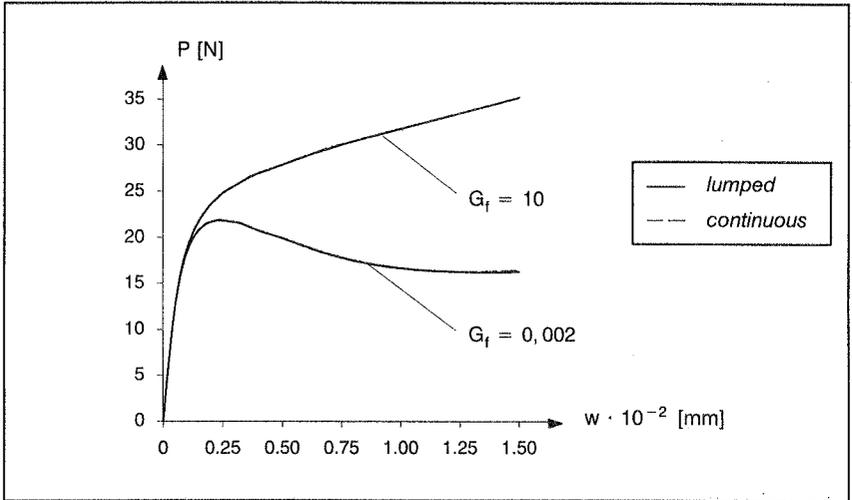


Bild 7.7 Eingekerbter Balken: Last-Verschiebungskurven

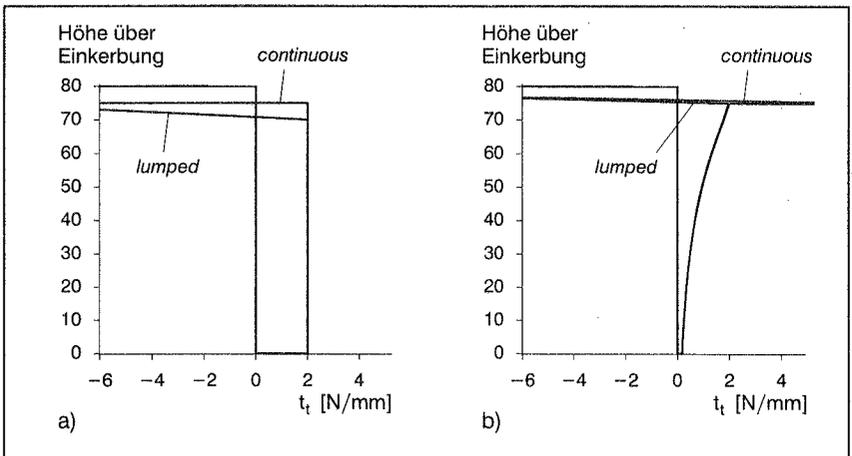


Bild 7.8 Eingekerbter Balken: Verlauf der Normalkräfte

a) $G_f = 10$ [Nmm/mm]

b) $G_f = 0,002$ [Nmm/mm]

8 Numerische Beispiele: Stahlverbundträger

Die numerische Analyse von Stahlverbundkonstruktionen kombiniert finite Kontinuums-elemente zum Modellieren der Querschnittsteile Stahlträger bzw. Stahlbetonplatte mit *interface*-Elementen zur Modellierung des nichtlinearen Verhaltens in der Verbundfuge.

Mit den in Kapitel 6 untersuchten Strukturen konnte für das *elasto-plastische Stahlbetonmodell* der Nachweis geführt werden, daß das globale Tragverhalten gut wiedergegeben und phänomenologisch beobachtete Versagensmechanismen (*cracking, crushing*, Fließen des Betonstahls) abgebildet werden können. Die berechneten Traglasten weichen von den Versuchsergebnissen oder Vergleichsberechnungen um maximal 20% ab. Auch zeigt sich, daß bei einer biegedominanten Struktur, wie der des „Karihaloo“-Balkens von Kap. 6.2.2, der Effekt des Mitwirkens des Betons zwischen den Rissen nahezu vernachlässigt werden kann. Dieses *tension-stiffening* wird bei den untersuchten Verbundträgern berücksichtigt und führt innerhalb einer numerischen Berechnung zu maximal 2% höheren Lastwerten bis zum Erreichen der Traglast. Insofern ist auch dieser Effekt vernachlässigbar. Zum Erhöhen der numerischen Stabilität wird die Degradation der elastischen Materialeigenschaften entsprechend Kap. 5.3.4 berücksichtigt.

Zur *Verbundmodellierung* wird zwischen zwei Modellen unterschieden: dem auf Bruchenergie basierenden *softening*-Modell A und dem multilinearen Modell B. Zum Erreichen größtmöglicher numerischer Stabilität werden hier lediglich die konzentrierten Zwischenelemente angewandt.

In Kapitel 2.4 wurden bereits die Voraussetzungen erläutert, die ein zweidimensionales Modellieren dieser Verbundträger rechtfertigen. Die Anforderung an die Geometrie mit einer gedungenen Betonplattenbreite schränkt die Auswahl möglicher zu untersuchender Strukturen ein, weshalb hier ausschließlich auf die experimentellen und numerischen Untersuchungen von Bode et al. in [13] und [15] eingegangen wird. Ein erstes Beispiel behandelt die im EC4 standardisierten *push-out*-Versuche von Kopfbolzen-übeln in Vollbetonplatten.

8.1 *Push-out*-Versuch nach EC4

Anhand des im EC4, Abschnitt 10.2.2, angegebenen, standardisierten Versuchskörpers zum Bestimmen der Traglast von Kopfbolzenübeln soll untersucht werden, inwieweit die experimentellen Ergebnisse – die Last-Schlupf-Kurven vom Anhang B 1 sind hier Eingabewerte – mit den numerischen übereinstimmen.

Die Versuchsanordnung nach EC4 ist in Bild 8.1a dargestellt. Das nahezu starre Tragverhalten des Stahlträgers rechtfertigt dessen Modellierung mit einem flächengleichen

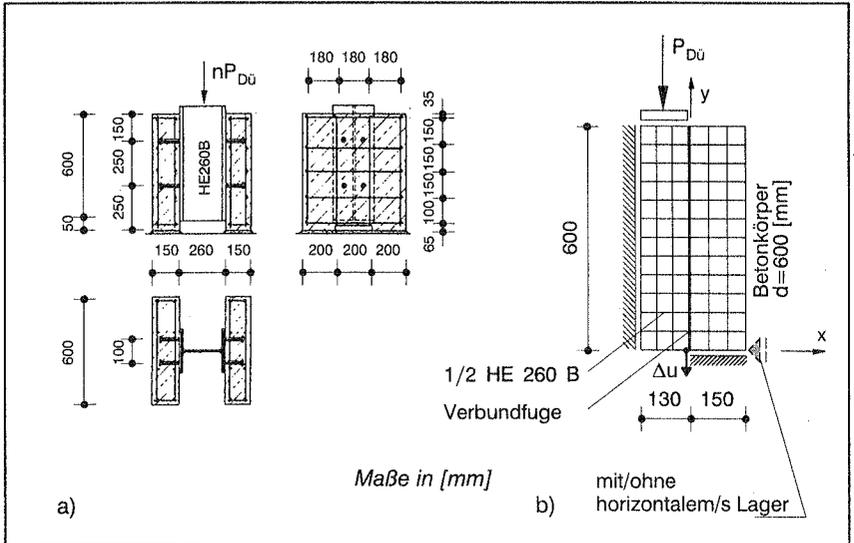


Bild 8.1 Push-out-Versuch für Kopfbolzendübel
 a) Versuchsanordnung nach EC4
 b) Diskretisierung des halben Systems

Ersatzquerschnitt gleicher Höhe. Aus Gründen der Symmetrie wird nur das halbe System diskretisiert (siehe Bild 8.1b). Damit aus der exzentrischen Lastübertragung zwischen Stahlträger und Betonprüfkörper keine Zugkräfte in die Dübel eingeleitet werden, sind die Betonprüfkörper horizontal zu verspannen oder Halterungen an den Außenseiten der Fußpunkte anzubringen ([98], [6] u. a.). Das horizontale Lager wird beim halben System alternativ berücksichtigt.

Die in Tafel 8.1 angegebenen Materialparameter für Beton sind so gewählt, daß die Traglasten sowohl für Dübel- als auch für Betonversagen entsprechend Gl.(2.2) und (2.3) fast identisch sind. Für die Zugfestigkeit des Bolzenmaterials wird $f_u = 500$ [N/mm²] angenommen.

Da das Tragverhalten eines Bolzenpaars abgebildet werden soll, werden die Werte der Last-Schlupf-Charakteristik von Roik et al. [99] über die Länge der Verbundfuge $e=600$ [mm], entsprechend Tafel B.1, Sp. 3, als „verschmiert“ angenommen. Die elastische Steifigkeit k_t normal zur Verbundfuge soll in etwa die Größe der tangentialen elastischen Steifigkeit k_{ts} haben.

Da durch Einfetten oder andere geeignete Maßnahmen die Haftung in der Verbundfuge unterbunden werden soll [98], wird der Reibungswinkel des Verbundmodells zum einen $\varphi = 0^\circ$ gesetzt. Mit $\varphi = 30^\circ$ wird der Frage nachgegangen, inwieweit die Reibung auf das Tragverhalten des Dübels Einfluß nimmt. Daraus resultieren die vier in Tafel 8.2

angegebenen Berechnungen mit den beiden Werten des Parameters φ und dem alternativ berücksichtigten horizontalen Lager.

• **Berechnungen ohne horizontalem Lager:** [1], [3]

Die Last–Verschiebungskurven zeigen eine gute Übereinstimmung mit der experimentellen Charakteristik (vgl. Bild 8.3). Der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Versuchsdaten von Tafel 8.3 bestätigt, daß mit zunehmendem plastischen Verhalten das Versuchsergebnis besser approximiert wird. Aufgrund der Nachgiebigkeit des Stahlprofils und vor allem des Betonprüfkörpers wird insbesondere das elastische Verhalten gegenüber dem Versuch weicher abgebildet.

Kann bei den Versuchen ein reibungsfreies Gleiten vorausgesetzt werden, ist bei der numerischen Analyse für $\varphi = 0^\circ$ der Verlauf der Schubkräfte t_{rs} über die Länge der Verbundfuge erwartungsgemäß konstant, siehe Bild 8.4a. Der nichtlineare Verlauf der Normalkräfte t_t (siehe Bild 8.4b) läßt auf ein Druck–Zug–Kräftepaar schließen, das aus der exzentrischen Kraftübertragung resultiert. Die maximale Zugkraft erreicht dabei eine maximale Größe von ca. 40% der Schubkraft.

<i>Beton C35/45:</i>			
$E_{cm} = 33000$	[N/mm ²]	$v_c = 0,15$	[–]
$f_{cm} = 43$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0$	[N/mm]
$f_{ctm} = 3,2$	[N/mm ²]	$G_f = 0,1$	[N/mm]
<i>Betonstahl:</i>			
$\varnothing_x = 8$	[mm]	$\varnothing_y = 10$	[mm]
$\varrho_x = 0,003$	[–]	$\varrho_y = 0,007$	[–]
$\varphi_x = 0$	[°]	$\varphi_y = 90$	[°]
$f_{sy} = 500$	[N/mm ²]		
$E_s = 200000$	[N/mm ²]	$E_H = 1000$	[N/mm ²]
<i>Stahlträger (HE 260 B):</i>			
$f_{sy} = 235$	[N/mm ²]	$v_{st} = 0,3$	[–]
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]
<i>interface–Elemente (Modell B):</i>			
$k_{rs} = 580$	[N/mm ²]	$k_t = 600$	[N/mm ²]
$c_t = 278$	[N/mm]	$\varphi = 0 / 30$	[°]
weitere Angaben entsprechend Tafel B.1, Spalte 3 im Anhang B			

Tafel 8.1 Push–out–Versuch: Materialdaten

		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 30^\circ$
horizontalem Lager	ohne	[1]	[3]
	mit	[2]	[4]

Tafel 8.2 Push-out-Versuch: Numerische Untersuchungen

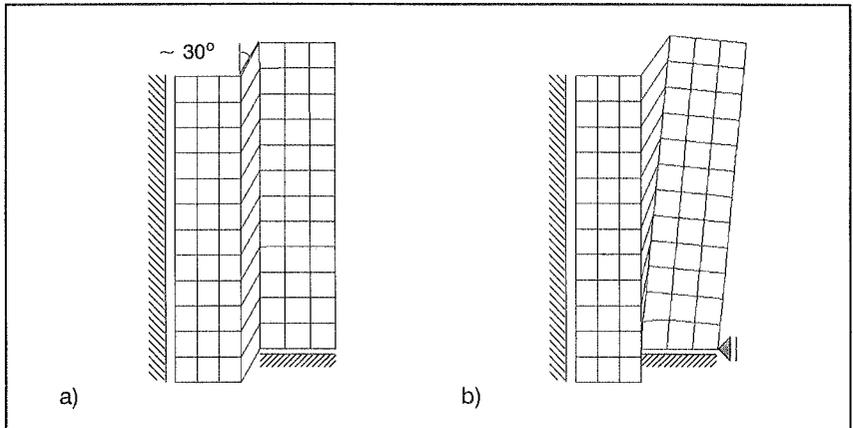


Bild 8.2 Push-out-Versuch: Verschiebungszustand stark überhöht dargestellt ($\Delta u \approx 11$ [mm])
a) ohne horizontales Lager [3] b) mit horizontalem Lager [4]

Beim reibungsbehafteten Verbund ($\varphi = 30^\circ$) findet über das Coulombsche Reibungsgesetz die Interaktion zwischen Normal- und Schubkräften statt. Daraus folgt der nicht-lineare Verlauf der Schubkräfte (vgl. Bild 8.4a). Zudem ist nach Bild 8.2 ein Ablösen zwischen Stahlprofil und Betonkörper festzustellen. Der durch horizontale und vertikale Verschiebung definierte Winkel entspricht in etwa dem Reibungswinkel φ .

● **Berechnung mit horizontalem Lager und ohne Reibung:** [2]

Prinzipiell gelten auch hier die vorherigen Ausführungen. Lediglich der Verlauf der Normalkräfte t_1 weist ausschließlich eine Druckbeanspruchung auf, da das horizontale Lager die „Zugkomponente“ überträgt. Dies zeigt die Notwendigkeit dieser Lagerung, wenn während der Versuchsdurchführung keine Zugbeanspruchung in den Kopfbolzendübeln auftreten soll.

● **Berechnung mit horizontalem Lager und Reibung:** [4]

Die Zwängung des Lagers behindert am Fußpunkt des Betonkörpers das Ablösen vom Stahlprofil (siehe Bild 8.2b); der Bereich einer möglichen Zugbeanspruchung (vgl. [1]

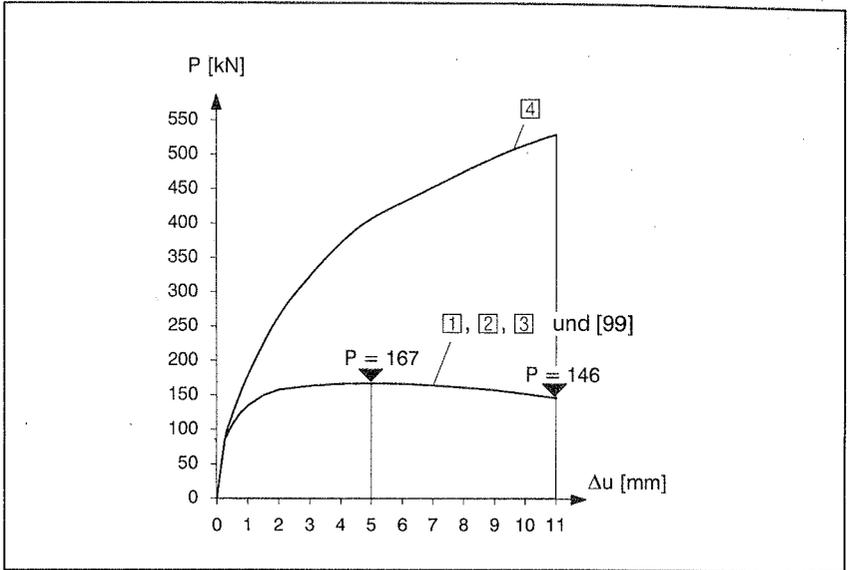


Bild 8.3 Push-out-Versuch: Last-Verschiebungskurven

Δu [mm]	P Versuch [kN]	[1]	[2]	[3]	max ΔP		[4]	ΔP	
		[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[%]	[kN]	[kN]	[%]
0,25	87	84,5	84,2	84,4	2,8	3,22	84,1	2,9	3,3
0,5	108	107,4	107,5	107,1	0,9	0,83	121,8	13,8	12,8
1,0	135	134,9	135,0	134,5	0,5	0,37	176,2	41,2	30,5
1,5	150	149,6	149,7	149,4	0,6	0,40	223,7	73,7	49,1
2,0	158	157,7	157,6	157,6	0,4	0,25	264,1	106,1	67,2
3,0	163	163,0	163,1	163,0	0,1	0,06	322,3	159,3	97,7
4,0	166	166,1	166,2	166,2	0,2	0,12	370,6	204,6	123,3
5,0	167	166,8	166,8	166,8	0,2	0,12	406,1	239,1	143,2
6,0	166	166,2	166,2	166,2	0,2	0,12	429,9	263,9	159,0
7,0	164	163,9	163,8	163,9	0,2	0,12	452,1	288,1	175,7
8,0	161	160,9	160,8	160,8	0,2	0,12	474,5	313,5	194,7
9,0	157	157,3	157,2	157,3	0,3	0,19	495,6	338,6	215,6
10,0	152	151,9	151,8	151,9	0,2	0,13	513,9	361,9	238,1
11,0	146	145,9	146,1	145,9	0,1	0,07	529,1	383,1	262,4

Tafel 8.3 Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Versuchsdaten nach Roik et al. [99]

und ③) wird überdrückt. Die Interaktion zwischen Normal- und Schubkräften, bedingt durch das Coulombsche Reibungsgesetz, läßt aufgrund der Querpressung nahezu beliebig große Scherkräfte zu. Der Verlauf der Schub- und Normalkräfte von Bild 8.5 zeigt eine Ähnlichkeit der Struktur zu exzentrisch belasteten, starren Gründungskörpern, da der Verlauf beider Zustandsgrößen weitgehend linear ist. Der lineare Verlauf des Ablösens führt von der Oberseite her zu einem „Aufklaffen“; in diesem Bereich sind die Schubkräfte $t_{rs} = 0$. Bedingt durch das Coulombsche Reibungsgesetz können noch Zugkräfte übertragen werden.

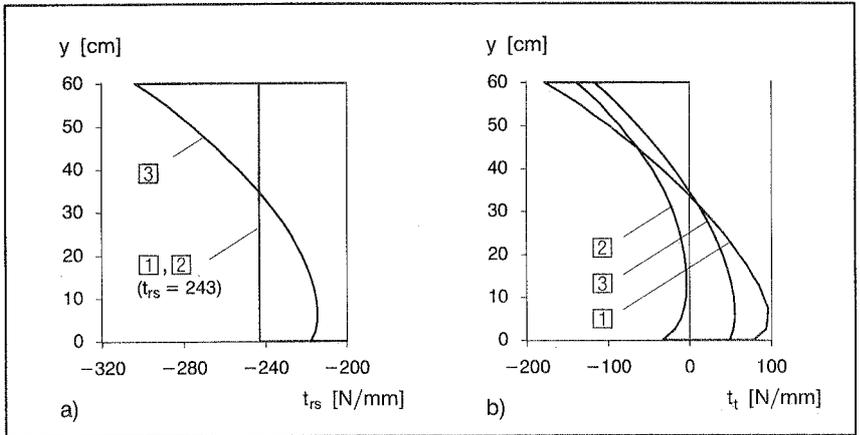


Bild 8.4 Push-out-Versuch: Kraftverläufe ①, ②, ③

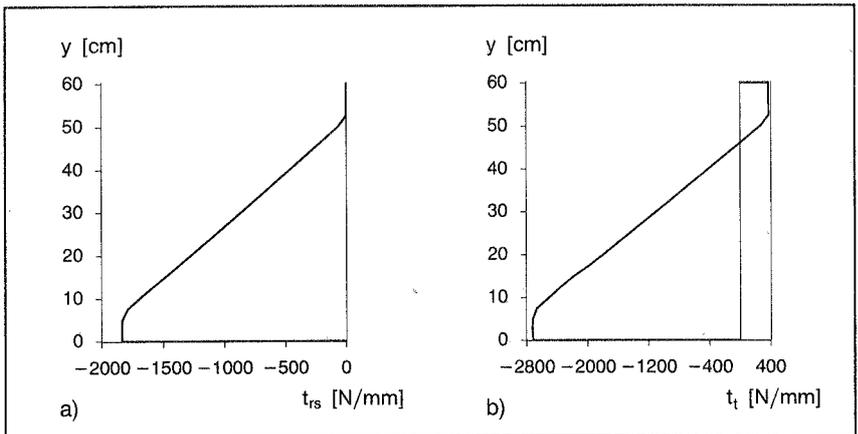


Bild 8.5 Push-out-Versuch: Kraftverläufe ④

• Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß die numerischen Untersuchungen experimentell bestimmte Last–Schlupf–Charakteristiken nahezu exakt abbilden. Eine Ausnahme stellt dabei die Berechnung der nicht der Versuchseinrichtung entsprechenden Struktur von [4] dar. Dadurch bestätigt sich die Annahme, daß die Daten experimenteller Charakteristiken als Eingabedaten des nichtlinearen Verbundmodells B fungieren können.

Das in Versuchen zu beobachtende Entstehen von vertikalen Rissen auf der Innenseite und horizontalen Rissen an der Oberfläche des Betonkörpers kann über das Federmodell in der Verbundfuge mit einer 2D–Modellierung nicht wiedergegeben werden. Sowohl das Stahlprofil als auch der Betonkörper verhalten sich bei den numerischen Untersuchungen linear elastisch. Dies ist ein Nachteil dieser Art der Verbundmodellierung. Indirekt belegt die Berechnung [4] die Funktionalität des elasto–plastischen Verbundmodells. Das alleinige Auftreten der Zugnormalkräfte am oberen, „gerissenen“ Rand kann nur im Bereich der Apex der Fließfläche des Coulombschen Reibungsgesetzes auftreten. Die quadratische Konvergenzrate innerhalb des Konvergenzradius einer globalen Gleichgewichtssiteration bestätigt die Funktionalität des Projektionsalgorithmus im Bereich des *inverted cone*.

8.2 Durchlaufträger mit Einzellasten

Durchlaufträger finden im Hochbau häufig Verwendung. Dennoch wurden bisher nur sehr wenige experimentelle Traglastuntersuchungen mit derartigen Trägern durchgeführt. Bode et al. [15] analysierten derartige Verbunddurchlaufträger mit dem Pro-

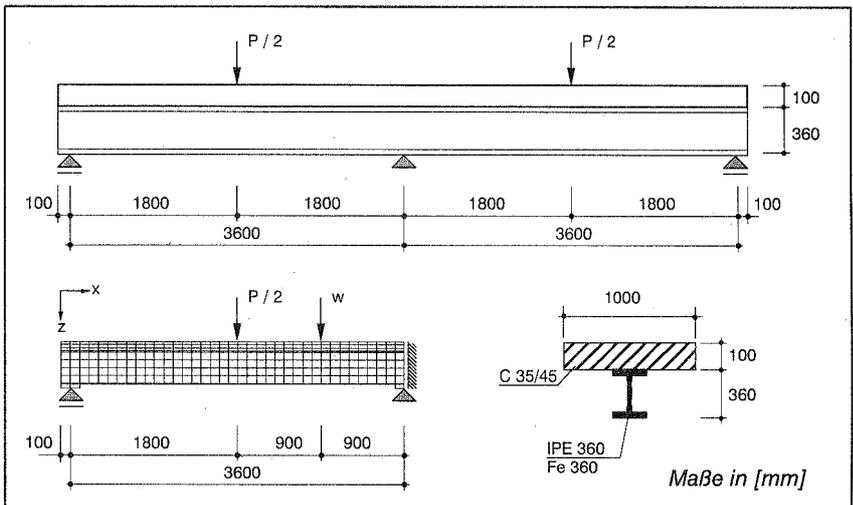


Bild 8.6 Durchlaufträger: Geometrie, Diskretisierung und Belastung

Beton C35/45:

$E_{cm} = 33300$	[N/mm ²]	$v_c = 0,1$	[--]
$f_{cm} = 43$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0$	[N/mm]
$f_{ctm} = 3,2$	[N/mm ²]	$G_f = 0,2$	[N/mm]

Betonstahl:

$\varnothing_x = 10$	[mm]	$\varnothing_z = 8$	[mm]
$\varrho_x = 0,016$	[--]	$\varrho_z = 0,003$	[--]
$\varphi_x = 0$	[°]	$\varphi_z = 90$	[°]
$f_{sy} = 500$	[N/mm ²]		
$E_s = 200000$	[N/mm ²]	$E_H = 1000$	[N/mm ²]

Stahlträger (IPE 360, Fe 360):

$f_{sy} = 235$	[N/mm ²]	$v_{st} = 0,3$	[--]
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Kopfbolzendübel $\varnothing 22$ [mm], $e = 150 / 300$ [mm]

Modell B: siehe Tafel B.1, Spalte 4 im Anhang;

für Teilverbund (50%) die entsprechenden halben c_i -Werte

Tafel 8.4 · Durchlaufträger: Materialdaten

grammpaket ANSYS. Schwerpunkt dieser Untersuchungen war das Erfassen des Tragverhaltens im Bereich von Stegöffnungen.

In dem vorliegenden Beispiel bleiben bei dem in Bild 8.6 dargestellten Durchlaufträger Stegöffnungen unberücksichtigt. Aus Gründen der Symmetrie wird das halbe System diskretisiert. Die Materialdaten der Betonplatte mit der Betongüte C35/45, die des Bewehrungsstahls bei einem Längsbewehrungsgrad $\varrho_x = 1,6\%$ und des IPE 360 sind in Tafel 8.4 angegeben.

Als Verbundmittel sind Kopfbolzendübel $\varnothing 22$ [mm] vorgesehen, die im Abstand von $e = 150$ [mm] einen nachgiebigen Vollverbund (die zum vollen plastischen Moment gehörende Plattendruck- oder Zugkraft wird angeschlossen [66]) gewährleisten. Als Last-Schlupf-Charakteristik für diesen Dübel wird die von Roik et al. [99] angesetzt. Die zugehörigen, „verschmierten“ Werte können Tafel B.1, Sp.4 im Anhang entnommen werden. Außer dem nachgiebigen Vollverbund (Reduktion der unter Vollverbund bestimmten Anzahl an Verbundmitteln) werden der nachgiebige Teilverbund und der starre Verbund untersucht. Dadurch ergeben sich nachfolgende drei Berechnungen:

- \square : starrer, unnachgiebiger Verbund;

- [2]: nachgiebiger Vollverbund ($\varnothing 22$ [mm] / $e = 150$ [mm]);
- [3]: nachgiebiger Teilverbund zu 50% ($\varnothing 22$ [mm] / $e = 300$ [mm]).

Ein mögliches Haften in der Verbundfuge bleibt unberücksichtigt ($\varphi = 0^\circ$). Wie bei [15] soll die Vertikalverschiebung w an der Oberkante des Betongurtes im Dreiviertelspunkt der Stützweite das globale Strukturverhalten wiedergeben.

● globales Strukturverhalten

Bereits bei niedrigem Lastniveau ($P=215$ [kN]) treten über der Innenstütze an der Oberseite der Betonplatte erste Risse auf (siehe Bild 8.7 und Bild 8.8). Ab einer Last von ca. 650 [kN] beginnt das Plastizieren des Stahlträgers an der Unterseite des gleichen Querschnitts.

Mit dem vollständigen „Plastizieren“ des Querschnittes über der Innenstütze (Fließen des Stahlträgers und der Bewehrung, fast vollständig degradierte Zugspannungen im Betongurt) bilden sich in der Feldmitte, an der Unterseite der Betonplatte, die ersten Risse. Mit Erreichen der Traglast beginnt das Druckversagen im Bereich der Lasteinleitung. Unmittelbare Folge davon ist die stetige Abnahme der Strukturbelastung.

Im Sinne des „Fließgelenkverfahrens“ bildet sich über der Innenstütze das erste und unter der Einzellast das zweite „Fließgelenk“ (FG) mit Erreichen der Traglast aus. Im Vergleich zur Lastverschiebungskurve von [15] nimmt die Diskrepanz zwischen erstem und zweiten FG zu. Ursache ist das nichtlineare Druckverhalten des Betons, das beim hier vorgestellten Betonmodell berücksichtigt wird.

● Verbundverhalten

Der Verlauf der Schubkräfte t_{rs} über die Länge der Verbundfuge von Bild 8.9 verdeutlicht, daß bei starrem Verbund in Bereichen mit statischen Diskontinuitäten (Lasteinleitung, Innenstützung) Spannungskonzentrationen auftreten. Unter Berücksichtigung des nachgiebigen Verbunds werden die Dübel gleichmäßiger beansprucht. Im Falle des Vollverbunds erreichen diese nur im Bereich zwischen Einzellast und Innenstützung ihre Traglast. Eine wirtschaftlichere Lösung kann bei teilweisem Verbund vorliegen: Die Traglast von $P_u=1301$ [kN] unterschreitet die des Vollverbunds lediglich um 7,6%. Nach Erreichen des niedrigeren Traglastniveaus verhält sich die Struktur zudem duktiler.

Bild 8.10 macht deutlich, daß in der Nähe der Rand- bzw. Innenstützung die Dübel durch das Abheben der Betonplatte zusätzlichen Zugbeanspruchungen ausgesetzt sind. Die Größenordnung dieser Kräfte liegt bei ca. 40% jener der Querkraftbeanspruchung der Dübel. Dieses Phänomen konnte bereits beim *push-out*-Versuch von Kapitel 8.1 im Falle des unberücksichtigten horizontalen Lagers festgestellt werden.

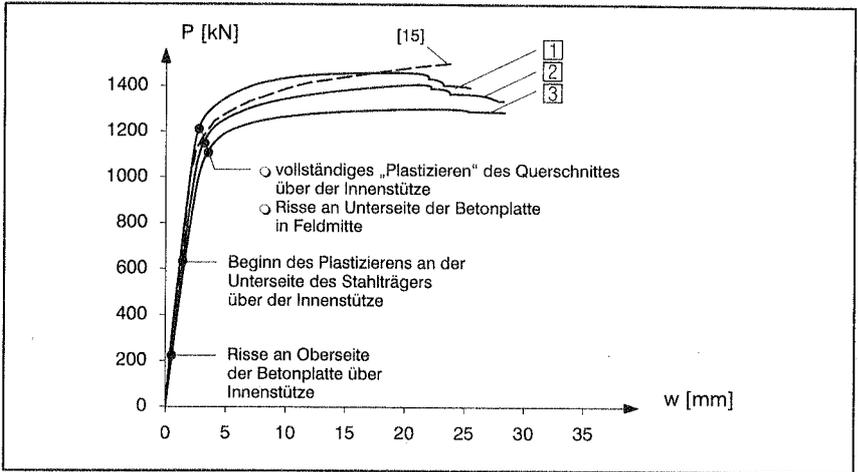


Bild 8.7 Durchlaufträger: Last-Verschiebungskurven

		starrer Verbund		nachgiebiger Verbund		Vergleichsberechnung nach [15]
		[1]	[2]	[3]	[15]	
I	P_u [kN]	1459	1408	1301	~1530	
	w [mm]	18,1	21,2	22,8	~24,0	

Tafel 8.5 Durchlaufträger: Traglasten P_u

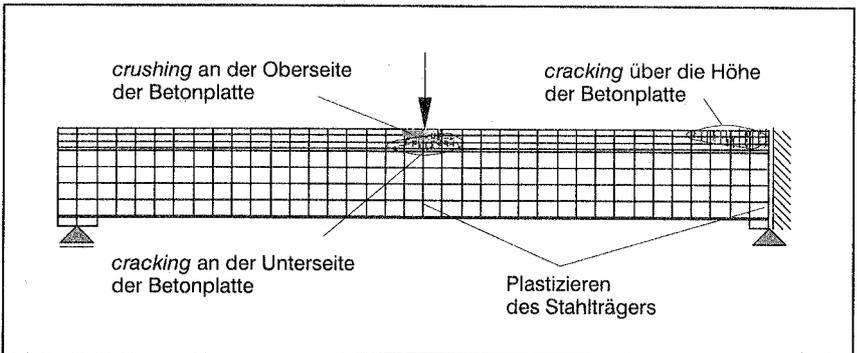


Bild 8.8 Durchlaufträger: Versagensmechanismen im Traglastzustand

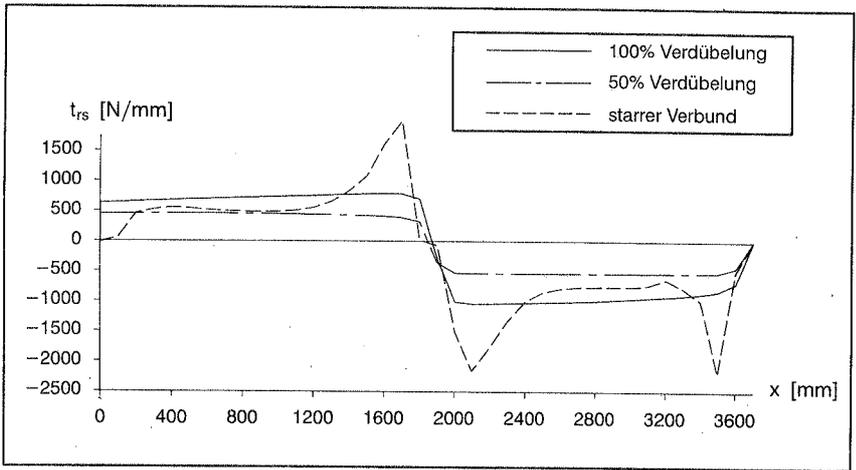


Bild 8.9 Durchlaufträger: Verlauf der Schubkräfte t_{rs} in der Verbundfuge im Traglastzustand

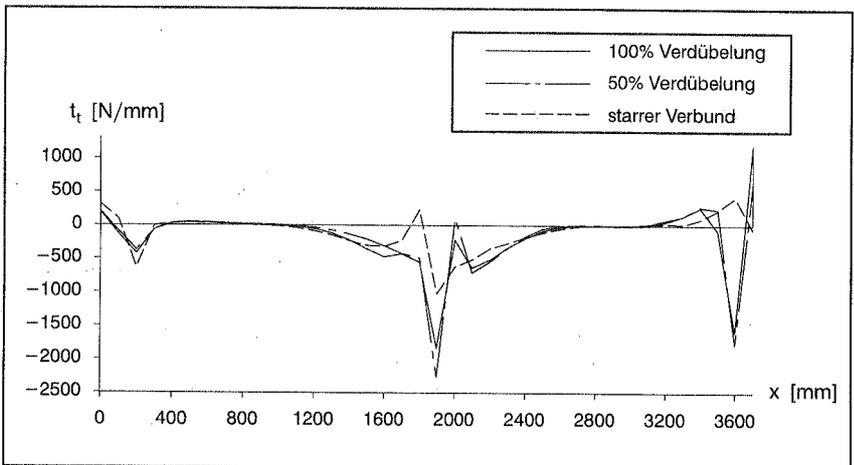


Bild 8.10 Durchlaufträger: Verlauf der Normalkräfte t_t in der Verbundfuge im Traglastzustand

• Zusammenfassung

Die Versagensmechanismen der Struktur können entsprechend dem Fließgelenkverfahren als „Fließgelenke“ interpretiert werden. Das Plastizieren der Bewehrung und des Stahlträgers sowie die durch Ribbildung nahezu vollständig abgebaute Tragfähigkeit des Betons über der Innenstütze entsprechen den im EC4, Abschnitt 4.4, mittragenden Querschnittsteilen unter „negativer Momentenbeanspruchung“. Das Aufreißen an der

Betonplattenunterseite in Feldmitte ist ein Indiz dafür, daß die „Spannungsnulllinie“ beim druckbeanspruchten Betongurt in der Betonplatte – hier etwa in mittlerer Höhe – verläuft („positive Momentenbeanspruchung“). Insofern können die in EC4, Bild 4.5, dargestellten plastischen Spannungsverteilungen nachvollzogen werden. Eine Vergleichsberechnung nach dem Fließgelenkverfahren (ohne Teilsicherheitsbeiwerte nach EC4) führt bei vollem Verbund zu einer Traglast von ca. $P_{Tr}=1340$ [kN]. Dies bestätigt die Größenordnung der numerisch berechneten Traglast $P_u=1459$ [kN] für starren Verbund.

8.3 Träger mit Stegöffnung

An der Universität Kaiserslautern wurden im Rahmen zweier Forschungsprojekte Traglastversuche an Stahlverbundträgern mit großen Stegöffnungen durchgeführt [13]. Zudem analysierten Bode et al. [15] den Träger A2 dieser Versuchsreihe mit dem Programmpaket ANSYS. Der Träger A2 wird auch im Rahmen dieser Arbeit untersucht.

Der Träger mit einer Stützweite von $l=3400$ [mm] wird, wie der Durchlaufträger zuvor, mit zweidimensionalen, neunknotigen Kontinuumelementen diskretisiert; sechsknotige, eindimensionale Zwischenelemente geben das nichtlineare Verbundverhalten in der Verbundfuge wieder. Geometrie und Belastung sind in Bild 8.11 dargestellt, die Materialdaten sind Tafel 8.6 zu entnehmen.

• Modellieren des nichtlinearen Verbundverhaltens

Analog zur Veröffentlichung [83] mit ersten numerischen Ergebnissen zu den hier vorgestellten Werkstoffmodellen wird in einem ersten Berechnungszyklus starrer Verbund angenommen. Trotz des zu steifen Strukturverhaltens kann in diesen Fällen die maximale Traglast der Struktur abgeschätzt werden.

Das nichtlineare Verbundverhalten der Kopfbolzendübel $2 \varnothing 22$ [mm] im Abstand von $e=100$ [mm] wird mit den Verbundmodellen A und B untersucht, wobei die Last-Schlupf-Charakteristiken nach Roik et al. [99] und Bode et al. [14] entsprechend Anhang B 1 obere und untere Grenzkurven für das Modell B darstellen.

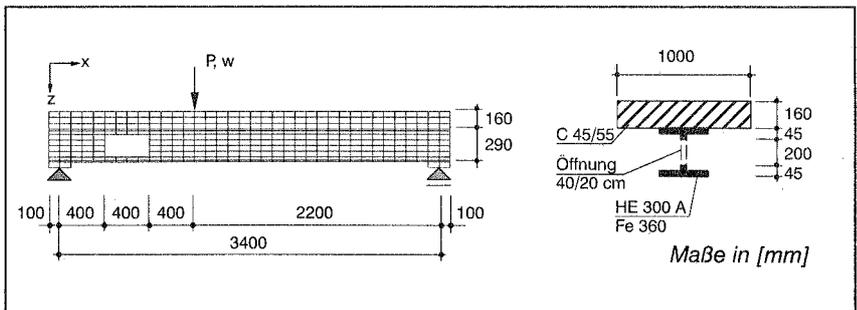


Bild 8.11 Träger A2: Geometrie, Diskretisierung und Belastung

Beton C45/55:

$E_{cm} = 36000$	[N/mm ²]	$V_c = 0,1$	[-]
$f_{cm} = 53$	[N/mm ²]	$G_c = 50,0$	[N/mm]
$f_{ctm} = 3,8$	[N/mm ²]	$G_f = 0,25$	[N/mm]

Betonstahl:

$\varnothing_x = 10$	[mm]	$\varnothing_z = 8$	[mm]
$\varrho_x = 0,008$	[-]	$\varrho_z = 0,003$	[-]
$\varphi_x = 0$	[°]	$\varphi_z = 90$	[°]
$f_{sy} = 500$	[N/mm ²]		
$E_s = 200000$	[N/mm ²]	$E_H = 1000$	[N/mm ²]

Stahlträger (HE 300 A, Fe 360):

$f_{sy} = 235$	[N/mm ²]	$V_{st} = 0,3$	[-]
$E_s = 210000$	[N/mm ²]	$E_H = 0$	[N/mm ²]

Kopfbolzendübel 2 $\varnothing 22$ [mm], e = 100 [mm]

Modell A:

$k_{rs} = 3200$	[N/mm ²]	$k_t = 10^6$	[N/mm ²]
$c_t = 3200/1600$	[N/mm]	$\varphi = 0$	[°]
$G_f = 1,5 \cdot 10^6$	[Nmm/mm]		

Modell B: siehe Tafel B.1, Sp. 5 und 7 im Anhang

Tafel 8.6 Träger A2: Materialdaten

		c_t [N/mm]	G_f [Nmm/mm]	k_{rs} [N/mm ²]	Öffnung		
					ohne	mit	
	Verbund starr	$c_t = 10^6$	$G_f = 10^9$	$k_{rs} = 10^6$			
		Modell A	$c_t = 3200$	$G_f = 1,5 \cdot 10^6$	$k_{rs} = 3200$	[2]	[4]
		Verbund nachgiebig	Modell A	$c_t = 1600$	$G_f = 1,5 \cdot 10^6$	$k_{rs} = 3200$	
	Modell B		siehe Tafel B.1, Sp.5				[6]
	Modell B		siehe Tafel B.1, Sp.7				[7]

Tafel 8.7 Träger A2: Numerische Untersuchungen

Modell A soll im Mittel beide Charakteristiken approximieren. Jedoch wird die elastische Anfangssteifigkeit in etwa halb so groß wie die der beiden Charakteristiken gewählt.

Eine Übersicht der numerischen Untersuchungen mit den unterschiedlichen Parametereinstellungen beider Verbundmodelle bei gleichzeitiger alternativer Berücksichtigung der Stegöffnung ist in Tafel 8.7 gegeben.

● **Berechnungen ohne Stegöffnung**

Die Berechnung der Durchbiegung unter dem Lastangriffspunkt mit dem nichtlinearen Verbundmodell A zeigt gemäß Bild 8.12a eine gute Übereinstimmung mit der Vergleichsberechnung nach [15].

Die beobachteten Versagensmechanismen dieses Einfeldträgers sind durchaus mit denen des Durchlaufträgers in Feldmitte zu vergleichen. Bei einem Lastniveau von ca. $P=650$ [kN] beginnt der Stahlträger unmittelbar unter der Einzellast an der Unterseite zu plastizieren. Bei geringer Laststeigerung ($P=670$ [kN]) treten erste Risse an der Unterseite der Betonplatte auf.

● **Berechnungen mit Stegöffnung**

Ein Vergleich der unterschiedlichen Verbundmodelle zeigt, daß die Berechnungen mit Modell A ([4] und [5]) aufgrund der geringeren elastischen Anfangssteifigkeit mit den im Versuch gemessenen Vertikalverschiebungen am Lastangriffspunkt am besten übereinstimmen (siehe Bild 8.12b). Berechnungen [6] und [7] mit Modell B führen für beide „Grenzkurven“ zu nahezu identischen Ergebnissen. Der Verlauf der Schubkräfte von Bild 8.14 belegt, daß die Traglast der Dübel nicht erreicht wird. Demnach ist bei beiden Berechnungen das Tragverhalten der Dübel noch nahezu linear elastisch; entsprechend Tafel B.1 in etwa gleich. Zudem kann auf nachgiebigen Vollverbund rückgeschlossen werden.

Das nachgiebigere Strukturverhalten ist dadurch zu begründen, daß durch ein mehrfaches Ent- und Wiederbelasten zu Versuchsbeginn der Beton im Bereich der Dübelfüße geschädigt wurde. Ein Anfangsschlupf als mögliche Folge davon blieb bei beiden Charakteristiken unberücksichtigt. Die geringere elastische Anfangssteifigkeit bei Modell A hingegen gibt das nachgiebigere Verhalten „im Mittel“ wieder.

Bei diesem Einfeldträger zeigt sich, daß der nachgiebigere Teilverbund mit einem Verdübelungsgrad von 50% (Berechnung [5]) zu einer geringfügig kleineren Traglast ($P_{u[5]}=750$ [kN] gegenüber $P_{u[4]}=798$ [kN]) führt und die Dübel, wie beim Durchlaufträger, gleichmäßig beansprucht werden (siehe Bild 8.14).

● **Versagensmechanismen**

Prinzipiell kann die bei Bode et al. [15] ausführlich dokumentierte Entwicklung der Versagensmechanismen bestätigt werden. Stichwortartig sind dies:

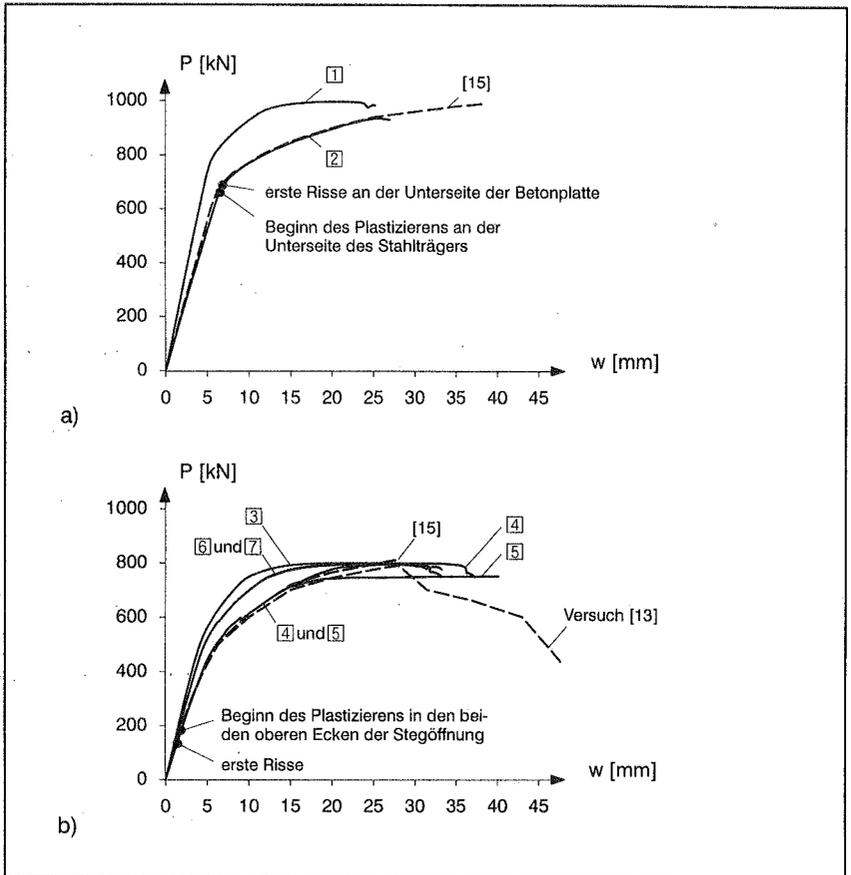


Bild 8.12 Träger A2: Last-Verschiebungskurven
 a) ohne Stegöffnung b) mit Stegöffnung

		starrer Verbund		nachgiebiger Verbund			Vergleichs- berechnung, Versuch
		[1]	[2]				[15]
I	P_u [kN]	997	936				985
	w [mm]	20,9	25,4				38,0
		[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[13]
I	P_u [kN]	800	798	750	798	799	788
	w [mm]	21,9	30,5	40,0	27,6	26,6	27,7

Tafel 8.8 Träger A2: Traglasten P_u

- erste Risse an der Unterseite der Betonplatte zwischen Stegöffnung und Lastangriffspunkt bei $P=140$ [kN];
- Beginn des Plastizierens in den beiden oberen Ecken der Stegöffnung bei einer Last von $P=180$ [kN];
- vollständiges Plastizieren des rechten Öffnungsrandes kurz vor Erreichen der Traglast; der Stahlträger hängt sich über die Dübel an die Betonplatte hoch (Dübel rechts von der Stegöffnung werden auf Zug beansprucht – siehe Bild 8.15);
- im Traglastzustand sowohl Biegeschubversagen als auch Druckversagen des Betons (siehe Bild 8.13);
- die *Vierendeel*–Wirkung infolge sekundärer Biegespannungen führt zum Plastizieren in allen vier Öffnungsecken;
- Rißbildung an der Plattenoberseite oberhalb des linken Öffnungsrandes.

Zudem führt das steifere Tragverhalten der Betonplatte zu einem Aufreißen in Trägerlängsrichtung über dem Auflager.

• Zusammenfassung

Eine Vergleichsberechnung nach dem Fließgelenkverfahren (ohne Teilsicherheitsbeiwerte nach EC4) führt beim Träger ohne Stegöffnung zu einer Traglast von $P_{Tr}=920$ [kN]. Die Relation zur numerisch berechneten Traglast $P_U=997$ [kN] für starren Verbund entspricht in etwa der des Durchlaufträgers vom Kapitel zuvor. Diese Differenz ist auf die berücksichtigte mittlere Druckfestigkeit f_{cm} beim Betonmodell zurückzuführen.

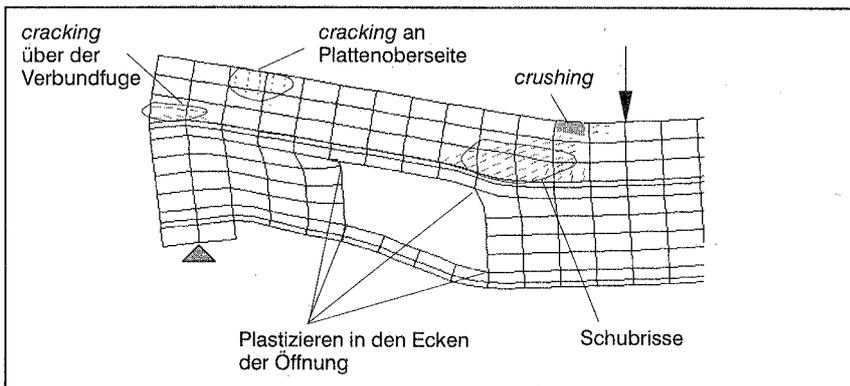


Bild 8.13 Träger A2: Versagensmechanismen im Traglastzustand (fünffach überhöhter Verformungszustand)

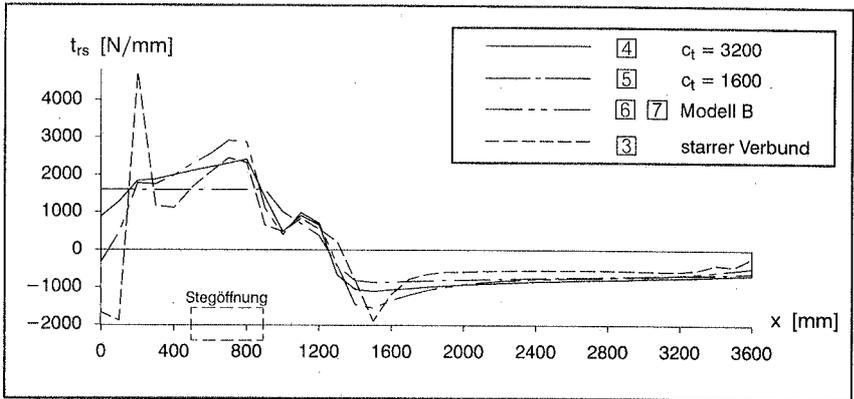


Bild 8.14 Träger A2: Schubkraftverlauf t_{rs} in der Verbundfuge im Traglastzustand

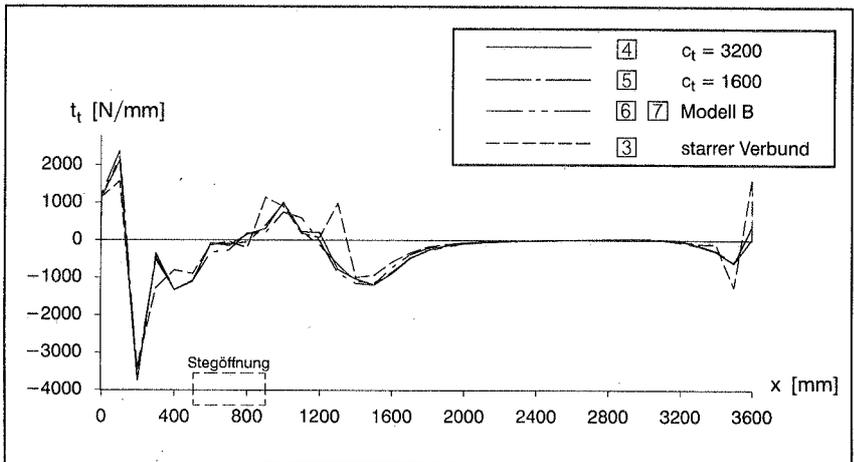


Bild 8.15 Träger A2: Normalkraftverlauf t_t in der Verbundfuge im Traglastzustand

Auch bei der Struktur mit der geometrischen Diskontinuität konnten zuverlässige Aussagen bei den auftretenden Versagensmechanismen gemacht werden. Als unsicher erweisen sich die in der Literatur angegebenen Last–Schlupf–Charakteristiken der Verbundmittel, die wesentlich von der Versuchsdurchführung beeinflusst werden.

Hier besitzt das nichtlineare Verbundmodell A den Vorteil, daß aufgrund der geringen Anzahl die Steuerung der Parameter eine schnelle und zuverlässige Beurteilung des Tragverhaltens zuläßt, auch wenn weite Bereiche einer Last–Schlupf–Charakteristik „nur“ gemittelt wiedergegeben werden.

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Der ingenieurmäßige Anspruch und die ökonomische Zielsetzung, den Stahlverbundbau als leistungsfähige und wirtschaftliche Bauweise weiterzuentwickeln, und die einhergehende Forderung nach noch effizienteren und zuverlässigeren Berechnungsmethoden sind Ausgangspunkte dieser Arbeit. Zu deren Realisierung galt folgenden Aspekten besondere Aufmerksamkeit:

- Auf der Basis dreidimensionaler Werkstoffgesetze sind phänomenologisch beobachtete Versagensmechanismen wiederzugeben. Insofern ist im Rahmen dieser Aufgabenstellung das werkstoffspezifische Verhalten der jeweiligen Materialien Baustahl, Stahlbeton und das der Verbundmittel detailliert zu untersuchen.
- Das komplexe Tragverhalten des Werkstoffs Stahlbeton und das der Verbundmittel ist mit Materialmodellen zu beschreiben, die mit einem Minimum an einfach zu identifizierenden Parametern auskommen.

Um die numerische Effizienz zu erhöhen, wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

- Ein diskretes Modellieren der Verbundmittel ist für die Analyse des globalen Strukturverhaltens zu aufwendig. Deren nichtlineares Tragverhalten wird über Federmodelle in der Verbundfuge beschrieben.
- Als Theorie der Materialmodelle der genannten Querschnittskomponenten wurde die Plastizitätstheorie gewählt. Mit dieser theoretischen Basis können Parallelen bei der Entwicklung von Algorithmen sowohl beim Stahlbeton – als auch beim Verbundmodell genutzt werden.

Die Werkstoff–Inhomogenität der Verbundkonstruktionen, basierend auf dem unterschiedlichen mechanischen Verhalten der Werkstoffe Stahl, Beton und dem nichtlinearen Verbundverhalten, erfordert ein differenziertes Betrachten der jeweiligen Materialien. Deshalb wird in Kapitel 2 eine Beziehung zwischen den in den Normen angegebenen Materialeigenschaften, in Form von Werkstoffkenngrößen, und der maximalen Beanspruchbarkeit des jeweiligen Werkstoffs geschaffen.

Die Grundlagen der phänomenologischen Plastizitätstheorie in Kapitel 3 sind wissenschaftliche Basis für die Entwicklung effizienter elasto–plastischer Materialgesetze, deren Projektionsalgorithmen und konsistenten Materialtangente auf der Deformationszuwachs­theorie basieren (Kapitel 4). Die Integration der Evolutionsgleichungen erfolgt nach dem „Rückwärts–Euler“–Verfahren, das, unabhängig von der Form der Fließfläche und der Größe der Schrittweite, unbedingte Stabilität gewährleistet. Durch die An-

wendung des konsistenten Materialtensors ist die Konvergenz des Newton–Raphson–Verfahrens innerhalb eines Konvergenzradius quadratisch.

Zu Beginn von Kapitel 5 werden experimentell beobachtete, phänomenologische Materialeigenschaften für Stahlbeton und deren Umsetzung im Werkstoffmodell erläutert. Das vorgestellte Werkstoffmodell für Beton mit einer mehrteiligen Fließfläche (Drucker–Prager–Teilfläche im Zug– und Zug–/Druck–Bereich; Drucker–Prager–Teilfläche, gekoppelt mit einer Kugelfläche, im Druckbereich) ist ein „zwei Invarianten (I_1, J_2) CAP–Modell“, teilweise mit nicht glatten Übergängen. Hierbei handelt es sich um die dreidimensionale Erweiterung der Betonmodelle von Chen und Chen [23] bzw. Feenstra [38].

Die Versagensmechanismen können näherungsweise auf die Kenngrößen des einaxialen Zug– und Druckverhaltens reduziert werden. Das auf Bruchenergie basierende, isotrope Ver– Entfestigungsverhalten (*softening*–Modell) der einzelnen Teilflächen gibt das einaxiale Zug– bzw. Druckverhalten wieder. Die Zuordnung von Versagensmechanismen auf einzelne Teilflächen, der Typ dieser Fließflächen und der glatte Übergang zwischen der Drucker–Prager– und der Kugelfläche im Druckbereich sind Ursache dafür, daß außer den beiden Bruchenergie– Parametern lediglich vier weitere Parameter die Geometrie der Fließflächen beschreiben: die einaxiale Zug– und Druckfestigkeit sowie zwei Parameter zum *Fitten* der Geometrie der Fließflächen. Ein weiterer Vorteil dieses Modells ist, daß die Parameter einfach zu identifizieren sind. Die Festigkeiten und Bruchenergien sind über geltende Normen, die Fittingparameter anhand der biaxialen Versagenskurve von Kupfer et al. [69] zu bestimmen.

Beim bewehrten, zugbeanspruchten Querschnitt sind zur Steifigkeit des Betons die des Bewehrungsstahls und des *tension–stiffening*–Effekts zu addieren. Letzterer wird über die ersatzweise Modifikation des Bewehrungsstahls modelliert. Die Bewehrung wurde nach dem Konzept der „verschmierten“, eingebetteten Modellierung implementiert; starrer Verbund ist vorausgesetzt.

Das breite Spektrum von Testbeispielen (Kapitel 6) belegt die Brauchbarkeit der Werkstoffmodelle für Beton und Stahlbeton. Zusammenfassende Auswertung der Beispiele für Beton:

- Untersuchungen an einem Druckstab zeigen, daß das Konzept der homogenisierten Rißbildung auch bei druckbeanspruchten Strukturen zu netzunabhängigen Lösungen führt.
- Numerische Simulationen an einer L–förmigen Scheibe zeigen, daß bei erheblichen Spannungsumlagerungen in der Struktur das Tragverhalten im Nachrißbereich zu spröde abgebildet wird. Die Ursache liegt in der Annahme eines isotropen Schädigungsverhaltens. Eine gegenüber der Norm um ca. 20% höhere Bruchenergie reduziert das zu spröde Nachrißverhalten, ohne dabei die Traglast wesentlich zu verändern.

- Das Beispiel des vier–punktgestützten (SEN–) Balkens dokumentiert eindrucksvoll, daß das Werkstoffmodell in der Lage ist, im Versuch beobachtete Rißentwicklungen abzubilden. Während des weggesteuerten Aufbringens der Last konnte ein Öffnen und Schließen von weiteren Rissen verifiziert werden.

Die Auswertung der Beispiele für Stahlbeton lassen sich zusammenfassen:

- Untersuchungen des numerischen Modells anhand zug– bzw. schubbeanspruchten Stahlbetonscheiben mit nur einem FE verifizieren den Effekt des *tension–stiffening*. Auch hier zeigen sich gute Übereinstimmungen mit Versuchsergebnissen.
- Im Hinblick auf die Stahlverbundkonstruktionen wurde ein Balken ohne Schubbe- wehrung numerisch simuliert. Aufgrund der fehlenden Dübelwirkung (*dowel action*) beim Stahlbetonmodell wird das Tragverhalten der Versuche zu duktil abgebildet. Au- ßerdem zeigt sich, daß bei dieser biegedominanten Struktur der Effekt des *tension– stiffening* die Ergebnisse nur unwesentlich beeinflusst.
- Schubbeanspruchte Scheiben, wie die von Maier und Thürlimann [78] untersuchten Paneele, erweisen sich als numerisch sensitiv. Die bei der Scheibe S4 numerisch ve- rifizierten Versagensmechanismen stimmen mit denen des Versuchs überein. Die be- rechnete Traglast erreicht etwa 90% des Versuchs.

Diese numerischen Simulationen dokumentieren die Funktionalität des Werkstoffmod- ells für Stahlbeton. Zudem konnten sämtliche Beispielrechnungen innerhalb tolerier- barer Rechenzeiten durchgeführt werden. Diese Vorzüge rechtfertigen das Implemen- tieren eines nichtlinearen Verbundmodells auf gleicher Basis.

Kritisch am Betonmodell zu beurteilen ist das isotrope Schädigungsverhalten innerhalb der Plastizitätstheorie. Die Annahme einer kinematischen Entfestigung würde ein aniso- tropes Schädigungsverhalten induzieren und ist z.B. bei einem Rankine–Fließkriterium realisierbar ([38], [144]). Ein entsprechender Ansatz für das hier vorgestellte Betonmo- dell führt zu einer unabhängigen Translation einer Teilfläche im Hauptspannungsraum; numerische Schwierigkeiten sind damit verbunden. Da der dreidimensionale Charakter dieses Werkstoffmodells gewahrt bleiben soll, wird dieser Nachteil akzeptiert.

Das nichtlineare Verbundverhalten wird über Zwischenelemente in der Verbundfuge ab- gebildet (Kapitel 7). Aufgrund einer Anregung von [101] wurden kontinuierliche und konzentrierte Zwischenelemente hinsichtlich numerischer Stabilität untersucht. Das schnellere Konvergenzverhalten begründet den Vorzug der konzentrierten *interface–* Elemente. Zwei nichtlineare Materialmodelle wurden implementiert: das auf Bruchenergie basierende Modell A und das multilineare Modell B. Analog zum Betonmodell hat Modell A den Vorteil der geringen Anzahl an Parametern. Dementgegen approximiert Modell B experimentell bestimmte Last–Schlupf–Charakteristiken mit großer Genau- igkeit – unter Voraussetzung eines entsprechenden Umfangs an Eingabedaten.

Die numerischen Simulationen von Verbundkonstruktionen (Kapitel 8) brachten folgende Ergebnisse:

- Die Untersuchungen des im EC4 standardisierten *push-out*-Versuches für Kopfbolzendübel bestätigen, daß die Daten experimentell bestimmter Last-Schlupf-Charakteristiken keine weitere Modifikation erfordern, um als Eingabeparameter bei Modell B fungieren zu können. Auch wird bestätigt, daß entsprechende Halterungen an der Versuchseinrichtung Zugkräfte in den Verbundmitteln unterbinden. Offen bleibt jedoch, inwieweit diese Halterungen für Verbundtragwerke zutreffend sind (in den nachfolgenden Beispielen werden z.T. erhebliche Zugbeanspruchungen in den Verbundmitteln festgestellt) und ob der bei der Simulation des Versuchs vorausgesetzte reibungslose Verbund bei Bauwerken realistisch ist.
- Die durchgeführten numerischen Simulationen eines zweifeldrigen, symmetrischen Durchlaufträgers lassen plausible Versagensmechanismen erkennen. Indirekt werden damit die im EC4 angegebenen, plastischen Spannungsverläufe unter positiver wie negativer Momentenbeanspruchung bestätigt. Ursache für die um ca. 8% höhere Traglast gegenüber einer Vergleichsberechnung mit dem Fließgelenkverfahren ist die beim Betonmodell berücksichtigte mittlere Druckfestigkeit f_{cm} . Bei der Berechnung nach dem Fließgelenkverfahren bleiben die Teilsicherheitsbeiwerte nach dem EC4 unberücksichtigt.
Die Referenzlösung von Bode et al. [15] basiert auf einer dreidimensionalen Simulation mit dem Programmpaket ANSYS. Das duktilere Tragverhalten der 2D-Simulation kann auf das nichtlineare, nahezu einaxiale Druckverhalten beim Betonmodell zurückgeführt werden. Die Abweichungen rechtfertigen die Annahme, daß 2D-Simulationen bei Strukturen mit gedrungener Betonplattenbreite aussagefähige Ergebnisse zulassen.
- Am Träger mit Stegöffnung konnten ebenfalls experimentell bestimmte Versagensmechanismen verifiziert werden. Verbundmodell B, mit den experimentell bestimmten Last-Schlupf-Charakteristiken als Eingabedaten, gibt ein etwas zu steifes Strukturverhalten wieder. Die Art der Versuchsdurchführung erfordert demnach eine Modifikation dieser Daten, was sich für Modell B als zu aufwendig erweist. Die geringe Anzahl an Parametern bei Modell A läßt eine Parameteridentifikation zu, um das Strukturverhalten, die Versagensmechanismen und die Traglast verifizieren zu können. In bezug auf Vergleichsberechnungen gelten die Ausführungen des Durchlaufträgers.

Insbesondere das Beispiel des Trägers mit Stegöffnung dokumentiert die Notwendigkeit der Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente. Diese Methode berücksichtigt den Einfluß der Vierendeel-Wirkung im Bereich derartiger Stegöffnungen und die daraus resultierenden „sekundären“ Biegespannungen [13].

9.2 Schlußfolgerungen und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden sämtliche Strukturen zweidimensional modelliert und analysiert. Die Forderung nach Verbundkonstruktionen mit einer gedrungenen Betonplattenbreite, welche die Voraussetzungen zu dieser Art des Modellierens am besten erfüllen, schränkt die Auswahl der zu untersuchenden Strukturen ein. Die hier vorgestellten Beispielen genügen dieser Voraussetzung.

Die dreidimensionalen Werkstoffmodelle dieser Arbeit lassen ein 3D-Modellieren und entsprechende Analysen zu. Erste Schritte bei der Implementierung dieser Werkstoffmodelle in entsprechende Finite Elemente in das Programmsystem CARAT sind durchgeführt und eröffnen ein breites Spektrum für künftige Forschungsarbeiten.

Wie bereits in Kap. 5.3.5 angesprochen, ist nach einer weiteren Implementierungsphase die Notwendigkeit zu prüfen, das Betonmodell hinsichtlich unterschiedlichem Extensions- und Kompressionsverhalten zu erweitern. In diesem Zusammenhang ist zu prüfen, inwieweit diese dann erweiterte, „kompliziertere“ Fließflächengeometrie die Möglichkeit einer exakten Linearisierung als Voraussetzung für stabile Integrationsalgorithmen zuläßt, oder ob die Wahl eines Modells mit kontinuierlicher Fließfläche zweckmäßiger ist.

Wie erwähnt, ist das isotrope Schädigungsverhalten des Betonmodells kritisch zu bewerten. Die Kopplung von Plastizitätsmodell und anisotropem Schädigungsmodell nach Govindjee et al. [43] erhebt zu Recht den Anspruch auf ein wirklichkeitsnäheres Modell. Dabei ist jedoch zu hinterfragen, inwieweit der Forderung nach einfach zu bestimmenden Parametern entsprochen wird.

Zur Identifikation der Parameter des Verbundmodells bedarf es weitergehender Forschungsarbeit. Notwendig wären experimentelle Untersuchungen, um detailliertere Aufschlüsse über den Einfluß der Haftreibung und die Interaktion zwischen Scher- und Normalkräften zu erhalten, um gegebenenfalls die Rechenmodelle des EC4 modifizieren zu können. Sowohl beim Beton als auch beim Modellieren des Verbundverhaltens wäre der Maßstabeffekt zu berücksichtigen.

Der Vorzug dieses Verbundmodells ist dessen Allgemeingültigkeit, was die Simulation des Tragverhaltens unterschiedlichster Verbundarten und -konstruktionen zuläßt. Als mögliches Anwendungsgebiet sind in diesem Zusammenhang die *Retrofitting*-Maßnahmen an bestehenden Stahlbetonkonstruktionen mit geklebten Lamellen aus kohlefaserverstärkten Kunststoffen zu nennen. Im Vergleich zu den in dieser Arbeit beschriebenen Verbundmitteln modellieren die *interface*-Elemente den Verbund dieser dann dünnen Klebeschichten weitaus wirklichkeitstreu. Jedoch erfordert die Simulation derartiger Tragwerke und Maßnahmen viskoplastische Materialmodelle, um eingeprägte Spannungs- und Verformungszustände und somit den Einfluß der Gebrauchslasten, des Schwindens und Kriechens, berücksichtigen zu können.

Literatur

- [1] Andrä, H.–P.: Neuartige Verbundmittel für den Anschluß von Ortbetonplatten an Stahlträger. *Beton- und Stahlbetonbau*, Heft 12 (1985), S. 325–328.
- [2] Arrea, M.; Ingraffea, A.R.: Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. *Report No. 81–13*, Cornell University, Ithaca, New York (1982).
- [3] Bathe, K.–J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1996).
- [4] Bathe, K.–J.; Ramm, E.; Wilson, E.L.: Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9 (1975), pp. 353–386.
- [5] Bazant, Z.P.; Oh, B.H.: Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, RILEM, Vol. 93(16) (1983), pp. 155–177.
- [6] Becker, J.: Beitrag zur Auslegung der Verdübelung von Verbundträgern des Hochbaus unter ruhender und nichtruhender Belastung – *Dissertation*. Fachbereich Architektur, Raum- und Umweltplanung, Bauingenieurwesen der Universität Kaiserslautern (1997).
- [7] Betten, J.: *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1993).
- [8] Bhides, S.B.; Collins, M.P.: Reinforced concrete elements in shear and tension. *Publication 87–02*, University of Toronto, Toronto, Canada (1987).
- [9] Bicanic, N.; Pearce, C.J.: Computational aspects of a softening plasticity model for plain concrete. *Mech. Coh.–Fric. Mat.*, Vol. 1 (1996), pp. 75–94.
- [10] Bode, H.; Schanzenbach, J.: Das Tragverhalten von Verbundträgern bei Berücksichtigung der Dübelnachgiebigkeit. *Stahlbau*, Heft 58/3, Ernst & Sohn (1991), S. 65–74.
- [11] Bode, H.: Beitrag zur Verdübelung von Verbundträgern und Verbunddecken im Hochbau. Universität Kaiserslautern (1991).
- [12] Bode, H.; Hu, X.: Untersuchungen zur Schubtragfähigkeit von Kopfbolzendübeln. DFG–Forschungsbericht – unveröffentlicht (1993).
- [13] Bode, H.; Stengel, J.; Künzel, R.: Stahlverbundträger mit großen Stegausschnitten. *Stahlbau*, Heft 63/1 und 2, Ernst & Sohn (1994).
- [14] Bode, H.; Becker, J.: Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlverbundträgern mit nachgiebiger Verbundfuge. DFG–Forschungsbericht *Bo 733/7–1* (1994).
- [15] Bode, H.; Ramm, W.; Zhou, D.: Physikalisch nichtlineare Berechnungen von Verbundträgern mit Stegöffnung mit dem Programmpaket ANSYS. In: *Fachtagung Verbundkonstruktionen*, Juli 1997, DFG–Forscherguppe Verbundbau, Universität Kaiserslautern (1997), S. V-45 – V-57.

- [16] Borst, R. de: Non-linear analysis of frictional materials – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1986).
- [17] Borst, R. de: The Zero-Normal-Stress Condition in Plane-Stress and Shell Elastoplasticity. *Com. Appl. Num. Meth.*, Vol. 7 (1991), pp. 29–33.
- [18] Borst, R. de; Geers, M.G.D.; Kuhl, E.; Peerlings, R.H.J.: Enhanced damage models for concrete fracture. In: Borst, R. de; Bicanic, N.; Mang, H.A.; Meschke, G. (Eds.): *Proc. of the International Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Badgastein, Austria. Balkema Publishers, Rotterdam (1998), pp. 231–248.
- [19] Braun, M.: Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken – *Dissertation*. Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1995).
- [20] Brendler, S.: Elastoplastische Materialmodelle für zweidimensionale Finite Elemente – *Diplomarbeit*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1996).
- [21] CEB-FIP – Model code 1990. Bulletin d'Information CEB (1990).
- [22] Chen, W.F.: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 2: Plasticity and Modeling*. Elsevier, Amsterdam (1994).
- [23] Chen, A.C.T.; Chen, W.F.: Constitutive relations for concrete. ASCE, EM4 (1975), pp. 465–481.
- [24] Cervenka, V.; Pukl, R.; Eligehausen, R.: Computer simulation of anchoring technique in reinforced concrete beams. In: Bicanic, N. et al. (Eds.): *Computer Aided Analysis and Design Concrete Structures*. Pineridge Press, Swansea, U.K. (1990), pp. 1–19.
- [25] Cornelissen, H.A.W.; Hordijk, D.A.; Reinhardt, H.W.: Experiments and theory for the application of fracture mechanics to normal and lightweight concrete. In: Wittmann, F.H. (Ed.): *Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete*. Elsevier, Amsterdam (1985), pp. 565–575.
- [26] Crisfield, M.A.: Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions. In: Damjanic, F. et al. (Eds.): *Computer Aided Analysis and Design Concrete Structures*. Pineridge Press, Swansea, U.K. (1984), pp. 331–358.
- [27] Crisfield, M.A.; Wills, J.: Analysis of R/C panels using different concrete models. *Jour. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 115, No. 3 (1989), pp. 578–597.
- [28] Dabaon, M.; Tschemmernegg, F.; Hassen, K.; Abdel Lateef, T.: Zur Tragfähigkeit von Verbundträgern bei teilweiser Verdübelung. *Stahlbau*, Heft 62/1, Ernst & Sohn (1993), pp. 3–8.
- [29] Dennis, J.E.; Schnabel, R.B.: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [30] DiMaggio, F.L.; Sandler, I.S.: Material model for granular soils. *Jour. Eng. Mech. Div.*, EM3 (1971), pp. 935–950.

- [31] DIN V ENV 1994 Teil 1, EC4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton; Teil 1.1: Bemessungsregeln für den Hochbau. GEN Brüssel (1992).
- [32] DIN 18800 Teil 1, November 1990: Stahlbauten, Bemessung und Konstruktion (1990).
- [33] Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton*, Heft 419. Beuth-Verlag, Berlin (1991).
- [34] EC2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau. In: *Techn. Baubest.*, 6. Aufl., 193. Lieferung (1993), S. 205–268-222.
- [35] Ehlers, W.: A single-surface yield function for geomaterials. *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 65 (1995), pp. 246–259.
- [36] Eibl, J.; Ivanyi, G.: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton*, Heft 260. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf (1976).
- [37] Eligehausen, R.; Fuchs, W.: Tragverhalten von Kopfbolzen unter Querlast. In: *Fachtagung Verbundkonstruktionen*, Juli 1997, DFG-Forschergruppe Verbundbau, Universität Kaiserslautern (1997), S. III-45 – III-54.
- [38] Feenstra, P.H.: Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1993).
- [39] Feenstra, P.H.; Borst, R. de: A Plasticity Model and Algorithm for Mode-I Cracking in Concrete. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38 (1995), pp. 2509–2529.
- [40] Feenstra, P.H.; Borst, R. de: A Composite Plasticity Model for Concrete. *International Journal for Solids & Structures*, Vol. 33 (1996), pp. 707–730.
- [41] Feenstra, P.H.; Borst, R. de; Rots, J.G.: Numerical study on crack dilatancy. Part I: Models and stability analysis. *Jour. Eng. Mech.*, Vol. 117, No. 4 (1991), pp. 733–753.
- [42] Feenstra, P.H.; Borst, R. de; Rots, J.G.: Numerical study on crack dilatancy. Part II: Applications. *Jour. Eng. Mech.*, Vol. 117, No. 4 (1991), pp. 754–769.
- [43] Govindjee, S.; Kay, G.J.; Simo, J.C.: Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38 (1995), pp. 3611–3633.
- [44] Guo, Z.; Zhou, Y.; Nechvetal, D.: Auswertung von Versuchen zur mehrachsigen Betonfestigkeit, die an der Technischen Universität München durchgeführt wurden. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton*, Heft 447. Beuth-Verlag, Berlin (1995), S. 65–106.
- [45] Hanswille, G.: Untersuchungen und Bemessungsvorschläge zur Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln bei Verbundträgern. *Bauingenieur* 58 (1983), S. 208.

- [46] Hanswille, G.: Verbundtragwerke aus Stahl und Beton. *Stahlbau*, Heft 67/7, Ernst & Sohn (1998), S. 7.
- [47] Hanswille, G.; Jost, K.; Schmitt, C.; Tillmich, R.: Experimentelle Untersuchungen zur Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln mit großen Schaftdurchmessern. *Stahlbau*, Heft 67/7, Ernst & Sohn (1998), S. 555–560.
- [48] Hillerborg, A.: Analysis of one single crack. In: Wittman, F.H. (Ed.): *Fracture mechanics of concrete*. Elsevier, Amsterdam (1983), pp. 223–249.
- [49] Hofstetter, G.; Mang, H.A.: Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. *Vieweg & Sohn*, Braunschweig/Wiesbaden (1995).
- [50] Hofstetter, G.; Simo, J.C.; Taylor, R.L.: A modified Cap Model: Closest Point Solution Algorithms. *Computers & Structures*, Vol. 46 (1993), pp. 203–214.
- [51] Hofstetter, G.; Taylor, R.L.: Non-associative Drucker-Prager plasticity at finite strains. *Com. Appl. Num. Meth.*, Vol. 6 (1990), pp. 583–589.
- [52] Hofstetter, G.; Taylor, R.L.: Treatment of the Corner Region for Drucker-Prager Type Plasticity. *Z. angew. Math. Mech.*, Vol. 71 (1991), pp. T589–T591.
- [53] Huemer, T.: Automatische Vernetzung und adaptive nichtlineare statische Berechnung von Flächentragwerken mittels vierknotiger finiter Elemente – *Dissertation*. Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien (1995).
- [54] Jamet, P.; Millard, A.; Nahas, G.: Triaxial behaviour of a microconcrete – complete stress-strain curves for confining pressures ranging from 0 to 100 Pa. In: Shah, S.P.; Swartz, S.E. (Eds.): *Proc. SEM/RILEM Symposium on Concrete under Multiaxial Conditions*. INSA Toulouse, Toulouse, France (1984), pp. 133–140.
- [55] Karihaloo, B.L.: Failure modes of longitudinally reinforced beams. In: Carpinteri, A. (Ed.): *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*. Elsevier Applied Science, Amsterdam (1992), pp. 523–546.
- [56] Koiter, W.T.: Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Quart. of Appl. Math.*, Vol. 11 (1953), pp. 350–354.
- [57] Kompfner, T.A.: Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen – *Dissertation*. Bericht Nr. 2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1983).
- [58] Kollegger, J.: Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetontragwerken – *Dissertation*. Gesamthochschule Universität Kassel, Kassel (1988).
- [59] Kollegger, J.; Mehlhorn, G.: Biaxiale Zug-Druckversuche an Stahlbetonscheiben. *Forschungsbericht aus dem Fachgebiet Massivbau*, Nr. 6. Gesamthochschule Universität Kassel, Kassel (1988).
- [60] Krajcinovic, D.: Continuum damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions. *Journ. Appl. Mech.*, Vol. 52 (1985), pp. 829–834.
- [61] Kraus, D.; Wurzer, O.: Nonlinear finite element analysis of concrete dowels. *Computers & Structures*, Vol. 64, No. 5/6 (1997), pp. 1271–1279.

- [62] Krenk, S.: Family of invariant stress surfaces. *Jour. Eng. Mech.*, Vol. 122, No. 3 (1996), pp. 201–208.
- [63] Krieg, R.D.; Key, S.W.: Implementation of a time dependent plasticity theory into structural computer programs. In: Stricklin, J.A; Saczalski, K.J. (Eds.): *Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*. AMD-20, ASME, New York (1976), pp. 125–137.
- [64] Krieg, R.D.; Krieg, D.B.: Accuracies of numerical solution methods for the elastic–perfectly plastic model. *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 99 (1977), pp. 510–515.
- [65] Künzel, R.: Experimentelle Untersuchungen an Verbundkonstruktionen mit Schenkeldübeln. *Stahlbau*, Heft 67/6, Ernst & Sohn (1987), S. 182–185.
- [66] Kuhlmann, U.; Bischoff, M.J.: Konstruktion und Bemessung von Verbundtragwerken des Hochbaus – *Fachseminar*. Institut für Konstruktion und Entwurf I, Universität Stuttgart (1997).
- [67] Kuhlmann, U.; Breuninger, U.: Zur Tragfähigkeit von horizontal liegenden Kopfbolzendübeln. *Stahlbau*, Heft 67/7, Ernst & Sohn (1998), S. 547–554.
- [68] Kupfer, H.B.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton*, Heft 229. Ernst & Sohn, Berlin (1973), S. 1–105.
- [69] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H.: Behavior of concrete under biaxial stress. *Jour. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM4 (1973), pp. 853–866.
- [70] Kupfer, H.; Hilsdorf, H.K.; Rüsche, H.: Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI Journal* (1969), pp. 656–666.
- [71] Lackner, R.; Mang, H.A.: Adaptive FEM for the analysis of concrete structures. In: Borst, R. de; Bicanic, N.; Mang, H.A.; Meschke, G. (Eds.): *Proc. of the International Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Badgastein, Austria. Balkema Publishers, Rotterdam (1998), pp. 897–919.
- [72] Lade, P.V.: Elasto–plastic stress–strain theory for cohesionless soil with curved yield surface. *International Journal for Solids & Structures*, Vol. 13 (1977), pp. 1019–1035.
- [73] Lemaitre, J.; Chaboche, J.–L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press (1990).
- [74] Leonhardt, F.; Andrä, H.–P.; Harre, W.: Neues, vorteilhaftes Verbundmittel für Stahlverbundträger mit hoher Druckfestigkeit. *Beton – und Stahlbetonbau*, Heft 12 (1987), S. 325–331.
- [75] Luenberger, D.G.: *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed. Addison–Wesley, Reading (1984).
- [76] Lungershausen, H.: Zur Schubtragfähigkeit von Kopfbolzendübeln – *Dissertation*. Bericht Nr. 88–7, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr–Universität Bochum (1988).

- [77] Maier, G.; Hueckel, T.: Nonassociates and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *Int. Jour. Rock. Mech. Min. Sic. & Geomech. Abstr.*, Vol. 16 (1979), pp. 77–92.
- [78] Maier, J.; Thürlimann, B.: Bruchversuche an Stahlbetonscheiben. Bericht Nr. 8003–1, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich (1985).
- [79] Malvern, L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1969).
- [80] Matzenmiller, A.: Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen – *Dissertation*. Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1988).
- [81] Mazars, J.: Mechanical damage and fracture of concrete structures. In: *Advance in Fracture Research*, Proc. ICF5, Cannes, France (1981), Vol. 4, pp. 1499–1506.
- [82] Mazars, J.; Lemaitre, J.: Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. In: Shah, S.P. (Ed.): *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO Advanced Research Workshop. (1984), pp. 375–388.
- [83] Menrath, H.; Haufe, A.; Ramm, E.: A model for composite steel–concrete structures. In: Borst, R. de; Bicanic, N.; Mang, H.A.; Meschke, G. (Eds.): *Proc. of the International Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Badgastein, Austria. Balkema Publishers, Rotterdam (1998), pp. 33–42.
- [84] Meschke, G.; Mang, H.A.; Lackner, R.: Recent accomplishments and future research directions in computational plasticity of reinforced concrete structures. In: Owen, D.R.J.; Onate, E.; Hinton, E. (Eds.): *Proc. Computational Plasticity, Fundamentals and Applications (Part 1)*. CIMNE, Barcelona, Spain (1997), pp. 119–144.
- [85] Nelissen, L.J.M.: Biaxial testing of normal concrete. *Heron*, Vol. 18, No. 1 (1972).
- [86] Oliver, J.: A consistent characteristic length for smeared crack model. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28 (1989), pp. 461–474.
- [87] Ortiz, M.; Popov, E.: Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28 (1985), pp. 1561–1576.
- [88] Pamin, J.: Gradient–dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1994).
- [89] Pankaj; Bicanic, N.: Detection of Multiple Active Yield Conditions for Mohr–Coulomb Elasto–Plasticity. *Computers & Structures*, Vol. 62 (1997), pp. 51–61.
- [90] Petersen, C.: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*, 2. Auflage. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1982).
- [91] Pontes I.D.S.; Borges, L.A.; Zouain, N.; Lopes, F.R.: An approach to limit analysis with cone–shaped yield surfaces. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40 (1997), pp. 4011–4032.

- [92] Pramono, E.; Willam, K.J.: Implicit integration of composite yield surfaces with corners. *Eng. Comp.*, Vol. 7 (1989), pp. 186–197.
- [93] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1976).
- [94] Reinhardt, H.W.: Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete, *Heron*, Vol. 29, No. 2 (1984).
- [95] Riggs, H.R.; Powell, G.H.: Tangent constitutive matrices for inelastic finite element analysis. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29 (1990), pp. 1103–1203.
- [96] Roehl, D. M.: Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua – *Dissertation*. Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1994).
- [97] Roik, K.; Bürkner, K.E.: Beitrag zur Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln in Verbundträgern mit Stahlprofilblechen. *Bauingenieur* 56 (1981), S. 97–101.
- [98] Roik, K.; Hanswille, G.; Cunze, A.; Lanna, O.: Hintergrundbericht zu EUROCODE 4, Abschnitt 6.3.2: Bolzendübel. *Forschungsvorhaben: Harmonisierung der europäischen Baubestimmungen*, Nr. RS II 1–674102–8630. Bochum (1988).
- [99] Roik, K.; Bergmann, R.; Haensel, J.; Hanswille, G.: Verbundkonstruktionen – Bemessung auf der Grundlage des Eurocode 4, Teil 1. In: *Betonkalender 1993*, Teil I. Ernst & Sohn (1993), S. 551–680.
- [100] Rots, J.G.; Nauta, P.; Kusters, G.M.A.; Blaauwendraad, J.: Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, Vol. 3, No. 1 (1985).
- [101] Rots, J.G.: Computational modeling of concrete fracture – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1988).
- [102] Rots, J.G.: Computational bond models: Three levels of accuracy. IABSE Colloquium Stuttgart, Structural Concrete (1991), pp. 327–336.
- [103] Schanzenbach, J.: Zum Einfluß von Dübelnachschiebigkeit und Unterverdübelung auf das Tragverhalten von Verbunddurchlaufplatten im Hoch- und Industriebau – *Dissertation*. Fachbereich Architektur, Raum- und Umweltplanung, Bauingenieurwesen der Universität Kaiserslautern (1989).
- [104] Schellekens, J.C.J.: Interface Elements in Finite Element Analysis. *TU–Delft*, Report No. 25-2-90-5-17 (1990).
- [105] Schlangen, E.: Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1993).
- [106] Scholz, U.; Nechvetal, D.; Aschl, H.; Linse, D.; Stöckl, S.; Grasser, E.; Kupfer, H.: Versuche zum Tragverhalten von Beton unter dreiachsiger Kurzzeitbeanspruchung. In: *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton*, Heft 447. Beuth-Verlag, Berlin (1995), S. 7–63.
- [107] Schreyer, H.L.; Kulak, R.L.; Kramer, J.M.: Accurate numerical solutions for elastic–plastic models. *Journal Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 101 (1979), pp. 226–234.

- [108] Schreyer, H.L.; Nielsen, M.K.: Analytical and numerical tests for loss of material stability. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39 (1996), pp. 1721–1736.
- [109] Simo, J.C.; Hughes, T.J.R.: Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 7, Springer Verlag, New York, Inc. (1998).
- [110] Simo, J.C.; Ju, J.–W.; Pister, K.S.; Taylor, R.L.: Assessment of cap model: consistent return algorithms and rate–dependent extension. *Jour. Eng. Mech. Dev.*, Vol. 114, No. 2 (1988), pp. 191–218.
- [111] Simo, J.C.; Kennedy, J.G., Govindjee, S.: Non–smooth multisurface plasticity and viscoplasticity; Loading/unloading conditions and numerical algorithms. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26 (1988), pp. 2161–2185.
- [112] Simo, J.C.; Kennedy, J.G., Taylor, R.L.: Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74 (1989), pp. 177–206.
- [113] Simo, J.C.; Oliver, J.; Armero, F.: An analysis of strong discontinuities induced by strain–softening in rate–independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, Vol. 12 (1993), pp. 277–296.
- [114] Simo, J.C.; Taylor, R.L.: Consistent tangent operator for rate–independent elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 48 (1985), pp. 101–118.
- [115] Simo, J.C.; Taylor, R.L.: A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22 (1986), pp. 649–670.
- [116] Simons, J.W.; Bergan, P.G.: A finite element formulation for three–dimensional contact problems with slip and friction. *Comp. Mech.*, Vol. 1/2 (1986), pp. 153–164.
- [117] Sluys, L.J.: Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids – *Dissertation*. Delft University of Technology Press (1992).
- [118] Stempniewski, L.; Eibl, J.: Finite Elemente im Stahlbeton. In: *Betonkalender 1993*, Teil I. Ernst & Sohn (1993), S. 249–312.
- [119] Suanno, R.L.M.: Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung – *Dissertation*. Bericht Nr. 18, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1995).
- [120] Tschemmerneegg, F.: Zur Bemessung von Schenkeldübeln, eines neuen Dübels für Verbundkonstruktionen. *Bauingenieur* 60 (1985), S. 351–360.
- [121] TRW Nelson: Zulassung für Kopfbolzendübel. Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung, Nr. Z–21.5–82. Deutsches Institut für Bautechnik, Berlin (1995).
- [122] van Mier, J.G.M.: Strain softening of concrete under multiaxial loading conditions – *Dissertation*. Eindhoven University of Technology (1984).
- [123] van Mier, J.G.M.; Reinhardt, H.W.; van der Vlugt, B.W.: Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton. *Bauingenieur* 62 (1987), S. 353–361.

- [124] Vecchio, F.J.; Collins, M.P.: The response of reinforced concrete to inplane shear and normal stresses. *Publication 82-03*, University of Toronto, Toronto, Canada (1982).
- [125] Vonk, R.A.: Softening of concrete loaded in compression – *Dissertation*. Eindhoven University of Technology (1992).
- [126] Walraven, J.L.; Reinhardt, H.W.: Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear locking, *Heron*, Vol. 26, No. 1a (1981), pp. 3–68.
- [127] Weihe, S.: Modelle der fiktiven Rißbildung zur Berechnung der Initiierung und Ausbreitung von Rissen – *Dissertation*. Bericht Nr. 9–95, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart (1995).
- [128] Willam, K.J.; Bicanic, N.; Pramono, E.; Sture, S.: Composite fracture model for strain softening of concrete. In: Wittmann, F.H. (Ed.): *Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete*. Elsevier, Amsterdam (1985), pp. 149–162.
- [129] Willam, K.J.; Pramono, E.; Sture, S.: Fundamental aspects of strain–softening descriptions. In: Shah, S.P.; Swartz, S.E. (Eds.): *Proc. SEM/RILEM Int. Conf. Fracture of Concrete and Rocks*. Springer Verlag, New York (1986), pp. 142–157.
- [130] Willam, K.J.; Warnke, E.P.: Constitutive Model for the triaxial behavior of concrete. In: *Proc. Int. Assoc. for Bridge and Structural Engineering; Seminar on Concrete Struct. Subjected to Triaxial Stress*. Vol. 19 (1975), pp. 1–30.
- [131] Wilkins, M.L.: Calculation of elastic–plastic flow. In: Alder, B.; Fernback, S.; Rotenberg, M. (Eds.): *Methods of Computational Physics*. Academic Press, New York, Vol. 3 (1964), pp. 211–263.
- [132] Wittmann, F.H.: Structure of concrete with respect to crack formation. In: Wittmann, F.H. (Ed.): *Fracture mechanics of concrete*. Elsevier, Amsterdam (1983), pp. 43–74.
- [133] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, Volume 1. McGraw–Hill, New York (1989).
- [134] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, Volume 2. McGraw–Hill, New York (1991).
- [135] Zurmühl, R.; Falk, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*, 5. Auflage. Springer Verlag, Heidelberg, New York (1984).

A Anhang: Elasto–plastische Materialmodelle

A 1 Algorithmischer Modul

In diesem Teil des Anhangs finden sich die bei Berechnung des algorithmischen Moduls erforderlichen Matrizen.

A 1.1 Projektionsmatrizen

Die vierstufigen Projektionstensoren \mathbf{P}^{dev} und $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ lauten in ihrer Matrixdarstellung

$$\mathbf{P}^{\text{dev}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A 1.2 Diagonalmatrizen und orthonormale Transformationsmatrix

Hier sind die bei der Matrizeninversion von \mathbf{A}^{-1} zu invertierenden Komponenten (vgl. Kap. 4.5) zusammengestellt. Nach [80],[119] und für ebene Finite Elemente sind dies:

Die Diagonalmatrizen $(\Lambda^{\text{C}})^{-1}$, Λ^{dev} und $\Lambda^{1 \otimes 1}$

$$\begin{aligned} (\Lambda^{\text{C}})^{-\text{T}} &= \frac{1+\nu}{E} \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad 2 \right] \\ (\Lambda^{\text{dev}})^{\text{T}} &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \\ (\Lambda^{1 \otimes 1})^{\text{T}} &= \text{diag} [0 \quad 0 \quad 3 \quad 0] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und die orthonormale Transformationsmatrix \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A 2 Rückprojektion und Berechnung der konsistenten elasto-plastischen Materialtangente

A 2.1 Inverted cone

Im Bereich der Kegelspitze entsprechen die Fließbedingungen von Gl.(A.4) der von Gl.(4.75). Die Annahme der internen Variablen ($\kappa_1 = \kappa$, $\kappa_2 = 0$) wurde bereits in Kap. 4.6.2 begründet. Über die Rate der inelastischen Arbeit erhält man dann folgende Beziehungen zum Konsistenzparameter der „Haupt“-Drucker-Prager-Teilfläche:

$$\begin{aligned} f_{1,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| + \alpha_1 I_{1,n+1}^* - \frac{1}{3\alpha_1} \\ &\quad - 2G(\Delta\lambda_{1,n+1} + \Delta\lambda_{2,n+1}) - 9K\alpha_1 (\alpha_1\Delta\lambda_{1,n+1} + \alpha_2\Delta\lambda_{2,n+1}) \\ &\quad - (1 + 3\alpha_1^2) H_k(\kappa_{n+1}) \Delta\lambda_{1,n+1} - k_1(\kappa_{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} f_{2,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| + \alpha_2 I_{1,n+1}^* \\ &\quad - 2G(\Delta\lambda_{1,n+1} + \Delta\lambda_{2,n+1}) - 9K\alpha_2 (\alpha_1\Delta\lambda_{1,n+1} + \alpha_2\Delta\lambda_{2,n+1}) \\ &\quad - (1 + 3\alpha_2\alpha_1) H_k(\kappa_{n+1}) \Delta\lambda_{1,n+1} - k_2(\kappa_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

Mit Gleichungen (4.98)₃ und (4.99) erhält man für $f_{2,n+1}$

$$\begin{aligned} f_{2,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| - \frac{1}{3\alpha_1} I_{1,n+1}^* \\ &\quad - 2G(\Delta\lambda_{1,n+1} + \Delta\lambda_{2,n+1}) - 3K \left[-\Delta\lambda_{1,n+1} + \frac{1}{3\alpha_1^2} \Delta\lambda_{2,n+1} \right] \\ &\quad - k_2(\kappa_{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Die Komponenten der Jacobi-Matrix zum Bestimmen der Konsistenzparameter und der internen Variablen sind

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda_1} = - \left[2G + 9K \alpha_1^2 + (1 + 3\alpha_1^2) \left(\frac{dH_k(\Delta\lambda_1)}{d\Delta\lambda_1} \Delta\lambda_1 + H_k \right) + \frac{dk_1(\Delta\lambda_1)}{d\Delta\lambda_1} \right] \\ J_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda_2} = - [2G - 3K] \\ J_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\lambda_1} = - \left[2G - 3K + \frac{dk_2(\Delta\lambda_1)}{d\Delta\lambda_1} \right] \\ J_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\lambda_2} = - \left[2G + \frac{K}{\alpha_1^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Für die Berechnung der konsistenten elasto-plastischen Materialtangente gilt Tafel 4.6. Vorab ist jedoch die Matrix der plastischen Moduln zu bestimmen. Da Gl.(4.28) sinngemäß gilt, erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(4.98) die Ableitungen der Fließflächen nach den internen Parametern

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa} f_{1,n+1} &= - \begin{bmatrix} (1 + 3\alpha_1^2) H_k(\kappa) + \partial_{\kappa} k_1(\kappa) \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} \\ \partial_{\kappa} f_{2,n+1} &= - \begin{bmatrix} \partial_{\kappa} k_2(\kappa) \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\alpha_1^2} \partial_{\kappa} k_1(\kappa) \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die Kopplung der internen Parameter mit den Konsistenzparametern erfolgt unter den in Kap. 4.6.1 angegebenen Voraussetzungen mit der Kopplungsmatrix $\bar{\mathbf{Z}} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$ entsprechend Gl.(4.78)₃

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \bar{\mathbf{Z}} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \end{bmatrix}_{n+1}$$

$$\text{mit } \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dadurch erhält man die Matrix der plastischen Moduln \mathbf{E} (siehe Tafel 4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1} &= - \begin{bmatrix} c_1 c_1 \partial_{\kappa} f_1^T \mathbf{z}_1 + (1 - c_1) & c_1 c_2 \partial_{\kappa} f_1^T \mathbf{z}_2 \\ c_2 c_1 \partial_{\kappa} f_2^T \mathbf{z}_1 & c_2 c_2 \partial_{\kappa} f_2^T \mathbf{z}_2 + (1 - c_2) \end{bmatrix}_{n+1} \\ &= - \begin{bmatrix} c_1 c_1 \left[(1 + 3\alpha_1^2) H_k(\kappa) + \partial_{\kappa} k_1 \right] + (1 - c_1) & 0 \\ c_2 c_1 \left[\left(-\frac{1}{3\alpha_1^2} \right) \partial_{\kappa} k_1 \right] & 1 - c_2 \end{bmatrix}_{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

die in einen kinematischen

$$\mathbf{E}_{k,n+1} = - \begin{bmatrix} c_1 c_1 \left[(1 + 3\alpha_1^2) H_k(\kappa) \right] + (1 - c_1) & 0 \\ 0 & 1 - c_2 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (\text{A.9})$$

und einen isotropen Ver-/Entfestigungsanteil aufgespalten werden kann.

$$\mathbf{E}_{i,n+1} = - \begin{bmatrix} c_1 c_1 \partial_{\kappa} k_1 + (1 - c_1) & 0 \\ -c_2 c_1 \frac{1}{3\alpha_1^2} \partial_{\kappa} k_1 & 1 - c_2 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (\text{A.10})$$

Infolge kinematischer Ver-/Entfestigung liegt ein assoziiertes Materialverhalten vor. Die Matrix der plastischen Moduln wie auch die der konsistenten Materialtangente sind

symmetrisch. Im Falle einer isotropen Ver-/Entfestigung ist die Matrix der plastischen Moduln unsymmetrisch und damit das Ver-/Entfestigungsverhalten nichtassoziiert; die konsistente elasto-plastische Materialtangente wird unsymmetrisch.

A.2.2 Betonmodell: Bereich der drei Drucker-Prager-Teilflächen

Für die drei Drucker-Prager-Teilflächen des Betonmodells wird die Vorgehensweise von Kap. A.2.1 angewandt, die Anzahl von zwei auf drei Teilflächen erweitert. Gemäß den Vorgaben beim Betonmodell stellt hier die Teilfläche f_3 den *inverted cone* zur Teilfläche f_1 dar. Im Gegensatz zu Kap. A.2.1 wird hier lediglich ein isotropes Ver-/Entfestigungsverhalten angenommen. In bezug auf den Spannungszustand des elastischen Prädiktors lauten die drei Fließbedingungen

$$\begin{aligned}
 f_{j,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| + \alpha_j I_{1,n+1}^* \\
 &\quad - 2G(\Delta\lambda_{1,n+1} + \Delta\lambda_{2,n+1} + \Delta\lambda_{3,n+1}) \\
 &\quad - 9K\alpha_j (\alpha_1\Delta\lambda_{1,n+1} + \alpha_2\Delta\lambda_{2,n+1} + \alpha_3\Delta\lambda_{3,n+1}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{k}_j(\kappa_{j,n+1}) = 0
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

für $j = 1, 2, 3$

mit: $\alpha_j, \beta_1, \bar{k}_j(\kappa_{j,n+1})$ siehe Gl.(5.22).

Mit Gleichungen (5.22) erhält man für $f_{3,n+1}$

$$\begin{aligned}
 f_{3,n+1} &= |\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\text{dev}}| - \frac{1}{3\alpha_1} I_{1,n+1}^* \\
 &\quad - 2G(\Delta\lambda_{1,n+1} + \Delta\lambda_{2,n+1} + \Delta\lambda_{3,n+1}) \\
 &\quad - 3K \left[-\Delta\lambda_{1,n+1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Delta\lambda_{2,n+1} + \frac{1}{3\alpha_1^2}\Delta\lambda_{3,n+1} \right] - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta_1}{3\alpha_1^2} \bar{\sigma}(\kappa_{t,n+1}) = 0.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Die Komponenten der Jacobi-Matrix zum Bestimmen der **Konsistenzparameter** und der **internen Variablen** sind

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda_1} = - \left[2G + 9K \alpha_1^2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\kappa_1} \bar{k}_1 \right] \\
 J_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda_2} = - [2G + 9K \alpha_1 \alpha_2] \\
 J_{13} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda_3} = - [2G - 3K]
 \end{aligned} \tag{A.13a}$$

$$\begin{aligned}
 J_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_1} = - [2G + 9K \alpha_1 \alpha_2] \\
 J_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_2} = - \left[2G + 9K \alpha_2^2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\kappa_c} \bar{K}_2 \right] \\
 J_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_3} = - \left[2G - 3K \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]
 \end{aligned} \tag{A.13)b$$

$$\begin{aligned}
 J_{31} &= \frac{\partial f_3}{\partial \Delta \lambda_1} = - \left[2G - 3K - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\alpha_1^2} \partial_{\kappa_1} \bar{K}_1 \right] \\
 J_{32} &= \frac{\partial f_3}{\partial \Delta \lambda_2} = - \left[2G - 3K \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] \\
 J_{33} &= \frac{\partial f_3}{\partial \Delta \lambda_3} = - \left[2G + \frac{K}{\alpha_1^2} \right]
 \end{aligned} \tag{A.13)c$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit : } \partial_{\kappa_1} \bar{K}_1 &= \beta_1 \frac{d\bar{\sigma}(\kappa_1(\Delta \lambda_1))}{d\Delta \lambda_1} \\
 \partial_{\kappa_c} \bar{K}_2 &= \beta_2 \frac{d\bar{\sigma}(\kappa_c(\Delta \lambda_2))}{d\Delta \lambda_2}
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der konsistenten **elasto-plastischen Materialtangenten** gilt auch hier Tafel 4.6. Wie zuvor, ist vorab die Matrix der plastischen Moduln zu bestimmen. Da Gl.(4.28) sinngemäß gilt, erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(4.98) die Ableitungen der Fließflächen nach den internen Parametern.

$$\begin{aligned}
 \partial_{\kappa} f_{1,n+1} &= - \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \partial_{\kappa_1} \bar{K}_1(\kappa_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} \\
 \partial_{\kappa} f_{2,n+1} &= - \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_{\kappa_c} \bar{K}_2(\kappa_c) \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} \\
 \partial_{\kappa} f_{3,n+1} &= - \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\alpha_1^2} \partial_{\kappa_1} \bar{K}_1(\kappa_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Die Kopplung der internen Parameter mit den Konsistenzparametern erfolgt analog zu Kap. A 2.1 über die Kopplungsmatrix $\bar{\mathbf{Z}} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3]$ entsprechend Gl.(4.78)₃.

$$\Delta \kappa_{n+1} = \begin{bmatrix} \Delta \kappa_t \\ \Delta \kappa_c \\ 0 \end{bmatrix}_{n+1} = \bar{\mathbf{Z}} \Delta \lambda_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \\ \Delta \lambda_3 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{mit } \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bei drei zu koppelnden Teilflächen lauten die Diagonalmatrizen \mathbf{c} und $\bar{\mathbf{c}}$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - c_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Die Matrix der zur Fließfläche assoziierten Ver-/Entfestigungsgradienten erhält man nach Gl.(4.90)₂

$$\mathbf{V}_{\kappa, n+1} = [c_1 \partial_{\kappa} f_1, \quad c_2 \partial_{\kappa} f_2, \quad c_3 \partial_{\kappa} f_3]_{n+1}.$$

Nach Gl.(4.91) ist die Matrix der plastischen Moduln \mathbf{E}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1} &= - [\mathbf{V}_{\kappa}^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}}]_{n+1} \\ &= - \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} c_1 c_1 \partial_{\kappa_i} \bar{\kappa}_1 + (1 - c_1) & 0 & 0 \\ 0 & c_2 c_2 \partial_{\kappa_c} \bar{\kappa}_2 + (1 - c_2) & 0 \\ c_3 c_1 \left(-\frac{1}{3\alpha^2} \right) \partial_{\kappa_i} \bar{\kappa}_1 & 0 & (1 - c_3) \end{bmatrix}_{n+1}, \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

die als Folge der isotropen Ver-/Entfestigung unsymmetrisch ist. Das weitere Vorgehen zum Bestimmen der elasto-plastischen Materialtangente entspricht dem von Tafel 4.6.

B Anhang: Verbundmittel

B 1 Last–Schlupf–Charakteristiken von Kopfbolzendübeln

Die Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln werden i.A. anhand von *push–out*–Versuchen experimentell ermittelt. In Bild B.1 sind Last–Schlupf–Charakteristiken für **Kopfbolzendübel $\varnothing 22$ [mm] in Vollbetonplatten** dargestellt. Kennzeichnend für das Verformungsverhalten sind die große Steifigkeit bei niedrigen Beanspruchungen und eine hohe Duktilität im Bereich der Traglast [99].

Als maßgebende Einflußparameter hinsichtlich des Trag– und Verformungsverhaltens sind zu nennen ([99], [66] u.a.):

- Betongüte und elastisches Verhalten des Betons;
- Quer– und Längsbewehrung in der Betonplatte;
- Dübelhöhe und –durchmesser;
- Zugfestigkeit des Bolzenmaterials;
- Abmessungen des Schweißwulstes am Bolzenfuß;
- Lage der Dübel beim Betonieren.

Den Unterschied zwischen den in Bild B.1 dargestellten Last–Schlupf–Charakteristiken für diesen Dübeltyp (gleiche Geometrie der Dübel, nahezu identische Betonprüfkörper) führen Bode et al. [14] auf Versuchsdurchführungen mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten zurück; höhere Belastungsgeschwindigkeiten führen bei der Tragfähigkeit zu höheren Werten. Bei beiden Charakteristiken sind die mittleren Anfangssteifigkeiten nahezu identisch.

Entsprechend Gl.(2.1) bis (2.3) berechnet sich die Traglast dieses Dübeltyps bei einer Betonplatte mit der Betongüte von mindestens C35/45 zu $P_u = 169$ [kN]. Dieser Wert

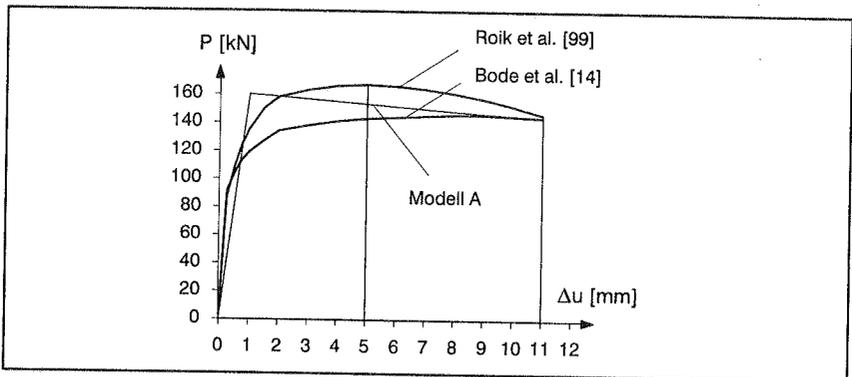


Bild B.1 *Push–out*–Versuche $\varnothing 22/100$ in Vollbetonplatten

entspricht in etwa dem der Traglast der Last–Schlupf–Charakteristik von Roik et al. [99] (siehe Tafel B.1, Spalte 2: $P_U = 167$ [kN], $\Delta u_U = 5$ [mm]).

Für die Last–Schlupf–Charakteristik nach [14] gibt Becker [6] eine mittlere Traglast von $P_U = 146$ [kN] an, die mit einem Rechenmodell von Bode und Hu [12] unter Berücksichtigung von Gl.(2.1) verifiziert werden kann.

Diese unterschiedlichen Traglasten lassen den Rückschluß zu, daß es bei den Versuchsdurchführungen einer Vereinheitlichung entsprechend [98] bedarf. Beide Charakteristiken werden hier als obere und untere Grenzkurven angesehen. Zur Modellierung des nichtlinearen Verbundverhaltens mit dem multilinearen Modell B (vgl. Kap. 7.4) sind in Tafel B.1, Spalten 1, 2 und 6 Last–Schlupf–Werte beider Charakteristiken tabelliert. In den Spalten 3, 4, 5 und 7 werden für das „verschmierte“ Federmodell die entsprechenden Kenngrößen über den Dübelabstand e verteilt. Die dort angegebenen Werte für e entsprechen den Abständen der Kopfbolzendübel der in Kap. 8 untersuchten Strukturen.

(1)	(2)	c = $P_{[99]} / e$			(6)	(7)
Δu [mm]	P nach [99] [kN]	P / 600 [N/mm]	P / 150 [N/mm]	2P / 100 [N/mm]	P nach [14] [kN]	c = $P_{[14]} / e$ 2P / 100 [N/mm]
0,25	87	145	580	1740	91	1820
0,5	108	180	720	2160	104	2080
0,75	124	207	827	2480	113	2260
1,0	135	225	900	2700	119	2380
1,5	150	250	1000	3000	127	2540
2,0	158	263	1053	3160	134	2680
3,0	163	272	1087	3260	138	2760
4,0	166	277	1107	3320	141	2820
5,0	167	278	1113	3340	143	2860
6,0	166	277	1107	3320	144	2880
7,0	164	273	1093	3280	145	2900
8,0	161	268	1073	3220	146	2920
9,0	157	262	1047	3140	146	2920
10,0	152	253	1013	3040	145	2900
11,0	146	243	973	2920	144	2880

Tafel B.1 Last–Schlupf–Charakteristik von Kopfbolzendübeln $\varnothing 22/100$ in Vollbetonplatten nach Roik et al. [99] und Bode et al. [14]

Die in Bild B.1 dargestellte Kurve von Modell A soll beide Charakteristiken im Mittel approximieren. Wesentlicher Unterschied zu den Werten von Modell B ist, daß die mittlere Anfangssteifigkeit mit $K_{rs} = 160$ [kN/mm] etwa halb so groß wie die der Versuche ist.

Weitere Informationen zu den Parametern für Modell A finden sich in Kap. 8.3 bei dem untersuchten Träger mit Stegöffnung.

B 2 Tragfähigkeit von Verbundmitteln

In diesem Teil des Anhangs sind Verbundmittel und deren Tragfähigkeit aufgelistet, die gemäß EC4 [31] alternativ zu Kopfbolzendübeln verwendet werden können.

B 2.1 Blockdübel in Vollbetonplatten

Die Grenzscherkraft eines Blockdübels sollte wie folgt berechnet werden (nach EC4, Abschnitt 6.3.4):

$$P_{Rd} = \eta A_{f1} f_{ck} \frac{1}{\gamma_c} \quad (B1.1)$$

Hierbei ist:

A_{f1} ... Fläche an der Vorderseite nach Bild B.2

$\eta = \sqrt{A_{f1} / A_{f2}} \leq 2,50$ (Normalbeton) bzw. 2,00 (Leichtbeton)

A_{f2} ... Fläche der Vorderseite vergrößert mit der Neigung 1:5 bis zur Rückseite des nächsten Dübels

$\gamma_c = 1,50$ (grundlegend) oder 1,30 (außergewöhnlich, z.B. Erdbeben)

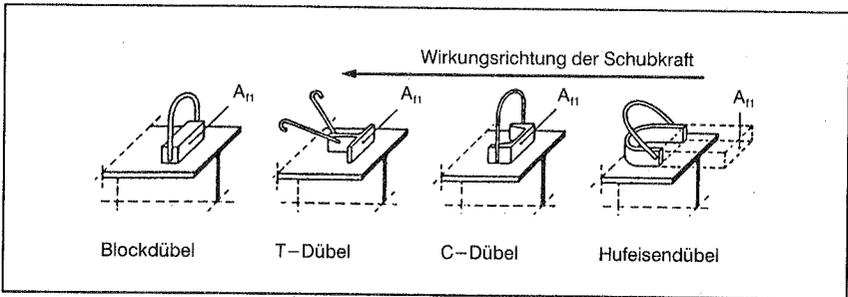


Bild B.2 Blockdübel [31]

B 2.2 Haken- und Schlaufenanker in Vollbetonplatten

Die Grenzscherkraft für die einzelnen Ankerstäbe sollte wie folgt berechnet werden (nach EC4, Abschnitt 6.3.5):

$$P_{Rd} = \frac{A_s f_{yd}}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}} \cos \beta \quad (B1.2)$$

B 2.4 Reibungsverbund

Die Längsschubkräfte zwischen dem Stahlträger und dem Betongurt aus Fertigteilen können mittels hochfester, vorgespannter Schrauben durch Reibung übertragen werden. Die Grenzscherkraft infolge Reibung ergibt sich zu (nach EC4, Abschnitt 6.5):

$$P_{Rd} = \mu F_{pr,Cd} \frac{1}{\gamma_v} \quad (B1.4)$$

Hierbei ist:

$F_{pr,Cd}$... Grenzvorspannung der Schraube nach EC3, Abschnitt 6.5.8.2

μ ... Reibungszahl für Stahlträger ohne Korrosionsschutz:
0,5 bei Flanschdicke von mind. 10 [mm]
0,55 bei Flanschdicke von mind. 15 [mm]
Reibungszahl für Stahlträger mit Korrosionsschutz:
0,25 ÷ 0,60 (vgl. Roik [99], Tab. 4.6)

γ_v = 1,25 (Teilsicherheitsbeiwert im Grenzzustand der Tragfähigkeit)

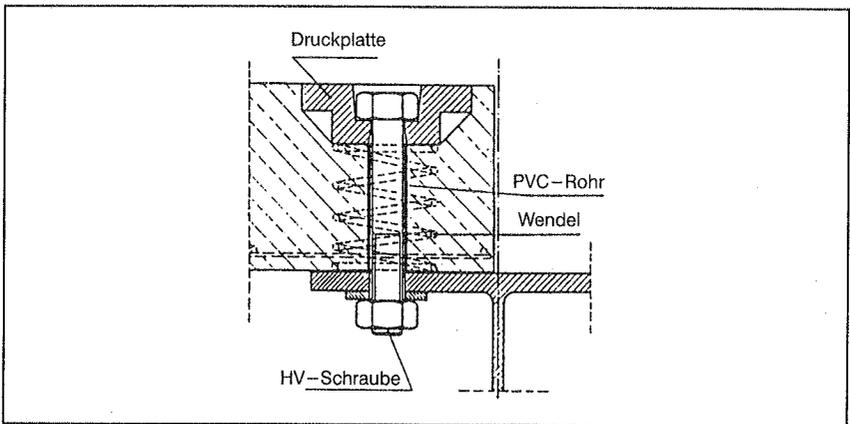


Bild B.5 Reibungsverbund [31]

Lebenslauf

Name: Horst Franz Menrath

Geburtsdatum: 23. November 1961 in Schrozberg

Eltern: Michael und Anna Menrath, geb. Knott

Familienstand: seit 31.03.1994 verheiratet mit Annette Ziegler

1968 – 1972 Besuch der Grundschule in Schrozberg

1972 – 1981 Besuch des Reichsstadt Gymnasiums
in Rothenburg ob der Tauber

Mai 1981 Abitur

1981 – 1985 Studium des Bauingenieurwesens
an der Fachhochschule in Würzburg

Juli 1985 Abschluß Diplom–Ingenieur (FH)

1985 – 1990 Angestellter im Ingenieurbüro Bernhard
(Ingenieurbüro für Baustatik), Stuttgart

1990 – 1993 Studium des Bauingenieurwesens
an der Universität Stuttgart,
freier Mitarbeiter im Ingenieurbüro Bernhard

April 1993 Abschluß Diplom–Ingenieur

Juli 1993 Fischer–Studienpreis 1993

Juli 1994 Emil Mörsch–Studienpreis 1994 für
besondere Studienleistungen

1993 – 1998 angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1** **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2** **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Quer-
schnitt.
- 74-3** **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4** **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung
bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1** **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wiss-
mann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2** **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plat-
tentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3** **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger
unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1** **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2** **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1** **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1** **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung
von Stahlbetonplatten.
- 79-1** **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79-2 H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.

- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammeler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.

- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhastragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.